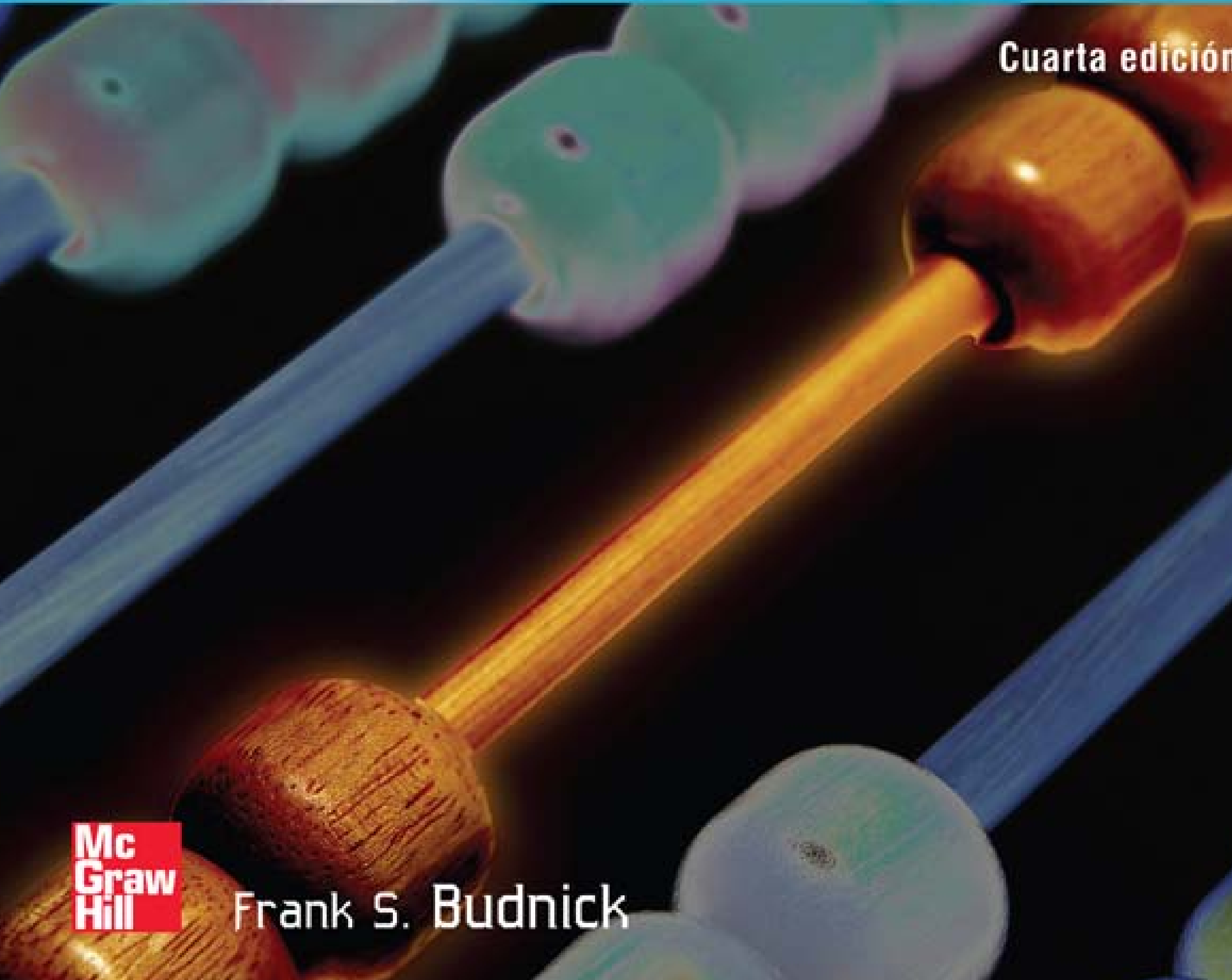
Matemáticas aplicadas

para administración, economía y ciencias sociales



Cuarta edición

Mc Graw Hill

Frank S. Budnick

Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales

MATEMÁTICAS APLICADAS PARA ADMINISTRACIÓN, ECONOMÍA Y CIENCIAS SOCIALES

Cuarta edición

Frank S. Budnick
University of Rhode Island

Traducción
José Julián Díaz Díaz
Efrén Alatorre Miguel
Traductores profesionales

Revisión técnica
Raúl Gómez Castillo
Profesor de Física y Matemáticas
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, CEM

Mc Graw Hill

MÉXICO • AUCKLAND • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA
LISBOA • LONDRES • MADRID • MILÁN • MONTREAL• NUEVA DELHI • NUEVA YORK
SAN FRANCISCO • SAN JUAN • SAN LUIS • SANTIAGO
SÃO PAULO • SIDNEY • SINGAPUR • TORONTO

Director Higher Education: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Director editorial: Ricardo A. del Bosque Alayón
Editor sponsor: Pablo Eduardo Roig Vázquez
Editora de desarrollo: Diana Karen Montaño González
Supervisor de producción: Zeferino García García

Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales
Cuarta edición

McGraw-Hill
Interamericana

McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.
A Subsidiary of ***The McGraw-Hill*** *Companies, Inc.*
Edificio Punta Santa Fe
Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A
Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe,
Delegación Álvaro Obregón
C.P. 01376, México, D. F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736.

ISBN 970-10-5698-1
(ISBN 970-10-4679-X edición anterior)

Traducido de la cuarta edición de: APPLIED MATHEMATICS FOR BUSINESS, ECONOMICS, AND THE SOCIAL SCIENCES

0-07-008902-7

1234567890 09875432106

Impreso en México *Printed in Mexico*

ACERCA DEL AUTOR

FRANK S. BUDNICK se graduó como Licenciado en Ciencias de Ingeniería Industrial de Rutgers, New Jersey State University. Cursó la maestría y el doctorado en Maryland University. Actualmente trabaja como profesor de tiempo completo en Rhode Island University, donde ha sido catedrático desde 1971. Ha trabajado en la industria privada así como con el gobierno federal. Ha dirigido investigaciones patrocinadas por el erario federal en el área de la justicia criminal y en la transferencia de tecnología entre universidades y la industria. Es coautor del texto *Principles of Operations Research for Management*, segunda edición, publicado por Richard D. Irwin, Inc. También es autor de *Finite Mathematics with Applications*, un libro de texto de McGraw-Hill.

A mi esposa, Deb,
y mis hijos, Chris, Scott y Kerry.
¡LOS AMO!

CAPÍTULO 4 FUNCIONES MATEMÁTICAS 140

MATEMÁTICAS FINITAS

EL CÁLCULO

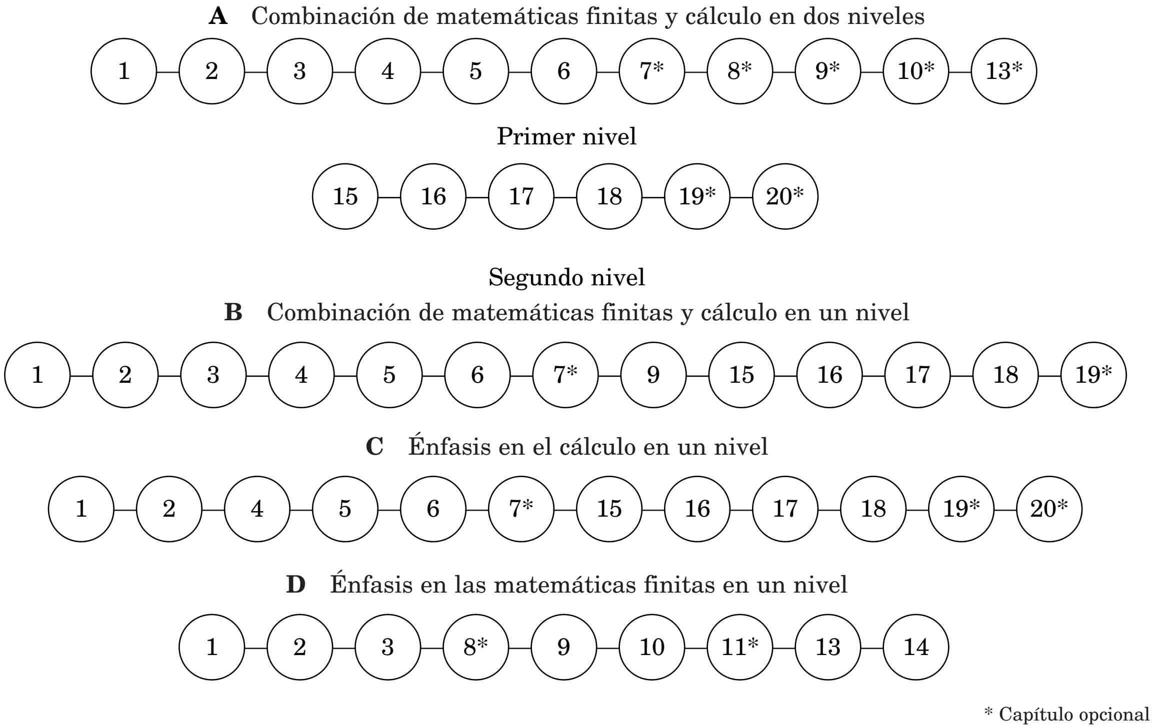
CAPÍTULO 15 DIFERENCIACIÓN 698

CAPÍTULO 16 OPTIMIZACIÓN: METODOLOGÍA 768

RESPUESTAS SELECTAS

CONTENIDO

ECUACIONES Y FUNCIONES



Algunas estructuras sugeridas para el curso

Características específicas

- Una mayor orientación hacia el uso de la COMPUTADORA COMO UNA HERRAMIENTA para el análisis matemático.
- A lo largo del libro se utilizan REGRESIONES DE ÁLGEBRA para ayudar al estudiante a recordar las reglas y los conceptos esenciales. La regresión consiste generalmente en volver a presentar una regla o un concepto haciendo referencia a secciones de revisión de álgebra apropiadas en el texto.
- NOTAS PARA EL ESTUDIANTE que ofrecen discernimientos acerca de un concepto matemático o una aplicación.
- “PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR” que permiten a los estudiantes hacer una pausa por un momento para reconsiderar un concepto o ejemplo desde una perspectiva diferente. Su propósito es reforzar y ampliar la comprensión del alumno al inducir al pensamiento crítico.

Características pedagógicas

- Los PROBLEMAS CON BASE EN LA COMPUTADORA, identificados en el conjunto de ejercicio con un ícono brindan al alumno y al profesor una oportunidad para resolver problemas de mayor escala.
- Los MINICASOS permiten que los estudiantes analicen e interpreten una aplicación más compleja y realista. Pueden ser la base para estimular el análisis en clase.

❑ Una gran variedad de otros elementos de ayuda para el aprendizaje, incluyendo *objetivos del capítulo, numerosos ejemplos resueltos, un caudal de ejercicios, evaluaciones de los capítulos, listas de términos y conceptos clave, y listas resumidas de fórmulas importantes.*

Nuevas características y cambios

Los principales cambios en la cuarta edición tienen lugar en la organización. Primero, se ha organizado el libro en tres subsecciones principales:

I. ***Ecuaciones y funciones***
II. ***Matemáticas finitas***
III. ***Cálculo***

Otros cambios importantes incluyen los siguientes:

Capítulo 1: **Algunos conocimientos preliminares** es un nuevo capítulo que analiza algunos conceptos fundamentales (más allá de la revisión de los principios algebraicos básicos en el apéndice A) los cuales son un requerimiento previo para el material que sigue.

Se ha movido el material sobre ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones de modo que preceda el análisis de las funciones matemáticas.

Se ha consolidado el material acerca de las funciones matemáticas en cuatro capítulos al principio del libro de texto. El capítulo 4 introduce el concepto y la notación de las **Funciones matemáticas**. El capítulo 5 se enfoca en las **Funciones lineales: aplicaciones**. El capítulo 6 estudia las **Funciones cuadráticas y polinomiales** con aplicaciones. El capítulo 7 presenta **Funciones exponenciales y logarítmicas** con aplicaciones.

Se ha reorganizado ligeramente el tratamiento de la programación lineal en los capítulos 10 y 11. En tanto que las aplicaciones se presentaban primero en la edición anterior, el capítulo 10 se enfoca primero en los métodos de solución gráfica, seguidos por aplicaciones seleccionadas. Se ha cambiado la sección que estudia los métodos de solución por computadoras al final del capítulo 11, el cual presenta el método simplex.

Se ha eliminado en esta edición el material sobre programación entera y programación de objetivo. A pesar de que hay extensiones interesantes de la programación lineal, se determinó que estos temas son de poca importancia relativa.

En el análisis del cálculo, se ha dividido en dos capítulos separados el material sobre optimización (como en la segunda edición). El capítulo 16 presenta la metodología de la optimización y el capítulo 17 está dedicado exclusivamente a las aplicaciones de la optimización. El motivo principal por el que se separaron estos temas es que se presenta demasiado material para un solo capítulo. La pedagogía es hacer que los estudiantes aprendan la metodología matemática en el capítulo 16, seguida de las aplicaciones seleccionadas del capítulo 17.

El material sobre optimización de funciones de varias variables se ha cambiado al último capítulo en el libro de texto. Este tema es opcional para muchas escuelas y su nueva ubicación es compatible con textos que compiten con éste.

Otras modificaciones importantes incluyen:

Se ha organizado el material acerca de la diferenciación (capítulo 15) en secciones más cortas.

Se ha eliminado el capítulo 11 de la tercera edición (Aplicaciones seleccionadas de probabilidad), aunque se han transferido algunas aplicaciones al capítulo sobre álgebra matricial.

Se ha aumentado significativamente el número de Ejercicios de práctica con el fin de dar más oportunidades para el refuerzo de nuevos conceptos.

Además de estos cambios, el autor ha incorporado una cantidad considerable de aplicaciones (ya sea como ejemplos o ejercicios) que contienen "datos de la vida real". Asimismo, el autor hace un intento significativo por hacer que los estudiantes estén conscientes de la naturaleza que tiene la *estimación* al aplicar las matemáticas. Es decir, la aplicación del análisis matemático en el "mundo real" implica la aproximación de relaciones entre variables. Es importante que los estudiantes entiendan las fuerzas y debilidades del análisis matemático.

El libro contiene un gran número de aplicaciones distintas. Se pretende que los profesores cubran tantas aplicaciones en estos capítulos como consideren conveniente para sus alumnos.

Se considera que algunos ejercicios del libro de texto son de mayor nivel de dificultad que la mayoría de los demás. Estos ejercicios están precedidos por un asterisco (*).

Reconocimientos

Deseo expresar mi sincero agradecimiento a las personas que han contribuido ya sea directa o indirectamente en este proyecto. Quiero agradecer a: Thomas Arbutiski, Community College of Allegheny County; Helen B. Chun, Community College of Allegheny County; Benjamin Eichorn, Rider College; Joseph Fadyn, Southern College of Technology; Odene Forsythe, Westark Community College; Gary Grimes, Mount Hood Community College; Anne Hughes, St. John's University; Harry Hutchins, Southern Illinois University; Harlan Koca, Washburn University of Topeka; Joyce Longman, Villanova University; Daniel J. Madden, University of Arizona; Victor McGee, Dartmouth College; Michael Mogavero, Alfred University; Dean Morrow, Robert Morris College; Richard Semmler, Northern Virginia Community College; Richard Witt, University of Wisconsin, Eau Claire; y Cathleen Zucco, Le Moyne College, por sus muchos comentarios útiles durante el desarrollo del manuscrito. Expreso un agradecimiento especial a Thomas Arbutiski por sus revisiones y sugerencias concienzudas y extremadamente detalladas.

También deseo agradecer a varias personas de McGraw-Hill con quienes trabajé directamente. Estas personas incluyen a Michael Johnson, Margery Luhrs y David Damstra. Doy gracias también a Karen Minette por coordinar el paquete de complementos y a Leon Bolognese por su trabajo en el diseño del libro.

De igual manera estoy agradecido por los esfuerzos de Shaochi Xu quien colaboró en el desarrollo de los conjuntos de soluciones para los ejercicios. Doy un especial agradecimiento a mis 520 alumnos de QBA que sirvieron como "conejillos de indias" por permitirme probar en clase algunas partes del manuscrito. Del mismo modo, querría hacer patente mi reconocimiento por las útiles sugerencias de Sandra Quinn, Kathy Bowser y la finada Elizabeth Flaherty, así como sus esfuerzos en el desarrollo del *Instructor's Resource Manual* y el *Student's Solutions Manual.*

Por último, quiero dar gracias a mi esposa, Deb, por su apoyo a lo largo de esta extenuante experiencia, al igual que por las otras vivencias que hemos compartido juntos.

Frank S. Budnick

PREFACIO

Introducción

Las matemáticas son una parte integral de la educación de estudiantes de administración, economía y ciencias sociales. Existe un creciente deseo de mejorar el nivel de sofisticación cuantitativa que tienen los graduados en estos tipos de programas. El objetivo no es convertir a estos estudiantes en matemáticos, sino hacer que se sientan tan cómodos como sea posible en un entorno en el que cada vez se utilizan más el análisis cuantitativo y la computadora. Los estudiantes descubren que deben integrar las matemáticas, el análisis estadístico y la computadora en cursos tanto obligatorios como optativos de sus programas. Además, las organizaciones ahora usan con mayor eficiencia las herramientas cuantitativas y la computadora. Quienes toman decisiones estarán mejor preparados para operar en este tipo de entorno si están familiarizados con las clases de análisis cuantitativo y la tecnología de cómputo que se emplean con mayor frecuencia. Dicha familiaridad puede ayudarles a ser mejores “críticos” y “usuarios” de estas herramientas y quizás tomen mejores decisiones.

Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales, cuarta edición, aún presenta de manera informal y no intimidante los principios matemáticos, técnicas y aplicaciones más útiles para los estudiantes de negocios, economía, administración y las ciencias naturales y sociales. Diseñado principalmente como un curso de dos niveles de matemáticas aplicadas (es posible adaptar con facilidad el libro para un curso de un solo periodo escolar), trata en forma integral los temas seleccionados de matemáticas finitas y cálculo. Su uso es apropiado tanto en escuelas con cursos de dos años como en escuelas con cursos de cuatro años, al igual que como nivel “fundamental” para los programas universitarios que tienen como un requerimiento previo contar con conocimientos de matemáticas. Las maestrías en administración de empresas y administración pública son programas universitarios que normalmente exigen este tipo de requerimiento.

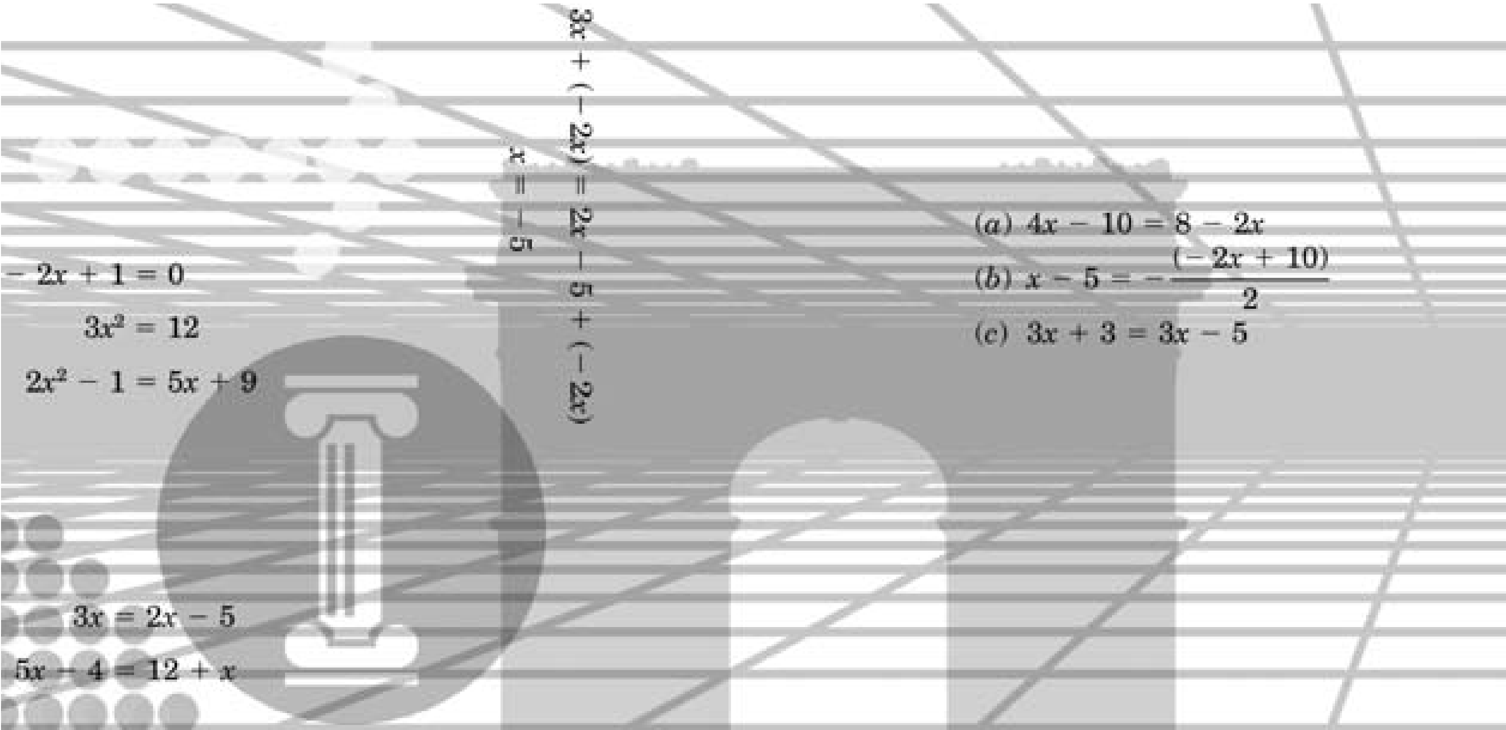
Características

Se han conservado las siguientes características de la edición anterior:

- Un nivel de presentación que desarrolla y refuerza con cuidado los temas.
- Un estilo que apela a la *intuición* de los estudiantes y da mucho *refuerzo visual*.
- Una *aplicación orientada* que motiva a los estudiantes y da un sentido de propósito para el estudio de las matemáticas.
- Un planteamiento que desarrolla primero el concepto matemático y luego lo refuerza con aplicaciones.
- Un planteamiento que minimiza el uso de demostraciones matemáticas rigurosas.

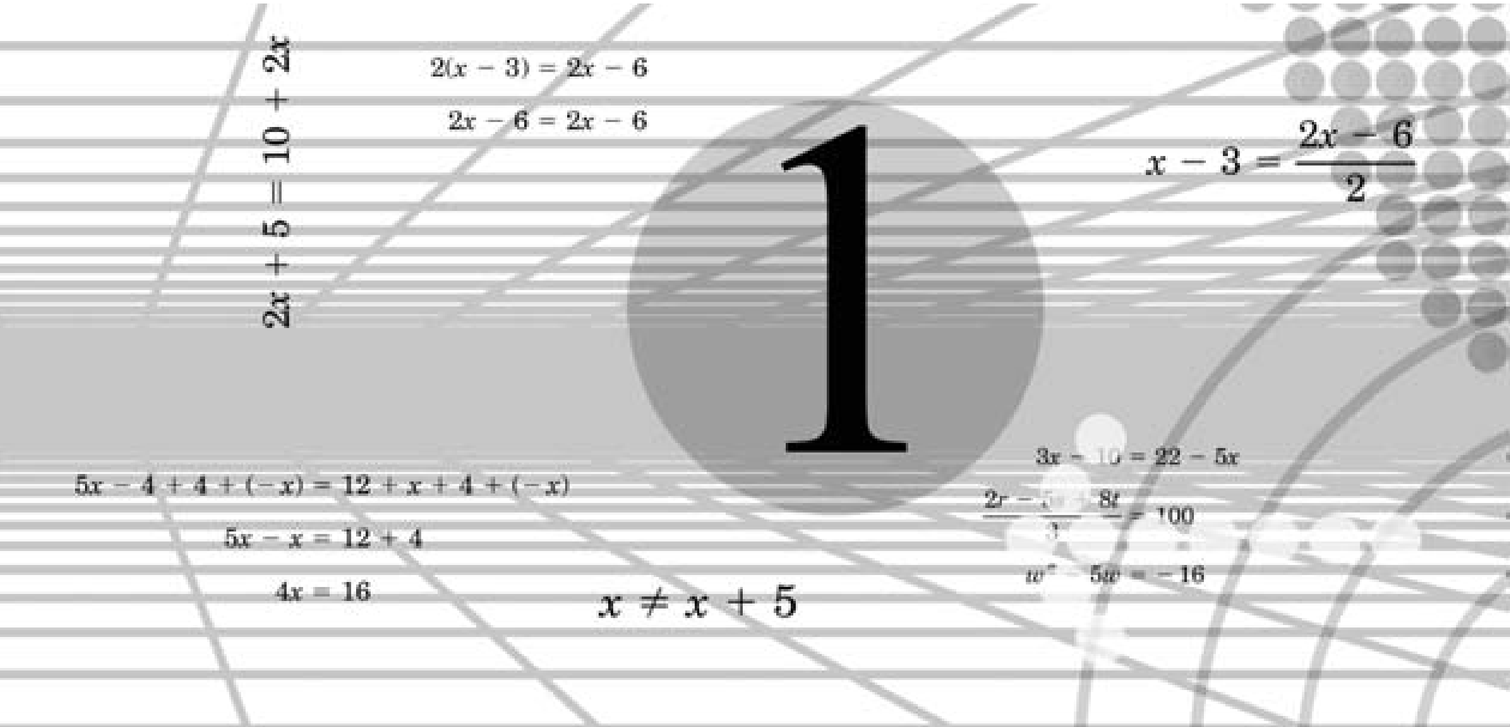
CAPÍTULO 1

Algunos conocimientos preliminares



OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Estudiar las ecuaciones y los métodos de solución.
- Presentar las propiedades de las desigualdades y los métodos de solución.
- Ilustrar las relaciones del valor absoluto.
- Introducir las propiedades de los sistemas de coordenadas rectangulares.



Este capítulo presenta un análisis de conceptos algebraicos selectos. Para estudiar de manera exitosa el material de este libro de texto, es un requerimiento previo entender estos conceptos, así como los conceptos fundamentales que se revisan en el apéndice A.

1.1 Ecuaciones de primer grado con una variable

En este libro continuamente se trabaja con ecuaciones. Es esencial en absoluto comprender el significado de las ecuaciones y sus propiedades.

Las ecuaciones y sus propiedades

Una **ecuación** indica la igualdad de dos expresiones algebraicas. Las expresiones algebraicas pueden escribirse en términos de una o más *variables*. Los siguientes son algunos ejemplos de ecuaciones.

$$3x - 10 = 22 - 5x \tag{1}$$

$$\frac{2r - 5s + 8t}{3} = 100 \tag{2}$$

$$w^2 - 5w = -16 \tag{3}$$

En las ecuaciones (1) y (3), las variables son x y w, respectivamente. En la ecuación (2) hay tres variables, r, s y t. Se utiliza el término *variable* porque se pueden sustituir las letras con distintos valores numéricos.

La **solución** de una ecuación consta de esos valores numéricos, los cuales, al ser sustituidos por las variables, hacen válida una ecuación. Los valores numéricos que hacen válida una ecuación se conocen como **raíces** de una ecuación. Se dice que las raíces son los valores de la(s) variable(s) que *satisface(n) la ecuación*. En la ecuación (1), la sustitución del número 0 por la variable x da como resultado

$$-10 = 22$$

lo cual no es cierto. El valor $x = 0$ no es una raíz de la ecuación. Sin embargo, al sustituir el número 4 por la variable x se obtiene

$$3(4) - 10 = 22 - 5(4)$$

o

$$2 = 2$$

Se considera que el valor $x = 4$ es una raíz de la ecuación.

Se pueden distinguir tres tipos de ecuaciones. Una ***identidad*** es una ecuación que es válida para cualquier valor numérico asignado a las variables. Un ejemplo de una identidad es la ecuación

$$6x + 12 = \frac{12x + 24}{2}$$

Otro ejemplo es

$$5(x + y) = 5x + 5y$$

En cada una de estas ecuaciones, cualquier valor que se asigne a las variables hará que ambos lados sean iguales.

Una ***ecuación condicional*** es válida únicamente para un número limitado de valores de las variables. Por ejemplo, la ecuación

$$x + 3 = 5$$

es verdadera sólo cuando x es igual a 2.

Un ***enunciado falso***, o ***contradicción***, es una ecuación que nunca es verdadera. Esto significa que no hay valor alguno que se pueda asignar a las variables para que los dos lados de la ecuación sean iguales. Un ejemplo es la ecuación

$$x = x + 5$$

Se indica que los dos lados *no son iguales* al usar el símbolo $\neq$; para este ejemplo,

$$x \neq x + 5$$

La *solución de una ecuación* se refiere al proceso de encontrar las raíces de una ecuación, si es que existe alguna. Con el fin de resolver ecuaciones, por lo general se manipulan o se reordenan. Las reglas siguientes indican las operaciones permitidas.

Reglas seleccionadas para el manejo de ecuaciones

- **I** *Se pueden sumar o sustraer expresiones con valores reales que son iguales de ambos lados de una ecuación.*
- **II** *Es posible multiplicar o dividir ambos lados de una ecuación por cualquier constante diferente a cero.*
- **III** *Se pueden multiplicar ambos lados de una ecuación por una cantidad que implique variables.*
- **IV** *Es posible elevar al cuadrado ambos lados de una ecuación.*
- **V** *Se pueden dividir ambos lados de una ecuación por una expresión que incluya variables siempre que la expresión no sea igual a 0.*

Las reglas I y II llevan a la creación de ***ecuaciones equivalentes***. *Las ecuaciones equivalentes son ecuaciones que tienen las mismas raíces.* Las reglas III y IV pueden dar como resultado raíces que no son raíces de la ecuación original. Estas raíces se denominan ***raíces extrañas***. La aplicación de la regla V puede llevar a ecuaciones que no tienen todas las raíces contenidas en la ecuación original o ecuaciones que no son equivalentes a las ecuaciones originales.

El ***grado de un polinomio*** se define como el grado del término elevado a la mayor potencia en un polinomio. Si se puede escribir una ecuación en la forma

$$\textit{Expresión polinomial} = 0$$

el grado de la expresión polinomial es el ***grado de la ecuación***. Por tanto, la ecuación $2x - 4 = 0$ es una ecuación de primer grado. La ecuación $4r^2 - r + 10 = 0$ es una ecuación de segundo grado. La ecuación $n^4 - 3n^2 + 9 = 0$ es una ecuación de cuarto grado.

Solución de ecuaciones de primer grado con una variable

El procedimiento que se emplea para resolver ecuaciones depende de la naturaleza de la ecuación. Considérense primero ecuaciones de primer grado que implican una variable. Los siguientes son algunos ejemplos de estas ecuaciones.

$$3x = 2x - 5$$

$$5x - 4 = 12 + x$$

Es relativamente fácil resolver ecuaciones de esta forma. Al usar las reglas de manejo apropiadas, el planteamiento consiste sólo en aislar la variable en un lado de la ecuación y todas las constantes al otro lado de la ecuación.

Ejemplo 1 Resuelva las dos ecuaciones de primer grado que se presentaron antes.

SOLUCIÓN

Para la ecuación $3x = 2x – 5$, se suma $-2x$ en ambos lados de la ecuación para obtener

$$3x + (-2x) = 2x - 5 + (-2x)$$

o

$$x = -5$$

Nuestra conclusión: el único valor de x que satisface esta ecuación es -5.

Para la ecuación $5x - 4 = 12 + x$, se puede sumar 4 y $-x$ a ambos lados

$$5x - 4 + 4 + (-x) = 12 + x + 4 + (-x)$$

$$5x - x = 12 + 4$$

o

$$x = 16$$

Dividir ambos lados entre 4 (o al multiplicarlos por $\frac{1}{4}$) dan la raíz de la ecuación:

$$x = 4$$

Nuestra conclusión: el único valor de x que satisface la ecuación es 4.

Ejemplo 2 Para resolver la ecuación

$$2x + 5 = 10 + 2x$$

se puede sustraer $2x$ de ambos lados, lo que da como resultado

$$2x + 5 - 2x = 10 + 2x - 2x$$

o

$$5 = 10$$

Este resultado es un *enunciado falso*, o contradicción, que señala que la ecuación original no tiene raíces.

Ejemplo 3 Para resolver la ecuación

$$x - 3 = \frac{2x - 6}{2}$$

se multiplican ambos lados de la ecuación por 2, lo que da como resultado

$$\begin{aligned} 2(x - 3) &= 2x - 6 \\ 2x - 6 &= 2x - 6 \end{aligned}$$

Ambos lados de la ecuación son *idénticos* y esto sugiere que es posible asignar cualquier valor a x para satisfacer la ecuación. Si se trata de aislar x en el lado izquierdo de la ecuación, al sustraer $2x$ en ambos lados se tiene como resultado

$$-6 = -6$$

Esto es una identidad, que también señala que se puede asignar cualquier valor a la variable x. ❑

Ejercicio de práctica

Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $4x - 10 = 8 - 2x$
b) $x - 5 = -\dfrac{(-2x + 10)}{2}$
c) $3x + 3 = 3x - 5$

Respuesta: a) 3, *b*) cualquier número real, *c*) no hay valores.

Sección 1.1 Ejercicios de seguimiento

Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado.

1. $x + 5 = 2x - 8$
2. $18 - 2x = 8 - 3x$
3. $2x + 4 = 6 - x$
4. $-5x + 12 = 16 - 3x$
5. $2(x - 8) = 3(x + 4)$
6. $5(3 - x) = 3(5 + x)$
7. $16 + 2t = 4t + 12$
8. $8y + 10 = 6y + 20$
9. $3 - 5t = 3t + 5$
10. $10y + 2 = 6y + 4$
11. $3t + 10 = 4t + 6$
12. $3(2t + 8) = 4(2 + t)$
13. $\frac{x}{6} - 5 = \frac{x}{2} - 7$
14. $(x + 6) - (5 - 2x) + 2 = 0$
15. $3 - \frac{x}{2} = \frac{x}{3} - 2$
16. $\frac{t - 3}{2} + \frac{t + 3}{4} = \frac{8 - t}{3} + 2$
17. $4 + x = 3 + \frac{x}{2}$
18. $\frac{v}{2} - 3 = 5 + \frac{v}{2}$
19. $(t - 3)/2 = (4 - 3t)/4$
20. $3(x - 2) = (x + 3)/2$
21. $2(y + 1) - 3(y - 1) = 5 - y$
22. $3(12 - x) - 16 = 2$
23. $3(x - 2) + 4(2 - x) = x + 2(x + 1)$
24. $3x + 1 = 2 - (x - 4) + 3x$

1.2 Ecuaciones de segundo grado con una variable

Una ecuación de segundo grado que implica la variable x tiene la forma generalizada

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a, b y c son constantes, con la condición adicional de que $a \neq 0$. Normalmente se dice que las ecuaciones de segundo grado son ***ecuaciones cuadráticas***. Si a es igual a cero, el término x^2 desaparece y la ecuación deja de ser de segundo grado. Éstos son algunos ejemplos de ecuaciones de segundo grado

$$6x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$3x^2 = 12$$

$$2x^2 - 1 = 5x + 9$$

Solución de ecuaciones cuadráticas

Una ecuación cuadrática (excluyendo una identidad) puede tener ***raíces no reales***, ***una raíz real*** o ***dos raíces reales***. Es posible utilizar diferentes procedimientos para determinar las raíces de una ecuación cuadrática. Se analizarán dos de estos procedimientos. En cualquier caso, el primer paso consiste en volver a escribir la ecuación en la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

Método de factorización. Si se puede factorizar el lado izquierdo de la ecuación cuadrática, será muy fácil identificar las raíces. Considérese la ecuación cuadrática

$$x^2 - 4x = 0$$

Se puede factorizar el lado izquierdo de la ecuación, lo que da como resultado

$$x(x - 4) = 0$$

La forma factorizada de la ecuación sugiere que el producto de los dos términos es igual a 0. El producto equivaldrá a 0 si cualquiera de los dos factores es igual a 0. Para esta ecuación, el primer factor equivale a 0 cuando $x = 0$ y el segundo factor es igual a 0 cuando $x = 4$. Por tanto, las dos raíces son 0 y 4.

Ejemplo 4

Determine las raíces de la ecuación

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

SOLUCIÓN

Se puede factorizar el lado izquierdo de la ecuación obteniendo como resultado

$$(x + 3)(x + 3) = 0$$

Al establecer cada factor igual a 0, se descubre que hay una raíz para la ecuación y ésta ocurre cuando $x = -3$. ❑

Fórmula cuadrática. Cuando no se puede factorizar la ecuación cuadrática o si no es posible identificar los factores, puede aplicarse la ***fórmula cuadrática*** para identificar todas las raíces de una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1.1}$$

Dados los valores para a, b y c, la fórmula cuadrática es

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \tag{1.2}$$

Los ejemplos siguientes ilustran el uso de la fórmula.

Ejemplo 5

Dada la ecuación cuadrática $x^2 - 2x - 48 = 0$, los coeficientes son $a = 1$, $b = -2$ y $c = -48$. Al sustituir estos coeficientes en la fórmula cuadrática, las raíces de la ecuación se calculan así

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-48)}}{2(1)} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 192}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{2 \pm 14}{2} \end{aligned}$$

Al usar el signo más, se obtiene

$$x = \frac{2 + 14}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

Al utilizar el signo menos, se tiene

$$x = \frac{2 - 14}{2} = -\frac{12}{2} = -6$$

Por consiguiente, 8 y −6 son los dos valores reales de x que satisfacen la ecuación cuadrática.

Ejemplo 6 Encontrar las raíces de la ecuación $x^2 - 2x + 1 = 0$, $a = 1$, $b = -2$ y $c = 1$. Al sustituir los valores en la fórmula da como resultado

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} \\ &= \frac{2 \pm 0}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Puesto que el radicando equivale a cero, al aplicar el signo ± se obtiene la misma raíz, 1.

Ejemplo 7 Encontrar las raíces de la ecuación $x^2 - x + 10$, $a = 1$, $b = -1$ y $c = 10$. La sustitución en la fórmula cuadrática da

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 40}}{2} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{-39}}{2} \end{aligned}$$

Ya que no hay raíz cuadrada real de –39, se concluye que no hay valores de x que satisfagan la ecuación cuadrática. ❑

Ejercicio de práctica

Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado:

a) $x^2 + 3x + 2 = 0$
b) $3x^2 - 2x + 5 = 0$
c) $x^2 + 10x + 25 = 0$

Respuesta: *a*) $x = -1, -2$, *b*) no hay valores, *c*) $x = -5$.

La expresión debajo del radical de la fórmula cuadrática, $b^2 - 4ac$, recibe el nombre de ***discriminante.*** Obsérvense las generalizaciones siguientes con respecto del discriminante y las raíces para ecuaciones de segundo grado.

Interpretaciones del discriminante

Para una ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0$.

I *Si* $b^2 - 4ac > 0$, *hay dos raíces reales.*

II *Si* $b^2 - 4ac = 0$, *hay una raíz real.*

III *Si* $b^2 - 4ac < 0$, *no hay raíces reales.*

Sección 1.2 Ejercicios de seguimiento

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas utilizando la factorización.

1. $x^2 + x - 12 = 0$
2. $x^2 - 36 = 0$
3. $x^2 + 2x + 1 = 0$
4. $x^2 + 3x - 10 = 0$
5. $x^2 - 3x - 4 = 0$
6. $t^2 + 2t - 8 = 0$
7. $2t^2 - 9t + 4 = 0$
8. $5r^2 - 2r - 3 = 0$
9. $6y^2 + 9y - 6 = 0$
10. $x^2 - 10x + 25 = 0$
11. $r^2 - 16 = 0$
12. $3t^2 + 9t + 6 = 0$
13. $x^2 - 2x - 15 = 0$
14. $2x^2 - x - 1 = 0$
15. $4y^2 + 18y - 10 = 0$
16. $x^2 + 10x + 21 = 0$

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas usando la fórmula cuadrática.

17. $x^2 - 8x + 12 = 0$
18. $x^2 - 12x + 36 = 0$
19. $r^2 + 2r + 1 = 0$
20. $t^2 - 2t + 1 = 0$
21. $x^2 + x + 20 = 0$
22. $x^2 + 3x + 5 = 0$
23. $x^2 + 3x - 10 = 0$
24. $9x^2 - 3x = 2$
25. $2x^2 + 2 = 2x$
26. $3r^2 = 14r - 8$
27. $x^2 = 2x - 2$
28. $4t^2 + 3t = 1$
29. $y^2 + 2 = 2y$
30. $x^2 + 4x + 5 = 0$
31. $x^2 - 2x = -5$
32. $2x^2 - 32 = 0$

1.3 Las desigualdades y su solución

Esta sección estudia las *desigualdades*, la *notación de intervalo* y la *solución de desigualdades*.

Desigualdades

Las ***desigualdades*** expresan la condición de que dos cantidades no son iguales. Una manera de expresar esta condición es mediante el uso de los ***símbolos de desigualdad*** < y >. La tabla siguiente ilustra el uso y la interpretación de estos símbolos:

Desigualdad	Interpretación
a) $3 < 5$	"3 es menor que 5"
b) $x > 100$	"el valor de x es mayor que 100"
c) $0 < y < 10$	"el valor de y es mayor que cero y menor que 10"

Estas desigualdades son ***desigualdades estrictas***, puesto que los elementos que se comparan nunca son iguales entre sí. El caso *a*) ilustra una ***desigualdad absoluta***, la cual siempre es verdadera. Una ***desigualdad condicional*** sólo es verdadera en ciertas situaciones. La desigualdad del caso *b*) es verdadera cuando la variable x tiene un valor mayor que 100. Si $x = 150$, la desigualdad es verdadera; si $x = -25$, la desigualdad no es verdadera. El caso *c*) ilustra lo que se denomina una ***doble desigualdad***.

Un uso de las desigualdades es facilitar la comparación de números. La figura 1.1 ilustra la *recta de los números reales*. **Dados dos números reales *a* y *b*, si *a* < *b*, significa que *a* cae a la izquierda de *b* en la recta de los números reales**. En la figura 1.1 se presentan ejemplos de desigualdades.

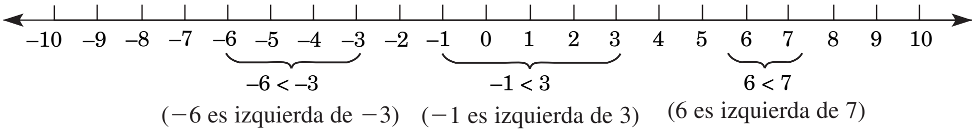


Figura 1.1

Los siguientes enunciados son maneras de expresar la misma relación.

> *a* es menor que *b*.
> *b* es mayor que *a*.
> $a < b$
> $b > a$
> $b - a > 0$
> $a - b < 0$
> *a* cae a la izquierda de *b* en la recta de los números reales.
> *b* cae a la derecha de *a* en la recta de los números reales.

Se expresa otro tipo de relación de desigualdad por medio de los símbolos $\geq$ y $\leq$. Dichas relaciones de desigualdad permiten la posibilidad de que dos cantidades puedan ser iguales. La tabla siguiente ilustra estos tipos de desigualdades.

Desigualdad	Interpretación
a) $x + 3 \geq 15$	"la cantidad $(x + 3)$ es mayor que *o* igual a 15"
b) $y \leq x$	"el valor de y es menor que *o* igual al valor de x"

Notación de intervalo

Un **intervalo** es un conjunto de números reales que caen entre dos números a y b. Es posible especificar esto usando la siguiente notación:

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

La notación **(a, b)** representa el **intervalo abierto** con los extremos a y b. La notación $\{x \mid a < x < b\}$ indica que el intervalo abierto con extremos a y b "consta de los números reales x *tales que* (|) x es mayor que a y x es menor que b". Por "abierto", nos referimos a los valores extremos que *no se incluyen* en el intervalo.

Un **intervalo cerrado** es aquel que incluye los valores de los extremos. La notación **[a, b]** representa el intervalo cerrado que incluye los valores de los extremos a y b. Es posible expresar este intervalo cerrado con mayor precisión como

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

Los **intervalos abiertos en un extremo** incluyen un extremo pero no el otro. La notación **(a, b]** representa el intervalo abierto en un extremo que contiene el punto de extremo b pero no a. La notación **[a, b)** expresa el intervalo abierto en un extremo que incluye a pero no b. La figura 1.2 ilustra la representación gráfica de varios intervalos. Nótese que se ilustran dos representaciones de la recta numérica, una que usa paréntesis y corchetes y la otra que utiliza círculos abiertos (○) y sólidos (●). La notación con círculo abierto indica que el valor del extremo *no* se incluye en el intervalo. El círculo sólido indica que *sí* se incluye el valor del extremo.

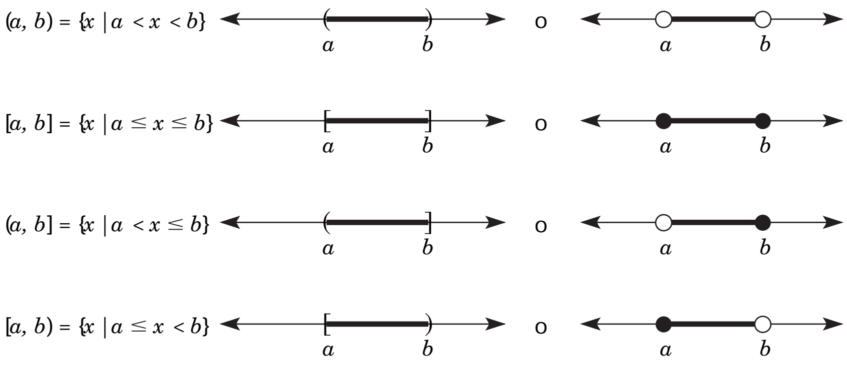


Figura 1.2

Ejemplo 8 Trace los siguientes intervalos: *a*) (−2, 1), *b*) [1, 3], *c*) [−3, 0).

SOLUCIÓN

En la figura 1.3 aparece la representación gráfica de los intervalos.

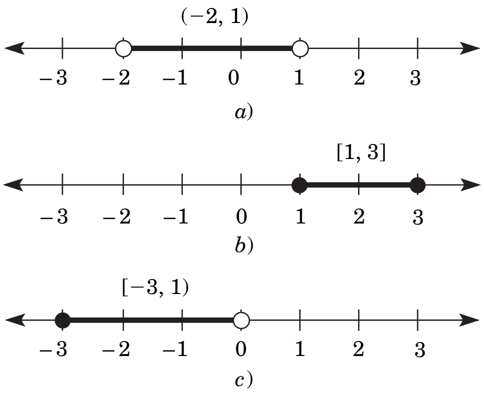


Figura 1.3 ❑

Solución de desigualdades

La solución de desigualdades es muy similar a la solución de ecuaciones. Lo que se intenta determinar es el conjunto de valores de la variable x que satisfacen una desigualdad. Dada una desigualdad de primer grado para una variable, como

$$2x + 3 \geq -5$$

al resolver la desigualdad se determinarían los valores de x que satisfacen la desigualdad. Para resolverla, se trata de aislar la variable x en un lado de la desigualdad usando las mismas operaciones algebraicas que se utilizarían en la solución de ecuaciones. La única diferencia cuando se trabaja con desigualdades es que para multiplicar o dividir ambos lados de una desigualdad por o entre un número negativo es necesario cambiar la dirección o el *sentido* de la desigualdad. Para ilustrarlo, dada la desigualdad

$$-2 < 3$$

si se multiplican ambos lados por (-1), se cambia el sentido de la desigualdad, dando como resultado

$$2 > -3$$

Si no se hubiera cambiado el sentido de la desigualdad, el resultado habría sido

$$2 > -3$$

lo cual no es cierto. De modo similar, para resolver la desigualdad

$$-2x < 6$$

se divide entre -2 ambos lados de la desigualdad para aislar x. Se debe cambiar el sentido de la desigualdad dividiendo entre un número negativo, lo que da como resultado

$$x > -3$$

❑

Ejemplo 9

Para determinar los valores de x que satisfacen la desigualdad $3x + 10 \leq 5x - 4$, es posible sumar 4 a ambos lados para obtener

$$3x + 14 \leq 5x$$

Al restar $3x$ de ambos lados da como resultado

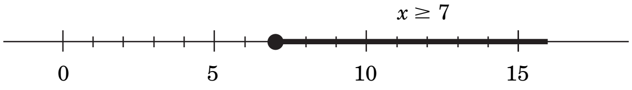
$$14 \leq 2x$$

Por último, dividir ambos lados entre 2 da el conjunto solución

$$7 \leq x$$

Es decir, se satisface la desigualdad original con cualquier valor de x que sea mayor o igual que 7. La figura 1.4 ilustra la solución gráficamente.

Figura 1.4 Solución para la desigualdad $3x + 10 \leq 5x - 4$.



❑

Ejemplo 10

Para determinar los valores de x que satisfacen la desigualdad $6x - 10 \geq 6x + 4$, se suma 10 a ambos lados y da como resultado

$$6x \geq 6x + 14$$

Al restar $6x$ de ambos lados se obtiene

$$0 \geq 14$$

que es un enunciado falso. Por ende, no hay valores para x que satisfagan la desigualdad. ❑

Ejemplo 11

Para determinar los valores de x que satisfacen la desigualdad $4x + 6 \geq 4x - 3$, se resta 6 en ambos lados para obtener

$$4x \geq 4x - 9$$

y al sustraer $4x$ de ambos lados da

$$0 \geq -9$$

La variable x ha desaparecido y queda una desigualdad que siempre es verdadera. Esto indica que *la desigualdad original es verdadera para cualquiera y todos los valores (reales) de x.* ❑

Ejercicio de práctica

Resolver la desigualdad $2x - 5 \geq 3x + 2$. *Respuesta*: $x \leq -7$.

Ejemplo 12

Para determinar los valores de x que satisfacen la doble desigualdad $-2x + 1 \leq x \leq 6 - x$, primero se encuentra el conjunto solución para cada desigualdad.

Los valores de x que satisfacen la desigualdad izquierda se determinan como

$$-2x + 1 \leq x$$

$$1 \leq 3x$$

o

$$\tfrac{1}{3} \leq x$$

Los valores que satisfacen la desigualdad derecha son

$$x \leq 6 - x$$

$$2x \leq 6$$

o

$$x \leq 3$$

Los valores que satisfacen la doble desigualdad constan de los valores de x que satisfacen ambas desigualdades o $\frac{1}{3} \leq x \leq 3$. La figura 1.5 ilustra la solución.

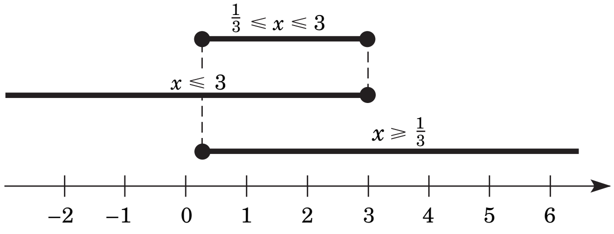


Figura 1.5 Solución para $-2x + 1 \leq x \leq 6 - x$.

Ejemplo 13

Para determinar la solución para la doble desigualdad $2x - 4 \le x \le 2x - 10$, primero se resuelve la desigualdad izquierda

$$\begin{aligned} 2x - 4 &\le x \\ x - 4 &\le 0 \\ x &\le 4 \end{aligned}$$

Los valores de x que satisfacen la desigualdad derecha son

$$\begin{aligned} x &\le 2x - 10 \\ 0 &\le x - 10 \end{aligned}$$

o

$$10 \le x$$

Con base en la figura 1.6, se nota que no hay valores comunes para las soluciones de las dos desigualdades. Por consiguiente, no hay valores que satisfagan la doble desigualdad.

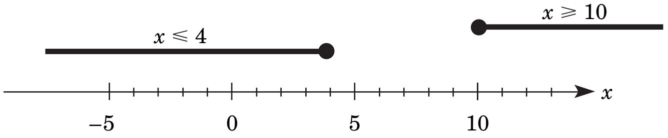


Figura 1.6 Ninguna solución para $2x - 4 \le x \le 2x - 10$.

Ejercicio de práctica

Resuelva la desigualdad $10 \le x + 5 \le 30$. *Respuesta*: $5 \le x \le 25$.

Desigualdades de segundo grado

Si una desigualdad implica una expresión algebraica de orden superior, a menudo puede resolverse si es posible volver a escribir la expresión algebraica en forma factorizada. Los ejemplos siguientes ilustran soluciones para desigualdades de segundo grado.

Ejemplo 14

Para resolver la desigualdad

$$x^2 - 5x + 6 \le 0$$

primero se factoriza el lado izquierdo

$$(x - 3)(x - 2) \leq 0$$

Los siguientes atributos de los dos factores del lado izquierdo darán como resultado la desigualdad que se satisface.

	Factor		
	$(x - 3)$	**$(x - 2)$**	**Producto**
Condición 1	$= 0$	Cualquier valor	0
Condición 2	Cualquier valor	$= 0$	0
Condición 3	> 0	< 0	< 0
Condición 4	< 0	> 0	< 0

Condición 1:

$x - 3 = 0$ cuando $x = 3$

Condición 2:

$x - 2 = 0$ cuando $x = 2$

Condición 3:

$x - 3 > 0$ *y* $x - 2 < 0$

cuando $x > 3$ *y* $x < 2$

Condición 4:

$x - 3 < 0$ *y* $x - 2 > 0$

cuando $x < 3$ *y* $x > 2$

La figura 1.7 resume los resultados de estas cuatro condiciones. Las condiciones 1 y 2 dan como resultado el producto que equivale a cero cuando x es igual a 3 y 2, respectivamente. No hay valores de x que den como resultado los atributos de signo de la condición 3.

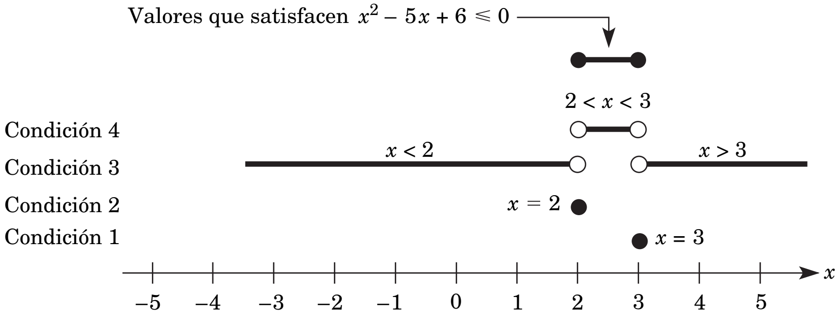


Figura 1.7

Por último, los valores de x que satisfacen la condición 4 son $2 < x < 3$. Al combinar los valores de las condiciones 1, 2 y 4, se satisface la desigualdad si $2 \leq x \leq 3$. ❑

Ejemplo 15 Para resolver la desigualdad

$$x^2 - 2x - 15 > 0$$

primero se factoriza el lado izquierdo, obteniendo como resultado

$$(x - 5)(x + 3) > 0$$

En comparación con el ejemplo 14, ésta es una desigualdad estricta. El lado izquierdo de la desigualdad será positivo si los dos factores tienen el mismo signo.

	Factor		
	$(x - 5)$	**$(x + 3)$**	**Producto**
Condición 1	> 0	> 0	> 0
Condición 2	< 0	< 0	> 0

Condición 1:

$x - 5 > 0$ y $x + 3 > 0$

cuando $x > 5$ y $x > -3$

Condición 2:

$x - 5 < 0$ y $x + 3 < 0$

cuando $x < 5$ y $x < -3$

La figura 1.8 resume los resultados de estas dos condiciones. Los valores de x que satisfacen la condición 1 son $x > 5$. Los que satisfacen la condición 2 son $x < -3$. Combinando los resultados de las dos condiciones, el resultado de la desigualdad original es $x < -3$ y $x > 5$.

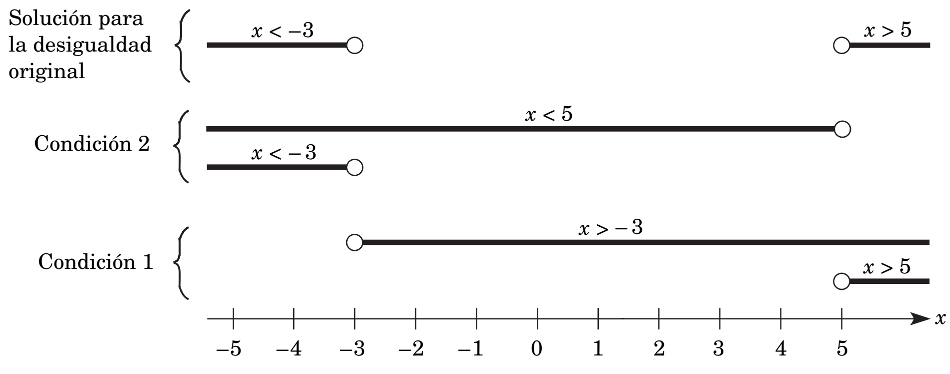


Figura 1.8

Ejercicio de práctica

Resuelva la desigualdad $x^2 + x - 12 \leq 0$. *Respuesta*: $-4 \leq x \leq 3$.

Sección 1.3 Ejercicios de seguimiento

Trace los siguientes intervalos.

1. $(-8, 0)$
2. $(3, 7)$
3. $(-5, -3)$
4. $(-4, 1)$
5. $(0, 5)$
6. $(5, 9)$
7. $[-4, -1]$
8. $[-2, 4]$
9. $[-0.5, 0.5]$
10. $[2, 6]$
11. $[1, 5]$
12. $[-5, -2]$
13. $(-3, 4]$
14. $[2, 8)$
15. $[-5, -2)$
16. $(-3, 2]$

Resuelva las siguientes desigualdades.

17. $3x - 2 \leq 4x + 8$
18. $x + 6 \geq 10 - x$
19. $x \geq x + 5$
20. $2x \leq 2x - 20$
21. $-4x + 10 \geq -20 + x$
22. $3x + 6 \leq 3x - 5$
23. $25x + 6 \geq 10x - 24$
24. $-4x + 10 \leq x \leq 2x + 6$
25. $12 \geq x + 16 \geq -20$
26. $35 \leq 2x + 5 \leq 80$
27. $50 \leq 4x - 6 \leq 25$
28. $6x - 9 \leq 12x + 9 \leq 6x + 81$
29. $-10 \leq x + 8 \leq 15$
30. $25 \leq 5 - x \leq 10$
31. $0 \geq 20 - x \geq -20$
32. $10 + x \leq 2x - 5 \leq 25$

Resuelva las siguientes desigualdades de segundo grado.

33. $x^2 - 25 \leq 0$
34. $x^2 - 16 \geq 0$
35. $x^2 - 3x - 18 \leq 0$
36. $x^2 + 2x - 8 \geq 0$
37. $x^2 + 2x - 3 \geq 0$
38. $x^2 + 4x - 12 \leq 0$
39. $2x^2 + 3x - 2 < 0$
40. $2x^2 - x - 10 > 0$
41. $x^2 + 2x - 15 > 0$
42. $2x^2 - 5x + 3 < 0$
43. $4x^2 - 100 < 0$
44. $6x^2 + x - 12 > 0$

1.4 Relaciones de valor absoluto

El **valor absoluto** de un número es su distancia de separación respecto del cero en la recta de los números reales, la cual debe ser mucho mayor que o igual a cero. Se expresa el valor absoluto de un número a como $|a|$. Usando esta definición, se puede confirmar en la figura 1.9 que $|3| = 3$ y $|-3| = 3$. La siguiente es una definición más formal.

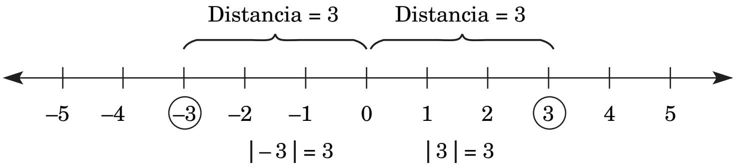


Figura 1.9

Definición: Valor absoluto

Para cualquier número real a,

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Otra manera de considerar el valor absoluto es que el valor absoluto de un número es la magnitud o el monto del número, sin tomar en cuenta su signo.

Algunas propiedades de los valores absolutos

Las siguientes son algunas propiedades de los valores absolutos.

Propiedad 1

$$|a| \geq 0$$

Ejemplo 16

$$|-5| = 5 \geq 0$$
$$|10| = 10 \geq 0$$
$$|0| = 0 \geq 0$$

Propiedad 2

$$|-a| = |a|$$

Ejemplo 17

$$|-4| = |4| = 4$$

Propiedad 3

$$|x - y| = |y - x|$$

Ejemplo 18

$$|12 - 5| = |7| = 7$$
$$|5 - 12| = |-7| = 7$$

Propiedad 4

$$|ab| = |a|\,|b|$$

Ejemplo 19

$$|3(-5)| = |-15| = 15$$

Usando la propiedad 4,

$$|3(-5)| = |3|\,|-5| = (3)(5) = 15$$

Propiedad 5

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

Ejemplo 20

$$\left|\frac{-25}{10}\right| = \frac{|-25|}{|10|} = \frac{25}{10} = 2.5$$ ❑

Solución de ecuaciones y desigualdades que implican valores absolutos

Suponga que se quiere resolver la ecuación

$$|x| = 4$$

Dada la definición del valor absoluto, x debe ser igual ya sea a -4 o a 4.

Ejemplo 21 Para resolver la ecuación

$$|x - 5| = 3$$

se sabe que $x - 5 = \pm 3$. Es decir, ya sea

$$x - 5 = 3 \qquad \text{o} \qquad x - 5 = -3$$

Al resolver ambas ecuaciones, se encuentra

$$x = 8 \qquad \text{o} \qquad x = 2$$

Para comprobar el resultado, la sustitución de los dos valores en la ecuación original da

$$\begin{aligned} |8 - 5| &= 3 &\quad \text{y} \quad |2 - 5| &= 3 \\ |3| &= 3 &\quad \text{y} \quad |-3| &= 3 \\ 3 &= 3 &\quad \text{y} \quad 3 &= 3 \end{aligned}$$

Ejercicio de práctica

Resuelva la ecuación $|5 - 2x| = 9$. *Respuesta*: $x = -2, 7$.

Ejemplo 22 Resuelva la siguiente ecuación:

$$|10 - 2x| = |x + 5|$$

SOLUCIÓN

Puesto que $(10 - 2x)$ y $(x + 5)$ tienen el mismo valor absoluto, tienen ya sea signo igual u opuesto. Por ello, la solución para la ecuación dada requiere que

$$10 - 2x = \pm(x + 5)$$

Despejar x en las dos condiciones da

$$\begin{aligned} 10 &= 3x + 5 &\quad \text{o} \quad && 10 - 2x &= -(x + 5) \\ 5 &= 3x &\quad \text{o} \quad && 10 - 10 &= x - 5 \\ \tfrac{5}{3} &= x &\quad \text{o} \quad && 15 &= x \end{aligned}$$

Por consiguiente, se satisface la ecuación cuando $x = \frac{5}{3}$ o 15. ❑

Ejercicio de práctica

Resuelva la ecuación $|x + 3| = |5 - x|$. *Respuesta*: $x = 1$.

Ejemplo 23 Resuelva la desigualdad $|x| < 4$.

SOLUCIÓN

Ya que $|x|$ representa la distancia de x desde 0 sobre la recta de los números reales, la solución para esta desigualdad consta de todos los números reales cuya distancia desde 0 en la recta de los números reales es menor que 4. La figura 1.10 indica que los valores que satisfacen la desigualdad son $-4 < x < 4$.

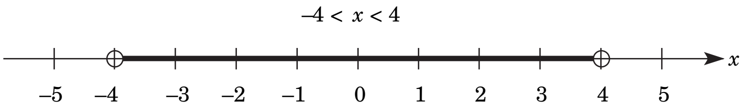


Figura 1.10

❑

Ejemplo 24 Resuelva la desigualdad $|x| \leq 2$.

SOLUCIÓN

Los valores de x que satisfacen esta desigualdad constan de todos los números reales, localizados 2 o más unidades desde cero en una recta de los números reales. La figura 1.11 indica que los valores que satisfacen la desigualdad son $x \leq -2$ y $x \geq 2$.

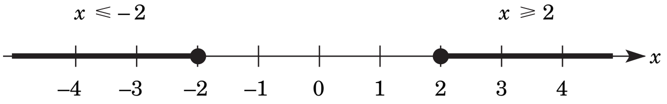


Figura 1.11

❑

Ejemplo 25 Resuelva la desigualdad $|x - 4| > 6$.

SOLUCIÓN

Si se observa este ejemplo de manera similar al ejemplo 24, busque valores de x que den como resultado el número $(x - 4)$ ubicado a más de seis unidades de cero en la recta de los números reales. Esto es, se busca valores de x tales que

$$x - 4 < -6 \quad \text{o} \quad x - 4 > 6$$

o

$$x < -2 \quad \text{o} \quad x > 10$$

La figura 1.12 ilustra la solución para la desigualdad.

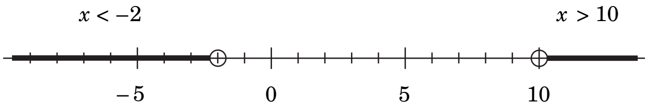


Figura 1.12

Ejercicio de práctica

Resuelva la desigualdad $|2x + 3| < 5$. *Respuesta*: $-4 < x < 1$.

Sección 1.4 Ejercicios de seguimiento

Resuelva las siguientes ecuaciones.

1. $\lvert x \rvert = 10$	**2.** $\lvert x \rvert = -8$
3. $\lvert x \rvert = -4$	**4.** $\lvert x \rvert = -20$
5. $\lvert x - 6 \rvert = 6$	**6.** $\lvert x + 2 \rvert = 6$
7. $\lvert x + 3 \rvert = 15$	**8.** $\lvert 2x + 7 \rvert = 1$
9. $\lvert x + 4 \rvert = \lvert -3x + 8 \rvert$	**10.** $\lvert x + 7 \rvert = \lvert x - 5 \rvert$
11. $\lvert 2x + 5 \rvert = \lvert x - 4 \rvert$	**12.** $\lvert 3x - 10 \rvert = \lvert 2x - 7 \rvert$
13. $\lvert 5 + 3x \rvert = \lvert -2x + 7 \rvert$	**14.** $\lvert x \rvert = \lvert -x + 5 \rvert$

Resuelva las desigualdades siguientes.

15. $|x| < 12$
16. $|x| > 80$
17. $|x| > -2$
18. $|x| < 8$
19. $|x| \leq 3$
20. $|2x| \geq -20$
21. $|x - 5| < 100$
22. $|4 - 2x| < 2$
23. $|2x - 3| > 15$
24. $|3x - 8| > 7$
25. $|y + 1| \leq -9$
26. $|6t - 15| \leq -6$
27. $|t/2| \geq 12$
28. $|y - 5| \geq 3$
29. $|x^2 - 2| \geq 2$
30. $|x^2 - 8| \leq 8$

1.5 Sistemas de coordenadas rectangulares

A lo largo de este libro se utilizará el modelo visual con tanta frecuencia como sea posible para reforzar la comprensión de diferentes conceptos matemáticos. El modelo visual a menudo tendrá la forma de una representación gráfica. Para elaborar la representación gráfica, ahora se estudian los sistemas de coordenadas rectangulares.

El plano cartesiano

Considérese un plano en el que se trazan una línea horizontal y una línea vertical, como en la figura 1.13. Las dos líneas son números reales, los cuales se intersecan en sus respectivos puntos cero. La línea horizontal se conoce como ***eje horizontal***. Según se indica en la figura 1.13, es más común que reciba el nombre de ***eje de las x***. La línea vertical es el ***eje vertical*** y

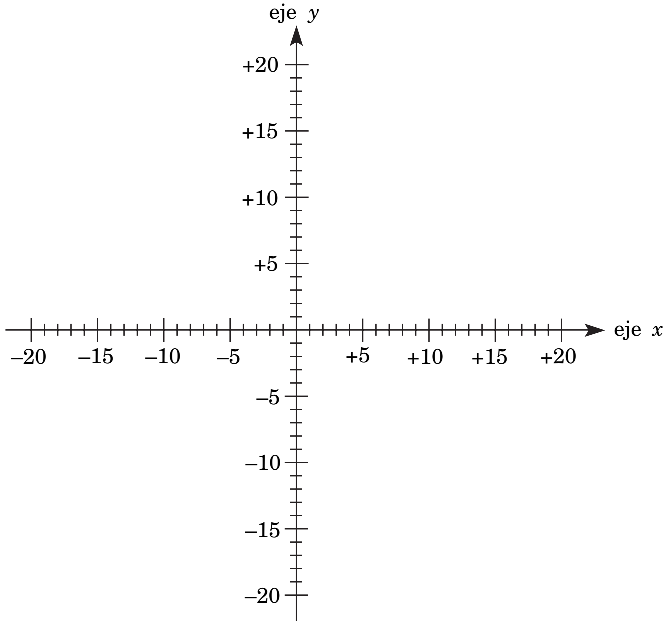


Figura 1.13 Plano cartesiano.

en esta figura sería el ***eje de las y***. Los dos ejes juntos se denominan ***ejes de coordenadas***. Nótese que el eje horizontal está dividido en escala con valores positivos hacia la derecha del eje vertical y con valores negativos a la izquierda. De modo similar, el eje vertical está dividido en escalas con valores positivos sobre el eje horizontal y con valores negativos por debajo del mismo.

El plano que contiene los ejes de coordenadas con frecuencia se denomina ***plano de coordenadas*** o ***plano cartesiano***. Puede considerarse que el plano cartesiano consta de un número infinito de puntos, con cada punto especificado por su posición con respecto de los dos ejes. Se especifica la ubicación de cualquier punto p mediante el ***par ordenado*** de valores $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. El primer miembro del par ordenado se llama ***abscisa***, o más comúnmente ***coordenada x***. Como se indica en la figura 1.14, la abscisa es la ***distancia dirigida*** a lo largo de una línea horizontal trazada desde el eje vertical hasta P. El segundo miembro del par ordenado es la ***ordenada*** o ***coordenada y***. La ordenada representa la distancia dirigida a lo largo del eje vertical desde el eje horizontal hasta P. Juntas, las ***coordenadas*** $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ especifican la ubicación o ***posición*** de un punto P en un plano de coordenadas. El sistema de coordenadas que se usa en un plano de coordenadas se llama ***sistema de coordenadas cartesianas*** o ***rectangulares***.

Para localizar un punto P que tiene las coordenadas (a, b), primero se traza una línea vertical imaginaria a través del eje horizontal en a. Luego se traza una línea horizontal imaginaria a través del eje vertical en b. El punto P ocurre en la intersección de estas dos líneas, como se aprecia en la figura 1.15. Nótese que para P, $a < 0$ y $b < 0$.

El punto de intersección de los dos ejes tiene las coordenadas (0, 0) y recibe el nombre de ***origen***. Asimismo, recuerde siempre que la *coordenada x de cualquier punto sobre el eje de la* y *es 0 y la coordenada* y *de cualquier punto sobre el eje de las* x *es 0.* Finalmente,

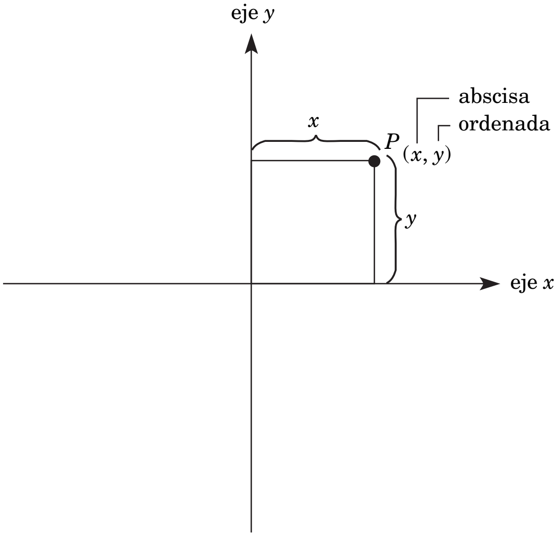


Figura 1.14 Sistema de coordenadas rectangulares.

nótese que los ejes dividen el plano de coordenadas en ***cuadrantes***. Se indican las condiciones de signo para las coordenadas de los puntos que se encuentran en cada cuadrante. La figura 1.16 es una representación gráfica con ejemplos de varios puntos.

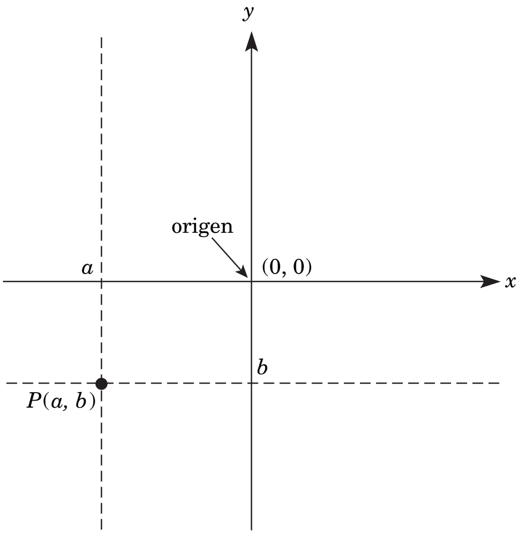


Figura 1.15 Posición del punto P con coordenadas (a, b).

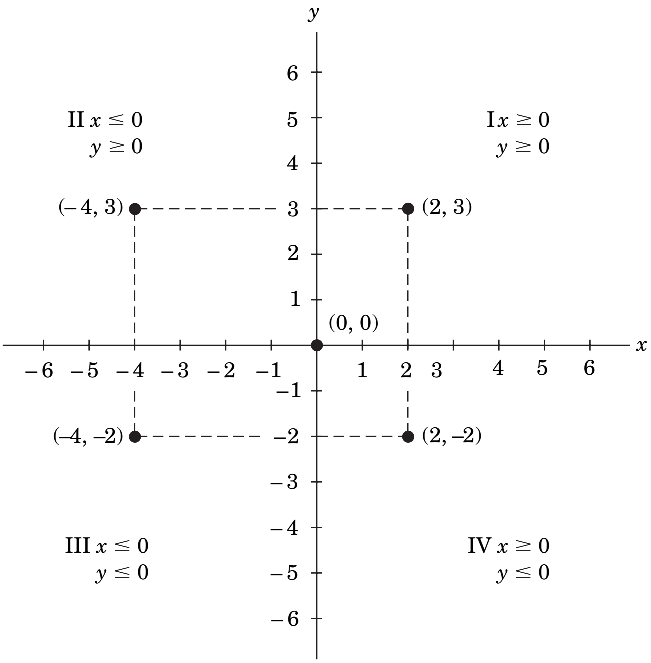


Figura 1.16 Ejemplos de puntos en los cuatro cuadrantes.

Fórmula del punto medio

La figura 1.17 ilustra un segmento de línea PQ, donde P y Q tienen coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), respectivamente. Puede localizarse el punto medio de un segmento de línea usando la fórmula del punto medio.

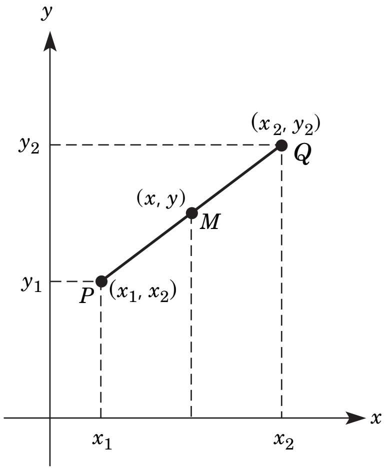


Figura 1.17 Punto medio de un segmento de línea.

Definición: Fórmula del punto medio

El punto medio M del segmento de línea que une dos puntos que tienen las coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), respectivamente, tiene las coordenadas

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \tag{1.3}$$

Ejemplo 26 Para encontrar el punto medio de un segmento de línea que une $(-2, 6)$ y $(1, -9)$, se aplica la ecuación (1.3).

$$\left(\frac{-2+1}{2}, \frac{6+(-9)}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}\right)$$

La figura 1.18 ilustra la solución. ❑

Ejercicio de práctica

Encuentre el punto medio del segmento de línea que une $(4, 12)$ y $(-2, -18)$.
Respuesta: $(1, -3)$.

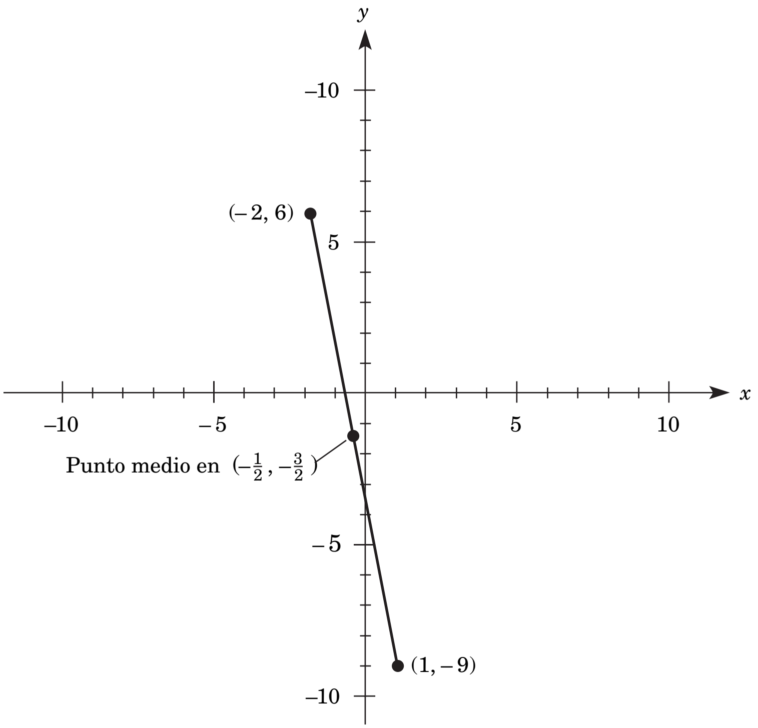


Figura 1.18

Fórmula de la distancia

Dados dos puntos en un plano cartesiano, se puede determinar la distancia que separa los dos puntos basándose en el **teorema de Pitágoras**. En la figura 1.19, suponga que se interesa en encontrar la distancia que separa los puntos *A* y *B*. Se forma el *triángulo rectángu-*

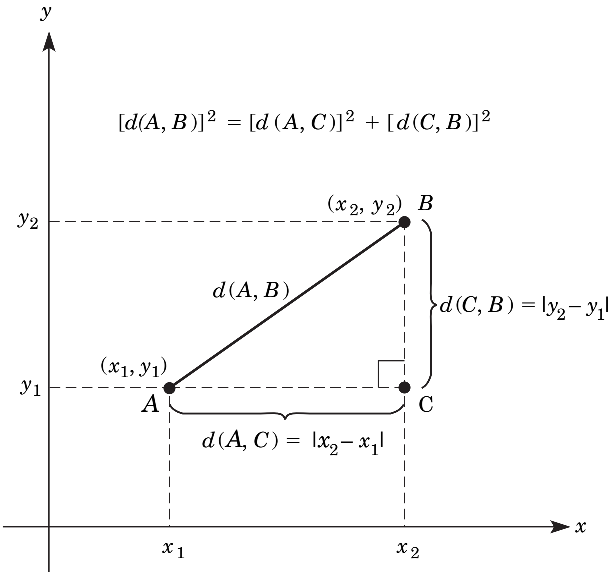


Figura 1.19 Teorema de Pitágoras.

lo ABC con el segmento de línea *AB* como la hipotenusa. Si se expresa la distancia que separa los puntos *A* y *B* como $d(A, B)$, el teorema de Pitágoras establece la siguiente relación entre las longitudes de la hipotenusa y los dos lados opuestos del triángulo rectángulo de la figura 1.19.

$$[d(A, B)]^2 = [d(A, C)]^2 + [d(C, B)]^2 \tag{1.4}$$

Dado que la distancia es un valor absoluto, $d(A, C) = |x_2 - x_1|$ y $d(C, B) = |y_2 - y_1|$. Por consiguiente, se puede volver a escribir la ecuación (1.4) como

$$\begin{aligned}[d(A, B)]^2 &= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2\\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Si se saca la raíz cuadrada de ambos lados de la ecuación (1.5), el resultado es la *fórmula de la distancia.*

Definición: Fórmula de la distancia

La distancia entre dos puntos *A* y *B,* que tienen las coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2), respectivamente, es

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1.6}$$

Ejemplo 27 Encuentre la longitud del segmento de línea que une los puntos *A* y *B* localizados en $(-2, 5)$ y $(1, 1)$, respectivamente.

SOLUCIÓN

Al aplicar la fórmula de la distancia, se obtiene

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\\ &= \sqrt{[1 - (-2)]^2 + (1 - 5)^2}\\ &= \sqrt{(3)^2 + (-4)^2}\\ &= \sqrt{25}\\ &= 5 \end{aligned}$$

❑

Ejercicio de práctica

Determine la distancia que separa a $(4, -2)$ y $(-3, 6)$. *Respuesta*: $\sqrt{113} = 10.63$

Sección 1.5 Ejercicios de seguimiento

Encuentre el punto medio del segmento de línea que une los siguientes puntos.

1. $(-1, 3)$ y $(4, 5)$
2. $(7, -2)$ y $(3, 6)$
3. $(10, 4)$ y $(5, -8)$
4. $(-1, -3)$ y $(2, 15)$
5. $(20, 40)$ y $(-5, 10)$
6. $(5, 24)$ y $(-1, -8)$
7. $(0, -6)$ y $(-4, 24)$
8. $(-4, 2)$ y $(6, -16)$
9. $(5, 0)$ y $(7, -16)$
10. $(3, -2)$ y $(-1, 12)$
11. $(6, 3)$ y $(9, -9)$
12. $(0, 4)$ y $(4, 0)$
13. $(-2, -4)$ y $(2, 4)$
14. $(5, 5)$ y $(-2, -2)$

Encuentre la distancia que separa los siguientes puntos.

15. $(-4, -6)$ y $(0, 0)$
16. $(2, 6)$ y $(6, 9)$
17. $(0, 0)$ y $(-3, -4)$
18. $(-4, -3)$ y $(4, 3)$
19. $(3, -4)$ y $(-3, 5)$
20. $(10, 5)$ y $(20, 10)$
21. $(-4, -2)$ y $(6, 10)$
22. $(3, 12)$ y $(0, 8)$
23. $(8, 0)$ y $(0, -6)$
24. $(5, 1)$ y $(1, 4)$
25. $(-2, 4)$ y $(1, 0)$
26. $(2, 2)$ y $(10, 8)$
27. $(5, 2)$ y $(0, 6)$
28. $(4, 4)$ y $(-5, -8)$
29. $(7, 2)$ y $(-1, 4)$
30. $(3, 6)$ y $(-2, 4)$

❑ TÉRMINOS Y CONCEPTOS CLAVE

abscisa (coordenada *x*) 26
desigualdad absoluta 12
desigualdad condicional 12
desigualdad estricta 12
desigualdades 11
discriminante 11
doble desigualdad 12
ecuación 4
ecuación condicional 5
ecuación cuadrática 8
ecuaciones equivalentes 5
enunciado falso o contradicción 5
fórmula cuadrática 9
fórmula de la distancia 30
fórmula del punto medio 28
grado de la ecuación 6
grado de un polinomio 5
identidad 4
intervalo abierto 13
intervalo abierto en un extremo 13
intervalo cerrado 13
ordenada o coordenada y 26
origen 27
plano de coordenadas o plano cartesiano 26
raíces 4
raíces extrañas 5
sistemas de coordenadas rectangulares 25
teorema de Pitágoras 30
valor absoluto 21

EJERCICIOS ADICIONALES

SECCIÓN 1.1

Resuelva las siguientes ecuaciones de primer grado.

1. $8x - 4 = 5x + 2$
2. $-12 + 4x = 3x - 8$
3. $5x = 3x + 6$
4. $-2x + 12 = 2x - 4$
5. $4y = 10y + 30$
6. $4(y - 3) = y + 15$
7. $6x + 10 = 40 + 9x$
8. $15x - 4(3x + 18) = 0$
9. $-3y - 5(y + 4) = 4$
10. $3(x - 4) + 2(2x + 1) = 11$
11. $30x + 50(x - 6) = -20$
12. $4(5 - x) + 2x - 10 = -2x + 10$

SECCIÓN 1.2

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado.

13. $x^2 - 64 = 0$
14. $x^2 - 14x + 49 = 0$
15. $x^2 + 5x + 4 = 0$
16. $4x^2 - 2x - 30 = 0$
17. $7x^2 - 70 = -21x$
18. $2x^2 + 3x - 10 = x^2 + 6x + 30$
19. $-6x^2 + 4x - 10 = 0$
20. $-5x^2 + 10x - 20 = 0$
21. $5x^2 - 17.5x - 10 = 0$
22. $x^2 + 64 = 0$
23. $8x^2 + 2x - 15 = 0$
24. $-x^2 - 2x + 35 = 0$
25. $2a^2 + 2a - 12 = 0$
26. $5a^2 - 2a + 16 = 0$
27. $3a^2 - 3a - 18 = 0$
28. $x^2 + 2x - 48 = 0$
29. $x^2 - 2x + 10 = 0$
30. $5x^2 - 20x + 15 = 0$

SECCIÓN 1.3

Resuelva las desigualdades siguientes.

31. $x + 8 \leq 2x + 4$
32. $3x + 4 \leq 4x + 2$
33. $4x - 5 \geq 2x - 3$
34. $9x - 5 \geq 6x + 4$
35. $-2x + 10 \geq x - 17$
36. $5x - 4 \geq 3x + 12$
37. $-4 \leq 2x + 2 \leq 10$
38. $4 \leq -x + 3 \leq 12$
39. $x + 5 \leq x + 1 \leq 6$
40. $-x + 3 \leq 2x + 3 \leq 9$

Resuelva las siguientes desigualdades de segundo grado.

41. $x^2 - 81 \geq 0$
42. $x^2 - 144 \geq 0$
43. $x^2 + 5x + 4 \leq 0$
44. $x^2 - x - 20 \leq 0$
45. $2x^2 - 5x - 12 \geq 0$
46. $5x^2 - 13x - 6 \geq 0$
47. $12x^2 - 5x - 2 \leq 0$
48. $3x^2 + x - 10 \leq 0$

SECCIÓN 1.4

Resuelva las ecuaciones siguientes.

49. $|x + 5| = 4$
50. $|10 - 2x| = 20$
51. $|x - 8| = 2$
52. $|x - 5| = -10$
53. $|x - 4| = |8 + 2x|$
54. $|3x - 6| = |x + 6|$
55. $|x| = |9 - x|$
56. $|2x + 5| = |-x|$

Resuelva las siguientes desigualdades.

57. $|x| \leq 20$
58. $|-x| \geq 8$
59. $|x+5| \leq 3$
60. $|x-15| \leq 12$
61. $|3x-5| \geq 8$
62. $|2x+9| \geq 7$
63. $|3x-6| \leq -4$
64. $|5x-3| \leq -9$

SECCIÓN 1.5

Encuentre el punto medio del segmento de línea que une los siguientes puntos.

65. $(-8, 10)$ y $(2, -12)$
66. $(-1, 7)$ y $(1, -9)$
67. $(4, -4)$ y $(-2, 2)$
68. $(0, -4)$ y $(2, 0)$
69. $(-4, -8)$ y $(2, -6)$
70. (a, a) y (b, b)
71. (a, b) y $(3a, 3b)$
72. (a, b) y $(-a, -b)$

Encuentre la distancia que separa los siguientes puntos.

73. $(2, 2)$ y $(-4, 6)$
74. $(-6, 2)$ y $(4, -3)$
75. $(6, 3)$ y $(-2, 6)$
76. $(-1, -2)$ y $(-4, -6)$
77. $(10, 5)$ y $(-10, 5)$
78. $(5, -10)$ y $(20, 10)$
79. (a, b) y $(a, 3b)$
80. $(5a, 2b)$ y $(0, 2b)$

EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. Resuelva la ecuación $5x = 5x + 10$.

2. Resuelva la ecuación $x^2 - 2x + 5 = 0$.

3. Resuelva la ecuación $x^2 - 7x + 12 = 0$.

4. Resuelva la siguiente desigualdad:

$$-2 \leq x - 6 \leq x + 1$$

5. Resuelva la siguiente desigualdad:

$$x^2 + 3x + 2 \leq 0$$

6. Resuelva la ecuación $|x - 12| = |4 - x|$.

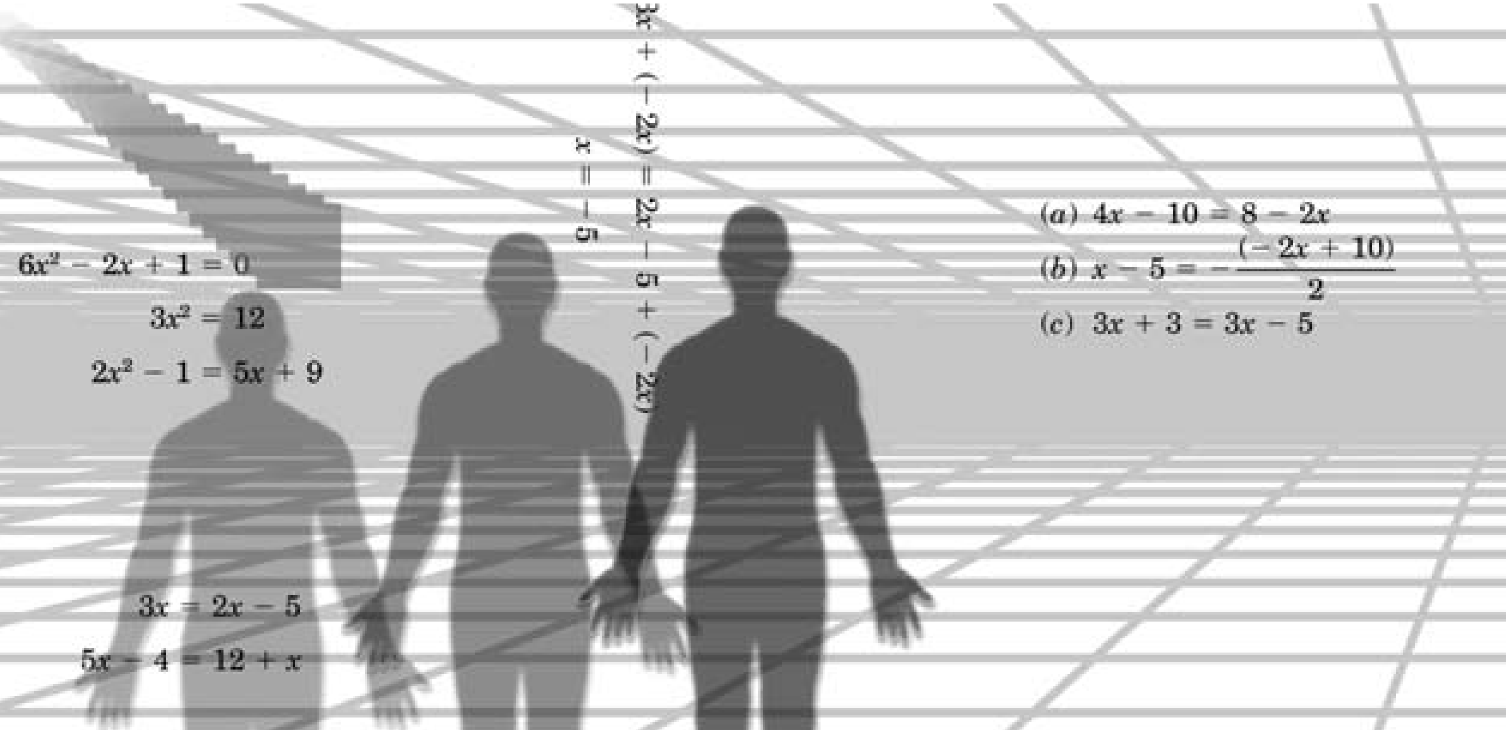
7. Resuelva la siguiente desigualdad:

$$|x + 12| \leq 8$$

8. Dados los puntos $(-4, 8)$ y $(6, -12)$:
a) Determine el punto medio del segmento de línea que une los puntos.
b) Determine la distancia que separa los dos puntos.

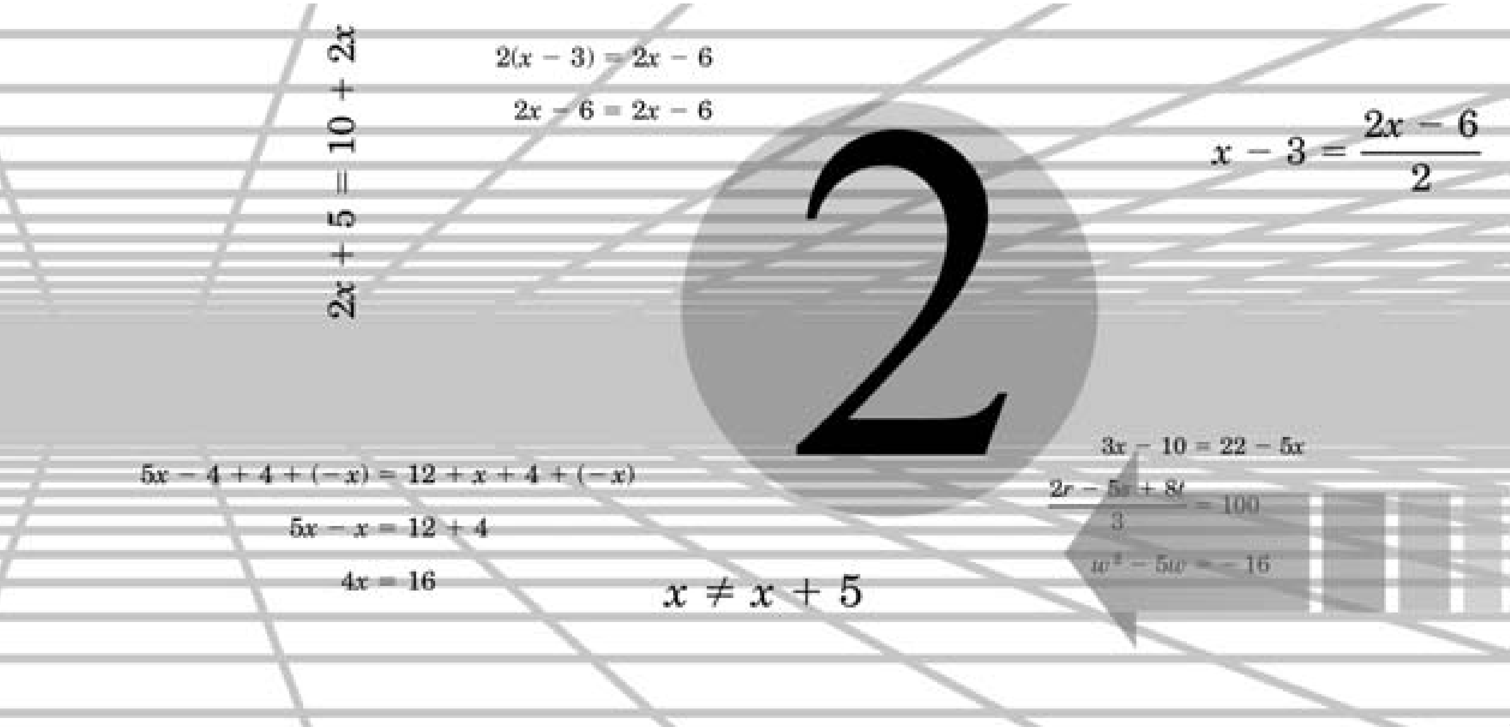
CAPÍTULO 2

Ecuaciones lineales



OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Proporcionar una comprensión rigurosa de las características algebraicas y gráficas de las ecuaciones lineales.
- Proporcionar los instrumentos que permitirán determinar la ecuación que representa una relación lineal.
- Ilustrar una variedad de aplicaciones de las ecuaciones lineales.



Hay muchas razones por las que es importante estudiar las relaciones matemáticas lineales. En primer lugar, existen muchos fenómenos del mundo real que podría interesarnos representar en forma matemática, y que son lineales o que se pueden aproximar de manera razonablemente utilizando relaciones lineales. Como resultado, hay una amplia aplicación de las relaciones matemáticas lineales. En segundo término, es más fácil analizar relaciones lineales que relaciones no lineales. Por último, los métodos para analizar las relaciones no lineales en ocasiones son similares a los que se usan en las relaciones matemáticas lineales o bien son extensiones de los mismos. Como consecuencia, primero es necesario entender bien las relaciones matemáticas lineales para estudiar después las relaciones matemáticas no lineales.

2.1 Ecuaciones lineales

Forma general

Ecuación lineal con dos variables

Una ecuación lineal donde se están relacionando dos variables x y y tiene la forma estándar

$$ax + by = c \tag{2.1}$$

donde a, b y c son constantes y a y b no pueden ser *ambas* iguales a cero.

Las ecuaciones lineales son ecuaciones de *primer grado*. Cada variable de la ecuación se eleva (implícitamente) a la primera potencia: $ax + by = c \Rightarrow ax^1 + by^1 = c$; por tanto, es una ecuación de primer grado. La presencia de términos que tienen exponentes distintos a 1 (por ejemplo, x^2) o de términos que implican un producto de variables (por ejemplo, $2xy$) ocasiona que una ecuación no se considere como lineal.

Los siguientes son ejemplos de ecuaciones lineales con dos variables:

	Parámetros de la ecuación (2.1)		
	a	b	c
$2x + 5y = -5$	2	5	-5
$-x + \frac{1}{2}y = 0$	-1	$\frac{1}{2}$	0
$x/3 = 25$	$\frac{1}{3}$	0	25
$\sqrt{2}u - 0.05v = 3.76$	$\sqrt{2}$	-0.05	3.76
$2s - 4t = -\frac{1}{2}$	2	-4	$-\frac{1}{2}$

(*Nota*: Los nombres de las variables en la ecuación (2.1) pueden ser diferentes de x y y.)

Los siguientes son ejemplos de ecuaciones que *no* son lineales. ¿Puede explicar por qué?

$$
\begin{aligned}
2x + 3xy - 4y &= 10 \\
x + y^2 &= 6 \\
\sqrt{u} + \sqrt{v} &= -10 \\
ax + \frac{b}{y} &= c
\end{aligned}
$$

La forma de una ecuación lineal no siempre es obvia. A primera vista, la ecuación

$$2x = \frac{5x - 2y}{4} + 10$$

podría no parecer lineal. Sin embargo, multiplicar ambos lados de la ecuación por 4 y mover las variables al lado izquierdo da: $8x = 5x - 2y + 40$, lo cual implica la ecuación: $3x + 2y = 40$, que es lineal y tiene la forma de la ecuación (2.1).

Representación mediante el uso de las ecuaciones lineales

Dada una ecuación lineal que tiene la forma $ax + by = c$, el ***conjunto solución*** para la ecuación es el conjunto de todos los pares ordenados (x, y) que satisfacen la ecuación. Al usar la ***notación de conjunto*** se puede especificar el conjunto solución S como

$$\boxed{S = \{(x, y) \mid ax + by = c\}} \qquad \textbf{(2.2)}$$

De manera verbal, esta notación indica que el **conjunto solución S** consta de los **elementos (x, y),** *de tal manera que* (la línea vertical) satisfaga la ecuación $ax + by = c$. Dicho de otro modo, la ecuación (2.2) expresa que S consta de todos los **pares ordenados** (x, y), de manera que $ax + by = c$. Para cualquier ecuación lineal, S consta de un número infinito de elementos; es decir, **hay un número infinito de pares de valores (x, y) que satisfacen una ecuación lineal que tiene la forma $ax + by = c$.**

Para determinar un par de valores que satisfaga una ecuación, asigne un valor para una de las variables, sustituya este valor en la ecuación y despeje el valor correspondiente de la otra variable. Este método supone que se incluyen ambas variables en la ecuación (esto es, $a \neq 0$ y $b \neq 0$).

Ejemplo 1 Dada la ecuación

$$2x + 4y = 16$$

a) Determinar el par de valores que satisface la ecuación cuando $x = -2$.
b) Determinar el par de valores que satisface la ecuación cuando $y = 0$.

SOLUCIÓN

a) Al sustituir $x = -2$ en la ecuación,

$$\begin{aligned} 2(-2) + 4y &= 16 \\ 4y &= 20 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

Cuando $x = -2$, el par de valores que satisface la ecuación es $x = -2$ y $y = 5$, o $(-2, 5)$.
b) Al sustituir $y = 0$ en la ecuación,

$$\begin{aligned} 2x + 4(0) &= 16 \\ 2x &= 16 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Cuando $y = 0$, el par de valores que satisface la ecuación es $(8, 0)$. ❑

Ejemplo 2

(**Posibilidades de producción**) Una compañía fabrica dos productos diferentes. Para la próxima semana se tienen disponibles 120 horas de trabajo para producir los dos productos. Es posible asignar horas de trabajo de fabricación para cualquiera de los productos. Además, puesto que ambos productos generan buenas utilidades, a la gerencia le interesa aprovechar el total de 120 horas durante la semana. Cada unidad producida del producto *A* requiere tres horas de trabajo y cada unidad del producto *B* requiere 2.5 horas.

a) Defina una ecuación que indique que el total de horas de trabajo empleadas para producir x unidades del producto *A* y y unidades del producto *B* es igual a 120.
b) ¿Cuántas unidades del producto *A* se pueden fabricar si se producen 30 unidades del producto *B*?
c) Si la gerencia decide producir sólo un producto, ¿cuál es la cantidad máxima que se puede fabricar del producto *A*? ¿El máximo del producto *B*?

SOLUCIÓN

a) Las variables se pueden definir como sigue:

x = número de unidades fabricadas del producto *A*
y = número de unidades fabricadas del producto *B*

La ecuación deseada tiene la estructura siguiente.

$$\boxed{\text{Total de horas empleadas para fabricar los productos } A \text{ y } B = 120} \tag{2.3}$$

De manera más específica,

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Total de horas}\\ \text{empleadas para}\\ \text{fabricar el}\\ \text{producto } A\end{array} + \begin{array}{c}\text{Total de horas}\\ \text{empleadas para}\\ \text{fabricar el}\\ \text{producto } B\end{array} = 120} \tag{2.4}$$

Ya que el total de horas empleadas para fabricar un producto es igual al número de horas necesarias por unidad producida por la cantidad de unidades producidas, la ecuación (2.4) se puede volver a expresar como

$$\boxed{3x + 2.5y = 120} \tag{2.5}$$

b) Si se fabrican 30 unidades del producto *B*, entonces $y = 30$. Por tanto,

$$\begin{aligned} 3x + 2.5(30) &= 120 \\ 3x &= 45 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Así, un par de valores que satisface la ecuación (2.5) es (15, 30). Esto sugiere que *una combinación* de dos productos que utilizará por completo las 120 horas es 15 unidades del producto *A* y 30 unidades del producto *B*.

c) Si la gerencia decide producir sólo el producto *A*, no se fabricarán unidades del producto *B*, o $y = 0$. Si $y = 0$,

$$\begin{aligned} 3x + 2.5(0) &= 120 \\ 3x &= 120 \\ x &= 40 \end{aligned}$$

Por consiguiente, 40 es el número máximo de unidades del producto *A* que se pueden producir al utilizar en su totalidad las 120 horas.

Si la gerencia decide fabricar sólo el producto *B*, $x = 0$ y

$$3(0) + 2.5y = 120$$

o

$$y = 48$$

De este modo, la producción máxima posible del producto *B* es 48 unidades.

Ejemplo 3 Se ha indicado que hay un número infinito de pares de valores (x, y) que satisfacen cualquier ecuación lineal. En el ejemplo 2, ¿hay algún elemento del conjunto solución que pudiera no ser realista?

SOLUCIÓN

En el ejemplo 2, x y y representan el número de unidades fabricadas de dos productos. Puesto que una producción *negativa* es imposible, los valores negativos de x y y no tienen significado real alguno. Hay valores negativos que satisfacen la ecuación (2.5). Por ejemplo, si $y = 60$, entonces

$$\begin{aligned} 3x + 2.5(60) &= 120 \\ 3x + 150 &= 120 \\ 3x &= -30 \\ x &= -10 \end{aligned}$$

Además de valores negativos, es posible que x y y tengan valores decimales o fraccionarios. Por ejemplo, si $y = 40$,

$$\begin{aligned} 3x + 2.5(40) &= 120 \\ 3x + 100 &= 120 \\ 3x &= 20 \\ x &= 6\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Según sea la naturaleza de los productos y la forma cómo se venden, los valores fraccionarios pueden o no ser aceptables. ❑

PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR

Dé ejemplos de tipos de productos fabricados para los cuales sólo los valores enteros son razonables. Mencione un ejemplo de un producto para el cual los valores no enteros son razonables.

Ecuaciones lineales con *n* variables

Ecuaciones lineales con *n* variables

Una ecuación lineal con n variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ tiene la forma general

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b \qquad \textbf{(2.6)}$$

donde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ y b son constantes y *no todas* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son iguales a cero.

Cada una de las siguientes expresiones es un ejemplo de una ecuación lineal:

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 2x_2 + 5x3 &= 0\\
-x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 - x_5 + 2x_6 &= -80\\
5x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 - 3x_5 + x_6 - 3x_7 + 10x_8 - 12x_9 + x_{10} &= 1\,250
\end{aligned}
$$

Dada una ecuación lineal con n variables, como se define en la ecuación (2.6), se puede especificar el conjunto solución S como

$$\boxed{S = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b\}} \qquad \textbf{(2.7)}$$

Como en el caso con dos variables, hay una infinidad de elementos en el conjunto solución. Se representa un elemento de S mediante una serie de valores $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, uno por cada una de las n variables en la ecuación. Una manera de identificar elementos específicos de S es asignar valores a $n - 1$ de las variables, sustituirlos en la ecuación y despejar el valor de la variable restante.

Ejemplo 4

Dada la ecuación

$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 16$$

a) ¿Qué valores satisfacen la ecuación cuando $x_1 = 2$, $x_2 = -1$ y $x_3 = 0$?

b) Determine todos los elementos del conjunto solución que tienen valores de 0 en tres de las cuatro variables.

SOLUCIÓN

a) Al sustituir los valores dados para x_1, x_2 y x_3, dentro de la ecuación se proporciona

$$
\begin{aligned}
2(2) + 3(-1) - (0) + x_4 &= 16\\
1 + x_4 &= 16
\end{aligned}
$$

o bien

$$x_4 = 15$$

El elemento correspondiente del conjunto solución es (2, −1, 0, 15).

b) Si $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, entonces

$$2(0) + 3(0) - (0) + x_4 = 16$$

o

$$x_4 = 16$$

Si $x_1 = x_2 = x_4 = 0$,

$$2(0) + 3(0) - x_3 + (0) = 16$$

o

$$x_3 = -16$$

Si $x_1 = x_3 = x_4 = 0$, entonces

$$2(0) + 3x_2 - (0) + (0) = 16$$

o bien

$$x_2 = 16$$

y

$$x_2 = \tfrac{16}{3}$$

Si $x_2 = x_3 = x_4 = 0$,

$$2x_1 + 3(0) - (0) + (0) = 16$$

o bien

$$2x_1 = 16$$

y

$$x_1 = 8$$

Por tanto, los elementos del conjunto solución que tienen tres de las cuatro variables iguales a cero son (0, 0, 0, 16), (0, 0, −16, 0), (0, $\frac{16}{3}$, 0, 0) y (8, 0, 0, 0). ❑

Ejercicio de práctica

En el ejemplo 2 (posibilidades de producción), supóngase que también se fabrica un tercer producto (producto *C*). Como consecuencia del producto adicional, la gerencia autorizó 30 horas de trabajo adicionales. Si cada unidad del producto *C* requiere 3.75 horas de trabajo: *a*) determine la ecuación en la que se requiere utilizar el total de 150 horas de trabajo en la producción de los tres productos, y *b*) determine el número máximo de unidades que se podrían producir de cada producto. *Respuesta*: *a*) Si z = número de unidades fabricadas del producto *C*, $3x + 2.5y + 3.75z = 150$, *b*) 50 unidades de *A*, 60 unidades de *B* y 40 unidades de *C*.

Sección 2.1 Ejercicios de seguimiento

Determine cuáles de las siguientes ecuaciones son lineales.

1. $-5y = 0$
2. $\sqrt{2}x + 8y = -15$
3. $-15x + 24y = 500$
4. $-x^2 + 3y = 10$
5. $2x - 8xy + 5y = 100$
6. $\sqrt{4x} + 3y = -18$
7. $2u - 3v = 20$
8. $r/3 + s/5 = \frac{1}{15}$
9. $m/2 + (2m - 3n)/5 = 0$
10. $(x + 2y)/3 - 3x/4 = 2x - 5y$
11. $20 - 3y = \sqrt{28}$
12. $0.0003x - 2.3245y = x + y - 3.2543$
13. $5x_1 - 3x_2 + x_3 = 20$
14. $(x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + x_5)/25 = 300$
15. $(x_1 + x_2 - x_3x_1) = 5$
16. $3x_2 - 4x_1 = 5x_3 + 2x_2 - x_4 + 36$
17. $\sqrt{x^2 + 2xy + y^2} = 25$
18. $(2x_1 - 3x_2 + x_3)/4 = (x_2 - 2x_4)/5 + 90$

19. Vuelva a trabajar con el ejemplo 2 si el producto *A* requiere 2 horas por unidad y el producto *B* requiere 4 horas por unidad.

20. Dada le ecuación $4x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0$:

a) ¿Qué valores satisfarán a la ecuación cuando $x_1 = -4$ y $x_3 = 2$?

b) Defina todos los elementos del conjunto solución en el cual dos variables equivalen a 0.

21. Dada la ecuación $x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -60$:

a) ¿Qué valores satisfacen la ecuación cuando $x_1 = 10$, $x_2 = 8$ y $x_3 = -2$?

b) Determine todos los elementos del conjunto solución para lo cual los valores de tres variables son iguales a 0.

22. **Mezcla de productos** Una compañía fabrica dos productos, *A* y *B*. Cada unidad de *A* requiere tres horas de trabajo y cada unidad de *B* requiere cinco horas de trabajo. La capacidad de producción diaria es de 240 horas laborales.

a) Si se producen cada día *x* unidades del producto *A* y *y* unidades del producto *B* y se aprovechan todas las horas laborales, determine la ecuación lineal que requiere el uso de 240 horas de trabajo por día.

b) ¿Cuántas unidades de *A* se pueden hacer cada día si se producen 30 unidades de *B* a diario?

c) ¿Cuántas unidades de *A* se pueden hacer por *semana* si cada día se producen 12 unidades de *B*? (Suponga una semana de cinco días laborales.)

23. **Planeación de la nutrición** Una persona en régimen de dieta considera tres tipos de alimento en una comida. Está preocupada en particular por la cantidad de una vitamina contenida en la comida. Una onza del alimento 1 proporciona 6 miligramos de vitamina, una onza del alimento 2 proporciona 8 miligramos y una onza del alimento 3 proporciona 12 miligramos. El *requerimiento mínimo diario* (MDR; *minimum daily requirement*) de la vitamina es 120 miligramos.

a) Si x_j equivale al número de onzas del tipo de alimento *j* servidas en una comida, determine la ecuación que asegura que la comida satisfaga exactamente el MDR.

b) Si sólo se debe incluir uno de estos tres tipos de alimento en la comida, ¿cuánto debe servirse (en cada uno de los tres casos posibles) para satisfacer el MDR?

24. **Puente aéreo de emergencia** La Cruz Roja quiere transportar por aire provisiones a un país sudamericano que sufrió un terremoto. Se consideran cuatro tipos de provisiones, cada uno de los cuales se transportaría en contenedores. Un contenedor de un artículo en particular pesa 120, 300, 250 y 500 libras, respectivamente, para los cuatro artículos. Si el avión que se va a utilizar tiene una capacidad de peso de 80 000 libras y x_j es igual al número de contenedores enviados del artículo *j*:

a) Determine la ecuación que asegura que el avión se cargará hasta su capacidad de peso.

b) Si se decide dedicar el avión a transportar sólo un artículo, ¿cuántos contenedores podría transportar de cada artículo?

25. **Revisión del puente aéreo** En el ejercicio 24, cada contenedor de un artículo requiere un volumen específico de espacio. Suponga que los contenedores de los cuatro artículos requieren 30, 60, 50 y 80 pies cúbicos, respectivamente. Si la capacidad de volumen del avión es de 25 000 pies cúbicos:

a) Determine la ecuación que asegura que se ocupe con exactitud la capacidad de volumen del avión.

b) Si se decide dedicar el avión a un solo artículo, ¿cuántos contenedores de cada artículo se podrían transportar si sólo se considera la capacidad de volumen?

c) Mediante la información del ejercicio 24, ¿cuál es el número máximo de contenedores de cada artículo que se podrían transportar si se consideran tanto el peso como el volumen? Indique en cada caso si la capacidad de peso o volumen es el factor restrictivo.

26. Contratación de personal Una empresa de consultoría de software recibió un importante contrato para desarrollar un nuevo sistema de reservaciones para una de las principales aerolíneas. Con el fin de cumplir el contrato, se requerirá la contratación de nuevos analistas programadores, analistas programadores senior e ingenieros de software. Cada puesto de analista programador costará \$60 000 en salario y beneficios. Cada puesto de analista programador senior costará \$80 000 y cada puesto de ingeniero de software costará \$100 000. El presupuesto de la aerolínea es de \$12 millones por año para las nuevas contrataciones. Si x_j es igual al número de personas contratadas por categoría de trabajo j (donde $j = 1$ corresponde a analistas programadores, etc.):

a) Determine la ecuación que asegura que el total de las nuevas contrataciones consumirá el presupuesto con exactitud.

b) Si se deseara gastar el presupuesto completo en un solo tipo de puesto, ¿cuántas personas de cada tipo se podría contratar?

c) Si sólo se necesitan 10 analistas programadores para el contrato, ¿cuál es el número máximo de analistas programadores senior que se podría contratar? ¿El número máximo de ingenieros de software?

27. Transporte público La ciudad de Nueva York recibió una donación federal de \$100 millones para mejorar el transporte público. Los fondos se usarán sólo para la compra de nuevos autobuses, la compra de nuevos carros de transporte subterráneo o la repavimentación de las calles de la ciudad. Los costos estimados son \$250 000 por autobús, \$200 000 por carro de transporte subterráneo y \$500 000 por milla repavimentada. Los funcionarios de la ciudad quieren determinar diferentes maneras de gastar el dinero donado.

a) Defina las variables de decisión y escriba la ecuación que asegura el gasto completo del donativo federal.

b) Si se determinó comprar 100 autobuses y 200 carros de transporte subterráneo nuevos, ¿cuántas millas de calles de la ciudad se pueden repavimentar?

c) Si los funcionarios desean gastar todo el dinero en un solo tipo de mejora, ¿cuáles son las diferentes posibilidades?

28. Campaña política Un candidato al puesto de gobernador de un estado del medio oeste tiene un presupuesto publicitario de \$5 millones. Los consejeros del candidato identificaron cuatro opciones de propaganda: anuncios en periódicos, comerciales de radio, comerciales de televisión y anuncios en Internet. Los costos para estas opciones de medios de comunicación promedian \$2 500, \$4 000, \$10 000 y \$1 000, respectivamente, por unidad publicitaria. Si x_j es igual al número de unidades adquiridas de la opción de medios j:

a) Escriba una ecuación que requiera gastos publicitarios por el total de \$5 millones.

b) Si se ha determinado que se usarán 200 anuncios en periódicos, 500 anuncios en radio y 100 anuncios televisivos, ¿cuántos anuncios de Internet se pueden adquirir?

c) Si se compran 300 anuncios televisivos, ¿cuál es el número máximo de anuncios en periódico que se puede comprar? ¿Número máximo de anuncios de radio? ¿Anuncios por televisión?

2.2 Características gráficas

Representación gráfica de ecuaciones con dos variables

Una ecuación lineal que implica dos variables es una línea recta en dos dimensiones. Para representar de manera gráfica este tipo de ecuación lineal:

1) Identifique y trace las coordenadas de dos puntos cualesquiera que se encuentren en la línea;
2) Conecte estos dos puntos con una línea recta, y
3) Extienda la línea recta en ambas direcciones lo más lejos que sea necesario o deseable para sus propósitos.

Ejemplo 5 La gráfica de la ecuación

$$2x + 4y = 16$$

se encuentra primero al identificar dos pares de valores para x y y que satisfagan la ecuación.

> **NOTA** Aparte del caso en que el lado derecho de la ecuación equivale a 0, los puntos más fáciles de identificar (de manera algebraica) son los que se encuentran al establecer una variable igual a 0 y despejar el valor de la otra variable. Es decir, suponga que $x = 0$ y despeje el valor de y; después lo contrario: suponga que $y = 0$ y despeje el valor de x. Observe que los pares ordenados resultantes, $(0, y)$ y $(x, 0)$, son puntos en los ejes de las y y de las x, respectivamente.

Suponiendo que $x = 0$, el valor correspondiente para y es 4; y suponiendo que $y = 0$ da como resultado $x = 8$. Por tanto, (0, 4) y (8, 0) son dos elementos del conjunto solución, y su representación gráfica se indica mediante los dos puntos de la figura 2.1. Se han unido los dos puntos con una línea recta y se ha extendido en ambas direcciones.

Así como (0, 4) y (8, 0) son miembros del conjunto solución de la ecuación $2x + 4y = 16$, las coordenadas de cada punto que se encuentran en la línea representan otros elementos del conjunto solución. ¿Cuántos puntos únicos hay en la línea? Hay una infinidad, lo que es por completo consistente con la afirmación anterior de que hay un número infinito de pares de valores para x y y que satisfacen cualquier ecuación lineal.

> **PUNTO CLAVE** En resumen, todos los pares de valores (x, y) que pertenecen a un conjunto solución de una ecuación lineal se representan gráficamente mediante los puntos que caen en la línea que representa la ecuación.

En la figura 2.1, las coordenadas de cualquier punto que *no* se encuentran en la línea no son elementos del conjunto solución para $2x + 4y = 16$. Esto significa que los valores coordinados para estos puntos no satisfacen la ecuación $(ax + by = 0)$.

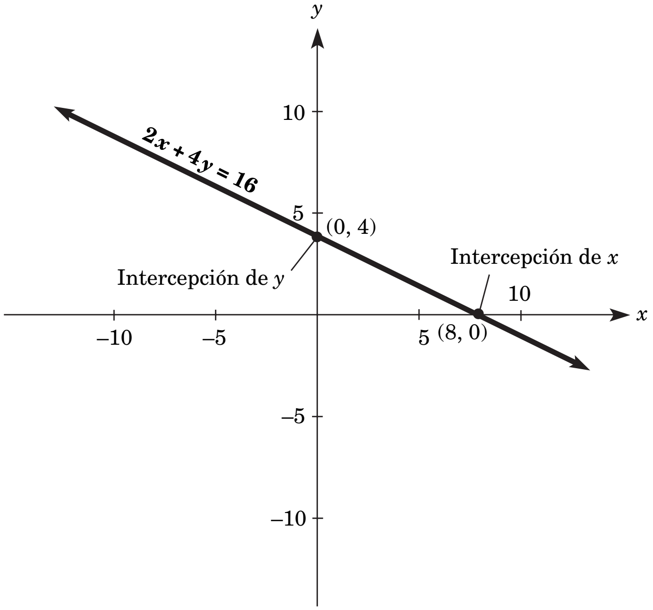


Figura 2.1 Gráfica de la ecuación lineal $2x + 4y = 16$.

Ejemplo 6 Trace la ecuación lineal $4x - 7y = 0$.

SOLUCIÓN

Esta ecuación es un ejemplo en donde no se identificarán dos puntos diferentes al asignar a cada variable el valor de 0 y despejar la variable faltante. ¡Observe lo que ocurre! Si $x = 0$,

$$4(0) - 7y = 0 \qquad \text{o} \qquad y = 0$$

Si $y = 0$,

$$4x - 7(0) = 0 \qquad \text{o} \qquad x = 0$$

Ambos casos produjeron el mismo punto (0, 0). Por ende, para identificar un segundo punto, se debe dar un valor distinto de cero a una de las variables. Si se supone que $x = 7$,

$$\begin{aligned} 4(7) - 7y &= 0 \\ 28 - 7y &= 0 \\ -7y &= -28 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Entonces, dos miembros del conjunto solución son (0, 0) y (7, 4). La figura 2.2 ilustra la gráfica de la ecuación. ❑

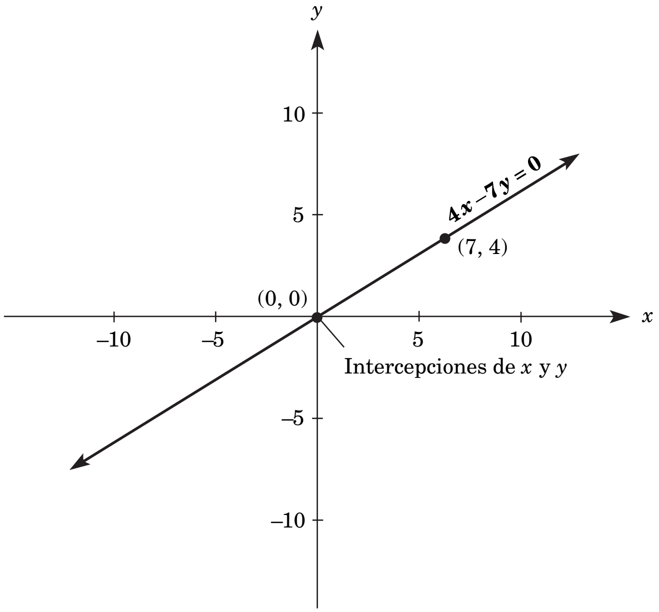


Figura 2.2 Gráfica de una ecuación lineal $4x - 7y = 0$.

> **NOTA** Cualquier ecuación lineal con dos variables que tenga la forma $ax + by = 0$ se traza como una línea recta que *pasa a través del origen.* La única propiedad de esta ecuación es que el lado derecho, c, es igual a cero.

Intercepciones

Al describir la apariencia gráfica de una línea recta, dos atributos significativos son la ***intercepción de* x** y la ***intercepción de* y**. Éstos se pueden describir en forma gráfica y algebraica.

> ### Definición: Intercepción de *x*
> La intercepción de x de una ecuación lineal es el punto en el cual la gráfica de la ecuación cruza el eje de las x. La intercepción de x representa los pares ordenados que se encuentran al suponer que $y = 0$.

> ### Definición: Intercepción de *y*
> La intercepción de y de una ecuación lineal es el punto en que la gráfica de la ecuación cruza el eje de las y. La intercepción de y representa los pares ordenados que se encuentran al suponer que $x = 0$.

Para una ecuación lineal con dos variables existe siempre una intercepción de x y una intercepción de y (excepto por dos casos especiales). En la figura 2.1, la intercepción de x es (8, 0), y la intercepción de y es (0, 4). En la figura 2.2, las intercepciones de x y y ocurren en el mismo punto, el origen. La intercepción de x es (0, 0) y la intercepción de y es (0, 0). Analice ambas figuras y verifique que la intercepción de x representa un punto que tiene un valor de y igual a 0 y que la intercepción de y representa un punto con valor de x igual a 0.

La ecuación $x = k$

Una ecuación lineal de la forma $ax = c$ es un caso especial de la ecuación (2.1), donde $b = 0$. Para esta ecuación no hay término con y. Dividir ambos lados de la ecuación entre a produce la forma simplificada

$$x = c/a$$

Puesto que c y a son constantes, se puede suponer que $c/a = k$ y escribir la ecuación en la forma equivalente

$$\boxed{x = k} \tag{2.8}$$

donde k es un número constante verdadero. Esta ecuación lineal es especial en el sentido de que x es igual a k sin importar el valor de y. Quizá se entienda más fácil si se escribe de nuevo la ecuación (2.8) como

$$x + 0y = k$$

La variable y puede tener cualquier valor en tanto que $x = k$. Esa es la única condición que requiere la ecuación. Como resultado, *cualquier ecuación de esta forma se traza como una línea vertical que cruza el eje de las* x *en* x = k.

Para ecuaciones de la forma $x = k$, hay una intercepción de x $(k, 0)$ pero no hay intercepción de y (a menos que $k = 0$). ¿Qué sucede cuando $k = 0$?

La ecuación $y = k$

Una ecuación lineal de forma $by = c$ también es un caso especial de la ecuación (2.1), donde $a = 0$; es decir, no hay término con x. Después de dividir ambos lados entre b, la forma reducida general de este caso es

$$\boxed{y = k} \tag{2.9}$$

donde k es un número verdadero constante. Esta ecuación indica que y es igual a k para cualquier valor de x. De nuevo, puede verse esto con mayor claridad al volver a escribir la ecuación (2.9) como

$$0x + y = k$$

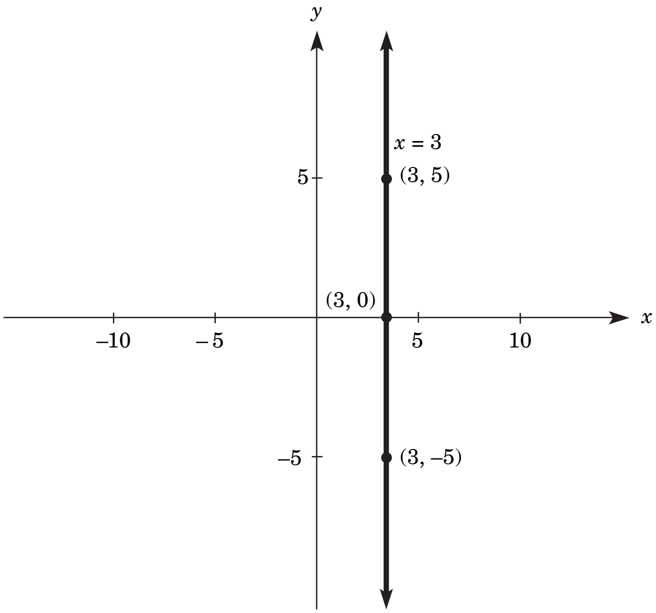


Figura 2.3 Gráfica de $x = 3$.

La variable x puede tomar cualquier valor siempre que $y = k$. *Cualquier ecuación en esta forma se grafica como una línea horizontal que cruza el eje de las* y *en* y = k.

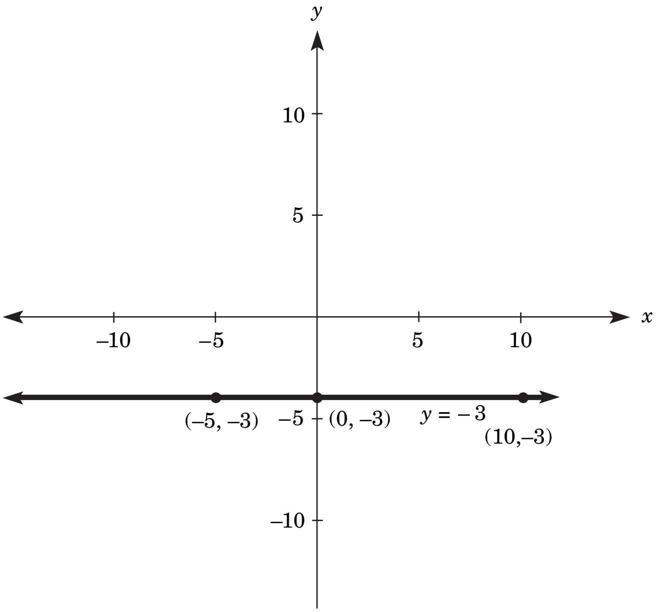


Figura 2.4 Gráfica de $y = -3$.

Pendiente

Cualquier línea recta, con la excepción de las líneas verticales, se puede caracterizar por su ***pendiente***. Por "pendiente" se refiere a la *inclinación de una línea recta* (ya sea que ascienda o descienda conforme uno se mueve de izquierda a derecha a lo largo del eje de las x) y *la razón con que la línea recta asciende o desciende* (en otras palabras, qué tan empinada está la pendiente).

La pendiente de una línea recta puede ser positiva, negativa, cero o indefinida. Una línea recta con pendiente positiva asciende de izquierda a derecha, o va cuesta arriba. Para dicha línea el valor de y se incrementa conforme x aumenta (o, por el contrario, y aumenta en tanto que x disminuye).

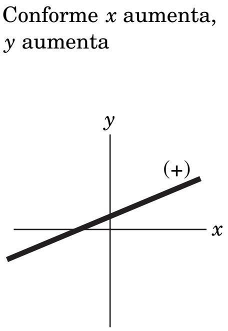


Figura 2.5 Pendiente positiva

Una línea recta con pendiente negativa desciende de izquierda a derecha, o va cuesta abajo. Para dicha línea recta el valor de y disminuye conforme x aumenta (o de forma inversa, y aumenta conforme x disminuye). Esto significa que x y y se comportan de manera **inversa**; conforme uno aumenta, el otro disminuye, y viceversa.

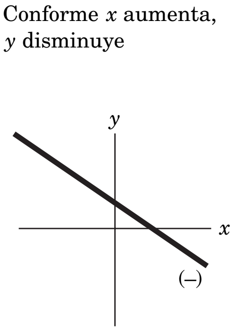
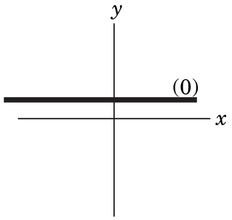


Figura 2.6 Pendiente negativa

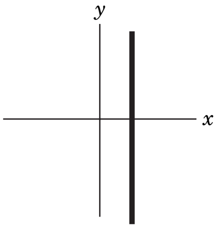
Una línea recta que tiene una pendiente cero es horizontal. Conforme x aumenta o disminuye, y se mantiene constante (el caso especial: $y = k$).



Conforme x aumenta o disminuye, y permanece constante $(y = k)$

Figura 2.7 Pendiente cero

Las líneas rectas verticales (de la forma $x = k$) tienen una pendiente indefinida. Ya que x es constante, no se puede observar el comportamiento de y conforme x cambia.



x es constante no obstante el valor de y $(x = k)$

Figura 2.8 Pendiente indefinida

La pendiente de una línea recta se puede cuantificar. El signo de la pendiente (número) indica si la línea asciende o desciende. La magnitud (valor absoluto) de la pendiente indica la inclinación relativa de la línea. Cuanto mayor sea el valor absoluto de la pendiente, mayor el ángulo con que la línea asciende o desciende. En la figura 2.9*a*) las líneas *AB* y *CD* tienen ambas pendientes positivas, pero la pendiente de *CD* es mayor que la de *AB*. De manera similar, en la figura 2.9*b*) las líneas *MN* y *OP* tienen ambas pendientes negativas, pero *OP* tiene la mayor pendiente en el sentido del valor absoluto; tiene una pendiente más empinada.

Dados dos puntos cualesquiera que caen en una línea recta (no vertical), permiten calcular la pendiente como razón del cambio en el valor de y dividido entre el cambio correspondiente en el valor de x mientras uno se mueve de un punto al otro, o

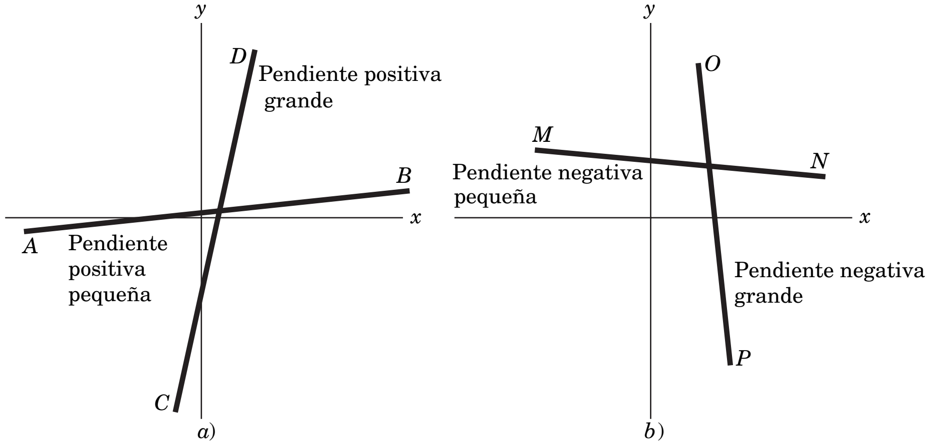


Figura 2.9 Pendiente: comparación de inclinaciones relativas.

$$\boxed{\begin{aligned}\text{Pendiente} &= \frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x}\\ &= \frac{\Delta y}{\Delta x}\end{aligned}}$$

donde Δ (delta) significa “cambio en”. Así, Δy denota “el cambio en el valor de y” y Δx “el cambio en el valor de x”.

La ***fórmula de los dos puntos*** es una manera de determinar la pendiente de una línea recta que une dos puntos.

Fórmula de los dos puntos

La pendiente m de una línea recta que une dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{2.10}$$

donde $x_1 \neq x_2$.

La figura 2.10 muestra el cálculo de Δx y Δy para el segmento de la línea PQ.

Ejemplo 7

Para calcular la pendiente de una línea que conecta (2, 4) y (5, 12), identifique de manera arbitraria un punto como (x_1, y_1) y el otro como (x_2, y_2). Dada la localización de los dos puntos en la figura 2.11, llámese (2, 4) como (x_1, y_1) y (5, 12) como (x_2, y_2).

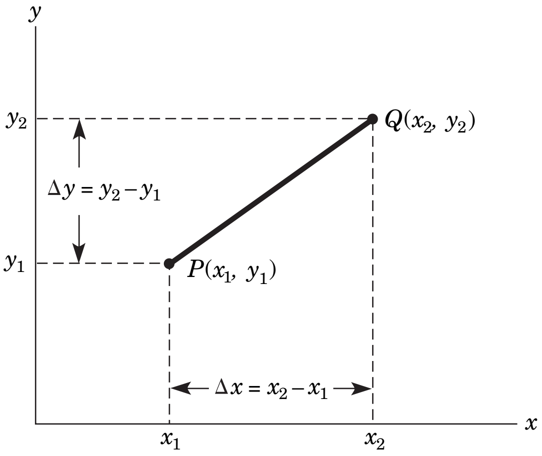


Figura 2.10 Se miden Δx y Δy.

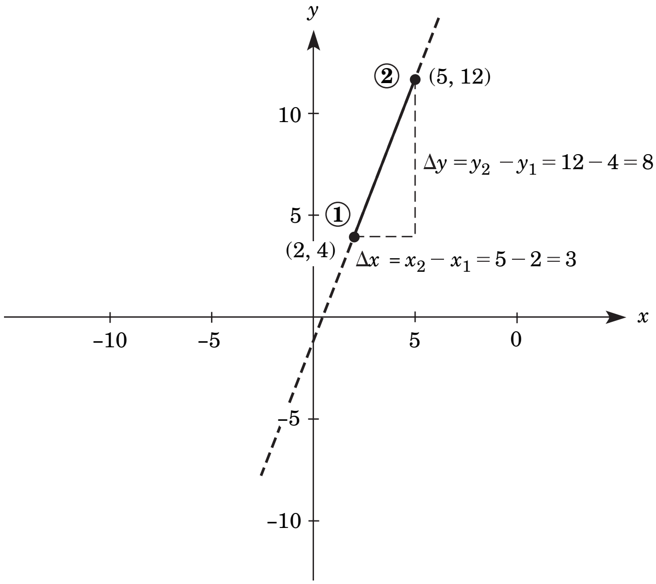


Figura 2.11

Al usar la fórmula de los dos puntos,

$$\begin{aligned} m &= \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{12 - 4}{5 - 2} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

La pendiente es positiva, lo que indica que el segmento de línea se eleva de izquierda a derecha. El signo combinado con la magnitud indica que al moverse a lo largo del segmento de línea, *y* aumenta con un índice de 8 unidades, por cada 3 unidades que aumenta *x*. ❑

Ejercicio de práctica

Verifique que la elección de (x_1, y_1) y (x_2, y_2) no afecta el resultado de la ecuación (2.10). En el ejemplo 7, asígnese (5, 12) como (x_1, y_1) y (2, 4) como (x_2, y_2) y vuelva a calcular la pendiente.

En la siguiente definición se indica otra manera de interpretar la pendiente.

Definición: Pendiente

La *pendiente* es el cambio en el valor de *y* si *x* aumenta 1 unidad.

De acuerdo con esta definición, el valor de $m = \frac{8}{3}$ indica que si *x* aumenta 1 unidad, *y aumentará* $\frac{8}{3}$ o $2\frac{2}{3}$ de unidad. Obsérvese esto en la secuencia de puntos identificados de la figura 2.12.

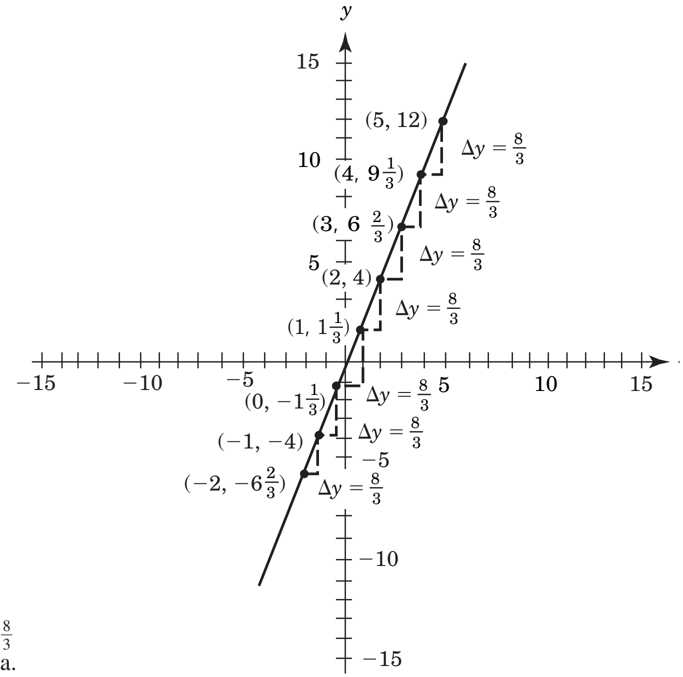


Figura 2.12 *y* se incrementa $\frac{8}{3}$ por cada unidad que *x* aumenta.

NOTA A lo largo de cualquier línea recta la pendiente es constante. Esto es, si se dice que una línea tiene una pendiente de -2, la pendiente del segmento de línea que une dos puntos cualesquiera en la línea equivaldrá siempre a -2.

Ejemplo 8

(Pendiente indefinida) Con anterioridad se verificó que cualquier ecuación lineal que tiene la forma $x = k$ se traza como una línea vertical que cruza el eje de las x en $(k, 0)$. *La pendiente de cualquier línea vertical es indefinida.* Esto se puede verificar al tratar de utilizar la fórmula de los dos puntos para determinar la pendiente de la línea descrita por $x = 5$. Si se eligen los dos puntos $(x_1, y_1) = (5, 0)$ y $(x_2, y_2) = (5, -1)$, la sustitución en la ecuación (2.10) dará

$$\begin{aligned} m &= \frac{-1-0}{5-5} \\ &= \frac{-1}{0} \end{aligned}$$

que no está definida. ❑

Sección 2.2 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 20, identifique las intercepciones de x y y para la ecuación lineal dada.

1. $3x - 4y = 36$
2. $-2x + 5y = -10$
3. $-x + 3y = -18$
4. $4x + 2y = -24$
5. $-4x = 16$
6. $-10x + 30 = 0$
7. $x + 2y = 0$
8. $5x + 3y = 0$
9. $-8x + 5y = -40$
10. $(x + y)/2 = 3x - 2y + 16$
11. $2x - 3y = -18 + x$
12. $-3x + 4y - 10 = 7x - 2y + 50$
13. $-15y + 90 = 0$
14. $(x - 2y)/3 - 12 = (2x + 4y)/3$
15. $ax + by = t$
16. $cx - dy = e$
17. $px = q$
18. $dx - ey + f = gx - hy$
19. $-ry = s$
20. $-e + fx - gy = h$

Para los ejercicios 21 a 36, trace la ecuación lineal dada.

21. $2x - 3y = -12$
22. $3x - 6y = 30$
23. $-x + 2y = 8$
24. $8x - 3y = -24$
25. $x + 4y = -10$
26. $4x + 3y = -24$
27. $3x + 8y = 0$
28. $10x + 5y = 0$
29. $5x - 2y = 0$
30. $8x + 4y = 0$
31. $-4x = 36$
32. $-2y = 10$
33. $-2.5 = -17.5$
34. $-8x = 20$
35. $-nx = t, n > 0, t > 0$
36. $my = q, m > 0, q < 0$
37. ¿Cuál es la ecuación del eje de las x? ¿Del eje de las y?

En los ejercicios 38 a 59, calcule la pendiente del segmento de línea que une los dos puntos. Interprete el significado de la pendiente en cada caso.

38. $(2, 8)$ y $(-4, -16)$
39. $(-3, 20)$ y $(2, -5)$
40. $(3, 5)$ y $(-1, -15)$
41. $(10, -8)$ y $(12, 4)$
42. $(-2, -3)$ y $(1, -9)$
43. $(5, 8)$ y $(3, 15)$
44. $(4, 3)$ y $(-1, -12)$
45. $(8, 24)$ y $(5, -5)$
46. $(-2, 8)$ y $(3, -22)$
47. $(-5, 4)$ y $(-5, 6)$
48. $(-4, -20)$ y $(-4, 30)$
49. $(5, 0)$ y $(25, 0)$
50. $(0, 30)$ y $(0, -25)$
51. $(5, 0)$ y $(0, -10)$
52. (a, b) y $(-a, b)$
53. $(0, 0)$ y (a, b)
54. $(d, -c)$ y $(0, 0)$
55. $(-5, -5)$ y $(5, 5)$
56. $(3, b)$ y $(-10, b)$
57. $(-a, -b)$ y $(a, -b)$
58. $(a + b, c)$ y (a, c)
59. $(c + d, -c - d)$ y $(a + b, -a - b)$

2.3 Forma de pendiente-intercepción

Según un punto de vista ventajoso y diferente

En la sección 2.1 se determinó la forma general de una ecuación lineal con dos variables, como

$$ax + by = c \tag{2.1}$$

Como se verá, una simple modificación de esta ecuación puede generar información importante sobre la ecuación y su gráfica.

Al despejar y en la ecuación (2.1), se obtiene

$$by = c - ax$$

o

$$\boxed{y = \frac{c}{b} - \frac{ax}{b}} \tag{2.11}$$

Para cualquier ecuación lineal los términos c/b y $-a/b$ del lado derecho de la ecuación (2.11) tienen especial importancia, dado que $b \neq 0$. El término c/b en la ecuación (2.11) es la ordenada de la intercepción de y y $-a/b$ (que puede verse como multiplicador de x) es la pendiente de la ecuación.

Esta información se obtiene a partir de cualquier ecuación lineal de la forma de la ecuación (2.1) *si en ésta se puede despejar* y. La ecuación (2.11) se conoce como la ***forma de pendiente-intercepción*** de una ecuación lineal. Es posible generalizar la ecuación (2.11) en una forma más simple:

$$\boxed{y = mx + k} \tag{2.12}$$

donde m representa la pendiente de la línea y k es *la coordenada de la intercepción de* y.

Para ilustrar, la ecuación

$$5x + y = 10$$

se puede volver a escribir como

$$y = -5x + 10$$

NOTA ¿Por qué el autor usa la letra k en vez de b en la ecuación (2.12)? ¡Con el fin de no confundirse con la b de la ecuación (2.1)! Los estudiantes han visto con frecuencia la forma de pendiente-intercepción como $y = mx + b$.

Ejercicio de práctica

Seleccione dos puntos que satisfagan la ecuación $5x + y = 10$ y verifique que la pendiente equivalga a -5 al usar la ecuación (2.10).

Ejemplo 9 Se puede volver a escribir la ecuación $y = \frac{2x}{3}$ en la forma de pendiente-intercepción como

$$y = \left(\tfrac{2}{3}\right)x + 0$$

La ausencia de la constante aislada a la derecha sugiere implícitamente que $k = 0$. La gráfica de esta ecuación es una línea que tiene una pendiente de $\frac{2}{3}$ y una intercepción de y (0, 0).

Ejemplo 10 El caso especial de una ecuación lineal $y = k$ está en la forma de pendiente-intercepción. Para comprender esto, debe reconocerse que es posible escribir esta ecuación en la forma $y = 0x + k$. La ausencia del término x al lado derecho sugiere que $m = 0$; es decir, la pendiente de la línea que tiene esta forma es igual a cero. Esto se confirma en la sección 2.2 cuando se analizan las características gráficas de este caso. La intercepción de y es $(0, k)$ para dichas ecuaciones.

Ejemplo 11 Para el caso especial $x = k$, es imposible despejar la forma de pendiente-intercepción de la ecuación lineal. La variable y no es parte de la ecuación. Se concluye que es imposible determinar la pendiente y la intercepción de y para ecuaciones que tienen esta forma. Regrésese a la figura 2.3 para ver si esta conclusión es consistente con la encontrada con anterioridad. ❑

Interpretación de la pendiente y la intercepción de *y*

En muchas aplicaciones de las ecuaciones lineales, la pendiente y la intercepción de y tienen interpretaciones significativas. Tome, por ejemplo, la ecuación del salario

$$y = 3x + 25$$

donde y = *el salario semanal de un vendedor, en dólares*
y x = *número de unidades vendidas durante la primera semana*

La ecuación del salario es lineal y se expresa en la forma de pendiente-intercepción. De manera gráfica, la ecuación se representa mediante la línea de la figura 2.13, que tiene una

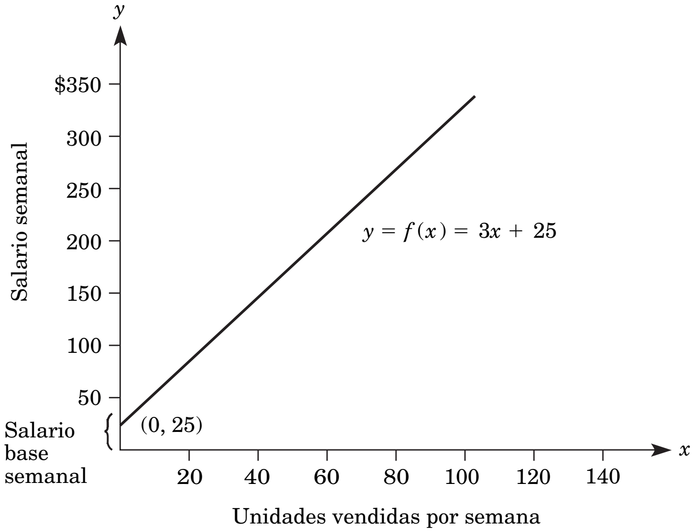


Figura 2.13 Función del salario.

pendiente de $+3$ e intercepción de y en (0, 25). Obsérvese que se dibujó esta ecuación sólo para valores no negativos de x y y. ¿Puede decir por qué sería esto apropiado?

Ya que la pendiente representa el cambio en y asociado a un incremento de una unidad en x, la pendiente de $+3$ significa que el salario semanal y aumenta $3 por cada unidad adicional vendida. La coordenada y de la intercepción de y representa el valor de y cuando $x = 0$. Por lo tanto, 2.5 representa el salario que se ganaría si no se vendiera ninguna unidad. Se puede considerar esta cantidad como el salario base para este vendedor.

Ejemplo 12 Un departamento de policía estima que el costo total C de posesión y operación de una patrulla se puede describir con la ecuación lineal

$$C = 0.40x + 18\,000$$

donde C = *costo total, en dólares*
y x = *número de millas conducidas*

Esta ecuación está en la forma de pendiente-intercepción con una pendiente de 0.40 e intercepción de C (que es el equivalente a la intercepción de y) de (0, 18 000). La pendiente sugiere que el costo total se incrementa a una relación de $0.40 por cada milla conducida adicional. La intercepción de C indica un costo de $18 000 si el auto se conduce cero millas. ❑

Sección 2.3 Ejercicios de seguimiento

Para los ejercicios 1 a 24, vuelva a escribir cada ecuación en la forma de pendiente-intercepción y determine la pendiente y la intercepción de y.

1. $3x + 2y = 12$
2. $-x + 3y = 2.1$
3. $4x - 3y = 24$
4. $3x - 5y = -12.5$

5. $-x + y = 6$

6. $2x - y = -3$

7. $(x + 2y)/2 = -10$

8. $(-2x + y)/3 = 12$

9. $(3x - 5y)/4 = -5$

10. $(-x + 2y)/4 = 3x - y$

11. $2x = (5x - 2y)/4$

12. $(-x + 3y)/2 = 10 - 2x$

13. $5x - 3y = 0$

14. $8x - 3y = 36$

15. $3x - 3y + 10 = 2x$

16. $3y - 5x + 10 = 4x + 2y + 15$

17. $2x + 3y = 4x + 3y$

18. $-5x + y - 12 = 2y - 5x$

19. $8y + 24 = 0$

20. $3x - 6 = 0$

21. $mx + ny = p$

22. $mx - n = 0$

23. $c - dy = 0$

24. $dx = cy - f$

25. **Mujeres en la fuerza laboral** Se espera que el número de mujeres en la fuerza laboral aumente durante la próxima década, pero no de manera tan espectacular como sucedió durante el decenio de 1970. Un consultor de pronósticos utilizó la ecuación lineal $n = 41.6 + 1.1t$ para predecir el número de mujeres entre 35 y 44 años de edad que estarán en la fuerza laboral. En esta ecuación, n equivale al número de mujeres (de 35 a 44 años) en la fuerza laboral (medido en millones) y t es igual al tiempo medido en años *desde* 1996 ($t = 0$ corresponde a 1996). Si se grafica n en el eje vertical:

a) Trace la ecuación.

b) Identifique la pendiente y la intercepción de y (aquí, intercepción de n).

c) Interprete el resultado de la pendiente y la intercepción de n en esta aplicación.

d) Pronostique el número de mujeres en este rango de edad que estarán en la fuerza laboral en 2005. En el año 2010.

26. La cámara de comercio intenta determinar para un complejo vacacional de verano cuántos turistas recibirá en cada temporada en los años venideros. Una empresa de investigación de mercados estimó que es posible describir el número de turistas por año con la ecuación $p = 550\,000 + 12\,500t$, donde p = número de turistas por año y t = años (medidos desde esta temporada). Por consiguiente, $t = 0$ identifica la temporada actual, $t = 1$ la próxima temporada, etc. Si p se grafica en el eje vertical:

a) Trace la ecuación.

b) Identifique la pendiente y la intercepción de y (en este caso intercepción p).

c) Interprete el significado de la pendiente y la intercepción de p en esta aplicación.

d) Haga una estimación del número de turistas que se espera dentro de cinco años a partir de esta temporada.

27. **¡Conversión de medidas de temperaturas!** $C = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}$ es una ecuación que relaciona la temperatura en unidades Celsius con la temperatura medida en la escala de Fahrenheit. Sea C = grados Celsius y F = grados Fahrenheit; suponga que la ecuación se grafica con C medido en el eje vertical.

a) Identifique la pendiente y la intercepción de C.

b) Interprete el resultado de la pendiente y la intercepción de C con el propósito de convertir grados Fahrenheit a Celsius.

c) Despeje F en la ecuación y vuelva a trabajar con las partes *a*) y *b*) si se traza F en el eje vertical.

28. El departamento de policía cree que se puede estimar el número de crímenes importantes que ocurren cada mes con la ecuación

$$c = 14\,000 - 25p$$

donde c es igual al número de crímenes importantes esperado por mes y p equivale al número de oficiales asignados al patrullaje preventivo. Si se traza c en el eje vertical:

a) Identifique la pendiente e interprete su significado.
b) Identifique la intercepción de c e interprete su significado.
c) Identifique la intercepción de p e interprete su significado.

29. El valor en libros de una máquina se expresa mediante la ecuación

$$V = 90\,000 - 15\,000t$$

donde V es igual al valor en libros en dólares y t equivale a la edad de la máquina expresada en años.

a) Identifique las intercepciones de V y t.
b) Interprete el resultado de las intercepciones.
c) Interprete el significado de la pendiente.
d) Trace la función.

30. Calificaciones SAT Una universidad pequeña observó una tendencia positiva en la calificación SAT promedio de los aspirantes a la universidad. El análisis dio como resultado la ecuación

$$s = 1\,150 + 15t$$

donde s expresa la calificación SAT promedio para un año dado y t es igual al tiempo medido en años desde 1995 ($t = 0$).

a) Identifique las intercepciones de t y s.
b) Interprete el significado de las intercepciones. (¿Tiene sentido su interpretación de la intercepción de t?)
c) Interprete el significado de la pendiente.
d) Trace la ecuación.

31. Mezcla de productos Una compañía fabrica dos productos. La disponibilidad de trabajo semanal es de 180 horas laborales. Cada unidad del producto 1 requiere tres horas de trabajo y cada unidad del producto 2 requiere 5 horas laborales. Si la gerencia desea usar todas las horas laborales, la ecuación

$$3x + 5y = 180$$

expresa este requerimiento, donde x es igual al número de unidades fabricadas del producto 1 y y es el número de unidades fabricadas del producto 2. Vuelva a escribir la ecuación en la forma de pendiente-intercepción. Despeje la intercepción de x e interprete su significado.

32. Administración de cartera Un administrador de cartera está preocupado porque dos acciones generan para un cliente un ingreso anual de \$10 000. Las dos acciones generan dividendos anuales de \$2.80 y \$3.75 por acción, respectivamente. Si x es el número de acciones del capital 1 y y es el número de acciones del capital 2, la ecuación

$$2.8x + 3.75y = 10\,000$$

indica que el ingreso anual de dividendos total de las dos acciones debe ser \$10 000. Vuelva a escribir la ecuación en la forma de pendiente-intercepción e interprete el significado de la pendiente y la intercepción de y en esta aplicación. Despeje la intercepción de x e interprete su significado.

2.4 Determinación de la ecuación de una línea recta

En esta sección se muestra cómo determinar la ecuación de una relación lineal. La manera en que se determina esta ecuación depende de la información disponible. En las secciones siguientes se analizan las diferentes posibilidades. En cada caso se busca la *forma de pendiente-intercepción*. Por consiguiente, se requiere identificar los *parámetros* de pendiente e intercepción m y k.

Pendiente e intercepción

La situación más sencilla es aquella en la cual se conoce la pendiente m y la intercepción de y $(0, k)$. Para determinar la ecuación lineal en este caso casi trivial, simplemente se sustituyen m y k en la forma de pendiente-intercepción de la ecuación (2.12).

Ejemplo 13

Determine la ecuación de la línea recta que tiene una pendiente de -5 y una intercepción de y de $(0, 15)$.

SOLUCIÓN

Al sustituir los valores de $m = -5$ y $k = 15$ en la ecuación (2.12) resulta

$$y = -5x + 15$$

Definida de nuevo como la ecuación (2.1), una forma equivalente de esta ecuación es

$$5x + y = 15$$ ❑

Pendiente y un punto

Dada la pendiente y un punto que cae sobre una línea recta, se pueden sustituir la pendiente m y las coordenadas del punto dado en la ecuación (2.12) para despejar k.

Ejemplo 14

Ya que la pendiente de una línea recta es -2 y un punto en la línea recta es $(2, 8)$, es posible sustituir estos valores en la ecuación (2.12), lo que produce

$$8 = (-2)(2) + k$$

o

$$12 = k$$

Puesto que $m = -2$ y $k = 12$, la ecuación de pendiente-intercepción es

$$y = -2x + 12$$

Y, como antes, se puede volver a escribir esta ecuación en la forma equivalente

$$2x + y = 12$$ ❑

> **NOTA** Quizá se pregunte qué forma de la ecuación lineal [$ax + by = c$ (ecuación 2.1) o $y = mx + k$ (ecuación 2.12)] es la forma correcta o preferida. ¡Ambas son correctas! La forma preferida depende de lo que intente hacer con la ecuación. Según el tipo de análisis que se va a efectuar, una de estas formas puede ser más apropiada que la otra.

Ejemplo 15 Si la pendiente de una línea recta es cero y un punto en la línea es (5, −30), puede encontrarse la ecuación de la línea al sustituir primero la pendiente cero y las coordenadas (5, −30) en la ecuación (2.12).

$$y = mx + k$$
$$-30 = (0)(5) + k$$

o

$$-30 = k$$

Dado que $m = 0$ y $k = -30$, la ecuación de la pendiente-intercepción es

$$y = 0x + (-30)$$

o

$$y = -30$$

Ejemplo 16 **(Fórmula del punto pendiente)** Dada una línea recta no vertical con pendiente m y que contiene el punto (x_1, y_1), se expresaría la pendiente de la línea recta que une (x_1, y_1) con cualquier otro punto (x, y) en la línea recta como

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Al reordenar esta ecuación, se tiene

$$y - y_1 = m(x - x_1) \tag{2.13}$$

que es la ***fórmula del punto pendiente*** para una línea recta. Se puede emplear esta fórmula para determinar la ecuación de una línea recta no vertical, dada la pendiente y un punto en la línea recta. Supóngase que una línea recta tiene una pendiente de 5 y contiene el punto (−4, 10). Al sustituir en la ecuación (−2.13) y despejar y,

$$y - 10 = 5[x - (-4)]$$
$$y - 10 = 5x + 20$$
$$y = 5x + 30$$

que es la forma de pendiente-intercepción de la ecuación.

Ejemplo 17 Al considerar la ecuación lineal $3x - 6y = 24$:

a) ¿Cuál es la pendiente de la línea recta que se representa mediante la ecuación dada?
b) ¿Cuál es la pendiente de cualquier línea recta paralela a la línea recta dada?
c) ¿Cuál es la pendiente de cualquier línea recta perpendicular a la línea recta dada?
d) ¿Cuántas líneas rectas distintas son perpendiculares a esta línea recta?
e) Encontrar la ecuación de la línea que es perpendicular a la línea dada *y* la cual pasa por el punto (2, 5).

SOLUCIÓN

a) La ecuación dada se puede volver a definir en la forma de pendiente-intercepción como

$$-6y = 24 - 3x$$

o

$$y = -4 + \tfrac{1}{2}x$$

A partir de esta ecuación, la pendiente es igual a $+\frac{1}{2}$, y la intercepción de *y* ocurre en $(0, -4)$.

b)

> **Líneas paralelas**
> Dos líneas rectas son paralelas si tienen la misma pendiente.

Ya que la pendiente de la línea recta dada es igual a $+\frac{1}{2}$, cualquier línea recta paralela tiene una pendiente de $+\frac{1}{2}$.

c)

> **Líneas perpendiculares**
> Si una línea recta tiene una pendiente m_1 ($m_1 \neq 0$), la pendiente de cualquier línea recta perpendicular a la línea recta dada tiene una pendiente que equivale al recíproco negativo de la línea recta dada, o $m_2 = -1/m_1$.

Puesto que $m_1 = \frac{1}{2}$, la pendiente de cualquier línea recta perpendicular a la línea recta dada $3x - 6y = 24$ es

$$\begin{aligned} m_2 &= -\frac{1}{\frac{1}{2}} \\ &= -2 \end{aligned}$$

d) Ya que hay un conjunto infinito de líneas rectas con $m = -2$, un número infinito de líneas rectas son perpendiculares a esta línea. ❑

Dos puntos

Una situación más probable es que algunos puntos de datos que caen en una línea recta se tengan como información inicial y se desea determinar la ecuación de la línea recta. Suponga que se dan las coordenadas de dos puntos que caen en una línea recta. Puede determinarse la pendiente de la línea recta al usar la fórmula de los dos puntos [ecuación (2. 10)]. Tan pronto como se conoce la pendiente, se puede determinar la intercepción de *y* al usar cualquiera de los dos puntos de datos y proceder como se hizo en la sección anterior.

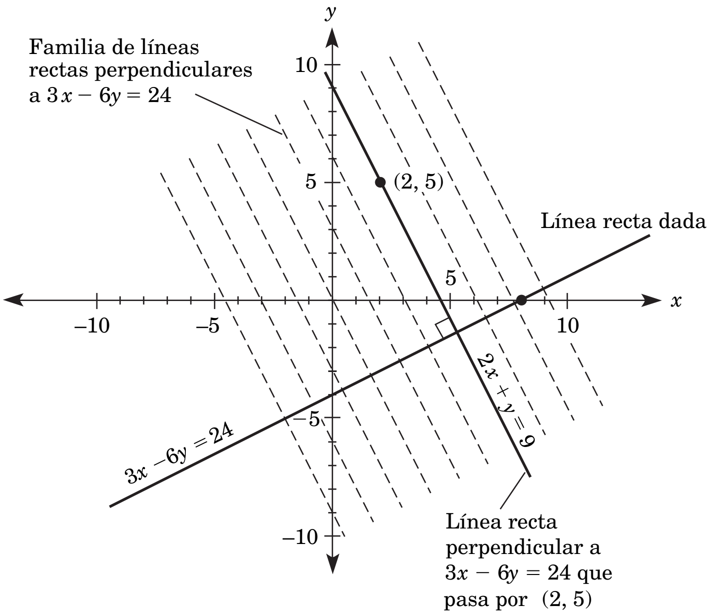


Figura 2.14

Ejemplo 18

Para determinar la ecuación de la línea recta que pasa por (−4, 2) y el origen, se sustituyen las coordenadas en la fórmula de los dos puntos, obteniendo como resultado

$$m = \frac{0 - 2}{0 - (-4)}$$

o

$$m = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Al sustituir $m = -\frac{1}{2}$ y las coordenadas (−4, 2) en la ecuación (2.13) da

$$y - 2 = (-\tfrac{1}{2})[x - (-4)]$$

$$y - 2 = -\tfrac{1}{2}x - 2$$

$$y = -\tfrac{1}{2}x$$

Por tanto, la forma de pendiente-intercepción de la ecuación es

$$y = -\tfrac{1}{2}x$$ ❑

NOTA En este último ejemplo debiera notarse que el origen es la intercepción de *y*. ¿Cómo habría simplificado esto el análisis?

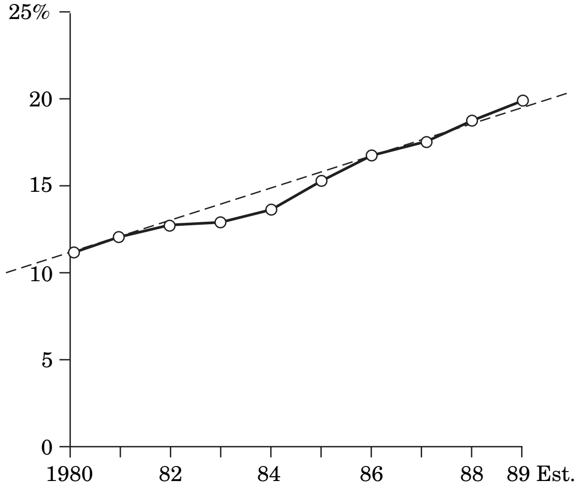


Figura 2.15 Porcentaje de electricidad total generada en Estados Unidos atribuible a fuentes nucleares. (Fuentes: Chicago Tribune, North American Electricity Council.)

Sección 2.4 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 36, determine la forma de pendiente-intercepción, dados los atributos indicados.

1. Pendiente $= -3$, intercepción de $y = (0, 10)$
2. Pendiente $= 5$, intercepción de $y = (0, -4)$
3. Pendiente $= \frac{1}{2}$, intercepción de $y = (0, 2)$
4. Pendiente $= -\frac{5}{2}$, intercepción de $y = (0, 12)$
5. Pendiente $= -r$, intercepción de $y = (0, -3t)$
6. Pendiente indefinida, número infinito de intersecciones de *y*
7. Pendiente $= -2$, $(4, -2)$ cae en la línea recta
8. Pendiente $= -5$, $(-3, 12)$ cae en la línea recta
9. Pendiente $= \frac{3}{2}$, $(-5, 8)$ cae en la línea recta
10. Pendiente $= -\frac{1}{2}$, $(4, 0)$ cae en la línea recta
11. Pendiente $= 2.5$, $(-3, 6)$ cae en la línea recta
12. Pendiente $= -3.5$, $(1.5, -7.5)$ cae en la línea recta

13. Pendiente = 3.6, (2.4, −4.8) cae en la línea recta
14. Pendiente = −5.4, (−6, 12.4) cae en la línea recta
15. Pendiente = w, (p, q) cae en la línea recta
16. Pendiente = $-a$, (4, −2) cae en la línea recta
17. Pendiente indefinida, (3, −5) cae en la línea recta
18. Pendiente = 0, (20, −5) caen en la línea recta
19. Pendiente = 0, (u, v) cae en la línea recta
20. Pendiente indefinida, ($-t$, v) cae en la línea recta
21. (−4, 5) y (−2, 3) caen en la línea recta
22. (3, 2) y (−12, −1) caen en la línea recta
23. (20, 240) y (15, 380) caen en la línea recta
24. (12, 760) y (−8, −820) caen en la línea recta
25. (0.234, 20.75) y (2.642, 18.24) caen en la línea recta
26. (5.76, −2.48) y (3.74, 8.76) caen en la línea recta
27. (a, b) y (c, d) caen en la línea recta
28. (a, −3) y (a, 15) caen en la línea recta
29. ($-d$, b) y (e, b) caen en la línea recta
30. (p, r) y ($-p$, r) caen en la línea recta
31. Pasa a través de (−2, 4) y es paralela a la línea recta $3x - 4y = 20$
32. Pasa a través de (2, −10) y es paralela a la línea recta $5x - y = 0$
33. Pasa a través de (2, −5) y es paralela a la línea recta *a*) $x = 7$ y *b*) $y = 6$
34. Pasa a través de (−20, 30) y es perpendicular a la línea recta $4x + 2y = -18$
35. Pasa a través de (4, 8) y es perpendicular a la línea recta $8x - 2y = 0$
36. Pasa a través de (−2, 5) y es perpendicular a la línea recta *a*) $x = 7$ y *b*) $y = 6$

37. **Depreciación** Se espera que el valor de una máquina disminuya con el paso del tiempo de manera lineal. Dos puntos de datos indican que el valor de la máquina en $t = 0$ (momento de la compra) es $80 000 y su valor en un año será igual a $66 000.

a) Determinar la ecuación de la pendiente-intercepción ($V = mt + k$) que relaciona el valor V de la máquina con su antigüedad t.
b) Interpretar el significado de la pendiente y la intercepción de V.
c) Despejar la intercepción de t e interpretar su significado.

38. **Depreciación** Se espera que el valor de una máquina disminuya con el paso del tiempo de manera lineal. Dos puntos de datos indican que el valor de la máquina en un año después de la compra será de $120 000 y su valor después de 5 años será de $48 000.

a) Determine la ecuación de la pendiente-intercepción ($V = mt + k$) que relaciona el valor V de la máquina con su antigüedad t, en años.
b) Interprete el significado de la pendiente y la intercepción de V.
c) Determine la intercepción de t e interpretar su significado.

39. Si C es igual a grados Celsius y F equivale a grados Fahrenheit, suponga que la relación entre las dos escalas es lineal y se grafica con F en el eje vertical. Dos puntos de datos en la línea que relacionan C y F son (5, 41) y (25, 77). Usando estos puntos, determinar la ecuación de la pendiente-intercepción que permite transformar de temperatura Celsius a temperatura Fahrenheit. Identifique e interprete el significado de la pendiente, de la intercepción de C y la intercepción de F.

40. Retiro de la universidad El mayor programa de retiro para profesores universitarios es el Teachers Insurance and Annuity Association/College Retirement Equities Fund (TIAA/CREF). Una de las opciones de inversión en este programa es la cuenta de mercado de dinero CREF, que se inició en 1988. La figura 2.16 ilustra el desempeño de esta inversión durante los primeros 10 trimestres de su existencia. Obsérvese que V es el valor de una acción (unidad) en este fondo y que los puntos de datos reflejan los valores al final de cada mes. Al parecer, el valor de este mercado de dinero ha estado aumentando aproximadamente con una tasa lineal. Si se seleccionan los puntos de datos (6, 11.32) y (9, 12.04) para estimar la relación entre el valor de una acción V y el tiempo t, medido en trimestres desde el inicio del fondo de mercado de dinero CREF ($t = 0$ corresponde al 31 de marzo de 1988):

a) Determine la forma de la pendiente-intercepción para la ecuación estimada.
b) Identifique e interpretar el significado de la pendiente.
c) Pronostique el valor por acción el 30 de junio de 1991 y el 31 de marzo de 1992.

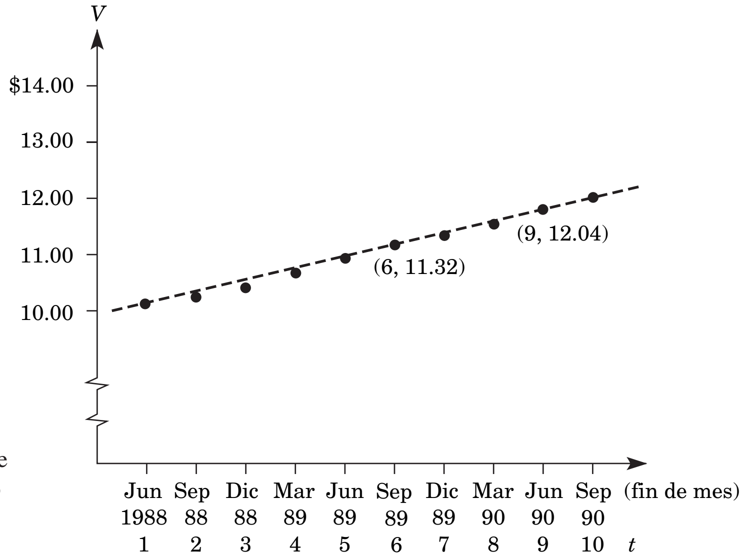


Figura 2.16 Valores por acción (unidad) de la cuenta del mercado de dinero CREF al final del trimestre.

41. Retiro de la universidad (*continúa*) La inversión en el mercado de dinero CREF se estableció el 31 de marzo de 1988. El valor inicial por acción se fijó en $10.00.

a) Usando la ecuación encontrada en la parte *a*) del ejercicio previo, estime el valor por acción el 31 de marzo de 1988. ¿Cuánto error hay en la estimación?
b) De modo similar, determine los valores actuales por acción el 30 de junio de 1991 y el 31 de marzo de 1992,* y compárelos con los pronósticos de la parte *c*) del ejercicio previo. ¿Cuánto error había?

c) Mientras tiene acceso a los datos en la parte *b*), verifique la exactitud de la ecuación estimada para otros puntos de datos trimestrales.

42. Consumo de mariguana entre estudiantes de preparatoria La figura 2.17 ilustra algunos datos de encuestas relacionadas con el consumo de mariguana entre los estudiantes de preparatoria. Se tomó una muestra de estudiantes de preparatoria cada dos años entre 1979 y 1989. Los datos de la figura 2.17 reflejan el porcentaje de estudiantes encuestados que indicaron haber consumido mariguana durante los 30 días previos. Los puntos de datos sugieren que el porcentaje de estudiantes está disminuyendo con un índice aproximadamente lineal con el paso del tiempo. Si se utilizan los puntos de datos para 1979 (1, 36.5) y 1989 (11, 16.5) para estimar la ecuación lineal que relaciona el porcentaje de estudiantes P con tiempo t ($t = 1$ corresponde a 1979):

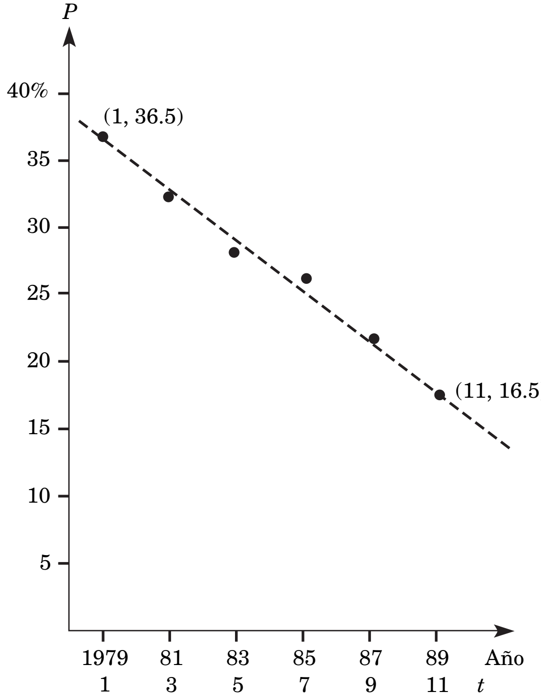


Figura 2.17 Porcentaje de alumnos de preparatoria que consumieron mariguana en los últimos 30 días.

a) Determine la forma de pendiente-intercepción de la ecuación.

b) Pronostique el porcentaje esperado para 1991 y 1995.

c) Interprete el significado de la pendiente y la intercepción de P.

---

* Póngase en contacto con la Teachers Insurance and Annuity Association/College Retirement Equities Fund, 730 Third Avenue, Nueva York, Nueva York 10017 (o llame al 1-800-842-2733).

2.5 Ecuaciones lineales con más de dos variables

Cuando las ecuaciones lineales tienen más de dos variables, las propiedades algebraicas siguen siendo básicamente las mismas, pero las características visuales o gráficas cambian de manera considerable o se pierden todas juntas.

Sistemas de coordenadas tridimensionales

Es posible describir el espacio tridimensional utilizando un ***sistema de coordenadas tridimensional***. En tres dimensiones se usan ejes que son perpendiculares entre sí y se interceptan en sus respectivos puntos cero. La figura 2.18 muestra un conjunto de ejes llamados por sus variables x_1, x_2 y x_3. El punto de intercepción de los tres ejes se denomina ***origen***. Al usar coordenadas de tres componentes (***tríos ordenados***), (x_1, x_2, x_3), las coordenadas del origen son (0, 0, 0).

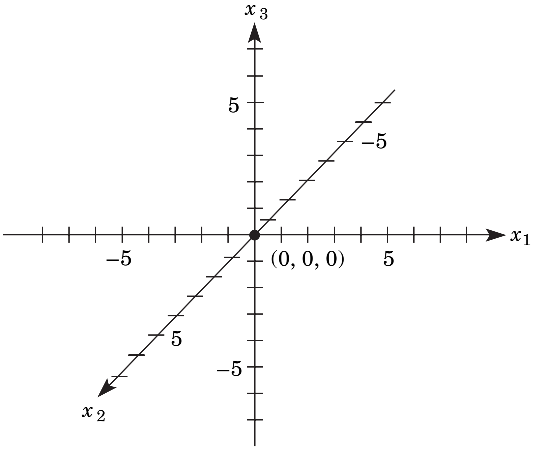


Figura 2.18 Sistema de ejes de coordenadas en tres dimensiones.

Observe que al trazar tres dimensiones en papel (bidimensional) se requiere cierta perspectiva que puede ser difícil distinguir a primera vista. Podría haberse dibujado la figura 2.18 como si se estuviese viendo justo “debajo” del eje de las x_2. En ese caso no se tendría sentido de profundidad o localización respecto del eje de las x_2. Por tanto, se giran los ejes de coordenadas al rotar el eje x_3 en el sentido de las manecillas del reloj. Esto permite tener sentido de profundidad cuando se dibuja el eje de las x_2 en un ángulo.

Así como los ejes de coordenadas de dos dimensiones dividen el espacio bidimensional en cuadrantes, los ejes en tres dimensiones dividen el espacio tridimensional en ***octantes***. Esto se ilustra en la figura 2.19. Observe las características de signo en cada octante. Las coordenadas de tres componentes permiten especificar la posición o dirección de cualquier punto en tres dimensiones.

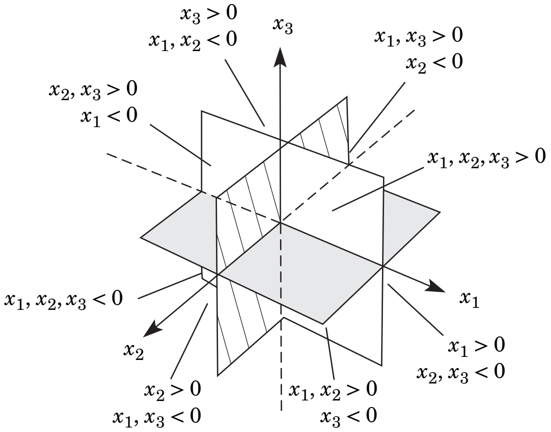


Figura 2.19 Octantes del espacio tridimensional.

Al igual que con las coordenadas bidimensionales, cada componente de (x_1, x_2, x_3) especifica la posición de un punto respecto de cada eje. Analice con cuidado la figura 2.20. Para ayudarle a comprender esta figura, se dibujó un ***poliedro rectangular.*** Junto con varios puntos más, se interesa en las posiciones de las esquinas de este poliedro. Es obvio que *G* se localiza en el origen y que tiene coordenadas (0, 0, 0). El punto *F* cae directo a 4 unidades de distancia sobre el eje x_2. Sus coordenadas son (0, 4, 0). El punto *A* forma la esquina superior izquierda de un extremo (*ABGH*) del poliedro. Ya que *H* se encuentra en el eje x_1 y *A* está verticalmente arriba de *H*, puede concluirse que la coordenada x_1 de *A* es −5, *y* la coordenada x_2 de *A* es 0. Para finalizar, los puntos *A*, *B*, *C* y *D* parecen tener todos la misma *altura* (respecto del eje de las x_3). Ya que el punto *B* cae en el eje de las x_3 a una altura de 4, puede concluirse que *A* tiene la misma coordenada x_3. Por tanto, *A* se localiza en (−5, 0, 4). Vea si está de acuerdo con las coordenadas de *I* y *k*.

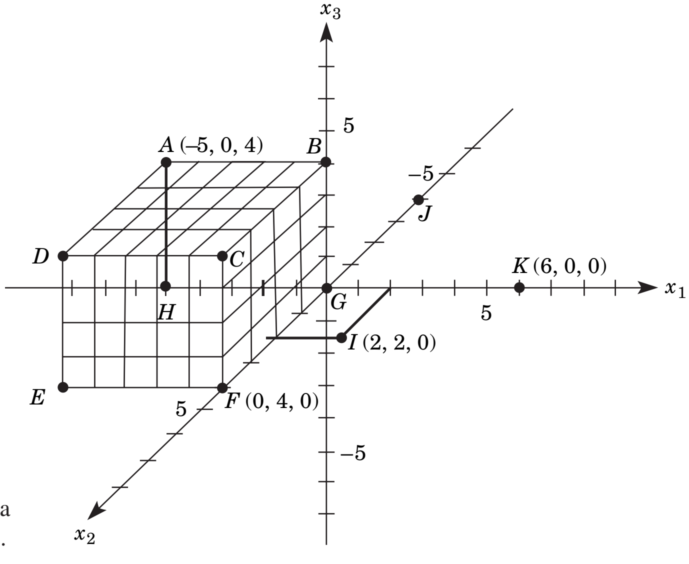


Figura 2.20 Puntos muestra en un espacio tridimensional.

Ejercicio de práctica

Ponga a prueba sus aptitudes y defina las coordenadas de los puntos B, C, D, E y J.
Respuesta: $B(0, 0, 4)$, $C(0, 4, 4)$, $D(-5, 4, 4)$, $E(-5, 4, 0)$, $J(0, -4, 0)$.

Ecuaciones con tres variables

Las ecuaciones lineales que tienen la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$$

se dibujan como ***planos*** en tres dimensiones. *El número de variables en una ecuación determina el número de dimensiones requeridas para representar de manera gráfica la ecuación.* Tres variables requieren tres dimensiones. No es tan importante en realidad ser capaz de dibujar en tres dimensiones. Es más importante: 1) ser capaz de *reconocer* una ecuación lineal que implica tres variables; 2) estar consciente de que las ecuaciones lineales que implican tres variables se trazan como planos en tres dimensiones; 3) saber lo que es un *plano*, y 4) tener una idea de cómo se representan los planos en forma gráfica. Es evidente que un plano es una superficie plana como el techo, las paredes y el piso de la habitación en que se encuentra en este momento. En vez de dos puntos necesarios para trazar una línea, se requieren tres puntos para definir un plano. Los tres puntos no deben ser ***colineales***; es decir, no deben caer en la misma línea. Considere, por ejemplo, la ecuación

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12 \tag{2.14}$$

Si se pueden identificar tres elementos del conjunto solución, éstos especificarán las coordenadas de tres puntos que caen en el plano. Tres miembros que se identifican con facilidad son las intercepciones. Éstas se encuentran al establecer dos variables cualesquiera de las tres iguales a cero y despejar la variable restante. Verificar que cuando $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 4$, o $(0, 0, 4)$ es un elemento del conjunto solución. De modo similar, verificar que $(6, 0, 0)$ y $(0, 3, 0)$ son elementos del conjunto solución y por consiguiente son puntos que caen en el plano que representa la ecuación (2.14). La figura 2.21 muestra estos puntos y una porción del plano que los contiene.

Cuando se trazan ecuaciones con dos variables, se identifican dos puntos y se unen con una línea recta. Sin embargo, se vio que para representar *todos* los miembros del conjunto solución, la línea se debe extender una distancia infinita en cada dirección. Lo mismo sucede con las ecuaciones con tres variables. Para representar todos los miembros del conjunto solución para la ecuación $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12$, el plano en la figura 2.21 se debe extender en todas direcciones.

Ejemplo 19 Grafique la ecuación lineal $x_1 = 0$ en tres dimensiones.

SOLUCIÓN

En este problema se pide trazar el conjunto solución.

$$S = \{(x_1, x_2\ x_3) \mid x_1 = 0\}$$

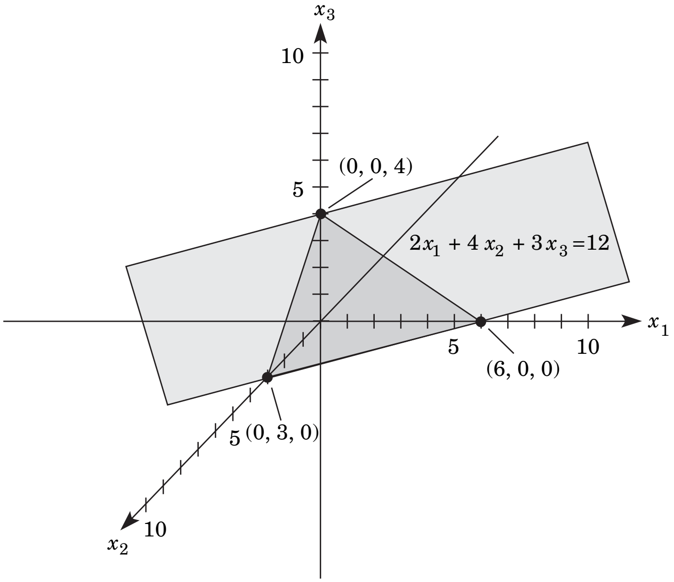


Figura 2.21 Gráfica del plano que representa la ecuación lineal $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 12$.

Con el fin de graficar la ecuación, se necesita identificar de nuevo tres puntos no colineales que satisfagan la ecuación. Se ve que mientras $x_1 = 0$, x_2 y x_3 pueden ser iguales a *cualquier* valor. Por ejemplo, (0, 0, 0), (0, 2, 0) y (0, 0, 4) satisfacen todos la ecuación. La figura 2.22 ilustra la gráfica de la ecuación. La ecuación $x_1 = 0$ se grafica como un plano perpendicular al eje de las x_1 y que pasa por $x_1 = 0$. Éste es el *plano* x_2x_3 (el plano que incluye entre sus puntos todos los puntos que se encuentran en el eje de las x_2 *y* en el eje de las x_3). ❑

> Cualquier ecuación de la forma $x_1 = k$ se grafica en el espacio tridimensional como un plano perpendicular al eje de las x_1, que la intercepta en $x_1 = k$.
>
> Cualquier ecuación de la forma $x_j = k$, donde $j = 1, 2$ *o* 3, se dibujará como un plano que es perpendicular al eje de las x_j en $x_j = k$. Las figuras 2.23 a 2.25 ilustran esta propiedad.

Ecuaciones con más de tres variables

Cuando existen más de tres variables ($n > 3$), la gráfica requiere de más de tres dimensiones. Aunque no pueda visualizarse la representación gráfica de dichas ecuaciones, se utiliza el término ***hiperplano*** para describir la representación geométrica de la ecuación.

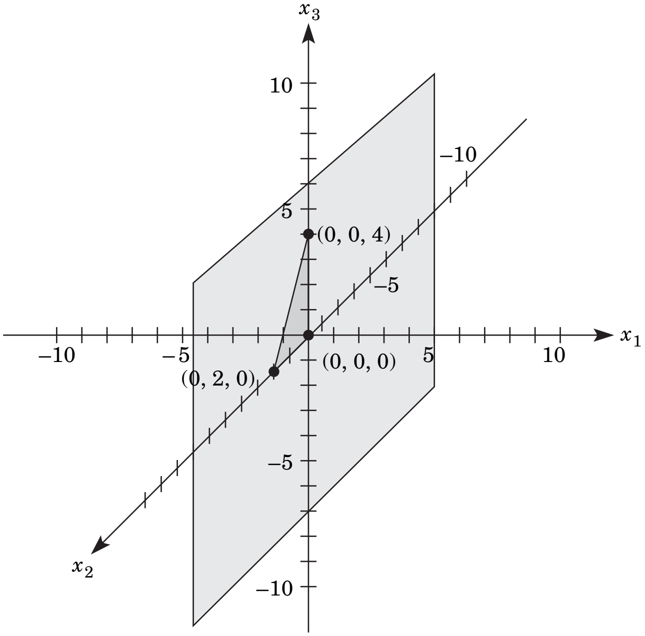


Figura 2.22 Plano $x_1 = 0$.

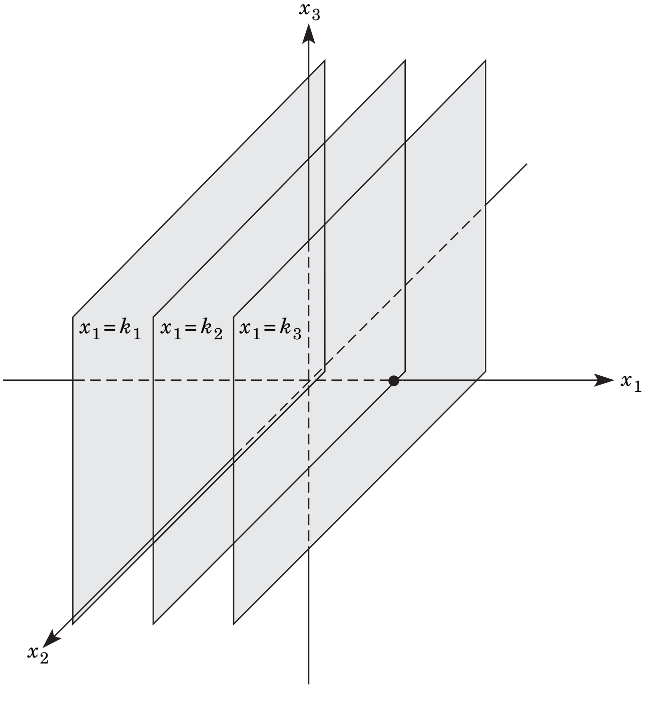


Figura 2.23 Planos de la forma $x_1 = k$.

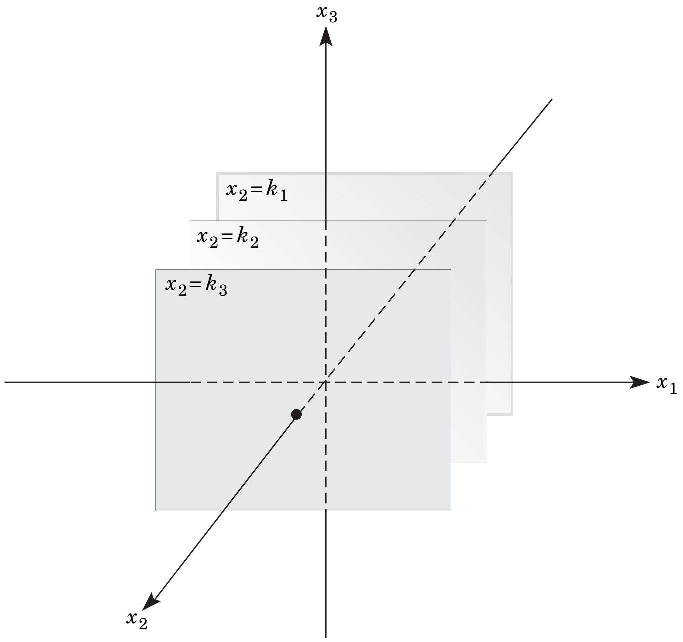


Figura 2.24 Planos de la forma $x_2 = k$.

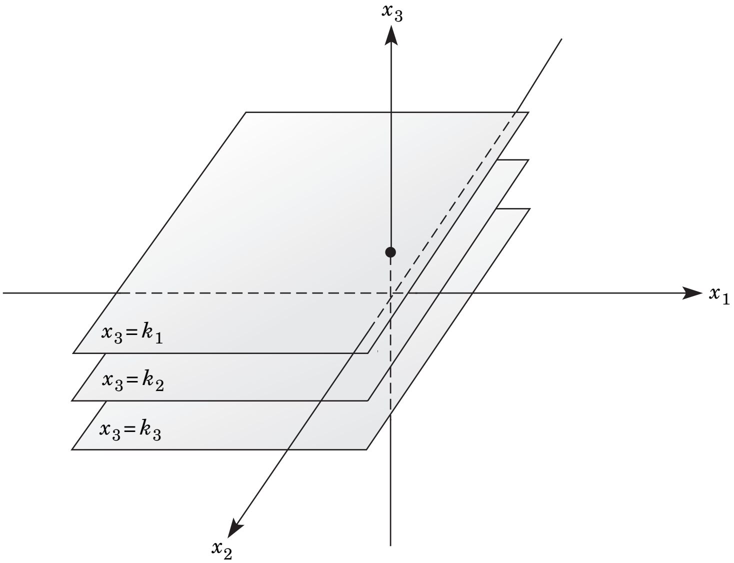


Figura 2.25 Planos de la forma $x_3 = k$.

Por ejemplo, los matemáticos dirían que la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

se representa mediante un hiperplano en un espacio de cuatro dimensiones. O, en general, una ecuación de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

donde $n > 3$, se representaría mediante un hiperplano en el ***espacio* n**.

Sección 2.5 Ejercicios de seguimiento

1. Dada la figura 2.26, determine las coordenadas de los puntos *A* a *I*.

2. Dada la ecuación $x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 10$, determine las coordenadas de las intercepciones de x_1, x_2 y x_3.

3. Dada la ecuación $-2x_1 + 3x_2 - x_3 = -15$, determine las coordenadas de las intercepciones de x_1, x_2 y x_3.

4. Trace el plano $3x_1 = 9$.

5. Trace el plano $-2x_2 = -8$.

6. Trace el plano $x_3 = -2$.

***7.** ¿Puede deducir alguna conclusión general acerca de las características de los planos que representan ecuaciones lineales que implican dos de las tres variables? Por ejemplo, la ecuación $x_1 + x_2 = 5$ no contiene la variable x_3 pero se puede graficar en tres dimensiones. ¿Cómo se grafica esta ecuación? ¿Qué sucede con las ecuaciones que implican x_1 y x_3?, ¿x_2 y x_3?

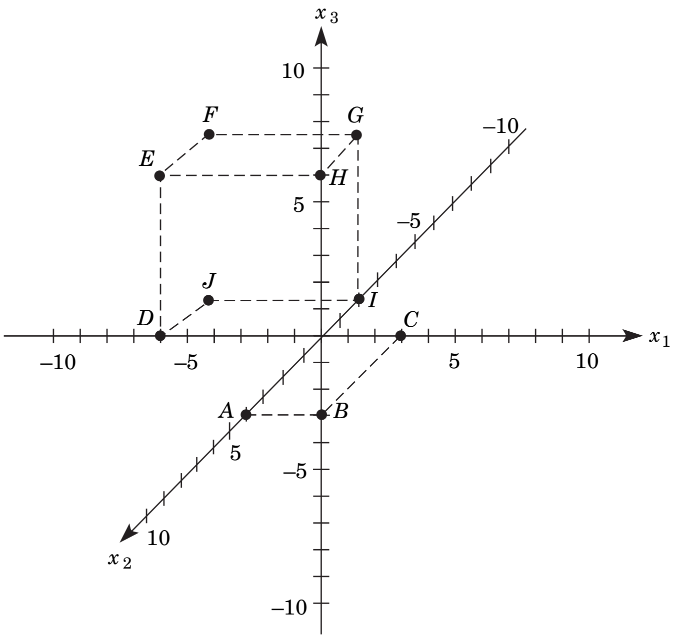


Figura 2.26

2.6 Aplicaciones adicionales

Cuanto más se exponga a problemas planteados verbalmente, más apto será para formularlos. Los siguientes ejemplos ilustran la formulación de ecuaciones lineales para diferentes tipos de aplicaciones. Estúdielos con cuidado y pruebe tantos de estos tipos de problemas como pueda, ya sea al final de esta sección como al final del capítulo.

Ejemplo 20

Puente aéreo de emergencia La Cruz Roja Internacional planea hacer un puente aéreo de emergencia para transportar alimentos y medicamentos a una gran ciudad de Sudamérica que sufrió una extensa inundación en fechas recientes. Se transportarán cuatro artículos en contenedores para ayudar en la recuperación de la inundación. En la tabla siguiente aparecen los cuatro artículos y sus volúmenes respectivos por contenedor. El primer avión que se enviará al área tiene una capacidad de volumen de 6 000 pies cúbicos. Determine una ecuación cuyo conjunto solución contenga todas las combinaciones posibles de los cuatro artículos que ocupará en su totalidad la capacidad de volumen del avión.

Artículo	Volumen/contenedor, pies cúbicos
Sangre	20
Paquetes de medicamentos	30
Alimentos	8
Agua	8

SOLUCIÓN

Casi en todos los problemas planteados verbalmente, el primer paso consiste en definir las incógnitas o variables que se van a utilizar. Es útil preguntar qué decisiones es necesario tomar en el problema. Si es posible identificar estas decisiones, representan la clave para definir las variables.

En este ejemplo, la decisión que enfrenta el personal de la Cruz Roja trata sobre cuántos contenedores de cada artículo se deben enviar en el primer avión. Puesto que la Cruz Roja desea enviar tantas provisiones como sea posible en el primer avión, le interesa identificar las diferentes combinaciones que llenarán el avión a toda su capacidad (de volumen).

Verbalmente, la ecuación que se está buscando debería tener la forma

$$\boxed{\text{Volumen de las provisiones enviadas} = 6\,000 \text{ pies cúbicos}}$$

Se puede ser más específico al reformular la ecuación como

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Volumen}\\ \text{de sangre}\end{array} + \begin{array}{c}\text{Volumen}\\ \text{paquetes de}\\ \text{medicamentos}\end{array} + \begin{array}{c}\text{Volumen de}\\ \text{alimentos}\end{array} + \begin{array}{c}\text{Volumen}\\ \text{de agua}\end{array} = 6\,000}$$

Si se supone que

x_1 = *número de contenedores de sangre*
x_2 = *número de contenedores de paquetes de medicamentos*
x_3 = *número de contenedores de alimentos*
x_4 = *número de contenedores de agua*

puede expresarse la ecuación en su forma matemática correcta como

$$20x_1 + 30x_2 + 8x_3 + 6x_4 = 6\,000$$

Verificar que *cada término* del lado izquierdo se forme al utilizar la relación

$$\boxed{\begin{matrix}\text{Volumen total}\\ \text{del artículo } j\end{matrix} = \begin{pmatrix}\text{volumen por contenedor}\\ \text{del artículo } j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{número de contenedores}\\ \text{del artículo } j\end{pmatrix}}$$

Ejemplo 21

Cartera de inversiones Una universidad local tiene \$5 millones para invertir en acciones. El consejo de fideicomisarios aprobó seis tipos diferentes de acciones en los cuales la universidad puede invertir. Se indican los precios actuales por acción por cada tipo de capital de la tabla siguiente. Determine la ecuación para la cual el conjunto solución incluye todas las combinaciones diferentes de los seis capitales que se pueden comprar con \$5 millones exactos.

Capital	Precio por acción
1	\$ 35
2	60
3	125
4	100
5	500
6	250

SOLUCIÓN

La forma general de la ecuación debe ser el total de dólares gastados en los seis capitales igual a \$5 millones, o más específicamente,

$$\boxed{\begin{matrix}\text{Total de dólares}\\ \text{dólares gastados}\\ \text{en el capital 1}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{Total de dólares}\\ \text{dólares gastados}\\ \text{en el capital 2}\end{matrix} + \cdots + \begin{matrix}\text{Total de dólares}\\ \text{gastados en el}\\ \text{capital 6}\end{matrix} = \text{\$5 millones}}$$

La decisión básica que se debe tomar se refiere al número de acciones de cada capital por comprar con el fin de gastar los \$5 millones completos. Por tanto, se generalizan las variables como

x_j = *número de acciones compradas del capital* j

donde $j = 1, 2, 3, 4, 5$ o 6.

Al usar estas variables, la ecuación se expresa como

$$35x_1 + 60x_2 + 125x_3 + 100x_4 + 500x_5 + 250x_6 = 5\,000\,000$$

Obsérvese que cada término en el lado izquierdo tiene la forma

$$\boxed{\text{Total de dólares gastados en el capital } j = (\text{precio por acción})(\text{número de acciones compradas})}$$

❑

Ejemplo 22

Programación del tribunal. Un tribunal de un distrito metropolitano organiza sus casos en tres categorías. Los registros del tribunal permitieron que el secretario del mismo proporcione estimaciones del número promedio de horas requeridas para el proceso de cada tipo de caso. Los casos del tipo 1 promedian 16 horas, los del tipo 2 promedian 8 horas y los del tipo 3 promedian 4.5 horas. Para el mes próximo se dispondrá de 850 horas en las seis salas del edificio. Determinar una ecuación cuyo conjunto solución incluya las diferentes combinaciones de los tres tipos de casos que el tribunal puede organizar de acuerdo con su capacidad.

SOLUCIÓN

La forma general de la ecuación debe ser

$$\boxed{\text{Total de horas programadas del tribunal} = 850}$$

Suponiendo que x_1, x_2 y x_3 equivalen al número de casos programados de los tipos 1, 2 y 3, respectivamente, la ecuación es

$$16x_1 + 8x_2 + 4.5x_3 = 850$$

❑

Ejemplo 23

Planeación de nutrición. Un dietista en una escuela local planea unos menús de refrigerio. Tiene opciones de alimentos que se pueden servir en una comida. Al dietista le interesa satisfacer varios requerimientos nutricionales; se interesa en determinar las diversas cantidades de cada uno de los ocho alimentos que pueden proporcionar exactamente 45 miligramos de una vitamina requerida. En la tabla siguiente se muestra el contenido vitamínico por ración de cada uno de los ocho alimentos. Determine la ecuación cuyo conjunto solución satisfaga este requerimiento.

Tipo de alimento	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
mg/porción	5	7.5	3	4.5	9	10	2.5	6

SOLUCIÓN

Suponiendo que x_j = número de raciones de alimento j, donde j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 u 8, la ecuación es

$$5x_1 + 7.5x_2 + 3x_3 + 4.5x_4 + 9x_5 + 10x_6 + 2.5x_7 + 6x_8 = 45$$

❑

Sección 2.6 Ejercicios de seguimiento

1. En realidad, ¿cuáles son las cantidades máximas y mínimas posibles de cada artículo del ejemplo 20?
2. Suponga que el avión del ejemplo 20 sólo puede transportar 40 000 libras de carga y que los artículos pesan 150, 100, 60 y 70 libras por contenedor, respectivamente. Determine la ecuación cuyo conjunto solución contenga todas las combinaciones de los cuatro artículos que ocupan en su totalidad la capacidad del avión.
3. Siendo realistas, ¿cuáles son los valores máximos y mínimos permitidos para cada variable en la ecuación desarrollada en el ejemplo 21?
4. En la tabla siguiente se muestran los dividendos por acción permitidos de cada uno de los capitales precedentes. Suponga que el consejo de fideicomisarios desea obtener dividendos anuales de sus inversiones de $1 000 000. Usando las mismas variables del ejemplo, desarrolle la ecuación cuyo conjunto de soluciones incluye todas las posibles combinaciones de las seis acciones, las cuales generarán dividendos anuales de $1 000 000.

Capital	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Dividendo anual esperado	\$5	\$8	\$4	\$7.50	\$30	\$40

5. ¿En cuál de los cuatro ejemplos (20 a 23) se deben restringir las variables a valores enteros?
6. Una estudiante cursa cinco materias y se enfrenta a la presión de los exámenes finales. Estima que tiene 40 horas disponibles para estudiar. Si x_j = número de horas dedicadas al estudio de la materia j, defina la ecuación cuyo conjunto solución especifique todas las asignaciones de tiempo posible de las cinco materias que ocuparán en su totalidad las 40 horas disponibles.
7. **Mezcla de productos** Una empresa fabrica tres productos. El producto A requiere cinco horas de tiempo de producción, el producto B requiere 3.5 horas y el producto C requiere 7.5 horas por cada unidad producida. Si se tienen disponibles 240 horas durante la semana siguiente, determine la ecuación cuyo conjunto solución especifique todas las cantidades posibles de los tres productos que se pueden producir usando 240 horas. ¿Cuáles son las cantidades máximas que se pueden fabricar de *cada* producto si sólo se hace un producto?
8. **Transporte** Un fabricante distribuye su producto a cuatro mayoristas diferentes. La capacidad mensual es de 40 000 unidades del producto. Se deben tomar decisiones acerca de cuántas unidades se deben enviar a cada uno de los mayoristas. Determine la ecuación cuyo conjunto solución especifique las diferentes cantidades que se podrían enviar si se debe distribuir el total de 40 000 unidades.
9. **Publicidad** Una empresa nacional inicia una campaña publicitaria por televisión, radio y periódicos. El objetivo es que 10 millones de personas vean los anuncios. La experiencia pasada indica que por cada $1 000 asignados a la publicidad en televisión, radio y periódicos, 25 000, 18 000 y 15 000 personas respectivamente verán la publicidad. Las decisiones que se deben tomar son cuánto dinero se debe asignar a cada tipo de publicidad con el fin de llegar a 10 millones de personas. Determine la ecuación cuyo conjunto solución especifique todas las diferentes asignaciones publicitarias que darán como resultado el logro de este objetivo. Si sólo se debe usar un medio, ¿cuánto dinero se debe invertir en cada medio para llegar a 10 millones de personas?

10. Planeación agrícola Una compañía agrícola tiene el objetivo de cosechar 500 000 fanegas de frijol de soya durante el año entrante. La compañía tiene tres granjas disponibles para lograr su objetivo. Dadas las diferencias de clima y otros factores, la producción por acre en las diferentes ubicaciones es de 45, 30 y 36 fanegas, respectivamente, para las granjas 1, 2 y 3. La decisión que se debe tomar se refiere a cuántos acres de frijol de soya se deben plantar en cada granja para cumplir el objetivo de la empresa. Defina la ecuación que permite especificar las distintas posibilidades para lograr el objetivo de 500 000 fanegas. Si se debe lograr el objetivo total usando una sola granja, ¿cuántos acres se requerirían en cada granja?

TÉRMINOS Y CONCEPTOS CLAVE

conjunto solución 39
ecuación lineal 38
espacio *n* 77
forma de pendiente-intercepción de la ecuación lineal 58
fórmula de los dos puntos 54
fórmula del punto pendiente 63
hiperplano 75
intercepción de *x* 49
intercepción de y 50
líneas rectas paralelas 65
pendiente 52
plano 73
relación de la pendiente para líneas rectas perpendiculares 65
sistemas de coordenadas tridimensionales 71

FÓRMULAS IMPORTANTES

$ax + by = c$ **Ecuación lineal: dos variables** **(2.1)**

$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ **Ecuación lineal: *n* variables** **(2.2)**

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ **Fórmula de los dos puntos** **(2.10)**

$y = mx + k$ **Forma de pendiente-intercepción de la ecuación lineal** **(2.12)**

$y - y_1 = m(x - x_1)$ **Fórmula del punto pendiente** **(2.13)**

EJERCICIOS ADICIONALES

SECCIÓN 2.1

En los ejercicios 1 a 12, determine si la ecuación es lineal.

1. $x/3 - y/4 = 2x - y + 12$

2. $(x + 4y)/8 = y$

3. $2/x - 3/y = 24$

4. $0.2x - 0.5y = 10 - 4/x$

5. $x_1 - x_2/3 + 5x_3 = x_4 - 2x_5$

6. $2/(x - 3y) = 10 + x/3$

7. $(x - y + 13)/3 + 5y = -3(x + 12)$

8. $x_1 - 4x_2 + 3x_1x_3 = 5x_3 - 100$

9. $\sqrt{10} + 10x - 4y = -4$

10. $(x_1 - 6x_2 + 5x_3)/20 = 2/(x_1 - 3x_2)$

11. $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + y/2 = 20 - x + 8y$

12. $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{y^2 + 6y + 9}$

13. Una compañía fabrica dos productos diferentes, *A* y *B*. Producir cada unidad del producto *A* cuesta \$6 y cada unidad del producto *B* cuesta \$4. La compañía insiste en que el total de costos para los dos productos sea \$500.

a) Defina la ecuación del costo que indica que el costo total para producir *x* unidades del producto *A* e *y* unidades del producto *B* equivale a \$500.

b) Si se supone que la compañía aceptó surtir un pedido de 50 unidades del producto *A*, ¿cuántas unidades del producto *B* se deben fabricar para que el total de costos siga siendo \$500?

14. Se autorizó a un agente de viajes local la venta de tres nuevos paquetes vacacionales para una aerolínea importante. Los precios se cotizan en \$800, \$950 y \$1 200, respectivamente. La aerolínea prometió una comisión de bono considerable si el total de ventas realizadas por el agente de viajes es igual a \$100 000 o más. Si x_1, x_2 y x_3 equivalen al número de paquetes vendidos de los tipos 1, 2 y 3, respectivamente:

a) Defina la ecuación que determine que el total de ventas es igual a \$100 000.

b) Si la aerolínea especifica que el agente debe vender 20 paquetes de \$1 200 y 10 paquetes de \$950 para calificar para el bono, ¿cuántos paquetes de \$800 se necesitarán para calificar?

c) Una estrategia que el agente considera es patrocinar un vuelo charter, en el cual todas las personas seleccionen el mismo paquete. Dado que se pueden planear tres charters, ¿cuántas personas tendría que contratar cada uno con el fin de calificar para el bono?

15. **Recaudación de fondos** Una compañía de teatro local trata de recaudar \$1 millón para ampliar la capacidad de asientos. Emprendieron una campaña de recaudación de fondos para obtener el dinero. Su campaña consiste en solicitar donativos de tres categorías diferentes. La categoría “Amigo” requiere un donativo de \$1 000, la categoría “Patrón” requiere un donativo de \$5 000 y la categoría “Patrocinador” requiere un donativo de \$10 000. Si x_j es igual al número de donantes en la categoría j ($j = 1$ para “Amigo”):

a) Determine la ecuación que asegure que los donativos de las tres categorías equivalen a \$1 millón.

b) Si se debe lograr el objetivo con sólo una categoría de donativos, ¿cuántos donantes se requieren en cada categoría para proporcionar el monto total de \$1 000 000?

SECCIÓN 2.2

En los ejercicios 16 a 28, identifique las intersecciones de *x* y *y*, si existen, y grafique la ecuación.

16. $-3x = y/2$

17. $x/3 = -4$

18. $(y - 4)/2 = 4x + 3$

19. $3x - 6y = 0$

20. $4x - 2y = -10$

21. $2x - 3y + 20 = -5x + 2y - 8$

22. $5 - 3x + 6y = -x + 5 - 2y$

23. $5y = 2y + 24$

24. $-6x + 24 = -12 + 3x$

25. $-2x + 3y = -36$

26. $(x - 6y)/2 = -3y + 10$

27. $x + y - 20 = 0$

28. $(2x - 4y)/2 = 10 + (-x + 3y)/3$

En los ejercicios 29 a 40, calcule la pendiente del segmento de línea al unir los dos puntos. Interprete el significado de la pendiente.

29. $(5, 2)$ y $(-10, 5)$

30. $(-3, 8)$ y $(1, -14)$

31. $(-b, a)$ y $(-b, 3a)$

32. $(2a, 3b)$ y $(-3a, 3b)$

33. $(4, -5)$ y $(-2, 25)$

34. $(-2, 40)$ y $(3, 75)$

35. $(4.38, 2.54)$ y $(-1.24, 6.32)$

36. $(-15.2, 4.5)$ y $(8.62, -1.6)$

37. (m, n) y $(-m, -n)$

38. $(-2a, 4b)$ y $(4b, -2a)$

39. $(0, t)$ y $(-t, 0)$

40. $(-4, c)$ y $(-4, b)$

SECCIÓN 2.3

En los ejercicios 41 a 52, vuelva a escribir cada ecuación en la forma de pendiente-intercepción y determine la pendiente y la intercepción de *y*.

41. $2x - 5y + 10 = -4y + 2x - 5$

42. $3x - 8y = 24 + x - 3y$

43. $(x - 4y)/3 = (5x - 2y)/2$

44. $3x - 6y = 36 + x$

45. $8x - 4y = 60 - 3x + y$

46. $x/2 = 20 - y/3$

47. $mx - ny = p$

48. $ax + by = c + dx + ey$

49. $30x - 4y + 24 = 8y + 30x - 12$

50. $-cx + cy = c$

51. $y/2 + 3x - 10 = (x + y)/2$

52. $x - 3y = 3y + 5x - 40$

53. Una asociación de productos lácteos local contrata la ayuda de una empresa de investigación de mercados para pronosticar la demanda de leche. La empresa de investigación encuentra que se puede pronosticar la demanda de leche local mediante la ecuación $q = -4\,000p + 10\,000$, donde p representa el precio por cuarto (en dólares) y q representa el número pronosticado de cuartos comprados por semana.

a) Grafique la ecuación.
b) Identifique la pendiente y la intercepción de q.
c) Interprete el significado de la pendiente y la intercepción de q en esta aplicación.

54. Una empresa fabricante tiene 120 horas por semana disponibles en uno de sus departamentos. Se procesan dos productos en este departamento. El producto A requiere 4 horas por unidad y el producto B necesita 6 horas por unidad en este departamento. Si x es igual al número de unidades del producto A producido por semana y y el número de unidades del producto B fabricadas por semana:

a) Determine la ecuación que indica que el tiempo total utilizado para producir estos dos productos es igual a 120 horas por semana.
b) Vuelva a escribir esta ecuación en la forma de pendiente-intercepción e identifique la pendiente y la intercepción de y.
c) Interprete el significado de la pendiente y la intercepción de y en esta aplicación.

55. Salarios iniciales Los salarios promedio iniciales aumentaron para estudiantes que cursan una especialización en administración. La ecuación que pronostica el salario inicial promedio es

$$s = 20\,250 + 1\,050t$$

donde s es igual al salario promedio inicial y t es el tiempo medido en años desde 1990 ($t = 0$).

a) Identifique las intercepciones de s y t para esta ecuación.
b) Interprete estos valores cuando sean significativos.

56. Una compañía fabrica dos productos. Cada producto requiere cierta cantidad de materia prima. El producto A requiere 3 libras de materia prima y el producto B usa 4 libras. Para cualquier semana dada, la disponibilidad de materia prima es de 2 400 libras. Si x es igual al número de unidades producidas del producto A y y el número de unidades fabricadas del producto B:

a) Determine la ecuación que expresa que la materia prima que se utiliza cada semana es igual a 2 400 libras.
b) Vuelva a escribir la ecuación en la forma de pendiente-intercepción.
c) Interprete los valores de la pendiente y la intercepción de y.

57. Inversión de capital Una agencia grande de renta de automóviles se prepara para adquirir autos nuevos para el próximo año. El presupuesto de capital para estas compras es de $20 millones. Se comprarán dos tipos de autos, uno cuesta $12 000 y el otro $14 500. Si x es igual al número de autos comprados del tipo 1 y y el número de autos comprados del tipo 2:

a) Determine la ecuación que indica que la cantidad total gastada en compras nuevas equivale a \$20 millones.
b) Vuelva a escribir la ecuación en la forma de pendiente-intercepción.
c) Identifique la pendiente y, intercepción de y e intercepción de x e interprete sus significados.

SECCIÓN 2.4

En los ejercicios 58 a 73, use la información que se proporciona para determinar la forma de pendiente-intercepción de la ecuación lineal.

58. Pendiente indefinida y la línea recta pasa por $(-3, 5)$
59. Pendiente indefinida y la línea recta pasa por el origen
60. Pendiente igual a $\frac{1}{2}$, intercepción de y en $(0, -20)$
61. Pendiente igual a cero, intercepción de y en $(0, 5)$
62. Intercepción de x en $(4, 0)$ y $(-2, 8)$ cae en la línea recta
63. Intercepción de x en $(-3, 0)$ y $(8, -4)$ cae en la línea recta
64. $(-3, 6)$ y $(-1, 2)$ caen en la línea recta
65. $(-2, -18)$ y $(5, 24)$ caen en la línea recta
66. $(-4, 2c)$ y $(10, 2c)$ caen en la línea recta
67. $(3a, -5)$ y $(3a, 10)$ caen en la línea recta
68. $(-2.38, 10.52)$ y $(1.52, 6.54)$ caen en la línea recta
69. $(24.5, -100.6)$ y $(16.2, 36.5)$ caen en la línea recta
70. Pasa por $(-6, 4)$ y es perpendicular a $3x - 2y = 0$
71. Pasa por $(3, 10)$ y es perpendicular a $4x - 2y = -12$
72. Pasa por $(-2, 8)$ y es paralela a $-4x + 8y = 20$
73. Pasa por $(-4, -1)$ y es paralela a $8x - 2y = 0$
74. Un economista cree que hay una relación lineal entre el precio de mercado de una mercancía particular y el número de unidades que los proveedores de la mercancía están dispuestos a comercializar. Dos observaciones de muestra indican que cuando el precio es igual a \$15 por unidad, la oferta semanal es de 30 000 unidades, y cuando el precio equivale a \$20 por unidad, la oferta semanal es de 48 000 unidades.
a) Si se traza el precio por unidad, p, en el eje de las x y la cantidad ofrecida, q, se traza en el eje de las y, determine la forma de pendiente-intercepción de la ecuación de la línea recta que pasa por estos dos puntos.
b) Interprete la pendiente de la ecuación en esta aplicación.
c) Pronostique la oferta semanal si el precio en el mercado equivale a \$25 por unidad.
75. **Calzado deportivo de alta tecnología** Un gran minorista de artículos deportivos con muchas tiendas trata de pronosticar la demanda esperada de los últimos artículos de un aparente flujo interminable de calzado deportivo para baloncesto, el Nike-Bok Turbo Air-Pump. Se estima que se venderán 300 pares por día en las tiendas del minorista si el nuevo zapato tiene un precio de \$200. Se espera que con un precio de \$175 se vendan 375 pares.
a) Si se traza el precio en el eje horizontal, determine la forma de pendiente-intercepción de la ecuación de la demanda.
b) Pronostique la demanda esperada con un precio de \$225. Con un precio de \$160.
c) Identifique la intercepción de p e interpretar su significado.

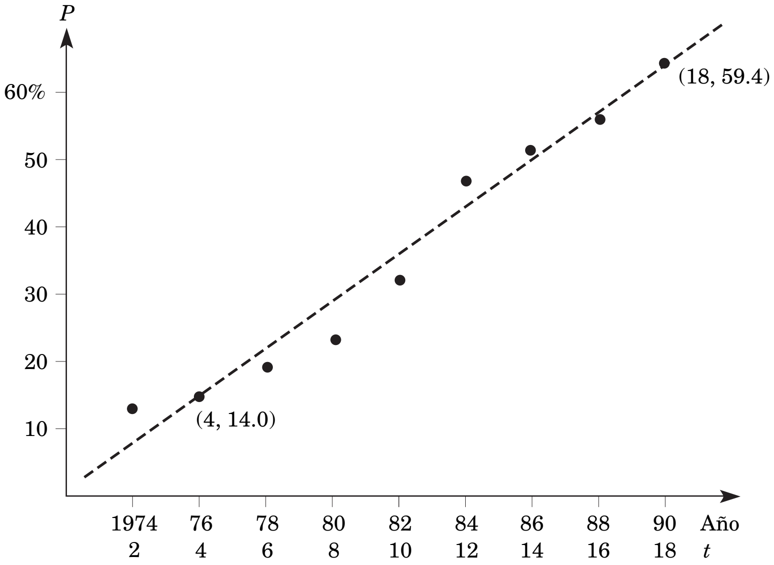


Figura 2.27 Porcentaje de hogares que cuentan con sistema de televisión por cable.

76. **Televisión por cable** La figura 2.27 muestra algunos datos recopilados por Nielsen Media Research relacionados con el crecimiento de la televisión por cable. La observación de los puntos de datos indica que el crecimiento en el porcentaje de hogares con televisión por cable ha sido aproximadamente lineal. Usando los puntos de datos para 1976 y 1990 para estimar la relación lineal entre el porcentaje P y el tiempo t ($t = 0$ corresponde a 1972):

a) Determine la forma de pendiente-intercepción de la ecuación lineal de la estimación.
b) Interprete el significado de la pendiente y la intercepción de P.
c) Pronostique el porcentaje esperado para 1995. Para el año 2000.
d) ¿Cuándo se supone que el porcentaje esperado exceda de 80?

SECCIÓN 2.5

77. Una tienda minorista vende cuatro productos. Suponga que x_1, x_2, x_3 y x_4 representan el número de unidades vendidas, respectivamente, de los cuatro productos. Las utilidades obtenidas por cada unidad vendida de los cuatro productos son \$12, \$5, \$8 y \$10, respectivamente. Las utilidades objetivo para la empresa son de \$60 000.

a) Utilizando x_1, x_2, x_3 y x_4, indicar que la utilidad total de la venta de los cuatro productos es igual a \$60 000.
b) Dé el rango de valores (máximo y mínimo) posible para cada variable en la ecuación desarrollada en la parte *a*).

78. Una mujer que heredó \$200 000 decide invertir su herencia en acciones. Considera ocho acciones cuyos precios se muestran en la tabla siguiente.

Capital	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Precio por acción	\$25	\$50	\$42.50	\$35	\$80	\$17.50	\$120	\$100

Determine la ecuación cuyo conjunto solución contenga todas las combinaciones posibles de las ocho acciones que se pueden adquirir por \$200 000. (Asegúrese de definir sus variables.)

79. **Gerencia de personal** Se otorgó un presupuesto de \$500 000 al director de personal para formar un departamento de ingeniería. Se solicitan cuatro tipos de empleados: ingenieros senior con un salario de \$60 000 cada uno, ingenieros junior con un salario de \$32 500 cada uno, dibujantes con un salario de \$20 000 cada uno y secretarias con un salario de \$15 000 cada una. Escriba una ecuación cuyo conjunto solución contenga las combinaciones posibles de empleados que se pueden contratar por \$500 000. (Asegúrese de definir sus variables.)

❑ EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. Dada la ecuación $8x - 2y = -48$:
- *a*) Determine las intercepciones de x y de y.
- *b*) Dibuje la ecuación.

2. Dada la ecuación $(x + y)/3 = 24 - x$:
- *a*) Vuelva a escribir la ecuación en la forma de pendiente-intercepción.
- *b*) Identifique la pendiente y la intercepción de y.
- *c*) Interprete el significado de la pendiente.

3. Dados dos puntos $(3, 18)$ y $(5, -14)$:
- *a*) Determine la ecuación de la línea recta que pasa por los dos puntos.
- *b*) Identifique la pendiente, la intercepción de y y la intercepción de x.

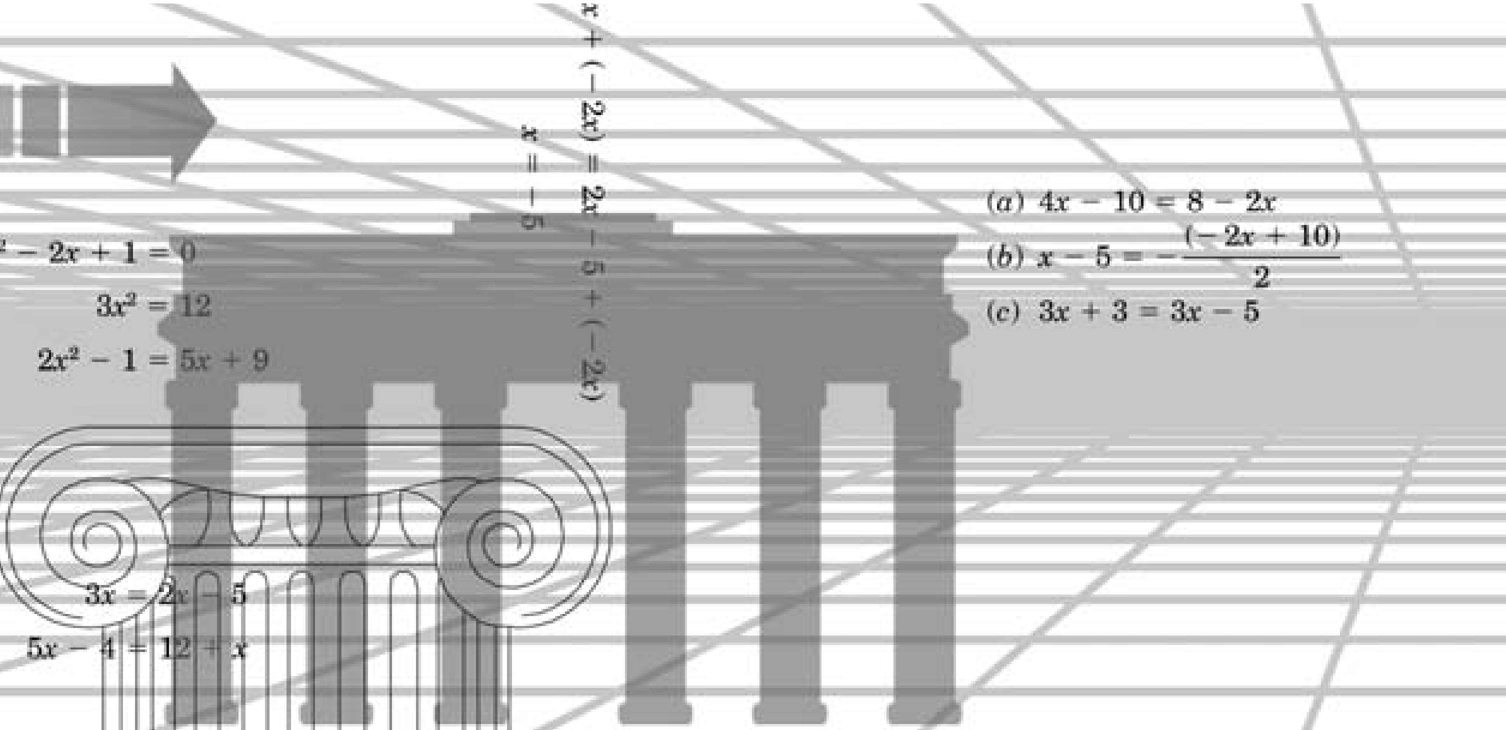
4. La ecuación $P = 240\,000 - 7\,500t$ expresa la relación entre la población mundial estimada P de un ave exótica declarada en peligro de extinción y el tiempo t medido en años desde 1990 ($t = 0$ corresponde a 1990). Identifique e interprete el significado de la pendiente, la intercepción de P y la intercepción de t.

5. Determine la ecuación de la línea recta que es perpendicular a la línea recta $3x - 2y = -28$, y que pasa a través del punto $(-5, 20)$.

6. Un productor tiene un abastecimiento mensual de 750 000 libras de materia prima usada para fabricar cuatro productos. El número de libras para fabricar cada producto es igual a 10, 15, 7.5 y 18, respectivamente. Si x_1, x_2, x_3 y x_4 es igual al número de unidades fabricadas de cada producto:
- *a*) Defina la ecuación cuyo conjunto solución incluya todas las combinaciones posibles de los cuatro productos que agotarán el abastecimiento mensual de materia prima.
- *b*) ¿Cuál es la cantidad máxima que se puede hacer de cada producto si sólo se fabrica un producto y el abastecimiento de materia prima es la única restricción?

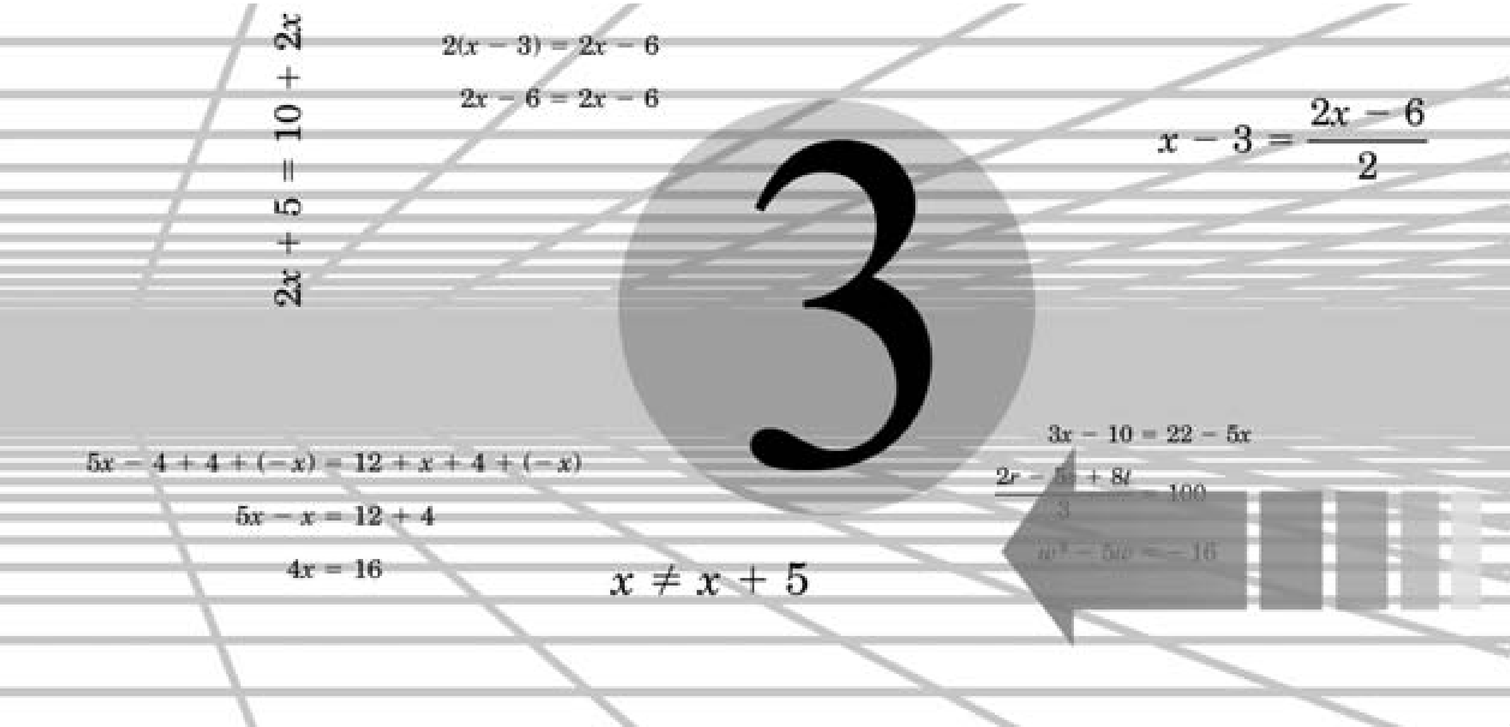
CAPÍTULO 3

Sistemas de ecuaciones lineales



OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Proporcionar una comprensión de la naturaleza de los sistemas de ecuaciones y su representación gráfica (cuando es apropiado).
- Proporcionar una comprensión de las diferentes posibilidades del conjunto solución para los sistemas de ecuaciones.
- Proporcionar una apreciación de la interpretación gráfica de los conjuntos solución.
- Presentar procedimientos para determinar los conjuntos solución para sistemas de ecuaciones.
- Ilustrar algunas aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales.



ESCENARIO DE MOTIVACIÓN: Puente aéreo de emergencia (continúa)

El ejemplo 20 del capítulo 2 (página 76) trata sobre el transporte de provisiones a una ciudad sudamericana por medio de un puente aéreo de emergencia. A partir del ejemplo 20 sabemos que la capacidad de volumen del avión es de 6 000 pies cúbicos. Otra consideración es que la capacidad de peso del avión es de 40 000 libras. Además, la cantidad de dinero disponible para la compra de provisiones asciende a un total de $150 000. Reportes iniciales indican que el agua es el artículo más importante. Para responder a esta necesidad, funcionarios de la Cruz Roja especificaron que el número de contenedores de agua enviados debería ser el doble del número combinado de sangre y paquetes de provisiones médicas enviados. *Funcionarios de la Cruz Roja quieren determinar si hay alguna combinación de los cuatro artículos que llenen las capacidades de peso y volumen del avión, ocupen todo el presupuesto de $150 000 y satisfagan los requerimientos relacionados con el envío de agua.* [Ejemplo 16]

En la administración, la economía o aplicaciones de ciencias sociales, a veces nos interesamos en determinar si hay valores de variables que satisfacen varios atributos. Tal vez se pueda representar cada atributo por medio de una ecuación, expresada en términos de variables diferentes. Juntos, los conjuntos de ecuaciones representan todos los atributos de interés. En este capítulo cubriremos los procesos que se usan para determinar si hay valores de variables que juntos satisfacen un conjunto de ecuaciones. Por ejemplo, en el Escenario de motivación, veremos si hay cantidades de los cuatro artículos que satisfacen los atributos de la capacidad de peso, la capacidad de volumen, el presupuesto y los requerimientos de agua.

3.1 Sistemas de ecuaciones con dos variables

Sistemas de ecuaciones

Un ***sistema de ecuaciones*** es un conjunto que consiste en más de una ecuación. Una manera de caracterizar un sistema de ecuaciones es por sus ***dimensiones***. Si un sistema de ecuaciones consiste en m ecuaciones y n variables, decimos que este sistema es un ***sistema de "m por n"***, o que tiene dimensiones de $\boldsymbol{m \times n}$. Se describe un sistema de ecuaciones que implica 2 ecuaciones y 2 variables como un sistema de dimensión de 2×2. Se dice que un sistema que consiste en 15 ecuaciones y 10 variables es un sistema de (15×10).

Al resolver sistemas de ecuaciones, nos interesamos en identificar valores de variables que satisfacen de manera simultánea todas las ecuaciones del sistema. Por ejemplo, dadas las dos ecuaciones

$$5x + 10y = 20$$

$$3x + 4y = 10$$

tal vez queramos identificar cualquier valor de x y y que satisfaga ambas ecuaciones al mismo tiempo. Al usar la notación de conjunto, querríamos identificar el ***conjunto solución S***, donde

$$\boxed{S = \{(x, y) \mid 5x + 10y = 20 \quad \text{y} \quad 3x + 4y = 10\}}$$

Como se verá en este capítulo, el conjunto solución S de un sistema de ecuaciones lineales puede ser un ***conjunto nulo***, un ***conjunto finito*** o un ***conjunto infinito.****

Hay muy pocos procedimientos de solución que se pueden usar para solucionar sistemas de ecuaciones. En este capítulo nos concentramos en dos procedimientos diferentes. Se presentarán otros procedimientos en el capítulo 9.

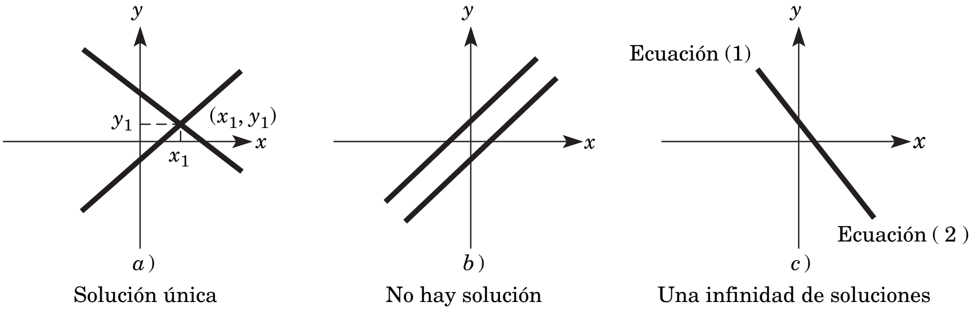
En este capítulo comenzamos nuestro análisis con los sistemas más simples, dos ecuaciones y dos variables. Nuestros análisis enfatizarán los aspectos algebraicos de cada situación. Estos procedimientos se extenderán más adelante en el capítulo para que comprendamos cómo se manejan los sistemas de ecuaciones más grandes. También analizaremos una variedad de aplicaciones de los sistemas de ecuaciones.

Análisis gráfico

Sabemos a partir del capítulo 2 que se grafica un sistema de ecuaciones que incluye dos variables como una línea recta. Por tanto, se representa un sistema de ecuaciones lineales de (2×2) con dos líneas rectas en dos dimensiones. Al despejar los valores de las dos variables que satisfacen *ambas* ecuaciones, tratamos de determinar gráficamente si las dos líneas rectas tienen algún punto en común.

Puede haber tres tipos distintos de conjuntos solución para los sistemas de ecuaciones de (2×2). La figura 3.1 ilustra las tres posibilidades. En la figura 3.1*a*), las dos líneas rectas se intersecan. Las *coordenadas* del punto de intersección (x_1, y_1) representan la solución para el sistema de ecuaciones, es decir, el par de valores para x y y que satisfacen *ambas* ecuaciones. Cuando sólo hay un par de valores para las variables que satisface el sistema de ecuaciones, se dice que el sistema tiene una ***solución única.***

En la figura 3.1*b*), las dos líneas rectas son paralelas entre sí. Debe recordar del capítulo 2 que líneas rectas paralelas tienen la misma pendiente; y dado que tienen diferentes intersecciones de y, las líneas no tienen puntos en común. Si un sistema de ecuaciones de



a) Solución única

b) No hay solución

c) Una infinidad de soluciones

Figura 3.1 Posibilidades de conjunto solución para un sistema de ecuaciones (2×2).

---

* Un conjunto nulo no contiene ningún elemento (está vacío), un conjunto finito consiste en un número limitado de elementos y un conjunto infinito consiste en un número infinito de elementos.

(2 × 2) tiene estas características, se dice que el sistema ***no tiene solución***. Es decir, no hay valores para las variables que satisfagan ambas ecuaciones. Se dice que las ecuaciones son ***inconsistentes*** en dicho sistema.

Se ilustra la posibilidad final para un sistema de (2 × 2) en la figura 3.1*c*). En este caso ambas ecuaciones se trazan como la misma línea recta y se considera que son ***ecuaciones equivalentes***. Un número infinito de valores es común a las dos líneas rectas y se dice que el sistema tiene una ***infinidad de soluciones***. Al representarse por la misma línea recta implica que ambas líneas tienen la misma pendiente y la misma intersección de y. Dos ecuaciones *pueden* parecer muy distintas una de otra y aun así ser equivalentes. Por ejemplo, las dos ecuaciones

$$-6x + 12y = -24$$

y

$$1.5x - 3y = 6$$

son equivalentes. Verifique que la pendiente y la intersección de y sean las mismas para ambas.

La siguiente es otra forma de resumir los tres casos que se presentan en la figura 3.1.

Relaciones de pendiente-intersección

Dado un sistema de ecuaciones lineales (de forma pendiente-intersección) de (2 × 2),

$$y = m_1x + k_1 \tag{3.1}$$

$$y = m_2x + k_2 \tag{3.2}$$

donde m_1 y m_2 representan las pendientes respectivas de las dos líneas rectas y k_1 y k_2 representan las respectivas intersecciones de y.

I *Hay* una solución única *para el sistema si* $m_1 \neq m_2$.
II *No hay* ninguna solución *del sistema si* $m_1 = m_2$ *pero* $k_1 \neq k_2$.
III *Hay* una infinidad de soluciones *si* $m_1 = m_2$ *y* $k_1 = k_2$.

Soluciones gráficas

Los planteamientos de solución gráfica son posibles para sistemas de ecuaciones con dos variables. Sin embargo, se debe ser preciso en el trazo de sus gráficas. El ejemplo siguiente ilustra una solución gráfica.

Ejemplo 1

Determine gráficamente la solución del sistema de ecuaciones

$$2x + 4y = 20 \tag{3.3}$$

$$3x + y = 10 \tag{3.4}$$

Las intersecciones con los ejes de las x y y son (10, 0) y (0, 5) respectivamente para la ecuación (3.3). De modo similar, las intersecciones de la ecuación (3.4) son $(\frac{10}{3}, 0)$ y (0, 10). Cuando se trazan en una misma gráfica como se indica en la figura 3.2, las dos líneas rectas parecen cruzarse en (2, 4).

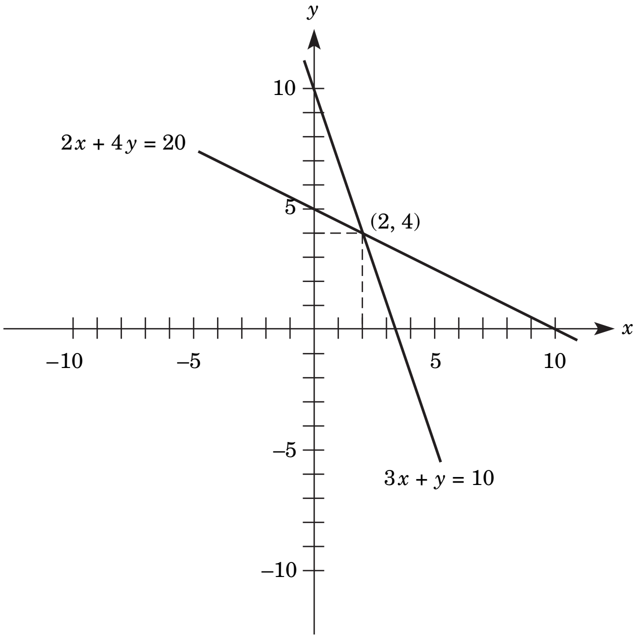


Figura 3.2

Un problema con la solución gráfica es que puede ser difícil leer las coordenadas precisas del punto de intersección entre ellas. Esto es cierto en especial cuando las coordenadas donde se intersecan no son números enteros. Es por eso que desde el punto de vista de la identificación de soluciones *exactas* son preferibles los procedimientos de solución algebraica. Sin embargo, si usa los procedimientos gráficos o los algebraicos, siempre hay una forma de verificar su respuesta. Sustituya su respuesta en las ecuaciones originales para ver si los valores la satisfacen. Al sustituir $x = 2$ y $y = 4$ en las ecuaciones (3.3) y (3.4), tenemos

$$2(2) + 4(4) = 20$$

o

$$20 = 20$$

y

$$3(2) + (4) = 10$$

o

$$10 = 10$$

Por tanto, nuestra solución es correcta. ❑

El procedimiento de eliminación

Un método popular para resolver sistemas con dos o tres variables es el ***procedimiento de eliminación***. Dado un sistema de ecuaciones de (2×2), se suman las dos ecuaciones o múltiplos de las dos ecuaciones con el fin de *eliminar* una de las dos variables. La ecuación resultante se expresa en términos de la variable restante. Se puede despejar la variable restante en esta ecuación, valor que se puede sustituir de nuevo en una de las ecuaciones originales y despejar el valor de la variable eliminada. El proceso de solución se demuestra en el ejemplo siguiente y después se formalizará el procedimiento.

Ejemplo 2 Resuelva el sistema de ecuaciones del ejemplo 1.

SOLUCIÓN

El sistema original era

$$2x + 4y = 20 \qquad (\mathbf{3.3})$$

$$3x + y = 10 \qquad (\mathbf{3.4})$$

El objetivo del procedimiento de eliminación consiste en eliminar una de las dos variables al sumar las ecuaciones (o sus múltiplos). Si *multiplicamos* la ecuación (3.4) por -4 y *sumamos* la ecuación resultante [Ecuación (3.4*a*)] a la ecuación (3.4), tenemos la ecuación (3.5):

$$\begin{array}{rrcl} & 2x + 4y & = & 20 \qquad (\mathbf{3.3}) \\ [-4 \cdot \text{ecuación } (3.4)] \rightarrow & -12x - 4y & = & -40 \qquad (\mathbf{3.4}a) \\ \hline & -10x & = & -20 \qquad (\mathbf{3.5}) \end{array}$$

La ecuación (3.5) contiene sólo la variable x y se puede despejar para obtener el valor $x = 2$. Al sustituir este valor de x en una de las ecuaciones originales [elijamos la ecuación (3.3)] encontramos que

$$2(2) + 4y = 20$$

$$4y = 16$$

o

$$y = 4$$

Por tanto, la solución única de este sistema, como determinamos gráficamente, es $x = 2$ y $y = 4$. ❑

Ejercicio de práctica

Verifique que la solución es exactamente la misma si se opta por eliminar x. Para eliminar x, multiplique las ecuaciones (3.3) y (3.4) por -3 y 2, respectivamente.

Se puede generalizar el procedimiento de eliminación para un sistema de ecuaciones de (2 × 2) como sigue.

Procedimiento de eliminación para sistemas de (2 × 2)

I *Seleccione una variable para eliminar.*

II *Multiplique (si es necesario) las ecuaciones por constantes con el fin de que los coeficientes de la variable seleccionada sean los negativos del otro en las dos ecuaciones, después sume las dos ecuaciones resultantes.*

III **A)** *Si la suma de ecuaciones da como resultado una ecuación nueva que tiene una variable, el sistema tiene una* **solución única**. *Despeje el valor de la variable restante y sustituya de nuevo este valor en una de las ecuaciones originales para determinar el valor de la variable que se eliminó originalmente.*

> **B)** *Si la suma de las ecuaciones da como resultado la* **identidad** *$0 = 0$, las dos ecuaciones originales son* **equivalentes** *entre sí y el sistema tiene una* **infinidad de soluciones**.
>
> **C)** *Si la suma de las ecuaciones da como resultado un* **enunciado falso**, *digamos, $0 = 5$, las ecuaciones son* **inconsistentes** *y* **no hay ninguna solución**. *Véase la figura 3.3.*

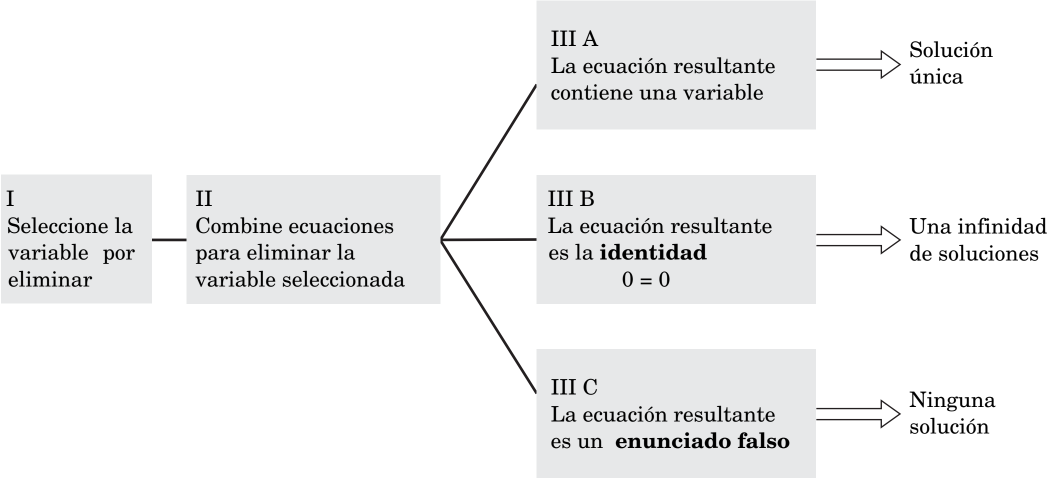


Figura 3.3 Procedimiento de eliminación para sistemas de (2 × 2).

Ejemplo 3

(Una infinidad de soluciones) Resuelva el sistema de ecuaciones siguiente con el procedimiento de eliminación.

$$3x - 2y = 6 \tag{3.6}$$

$$-15x + 10y = -30 \tag{3.7}$$

SOLUCIÓN

Al seleccionar la variable x para eliminarla, se multiplica la ecuación (3.6) por 5 y se suma a la ecuación (3.7).

$$[5 \cdot \text{ecuación (3.7)}] \rightarrow \quad 15x - 10y = 30 \tag{3.6a}$$

$$\underline{-15x + 10y = -30} \tag{3.7}$$

$$0 = 0$$

Cuando se suman las ecuaciones (3.6*a*) y (3.7), se eliminan ambas variables en el lado izquierdo de la ecuación y queda la identidad $0 = 0$. A partir del paso IIB del procedimiento de solución concluimos que las dos ecuaciones son equivalentes y que hay una infinidad de soluciones. ❑

Con el fin de especificar elementos de la muestra del conjunto solución, podríamos suponer un valor arbitrario para x o y y sustituir este valor en una de las ecuaciones originales, despejando el valor correspondiente de la otra variable. Por ejemplo, verifique que si suponemos que $y = 3$, la sustitución de este valor en la ecuación (3.6) o en la (3.7) dará como resultado el valor correspondiente $x = 4$. Por tanto, un elemento del conjunto solución es (4, 3). Una manera más general de especificar el conjunto solución consiste en despejar una de las variables en cualquiera de las ecuaciones originales. El resultado es una ecuación que expresa el valor de una variable en términos del valor de la segunda variable. Para ilustrarlo, si se despeja x en la ecuación (3.6), el resultado es

$$3x = 2y + 6$$

o

$$x = \tfrac{2}{3}y + 2$$

Por consiguiente, una manera de generalizar el conjunto solución es

$$\boxed{\begin{array}{l} y \text{ arbitrario} \\ x = \tfrac{2}{3}y + 2 \end{array}}$$

De forma muy simple, esta situación indica que se puede asignar *cualquier* valor real a y y que x se obtiene por la sustitución de y en la ecuación $x = \tfrac{2}{3}y + 2$. Alternativamente, se podría generalizar el conjunto solución al despejar y en cualquiera de las ecuaciones originales. Verifique que la generalización resultante tendría la forma

$$\boxed{\begin{array}{l} x \text{ arbitrario} \\ y = \tfrac{3}{2}x - 3 \end{array}}$$

Ejemplo 4 (**Conjunto sin solución**) Resuelva el sistema de ecuaciones siguiente con el procedimiento de eliminación.

$$6x - 12y = 24 \tag{3.8}$$

$$-1.5x + 3y = 9 \tag{3.9}$$

SOLUCIÓN

Al multiplicar la ecuación (3.9) por 4 y al sumar este múltiplo en la ecuación (3.8) tenemos

$$\begin{array}{rrcl} & 6x - 12y = 24 & & \textbf{(3.8)} \\ [4 \cdot \text{ecuación } (3.9)] \rightarrow & \underline{-6x + 12y = 36} & & \textbf{(3.9}\boldsymbol{a}\textbf{)} \\ & 0x + 0y = 60 & & \end{array}$$

o

$$0 = 60$$

Ya que $0 = 60$ es un enunciado falso, el sistema de ecuaciones no tiene solución. ❑

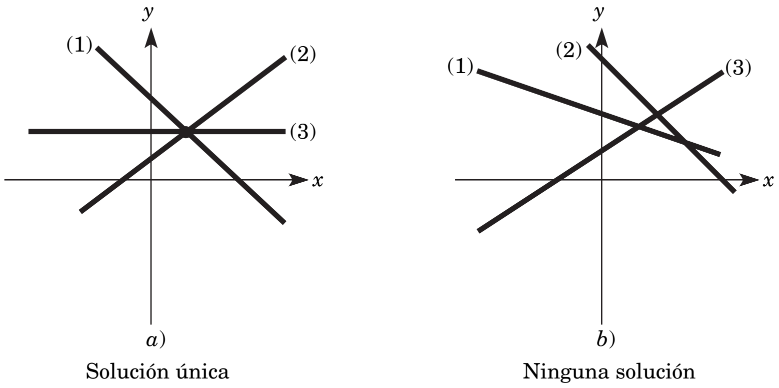
Ejercicio de práctica

Vuelva a escribir las ecuaciones (3.8) y (3.9) en la forma de pendiente-intersección y confirme que sí tienen la misma pendiente pero diferentes intersecciones de y.

Sistemas de $(m \times 2)$, $m > 2$

Cuando hay más de dos ecuaciones ($m > 2$) que implican dos variables, se sigue trazando cada ecuación como una línea recta en dos dimensiones. Por ejemplo, la figura 3.4 muestra dos sistemas de (3×2). En la Figura 3.4*a*) las tres líneas rectas se intersecan en el mismo punto y hay una solución única. En la figura 3.4*b*) hay tres puntos que son comunes a diferentes pares de líneas rectas, pero las tres no tienen ningún punto común, lo que significa que no hay ninguna solución. Una situación posible, pero improbable, es que las m ecuaciones sean equivalentes entre sí y se tracen todas como la misma línea recta.

El procedimiento de eliminación para estos sistemas es relativamente sencillo.



a)
Solución única

b)
Ninguna solución

Figura 3.4 Posibilidades de solución para sistemas de (3×2).

Procedimiento de eliminación para sistemas de $(m \times 2)$, $m > 2$

I *Seleccione cualquiera de las* m *ecuaciones y resuelva de manera simultánea.*

II **A)** *Si en el paso I hay una solución única, sustituya los valores encontrados en las ecuaciones restantes del sistema. Si con estos valores se satisfacen todas las ecuaciones restantes, representan una solución única. Si los valores no satisfacen cualquiera de las ecuaciones restantes, el sistema no tiene solución.*

B) *Si en el paso I no hay solución, el sistema no tiene solución.*

C) *Si en el paso I hay una infinidad de soluciones, se deben seleccionar dos ecuaciones y repetir el paso I. Véase la figura 3.5.*

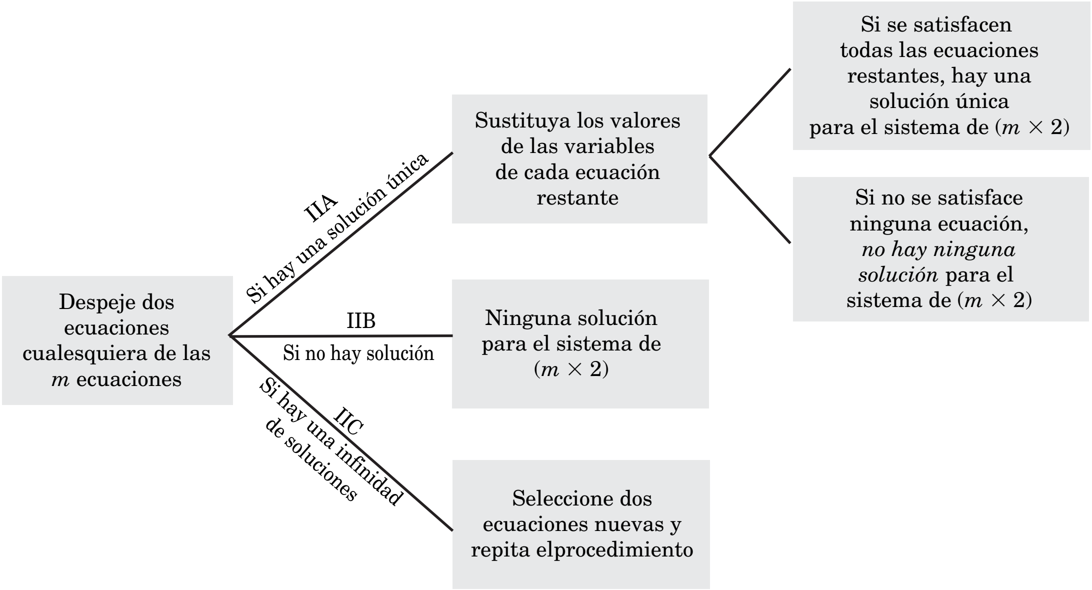


Figura 3.5 Procedimiento de eliminación para sistemas de $(m \times 2)$, $m > 2$.

Ejemplo 5 Determine el conjunto solución para el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x + 2y = 8 \tag{3.10}$$

$$2x - 3y = -5 \tag{3.11}$$

$$-5x + 6y = 8 \tag{3.12}$$

$$x + y = 7 \tag{3.13}$$

SOLUCIÓN

Se soluciona el sistema de (2 × 2) que consiste de las ecuaciones (3.10) y (3.11) multiplicando la ecuación (3.10) por −2 y sumándola a la ecuación (3.11) o

$$[-2 \cdot \text{ecuación } (3.10)] \rightarrow \qquad \begin{aligned} -2x - 4y &= -16 \\ \underline{2x - 3y} &\underline{= -5} \\ -7y &= -21 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Sustituir de nuevo en la ecuación (3.10) da

$$x + 2(3) = 8$$

o

$$x = 2$$

Se prueba la solución (2, 3) sustituyendo en la ecuación (3.12). Puesto que

$$-5(2) + 6(3) = 8$$

u

$$8 = 8$$

el punto (2, 3) satisface las primeras tres ecuaciones. La sustitución en la ecuación (3.13) da

$$2 + 3 \neq 7$$

o

$$5 \neq 7$$

Dado que (2, 3) no satisface la ecuación (3.13), no hay una solución única para el sistema de ecuaciones. La figura 3.6 ilustra la situación. Nótese que las líneas rectas que representan las ecuaciones (3.10) a (3.12) se intersecan en el punto (2, 3); no obstante, (2, 3) no cae en la línea recta que representa la ecuación (3.13). ❑

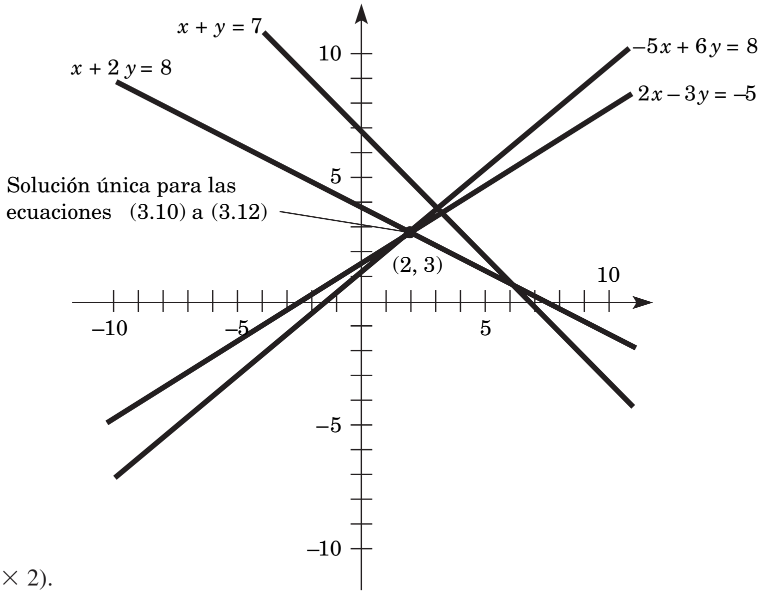


Figura 3.6 No hay ninguna solución para el sistema de (4×2).

PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR

En el procedimiento de solución de los sistemas de $(m \times 2)$, $m > 2$, justifica desde un punto de vista gráfico por qué *a*) la señal de ninguna solución para las ecuaciones seleccionadas en el paso IIB nos llevaría a concluir que no hay solución para el sistema entero y *b*) por qué la señal de una infinidad de soluciones para las ecuaciones seleccionadas en el paso IIC no es concluyente respecto del conjunto solución, requiriendo que se seleccione un par diferente de ecuaciones en el paso I.

Sección 3.1 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 10, determine la naturaleza del conjunto solución (solución única, una infinidad de soluciones o ninguna solución) al comparar la pendiente y las coordenadas de las intersecciones de *y* para las líneas rectas que representan las dos ecuaciones.

1. $\begin{aligned} 5x + 5y &= 0 \\ x &= -y \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 2x - 9y &= 108 \\ 8x + 6y &= 48 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 4x - 2y &= 8 \\ x + 2y &= 12 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 3x - 9y &= 24 \\ -x + 3y &= 0 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} x - 3y &= 8 \\ -4x + 12y &= -24 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 4x - 2y &= 36 \\ -2x + y &= 20 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} -3x &= y + 2 \\ 9x + 3y &= -6 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} x + y &= 20 \\ 2x - y &= 12 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} -x &= -y \\ 3x + 3y &= 0 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} 4x - y &= 10 \\ 2x + 3y &= 18 \end{aligned}$

En los ejercicios 11 a 20, resuelva gráficamente y verifique su respuesta en forma algebraica.

11. $\begin{aligned} 2x - 3y &= -13 \\ 4x + 2y &= -2 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} 3x + 2y &= 8 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$

13. $\begin{aligned} -x + 2y &= -2 \\ 3x &= 6y + 6 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} x - 2y &= 0 \\ -3x + 6y &= 5 \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} 3x + 4y &= 5 \\ 4x + y &= -2 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} x - 2y &= 4 \\ -4x + 8y &= -10 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} 4x - 2y &= 10 \\ -2x + y &= -5 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} x + y &= 0 \\ -2x + 3y &= 10 \end{aligned}$

19. $\begin{aligned} -x + 3y &= 2 \\ 4x - 12y &= -8 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} -x + y &= 0 \\ 2x + y &= 9 \end{aligned}$

Resuelva cada uno de los siguientes sistemas. Para cualquier sistema que tiene una infinidad de soluciones, especifique una forma generalizada de la solución.

21. $\begin{aligned} 4x - 2y &= 20 \\ -2x &= -y + 15 \end{aligned}$

22. $\begin{aligned} 4x - y &= 17 \\ 5x + 3y &= 0 \end{aligned}$

23. $\begin{aligned} -2x + 5y &= 20 \\ 4x + y &= 4 \end{aligned}$

24. $\begin{aligned} 6x - 8y &= 4 \\ 6 + 12y &= 9x \end{aligned}$

25. $\begin{aligned} 2x - y &= 9 \\ x + 3y &= -6 \end{aligned}$

26. $\begin{aligned} 2x + 4y &= -8 \\ -3x + 2y &= 4 \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} 12x - 4y &= 18 \\ -4x + y &= 6 \end{aligned}$

28. $\begin{aligned} 2x - y &= 4 \\ -6x + 3y &= -12 \end{aligned}$

29. $\begin{aligned} x - y &= 2 \\ 2x + y &= 1 \\ 7x - 5y &= 6 \end{aligned}$

30. $\begin{aligned} x - 2y &= -7 \\ 3x + y &= 0 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned}$

31. $\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x - y &= 12 \\ x - 4y &= 13 \\ -2x + 5y &= 0 \end{aligned}$

32. $\begin{aligned} x + y &= 4 \\ 2x - 3y &= 3 \\ 4x - 2y &= 10 \\ -x + 3y &= 0 \end{aligned}$

33. $\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + 2y &= -8 \\ 3x - 2y &= 0 \\ 2x - 5y &= 11 \\ -4x + 3y &= -1 \end{aligned}$

34. $\begin{aligned} x - y &= 8 \\ 2x + y &= 4 \\ 3x + 2y &= 4 \\ x + 2y &= -4 \\ 5x - 2y &= 20 \end{aligned}$

3.2 Método de eliminación de Gauss

En esta sección estudiaremos el método de eliminación de Gauss. Aunque puede parecer un poco tedioso en comparación con el procedimiento de eliminación, se puede generalizar para resolver problemas de cualquier tamaño. Además, los aspectos del cálculo de este procedimiento están un cuanto estandarizados, facilitando la implementación en programación y cómputo.

La idea general

El *método de eliminación de Gauss* comienza con el sistema de ecuaciones original y lo transforma, usando ***operaciones de fila***, en un sistema equivalente en el cual se puede leer la solución directamente. Recuerde que un sistema *equivalente* es un sistema que tiene el mismo conjunto solución que el sistema original. La figura 3.7 muestra la transformación (es decir, el cambio de forma) que se desea al resolver un sistema de (2 × 2). En contraste con el procedimiento de eliminación analizado en la sección anterior el sistema transformado sigue teniendo dimensiones de 2 × 2. Sin embargo, las operaciones de fila han transformado los coeficientes en variables de modo que sólo queda una variable en cada ecuación; y el valor de esa variable (v_1 o v_2 en la figura 3.7) se da por el lado derecho de la ecuación. Observe los coeficientes de cada variable en el "sistema transformado".

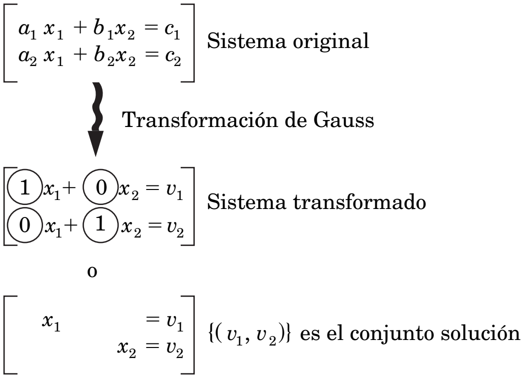


Figura 3.7 Transformación de eliminación de Gauss para sistemas de 2 × 2.

Todas las operaciones de fila siguientes son necesarias en el prodecimiento de eliminación de Gauss. Dado el sistema de ecuaciones original, la aplicación de estas operaciones da como resultado un sistema de ecuaciones equivalente.

> ### Operaciones de fila básicas
>
> **I** *Es posible multiplicar ambos lados de una ecuación por una constante diferente de cero.*
>
> **II** *Se pueden sumar múltiplos no cero de una ecuación a otra ecuación.*
>
> **III** *Se puede intercambiar el orden de las ecuaciones.*

Trabajemos con un ejemplo sencillo y después generalicemos y mejoremos el procedimiento.

Ejemplo 6 Resuelva el sistema de ecuaciones siguiente por medio del método de eliminación de Gauss:

$$2x - 3y = -7 \tag{3.14}$$

$$x + y = 4 \tag{3.15}$$

SOLUCIÓN

De acuerdo con la figura 3.7, queremos transformar el sistema dado para tener la forma

$$\begin{aligned} 1x + 0y &= v_1 \\ 0x + 1y &= v_2 \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} x \quad &= v_1 \\ y &= v_2 \end{aligned}$$

En el lado izquierdo de las ecuaciones transformadas aparecen los coeficientes de las variables no cero en un patrón diagonal de la izquierda superior a la derecha inferior. El objetivo del método de eliminación de Gauss es el de transformar el sistema original en esta *forma diagonal.* Al utilizar la operación de fila I, podemos multiplicar la ecuación (3.14) por $\frac{1}{2}$ y el coeficiente de la variable x se convierte en 1. El sistema equivalente que resulta de la ecuación es

$$\left[\tfrac{1}{2} \cdot \text{ecuación (3.14)}\right] \rightarrow \qquad \textcircled{1}x - \tfrac{3}{2}y = -\tfrac{7}{2} \tag{3.14a}$$

$$x + y = 4 \tag{3.15}$$

Se puede transformar el coeficiente de x en cero en la ecuación (3.15) al aplicar la operación de fila II. Si se multiplica la ecuación (3.14*a*) por -1 y se suma a la ecuación (3.15), el sistema equivalente resultante es

$$1x - \tfrac{3}{2}y = -\tfrac{7}{2} \tag{3.14a}$$

$$[-1 \cdot \text{ecuación (3.14}a) + \text{ecuación (3.15)}] \rightarrow \qquad \textcircled{0}x + \tfrac{5}{2}y = \tfrac{15}{2} \tag{3.15a}$$

Al usar la operación de fila I, podemos multiplicar la ecuación (3.15*a*) por $+\frac{2}{5}$. El coeficiente de y se convierte en 1 en esta ecuación:

$$1x - \tfrac{3}{2}y = -\tfrac{7}{2} \tag{3.14a}$$

$$\left[\tfrac{2}{5} \cdot \text{ecuación (3.15}a)\right] \rightarrow \qquad 0x + \textcircled{1}y = 3 \tag{3.15b}$$

Para finalizar, se puede transformar el coeficiente de y en cero en la ecuación (3.14*a*) al aplicar la operación de fila II. Si se multiplica la ecuación (3.15*b*) por $\frac{3}{2}$ y se suma a la ecuación (3.14*a*), el sistema transformado es

$$\left[\tfrac{3}{2} \cdot \text{ecuación (3.15}b) + \text{ecuación (3.14}a)\right] \rightarrow \qquad 1x + \textcircled{0}y = 1 \tag{3.14b}$$

$$0x + 1y = 3 \tag{3.15b}$$

Hay una razón para llevar coeficientes cero a través de la transformación. Muy pronto se verá por qué. Sin embargo, cuando se eliminan estos términos cero de las ecuaciones (3.14*b*) y (3.15*b*), el sistema final tiene la forma diagonal

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

que da la solución del sistema. ❑

NOTA Para crear en x un coeficiente de 1 en la ecuación (3.14), pudimos haber comenzado el proceso de solución al intercambiar las ecuaciones (3.14) y (3.15) [regla III]. Recuerde que cambiar el orden de las ecuaciones no tiene ningún impacto en el conjunto solución.

El método

La idea general de eliminación de Gauss es la de transformar un sistema de ecuaciones original en una forma diagonal al realizar aplicaciones repetidas de las tres operaciones de fila básicas. Podemos mejorar este procedimiento si usamos un tipo de notación taquigráfica para representar los sistemas de ecuaciones. En el proceso no se consideran las variables y se representa un sistema de ecuaciones al usar sólo los coeficientes de las variables y las constantes. Por ejemplo, el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 10 \\ 3x - 4y &= -5 \end{aligned}$$

se puede escribir como

$$\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 10 \\ 3 & -4 & -5 \end{array}$$

Se utiliza la línea vertical para separar los lados izquierdo y derecho de las ecuaciones. Cada columna a la izquierda de la línea vertical contiene todos los coeficientes para *cada una* de las variables del sistema.

Para el sistema general de (2 × 2) que se muestra en la figura 3.7, la transformación de Gauss sería similar a la que aparece en la figura 3.8. El principal objetivo es el de cambiar el arreglo de los coeficientes $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ en la forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Aunque hay muchas variaciones del método de eliminación de Gauss y para cualquier problema determinado en que se trate de utilizar un atajo, el siguiente procedimiento siempre funcionará.

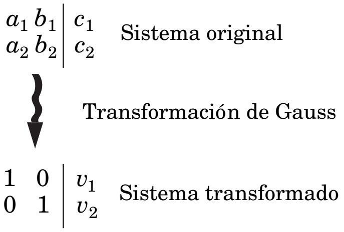


Figura 3.8 Transformación de coeficientes para un sistema de (2 × 2).

Un procedimiento de eliminación de Gauss para sistemas de (2 × 2)

I *Dado el sistema de ecuaciones de (2 × 2), construya un arreglo que contenga los coeficientes de las variables a la izquierda y las constantes del lado derecho como se muestra a continuación:*

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right)$$

II *Transforme los coeficientes en la forma diagonal una columna a la vez empezando con la columna 1. Primero se debe transformar* $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ *en* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *y luego se debe transformar* $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ *en* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$*. En ocasiones el proceso de transformación de una columna en la forma deseada se conoce como* ***pivoteo****.*

A) *En cualquier transformación de columna, obtenga primero el elemento que es igual a 1. Esto se logra al multiplicar la fila (ecuación) en que se desea el 1 por el recíproco del coeficiente que se encuentra en este momento en esa posición.* Si el elemento original en esta posición equivale a cero, aplique primero la operación de fila III e intercambie las filas para crear en esta posición un elemento no cero. Después, multiplique la fila por el recíproco del coeficiente.

B) *Obtenga el cero en la columna al multiplicar la fila que se encuentra en el paso IIA por el negativo del valor que se encuentra en este momento en la posición donde se desea el 0. Sume esto al múltiplo de la fila en que se desea el 0.*

Ilustremos el paso IIB, dado a que tiende a ser confuso. Suponga que en el sistema siguiente

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 10 \\ \textcircled{5} & 3 & 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \textbf{(1)} \\ \textbf{(2)} \end{array}$$

deseamos un cero donde aparece el ⑤ en la columna 1. Podemos crear el cero al multiplicar la fila 1 por el negativo de ⑤, es decir -5, y sumar este múltiplo de la fila 1 a la fila 2, esto es:

$$\left.\begin{array}{rr|r} -5 & -30 & -50 \\ 5 & 3 & 12 \\ \hline 0 & -27 & -38 \end{array}\qquad \begin{array}{r} -5\cdot\text{ fila 1} \\ \text{fila 2} \\ \hline \text{nueva fila 2 o } 2a \end{array}\right\}\qquad \textbf{Paso IIB}$$

El sistema obtenido es

$$\begin{array}{rr|r} 1 & 6 & 10 \\ 0 & -27 & -38 \end{array}\qquad \begin{array}{r} \textbf{(1)} \\ \textbf{(2}\boldsymbol{a}\textbf{)} \end{array}$$

Los ejemplos siguientes ilustran el procedimiento completo.

Ejemplo 7 Resuelva el sistema siguiente con el método de eliminación de Gauss.

$$\begin{aligned} 5x + 20y &= 25 \\ 4x - 7y &= -26 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Volvamos a escribir el sistema sin las variables.

$$\begin{array}{rr|rl} 5 & 20 & 25 & R_1 \\ 4 & -7 & -26 & R_2 \end{array}$$

Observe los títulos de R_1 y R_2 asignados a las filas 1 y 2. Esto será conveniente para resumir las operaciones de fila que se usan en el proceso de transformación.

Se crea un ① en la columna 1 al multiplicar la fila 1 por $\frac{1}{5}$. El sistema (equivalente) nuevo es

Sistema equivalente 1

$$\begin{array}{rr|rl} \textcircled{1} & 4 & 5 & \boldsymbol{R_{1a} = \frac{1}{5}R_1} \\ 4 & -7 & -26 & R_2 \end{array}\qquad \textbf{(Paso IIA)}$$

Se obtiene un ⓪ en la fila 2 de la columna 1 al multiplicar la fila 1 del nuevo sistema ($\boldsymbol{R_{1a}}$) por -4 y sumar este múltiplo de fila a la fila 2. El sistema nuevo es

Sistema equivalente 2

$$\begin{array}{rr|rl} 1 & 4 & 5 & R_{1a} \\ \textcircled{0} & -23 & -46 & \boldsymbol{R_{2a} = -4R_{1a} + R_2} \end{array}\qquad \textbf{(Paso IIB)}$$

Al pasar a la segunda columna, se crea un ① en la fila 2 al multiplicar esa fila por $-\frac{1}{23}$. El sistema resultante es

Sistema equivalente 3

$$\begin{array}{cc|c}1 & 4 & 5 \\ 0 & \textcircled{1} & 2\end{array} \qquad \begin{array}{l} R_{1a} \\ \boldsymbol{R_{2b} = -\frac{1}{23}R_{2a}}\end{array}$$

(Paso IIA)

Por último, se crea un ⓪ en la segunda columna de la fila 1 al multiplicar la última ($\boldsymbol{R_{2b}}$) por −4 y sumarla a la fila 1, o bien

Sistema equivalente 4

$$\begin{array}{cc|r}1 & \textcircled{0} & -3 \\ 0 & 1 & 2\end{array} \qquad \begin{array}{l} \boldsymbol{R_{1b} = -4R_{2b} + R_{1a}} \\ R_{2b}\end{array}$$

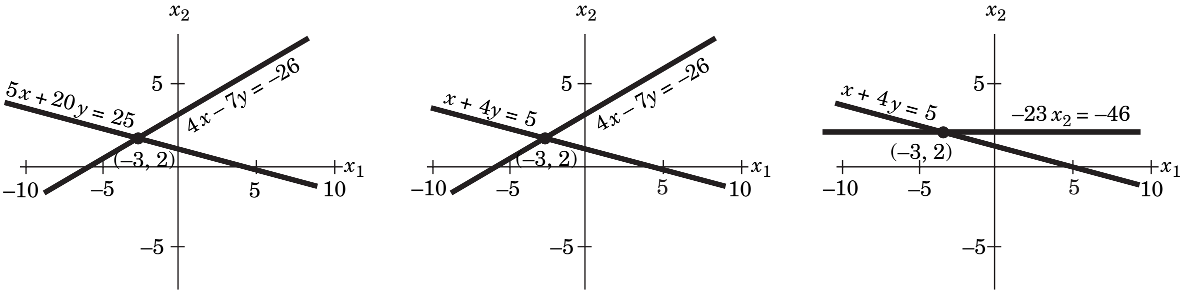
(Paso IIB)

Se puede volver a escribir el sistema original en la forma diagonal equivalente.

$$\begin{array}{lll} x & & = -3 \\ & y & = 2\end{array}$$

que es la solución del sistema original. ❑

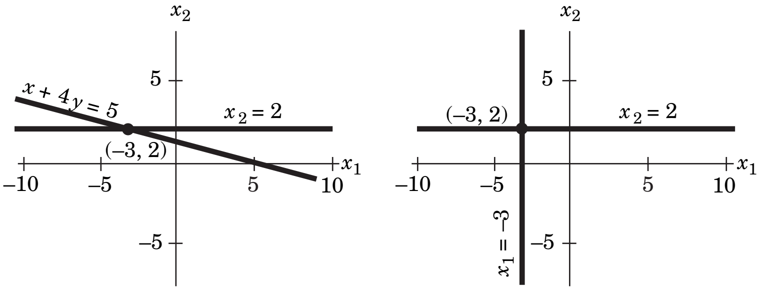
NOTA Recuerde que en cualquier etapa del proceso de eliminación de Gauss tenemos un sistema de ecuaciones que es equivalente al sistema original. Esto significa que el sistema de ecuaciones equivalente tiene el mismo conjunto solución que el del sistema original, lo cual es ilustrado gráficamente en la figura 3.9.



a) Sistema original

b) Sistema equivalente 1

c) Sistema equivalente 2



d) Sistema equivalente 3

e) Sistema equivalente 4

Figura 3.9 Sistemas de ecuaciones equivalentes que pueden resultar al utilizar el método de eliminación de Gauss.

Ejemplo 8

(Una infinidad de soluciones) En el ejemplo 3 encontramos que el sistema

$$\begin{aligned} 3x - 2y &= 6 \\ -15x + 10y &= -30 \end{aligned}$$

tenía una infinidad de soluciones. Veamos cómo se llega a este descubrimiento por medio del método de eliminación de Gauss.

Primero, volvemos a escribir el sistema como un arreglo

$$\begin{array}{rr|rl} 3 & -2 & 6 & R_1 \\ -15 & 10 & -30 & R_2 \end{array}$$

Creamos un 1 en la columna 1 al multiplicar la fila 1 por $\frac{1}{3}$.

$$\begin{array}{rr|rl} ① & -\frac{2}{3} & 2 & R_{1a} = \frac{1}{3}R_1 \\ -15 & 10 & -30 & R_2 \end{array} \qquad \textbf{(Paso IIA)}$$

Creamos un ⓪ en la fila 2 de la columna 1 al multiplicar la fila nueva 1 por 15 y sumar este múltiplo a la fila 2. El sistema resultante es

$$\begin{array}{rr|lll} 1 & -\frac{2}{3} & 2 & R_{1a} & \\ \textcircled{0} & 0 & 0 & R_{2a} = 15R_{1a} + R_2 & \textbf{(Paso IIB)} \end{array}$$

Al ir a la columna 2, deseamos crear un ① en la fila 2. Nótese que el elemento actual es cero. Si intercambiamos las filas 1 y 2 para crear en esta posición un elemento no cero, desharemos lo logrado en la columna 1. No podemos realizar el proceso completo de establecimiento de diagonales. Si volvemos a escribir este sistema equivalente con las variables incluidas, tenemos

$$\begin{aligned} x - \tfrac{2}{3}y &= 2 \\ 0x + 0y &= 0 \end{aligned}$$

Ya que cualquier par ordenado (*x*, *y*) de números reales satisface la segunda ecuación, la primera ecuación representa la única restricción del conjunto solución. Se redujo el sistema original de dos ecuaciones a un sistema equivalente que contiene una ecuación. El hecho de haber transformado la segunda ecuación en la identidad $0 = 0$ es la señal de que el sistema original tiene una infinidad de soluciones. Como en el ejemplo 3, podemos despejar *x* en la primera ecuación y especificar el conjunto solución como

$$\boxed{\begin{array}{l} y \text{ arbitrario} \\ x = \tfrac{2}{3}y + 2 \end{array}}$$

Ejemplo 9 **(Ninguna solución)** En el ejemplo 4 encontramos que el sistema

$$\begin{aligned} 6x - 12y &= 24 \\ -1.5x + 3y &= 9 \end{aligned}$$

no tenía solución. Usando el método de eliminación de Gauss, el sistema se escribe

$$\begin{array}{rr|rl} 6 & -12 & 24 & R_1 \\ -1.5 & 3 & 9 & R_2 \end{array}$$

Se crea un ① en la columna 1 al multiplicar la fila 1 por $\frac{1}{6}$.

$$\begin{array}{rr|lll} \textcircled{1} & -2 & 4 & R_{1a} = \frac{1}{6}R_1 & \textbf{(Paso IIA)} \\ -1.5 & 3 & 9 & R_2 & \end{array}$$

Se crea un ⓪ en la fila 2 de la columna 1 al multiplicar la fila nueva 1 por 1.5 y sumar este múltiplo a la fila 2.

$$\begin{array}{rr|rll} 1 & -2 & 4 & R_{1a} & \\ \textcircled{0} & 0 & 15 & R_{2a} = 1.5R_{1a} + R_2 & \textbf{(Paso IIB)} \end{array}$$

Al igual que en el ejemplo 8, no podemos continuar con el proceso de establecimiento de diagonales de este sistema. De hecho, la fila 2 de este sistema equivalente representa una contradicción:

$$0x + 0y = 15$$

o bien

$$0 = 15$$

Ésta es la misma señal que la del procedimiento de eliminación que estudiamos antes. El sistema es inconsistente y no tiene solución. ❑

Sección 3.2 Ejercicios de seguimiento

Determine los conjuntos solución para cada uno de los sistemas de ecuaciones siguientes usando el método de eliminación de Gauss.

1. $\begin{aligned} 3x - 2y &= 7 \\ 2x + 4y &= 10 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} 2x + 4y &= -16 \\ x - 2y &= 16 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} -2x + 5y &= 40 \\ 3x - 2y &= -5 \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} 5x - 2y &= -12 \\ -3x + y &= 7 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} -x + 2y &= 4 \\ 5x - 10y &= -20 \end{aligned}$

6. $\begin{aligned} 6x - 8y &= 14 \\ -3x + 4y &= -7 \end{aligned}$

7. $\begin{aligned} 24x - 15y &= 30 \\ -8x + 5y &= -20 \end{aligned}$

8. $\begin{aligned} -x + 2y &= -1 \\ 5x - 10y &= 6 \end{aligned}$

9. $\begin{aligned} 5x - 3y &= 17 \\ -2x + 5y &= -22 \end{aligned}$

10. $\begin{aligned} 4x - y &= 11 \\ 3x + 5y &= -9 \end{aligned}$

11. $\begin{aligned} -x + 2y &= -8 \\ 3x - 6y &= 24 \end{aligned}$

12. $\begin{aligned} 8x - 6y &= 24 \\ -4x + 3y &= 10 \end{aligned}$

13. $\begin{aligned} 8x - 3y &= 6 \\ 3x + 5y &= -10 \end{aligned}$

14. $\begin{aligned} 5x - 2y &= 19 \\ x + 3y &= -3 \end{aligned}$

15. $\begin{aligned} 12x - 6y &= 21 \\ -4x + 2y &= -7 \end{aligned}$

16. $\begin{aligned} 2x - 4y &= 8 \\ -x + 2y &= 10 \end{aligned}$

17. $\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 3x + 4y &= -21 \end{aligned}$

18. $\begin{aligned} x - 5y &= 8 \\ 3x + y &= -8 \end{aligned}$

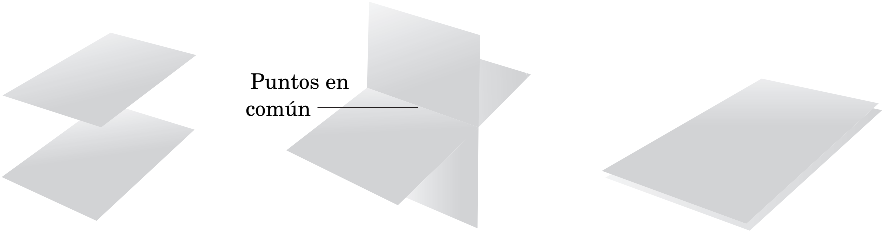
19. $\begin{aligned} 3x - 5y &= 9 \\ x + 2y &= -4 \end{aligned}$

20. $\begin{aligned} 12x + 20y &= -8 \\ -3x - 5y &= 2 \end{aligned}$

3.3 Sistemas con n variables, $n \geq 3$

Análisis gráfico para sistemas con tres variables

Cada ecuación lineal con tres variables se grafica como un *plano* en tres dimensiones. Al resolver un sistema de ecuaciones con tres variables, buscamos cualquier punto en común de los planos asociados. Consideremos primero sistemas de (2×3) o aquellos representados por dos planos. Para sistemas de (2×3) no puede haber una solución única. No hay forma de que dos planos se intersequen en un solo punto. ¡Piénselo! *Los conjuntos solución para sistemas de (2×3) no contienen ningún elemento (ninguna solución) o tienen una infinidad de soluciones.* La figura 3.10 ilustra las posibilidades diferentes para estos tipos de sistemas.



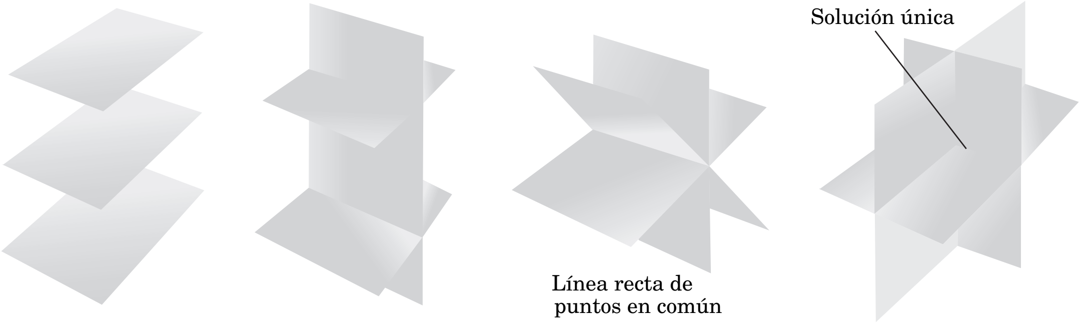
a)
Planos paralelos
(no hay solución)

b)
Planos que se intersecan
(una infinidad de soluciones)

c)
Planos idénticos
(una infinidad de soluciones)

Figura 3.10 Conjuntos solución posibles para sistemas de (2 × 3).

Para sistemas de (m × 3), donde m ≥ 3, es posible tener una solución única, ninguna solución o una infinidad de soluciones. La figura 3.11 ilustra las distintas posibilidades de solución para sistemas de (3 × 3).



a)
Planos paralelos
(ninguna solucion)

b)
Ninguna solución

c)
Una infinidad de
soluciones

d)
Solución
única

Figura 3.11 Conjuntos solución posibles para sistemas de (3 × 3).

Procedimiento de eliminación de Gauss para sistemas de (3 × 3)

El procedimiento de eliminación de Gauss para sistemas de (3 × 3) intenta transformar el sistema en una forma diagonal como se muestra en la figura 3.12. La transformación debe ocurrir columna por columna de izquierda a derecha. El ejemplo siguiente ilustra el procedimiento.

$$\begin{array}{ccc|cl} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & \text{Sistema original} \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & \end{array}$$

$$\Big\downarrow \quad \text{Transformación de Gauss}$$

$$\begin{array}{ccc|cl} 1 & 0 & 0 & v_1 & \\ 0 & 1 & 0 & v_2 & \text{Sistema transformado} \\ 0 & 0 & 1 & v_3 & \end{array}$$

Figura 3.12 Coeficiente de transformación para un sistema de (3 × 3).

Ejemplo 10

(Solución única) Determine el conjunto solución del sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 5x_2 - 10x_3 &= 13 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Para este ejemplo, simplemente se listarán las transformaciones sucesivas con las operaciones de fila correspondientes indicadas a la derecha de cada fila.

$$\begin{array}{rrr|rll} \textcircled{1} & 1 & 1 & 6 & R_1 & \textbf{(Paso IIA innecesario)} \\ 2 & -1 & 3 & 4 & R_2 & \\ 4 & 5 & -10 & 13 & R_3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rll} 1 & 1 & 1 & 6 & R_1 & \\ \textcircled{0} & -3 & 1 & -8 & R_{2a} = -2R_1 + R_2 & \textbf{(Paso IIB)} \\ 4 & 5 & -10 & 13 & R_3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rll} 1 & 1 & 1 & 6 & R_1 & \\ 0 & -3 & 1 & -8 & R_{2a} & \\ \textcircled{0} & 1 & -14 & -11 & R_{3a} = -4R_1 + R_3 & \textbf{(Paso IIB)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rll} 1 & 1 & 1 & 6 & R_1 & \\ 0 & \textcircled{1} & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & R_{2b} = -\frac{1}{3}R_{2a} & \textbf{(Paso IIA)} \\ 0 & 1 & -14 & -11 & R_{3a} & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rll} 1 & \textcircled{0} & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} & R_{1a} = -R_{2b} + R_1 & \textbf{(Paso IIB)} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & R_{2b} & \\ 0 & 1 & -14 & -11 & R_{3a} & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} & R_{1a} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & R_{2b} \\ 0 & \textcircled{0} & -\frac{41}{3} & -\frac{41}{3} & R_{3b} = -R_{2b} + R_{3a} \end{array}$$

(Paso IIB)

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} & R_{1a} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{8}{3} & R_{2b} \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 & R_{3c} = -\frac{3}{41}R_{3b} \end{array}$$

(Paso IIA)

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} & R_{1a} \\ 0 & 1 & \textcircled{0} & 3 & R_{2c} = \frac{1}{3}R_{3c} + R_{2b} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & R_{3c} \end{array}$$

(Paso IIB)

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & 0 & \textcircled{0} & 2 & R_{1b} = -\frac{4}{3}R_{3c} + R_{1a} \\ 0 & 1 & 0 & 3 & R_{2c} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & R_{3c} \end{array}$$

(Paso IIB)

El sistema tiene una solución única cuando $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ y $x_3 = 1$. ❑

Ejemplo 11 **(Ninguna solución)** Determine el conjunto solución para el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 12 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 10 \\ 6x_1 - 3x_2 - 9x_3 &= 24 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Como en el último ejemplo, se listan las transformaciones sucesivas con las operaciones de fila correspondientes mostradas a la derecha de cada fila.

$$\begin{array}{rrr|rl} -2 & 1 & 3 & 12 & R_1 \\ 1 & 2 & 5 & 10 & R_2 \\ 6 & -3 & -9 & 24 & R_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rl} \textcircled{1} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -6 & R_{1a} = -\frac{1}{2}R_1 \\ 1 & 2 & 5 & 10 & R_2 \\ 6 & -3 & -9 & 24 & R_3 \end{array}$$

(Paso IIA)

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -6 & R_{1a} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{13}{2} & 16 & R_{2a} = R_2 - R_{1a} \\ 6 & -3 & -9 & 24 & R_3 \end{array}$$

(Paso IIB)

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -6 & R_{1a} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{13}{2} & 16 & R_{2a} \\ \textcircled{0} & 0 & 0 & 60 & R_{3a} = R_3 - 6R_{1a} \end{array}$$

(Paso IIB)

En esta etapa, la fila 3 del sistema transformado tiene la forma

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 60$$

Ningún trío ordenado de números reales satisfará esta ecuación. Este *enunciado falso* o contradicción indica que el sistema de ecuaciones original no tiene conjunto solución. ❑

Ejercicio de práctica

En este ejemplo, no transformamos el sistema tanto como pudimos haberlo hecho. Nos detuvimos por el enunciado falso observado en la fila 3. Continúe la transformación tanto como pueda y verifique que el sistema no se puede transformar por completo en su forma diagonal.

Ejemplo 12 **(Una infinidad de soluciones)** Determine el conjunto solución para el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 20 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -5 \\ 6x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= 30 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

Observe que en el proceso de transformación de este ejemplo combinamos algunas operaciones de fila con el fin de ahorrar espacio, porque consideramos que hasta aquí se estará empezando a entender mejor el proceso.

$$\begin{array}{rrr|rll} \textcircled{1} & 1 & 1 & 20 & R_1 & \textbf{(Paso IIA innecesario)} \\ 2 & -3 & 1 & -5 & R_2 & \\ 6 & -4 & 4 & 30 & R_3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rll} 1 & 1 & 1 & 20 & R_1 & \\ \textcircled{0} & -5 & -1 & -45 & R_{2\text{a}} = R_2 - 2R_1 & \textbf{(Paso IIB)} \\ \textcircled{0} & -10 & -2 & -90 & R_{3a} = R_3 - 6R_1 & \textbf{(Paso IIB)} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rll} 1 & 1 & 1 & 20 & R_1 & \\ 0 & \textcircled{1} & \frac{1}{5} & 9 & R_{2b} = -\frac{1}{5}R_{2a} & \textbf{(Paso IIA)} \\ 0 & -10 & -2 & -90 & R_{3a} & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rll} 1 & \textcircled{0} & \frac{4}{5} & 11 & R_{1a} = R_1 - R_{2b} & \textbf{(Paso IIB)} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 9 & R_{2b} & \\ 0 & \textcircled{0} & 0 & 0 & R_{3b} = R_{3a} + 10R_{2b} & \textbf{(Paso IIB)} \end{array}$$

En esta etapa, se torna imposible continuar el proceso de establecimiento de diagonales. No podemos crear un 1 en la columna 3 sin cambiar las primeras dos columnas. La fila transformada 3 (R_{3b}) representa la ecuación

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0$$

que satisface todos los tríos ordenados (x_1, x_2, x_3). Las únicas restricciones de la solución son aquellas representadas en las dos primeras filas (R_{1a} y R_{2b}). El hecho de que se transformó la tercera fila en la identidad $0 = 0$ indica que el sistema original tiene una infinidad de soluciones.

Especificación de soluciones con el establecimiento de diagonales incompleto

Se deben aplicar métodos de eliminación de Gauss de izquierda a derecha para poner tantas columnas como sean posibles en su forma apropiada. Cuando no se puede terminar por completo el proceso de establecimiento de diagonales (y no hay señal alguna que indique que no hay solución), podemos especificar el conjunto solución como sigue:

1. *Para cualquier columna que no esté en su forma apropiada, las variables correspondientes pueden tener cualquier valor (arbitrario).*
2. *Para las columnas en su forma apropiada, se pueden expresar los valores de las variables correspondientes en términos de las variables del paso 1.*

En este ejemplo, no se puede transformar la columna 3 en su forma adecuada. Por tanto, se le puede asignar cualquier valor arbitrario a x_3 y expresar los valores de x_1 y x_2 en términos de ese valor. El sistema de ecuaciones correspondiente a la transformación de Gauss final es

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + \tfrac{4}{5}x_3 &= 11 \\ x_2 + \tfrac{1}{5}x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Si en estas ecuaciones despejamos respectivamente x_1 y x_2, obtenemos

$$\begin{aligned} x_1 &= 11 - \tfrac{4}{5}x_3 \\ x_2 &= 9 - \tfrac{1}{5}x_3 \end{aligned}$$

Puesto que los valores de x_1 y x_2 dependen del valor de x_3, una forma generalizada de especificar la solución del sistema de ecuaciones original es

$$\boxed{\begin{aligned} &x_3 \text{ arbitrario} \\ &x_1 = 11 - \tfrac{4}{5}x_3 \\ &x_2 = 9 - \tfrac{1}{5}x_3 \end{aligned}}$$

Por ejemplo, una solución es $(-5, 5, 20)$. Al suponer que $x_3 = 20$,

$$\begin{aligned} x_1 &= 11 - \tfrac{4}{5}(20) \\ &= 11 - 16 \\ &= -5 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_2 &= 9 - \tfrac{1}{5}(20) \\ &= 9 - 4 \\ &= 5 \end{aligned}$$

❑

Menos de tres ecuaciones

En esta sección de análisis gráfico concluimos que un sistema de (2 × 3) puede resultar ya sea con ninguna solución o bien con una infinidad de soluciones. Los ejemplos siguientes ilustran la identificación de soluciones por medio del método de eliminación de Gauss.

Ejemplo 13

(Ninguna solución) Determine el conjunto solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -4x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= -14 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{rrr|rl} -4 & 6 & 2 & 8 & R_1 \\ 2 & -3 & -1 & -14 & R_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rl} \textcircled{1} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & R_{1a} = -\frac{1}{4}R_1 \\ 2 & -3 & -1 & -14 & R_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rl} 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -2 & R_{1a} \\ \textcircled{0} & 0 & 0 & -10 & R_{2a} = R_2 - 2R_{1a} \end{array}$$

La fila 2 del sistema transformado es un enunciado falso. Ningún trío ordenado satisfará la ecuación

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -10$$

Esto indica que el sistema de ecuaciones original no tiene solución. ❑

Ejemplo 14

(Una infinidad de soluciones) Determine el conjunto solución para el sistema

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 &= 6 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{rrr|rl}
2 & -4 & -2 & 6 & R_1 \\
-1 & 2 & 3 & 9 & R_2 \\[6pt]
\textcircled{1} & -2 & -1 & 3 & R_{1a} = \frac{1}{2}R_1 \\
-1 & 2 & 3 & 9 & R_2 \\[6pt]
1 & -2 & -1 & 3 & R_{1a} \\
\textcircled{0} & 0 & 2 & 12 & R_{2a} = R_2 + R_{1a}
\end{array}$$

Con la columna 1 en la forma diagonal apropiada, es imposible transformar la columna 2 en una forma apropiada sin alterar la columna 1. Por consiguiente, pasamos a la columna 3 y la intentamos transformar en su forma diagonal apropiada.

$$\begin{array}{rrr|rl}
1 & -2 & -1 & 3 & R_{1a} \\
0 & 0 & \textcircled{1} & 6 & R_{2b} = \frac{1}{2}R_{2a} \\[6pt]
1 & -2 & \textcircled{0} & 9 & R_{1b} = R_{1a} + R_{2b} \\
0 & 0 & 1 & 6 & R_{2b}
\end{array}$$

Esto es lo más que podemos avanzar en el establecimiento de diagonales. Con el establecimiento de diagonales incompleto (y ninguna señal de que el sistema no tiene solución), concluimos que hay una infinidad de soluciones. Dado que no somos capaces de transformar la columna 2 en su forma diagonal apropiada, podemos generalizar el conjunto solución a partir de R_{1b} y R_{2b} como

$$\boxed{\begin{array}{l}
x_2 \text{ arbitrario} \\
x_1 = 9 + 2x_2 \\
x_3 = 6
\end{array}}$$

❑

Ejemplo 15 **(Una infinidad de soluciones)** Determine el conjunto solución para el sistema

$$\begin{aligned}
-10x_1 + 25x_2 - 15x_3 &= 35 \\
2x_1 - 5x_2 + 3x_3 &= -7
\end{aligned}$$

SOLUCIÓN

$$\begin{array}{rrr|rl}
-10 & 25 & -15 & 35 & R_1 \\
2 & -5 & 3 & -7 & R_2 \\[6pt]
\textcircled{1} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -3.5 & R_{1a} = -\frac{1}{10}R_1 \\
2 & -5 & 3 & -7 & R_2 \\[6pt]
1 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -3.5 & R_{1a} \\
\textcircled{0} & 0 & 0 & 0 & R_{2a} = R_2 - 2R_{1a}
\end{array}$$

Esto es lo más que podemos avanzar. Sin ninguna señal de que no hay solución, concluimos que hay una infinidad de soluciones. Ya que las columnas 2 y 3 no se pueden poner en la forma apropiada, se pueden asignar valores arbitrarios a x_2 y x_3 y expresar el valor de x_1 en términos de estos dos. Se puede generalizar el conjunto solución como

$$\boxed{\begin{aligned} &x_2 \text{ arbitrario} \\ &x_3 \text{ arbitrario} \\ &x_1 = \tfrac{5}{2}x_2 - \tfrac{3}{2}x_3 - 3.5 \end{aligned}}$$

❑

Sistemas con *n* variables, $n > 3$

Con más de tres variables ($n > 3$), desaparece el marco gráfico de referencia. No obstante, el procedimiento de eliminación de Gauss es un método de solución válido para estos sistemas. Para estos casos, los conjuntos solución son similares a los de los casos estudiados para tres variables. Por ejemplo si $m = n$ (el número de variables es igual al de ecuaciones), es posible tener una solución única, una infinidad de soluciones o ninguna solución. Las indicaciones para cada uno de estos casos es exactamente la misma que para los sistemas de (3×3).

Cuando el número de ecuaciones es menor que el número de variables ($m < n$), puede que no haya solución o que haya una infinidad de soluciones. Y cuando el número de ecuaciones es mayor que el número de variables ($m > n$), tal vez no hay solución, hay una infinidad de soluciones o hay una solución única. Los objetivos, aspectos de interpretación y naturaleza general del procedimiento de eliminación de Gauss son los mismos para cada una de estas situaciones. Los procedimientos de cálculo manual para sistemas con más de tres variables son tediosos. Se tienen disponibles procedimientos de solución por computadora para resolver sistemas mayores.

Sección 3.3 Ejercicios de seguimiento

Determine el conjunto solución para cada uno de los sistemas de ecuaciones siguientes. Especifique una forma generalizada de solución para cualquier sistema que tenga una infinidad de soluciones.

1.
$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 10 \\ 10x_1 - 5x_2 - 15x_3 &= 30 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= 25 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 &= 9 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= -5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 &= 25 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 20 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} -4x_1 - 12x_2 + 4x_3 &= -40 \\ x_1 + x_2 - 6x_3 &= 10 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 10 \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 7 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -5 \end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 13 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 17 \end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 10 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 &= 12 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

9.
$$\begin{aligned} 5x_1 - 4x_2 + 6x_3 &= 24 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 &= 54 \\ -2x_1 + x_2 - 5x_3 &= 30 \end{aligned}$$

10.
$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 + x_3 &= 7 \\ 3x_1 - 9x_2 - 3x_3 &= 14 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 24 \end{aligned}$$

11.
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned}$$

12.
$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 13 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 3 \end{aligned}$$

13.
$$\begin{aligned} 10x_1 + 5x_2 - 15x_3 &= 60 \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 &= 48 \\ -4x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= -36 \end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 17 \\ -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 7 \end{aligned}$$

15.
$$\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 &= -30 \\ -5x_1 + 10x_2 - 5x_3 &= 50 \end{aligned}$$

16.
$$\begin{aligned} -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 20 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 30 \end{aligned}$$

17.
$$\begin{aligned} 8x_1 - 4x_2 + 16x_3 &= 50 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 &= 20 \end{aligned}$$

18.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 25 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= 15 \end{aligned}$$

19.
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= -3 \\ -15x_1 + 5x_2 - 10x_3 &= 15 \end{aligned}$$

20.
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &= -4 \\ 4x_1 - 8x_2 - 4x_3 &= 10 \end{aligned}$$

21. ¿Qué posibilidades de conjunto solución existen para *a*) un sistema de ecuaciones de (5 × 3)?, *b*) un sistema de (4 × 8)? *c*) un sistema de (25 × 25)? *d*) un sistema de (100 × 75)? y *e*) un sistema de (4 000 × 1 000)?

22. ¿Qué posibilidades de conjunto solución existen para *a*) un sistema de ecuaciones de (30 × 40)? *b*) un sistema de (2 500 × 1 000)? *c*) un sistema de (600 × 30)? *d*) un sistema de (450 × 1 200)? y *e*) un sistema de (75 × 75)?

3.4 Aplicaciones selectas

Ejemplo 16

(Puente aéreo de emergencia; escenario de motivación) El escenario de motivación al inicio de este capítulo estudió el puente aéreo de emergencia de provisiones a una ciudad sudamericana que sufrió una extensa inundación. La tabla 3.1 indica los cuatro artículos considerados para el primer avión que se mandará a la ciudad al igual que el volumen, peso y costo por contenedor de cada artículo.

Tabla 3.1

Artículo	Volumen/contenedor, pies cúbicos	Peso por contenedor, libras	Costo por contenedor, $
Sangre	20	150	1 000
Paquetes de provisiones médicas	30	100	300
Alimento	8	60	400
Agua	6	70	200

Recuerde del ejemplo 22 (capítulo 2) que la capacidad de volumen del avión es de 6 000 pies cúbicos. La capacidad de peso es 40 000 libras. Además, la cantidad total de dinero disponible para la compra de provisiones es de $150 000. Reportes iniciales indican que el agua es el artículo más importante. Para responder a esta necesidad, funcionarios de la Cruz Roja especificaron que el número de contenedores de agua enviados debe ser el doble del número combinado de sangre y de paquetes de provisiones médicas. *Los funcionarios de la Cruz Roja quieren determinar si hay alguna combi-*

nación de los cuatro artículos que llene el avión a sus capacidades de peso y de volumen, gaste el presupuesto completo de $150 000 y satisfaga el requerimiento concerniente al envío de agua.

SOLUCIÓN

Si

x_1 = *número de contenedores de sangre*
x_2 = *número de contenedores de paquetes de provisiones médicas*
x_3 = *número de contenedores de alimento*
x_4 = *número de contenedores de agua*

el sistema de ecuaciones que representa los requerimientos en este problema es

$$\begin{array}{rcl}
20x_1 + 30x_2 + 8x_3 + 6x_4 = 6\,000 & & \text{(volumen)} \\
150x_1 + 100x_2 + 60x_3 + 70x_4 = 40\,000 & & \text{(peso)} \\
1\,000x_1 + 300x_2 + 400x_3 + 200x_4 = 150\,000 & & \text{(fondos)} \\
x_4 = 2(x_1 + x_2) & & \text{(agua)}
\end{array}$$

Antes de solucionar este sistema de ecuaciones de (4 × 4), vamos a hacer los cambios siguientes:

1. Se vuelve a escribir la ecuación con x_1 y x_2 en el lado izquierdo de la ecuación.
2. Se coloca la ecuación reordenada de agua como la primera de las cuatro ecuaciones.

El sistema de ecuaciones resultante, escrito en forma de arreglo, es

$$\begin{array}{rrrr|r}
-2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\
20 & 30 & 8 & 6 & 6\,000 \\
150 & 100 & 60 & 70 & 40\,000 \\
1\,000 & 300 & 400 & 200 & 150\,000
\end{array}$$

Para reducir la magnitud de algunos de los números, se dividen las ecuaciones tres y cuatro entre 10 y 100, respectivamente, para producir

$$\begin{array}{rrrr|rl}
-2 & -2 & 0 & 1 & 0 & R_1 \\
20 & 30 & 8 & 6 & 6\,000 & R_2 \\
15 & 10 & 6 & 7 & 4\,000 & R_3 \\
10 & 3 & 4 & 2 & 1\,500 & R_4
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|rl}
1 & 1 & 0 & -0.5 & 0 & R_{1a} = -\frac{1}{2}R_1 \\
0 & 10 & 8 & 16 & 6\,000 & R_{2a} = R_2 - 20R_{1a} \\
0 & -5 & 6 & 14.5 & 4\,000 & R_{3a} = R_3 - 15R_{1a} \\
0 & -7 & 4 & 7 & 1\,500 & R_{4a} = R_4 - 10R_{1a}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|rl}
1 & 1 & 0 & -0.5 & 0 & R_{1a} \\
0 & 1 & 0.8 & 1.6 & 600 & R_{2b} = \frac{1}{10}R_{2a} \\
0 & -5 & 6 & 14.5 & 4\,000 & R_{3a} \\
0 & -7 & 4 & 7 & 1\,500 & R_{4a}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|rl}
1 & 0 & -0.8 & -2.1 & -600 & R_{1b} = R_{1a} - R_{2b} \\
0 & 1 & 0.8 & 1.6 & 600 & R_{2b} \\
0 & 0 & 10 & 22.5 & 7\,000 & R_{3b} = R_{3a} + 5R_{2b} \\
0 & 0 & 9.6 & 18.2 & 5\,700 & R_{4b} = R_{4a} + 7R_{2b}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|rl}
1 & 0 & -0.8 & -2.1 & -600 & R_{1b} \\
0 & 1 & 0.8 & 1.6 & 600 & R_{2b} \\
0 & 0 & 1 & 2.25 & 700 & R_{3c} = \frac{1}{10}R_{3b} \\
0 & 0 & 9.6 & 18.2 & 5\,700 & R_{4b}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|rl}
1 & 0 & 0 & -0.3 & -40 & R_{1c} = R_{1b} + 0.8R_{3c} \\
0 & 1 & 0 & -0.2 & 40 & R_{2c} = R_{2b} - 0.8R_{3c} \\
0 & 0 & 1 & 2.25 & 700 & R_{3c} \\
0 & 0 & 0 & -3.4 & -1\,020 & R_{4c} = R_{4b} - 9.6R_{3c}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|rl}
1 & 0 & 0 & -0.3 & -40 & R_{1c} \\
0 & 1 & 0 & -0.2 & 40 & R_{2c} \\
0 & 0 & 1 & 2.25 & 700 & R_{3c} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 300 & R_{4d} = -\dfrac{1}{3.4}R_{4c}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr|rl}
1 & 0 & 0 & 0 & 50 & R_{1d} = R_{1c} + 0.3R_{4d} \\
0 & 1 & 0 & 0 & 100 & R_{2d} = R_{2c} + 0.2R_{4d} \\
0 & 0 & 1 & 0 & 25 & R_{3d} = R_{3c} - 2.25R_{4d} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 300 & R_{4d}
\end{array}$$

La solución del sistema de ecuaciones es $x_1 = 50$, $x_2 = 100$, $x_3 = 25$ y $x_4 = 300$. La recomendación matemática es que los funcionarios de la Cruz Roja carguen 50 contenedores de sangre, 100 contenedores de paquetes de provisiones médicas, 25 contenedores de alimento y 300 contenedores de agua en el primer avión. ❑

Problema de mezcla de productos

Una variedad de aplicaciones se ocupa de determinar las diferentes cantidades de productos que satisfacen requerimientos específicos. En el ejemplo siguiente nos interesamos en determinar las cantidades de tres productos que utilizarán por completo la capacidad de producción disponible.

Ejemplo 17

Una compañía fabrica tres productos, cada uno de los cuales se debe procesar en tres departamentos distintos. La tabla 3.2 resume las horas requeridas por unidad de cada producto en cada departamento. Además, se establecen las capacidades semanales de cada departamento en términos de horas de trabajo disponibles. Lo que se desea es determinar si hay alguna combinación de los tres productos que utilice por completo las capacidades semanales de los tres departamentos.

Tabla 3.2

	Producto			
Departamento	**1**	**2**	**3**	**Horas disponibles por semana**
A	2	3.5	3	1 200
B	3	2.5	2	1 150
C	4	3	2	1 400

SOLUCIÓN

Si suponemos que x_j = *número de unidades fabricadas por semana del producto j*, las condiciones por satisfacer se expresan mediante el sistema de ecuaciones siguiente.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3.5x_2 + 3x_3 &= 1\,200 \qquad \text{(departamento } A\text{)} \\ 3x_1 + 2.5x_2 + 2x_3 &= 1\,150 \qquad \text{(departamento } B\text{)} \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 1\,400 \qquad \text{(departamento } C\text{)} \end{aligned}$$

❑

Ejercicio de práctica

Verifique que al resolver estas ecuaciones de manera simultánea, el conjunto solución consiste en una solución, que es $x_1 = 200$, $x_2 = 100$ y $x_3 = 150$, o (200, 100, 150). Interprete el conjunto solución para el supervisor de producción de esta compañía.

Modelo de mezcla

Algunas aplicaciones implican la mezcla de ingredientes o componentes para formar una mezcla final que tiene características específicas. Algunos ejemplos incluyen la mezcla de gasolina con otros productos de petróleo, la mezcla de granos de café y la mezcla de whiskys. Muy a menudo los requerimientos de mezcla y las relaciones se definen por medio de ecuaciones lineales o desigualdades lineales. El ejemplo siguiente ilustra una aplicación simple.

Ejemplo 18

Un fabricante de café se interesa en la mezcla de tres tipos distintos de granos de café para obtener una mezcla final. Los tres granos componentes cuestan al fabricante $1.20, $1.60 y $1.40 por libra, respectivamente. El fabricante quiere mezclar un lote de 40 000 libras de café y tiene un presupuesto para comprar café de $57 600. En la mezcla del café, una restricción es que la cantidad usada del componente 2 debe ser el doble de la del componente 1 (el tostador cree que esto es crítico para evitar un sabor amargo).

El objetivo es el de determinar si hay una combinación de los tres componentes que lleve a una mezcla final 1) que consista en 40 000 libras, 2) que cueste $57 600 y 3) que satisfaga la restricción en los componentes 1 y 2.

Si x_j *es igual al número de libras por componente* j *usado en la mezcla final*, la ecuación (3.16) especifica que la mezcla total debe pesar 40 000 libras:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 40\,000 \qquad \textbf{(3.16)}$$

La ecuación (3.17) especifica que el costo total de los tres componentes debe ser igual a $57 600:

$$1.20x_1 + 1.60x_2 + 1.40x_3 = 57\,600 \qquad \textbf{(3.17)}$$

La restricción de la receta se expresa como

$$x_2 = 2x_1$$

o alternativamente,

$$-2x_1 + x_2 = 0 \qquad \textbf{(3.18)}$$

❑

Ejercicio de práctica

Verifique que cuando se resuelven las ecuaciones (3.16) a (3.18) de manera simultánea, la solución es $x_1 = 8\,000$, $x_2 = 16\,000$ y $x_3 = 16\,000$. Interprete esta solución para el tostador.

Modelo de cartera

Una ***cartera*** de acciones es el conjunto de acciones que el inversionista posee. Al seleccionar una cartera de un inversionista en particular, se consideran con frecuencia factores como la cantidad de dinero que se va a invertir, la actitud que el inversionista tiene hacia el riesgo (¿es un emprendedor de riesgos?) y si el inversionista se interesa en el crecimiento a largo plazo o en el rendimiento a corto plazo. Este tipo de problema es similar al ejemplo de mezcla de productos. Los productos son acciones o títulos disponibles para la inversión.

Ejemplo 19

Cuando la gente invierte, hay profesionales, como los corredores de bolsa, a quienes consultar para asesorarse sobre la cartera que mejor satisface las necesidades del inversionista. Suponga que un inversionista se ha asesorado con un experto en inversiones de su localidad. Después de platicar con el cliente, el experto en inversiones determina que el cliente se interesa en una cartera que tendrá los atributos siguientes: 1) el valor total de la cartera en el momento de la compra es de $50 000, 2) el crecimiento anual esperado en el valor de mercado es igual a 12 por ciento y 3) el factor de riesgo promedio es 10 por ciento. Se identificaron tres alternativas de inversión con crecimiento relativo y tasas de riesgo como se muestran en la tabla 3.3

Tabla 3.3

Inversión	Crecimiento anual esperado en el valor de mercado	Riesgo esperado
1	16%	12%
2	8	9
3	12	8

Para determinar la cartera, *definamos* x_j *como el número de dólares invertidos en la inversión* j. El primer atributo se puede expresar en la forma de ecuación como

$$x_1 + x_2 + x_3 = 50\,000 \qquad \textbf{(3.19)}$$

Es un poco más difícil formular el atributo 2). Precedamos la formulación analizando un ejemplo sencillo. Suponga que deposita $100 en un banco y que gana un interés de 6 por ciento por año. También suponga que invierte $200 en un certificado de depósito que gana un interés con una tasa de 8 por ciento por año. Para determinar el rendimiento porcentual *promedio* sobre su inversión de \$300, debemos calcular el interés total y dividirlo entre la inversión original, o

$$\text{Rendimiento porcentual promedio} = \frac{\text{dólares de interés ganados}}{\text{total de dólares invertidos}}$$

Para este ejemplo, se calcula el rendimiento porcentual anual promedio como

$$\frac{0.06(100) + 0.08(200)}{100 + 200} = \frac{6 + 16}{300} = \frac{22}{300} = 0.0733, \qquad \text{o} \qquad 7.33\%$$

Para calcular el crecimiento porcentual promedio en nuestro ejemplo, debe determinar el interés anual (en dólares) para cada inversión, súmelos y divídalos entre el total de dólares invertidos, o

$$\text{Crecimiento porcentual promedio} = \frac{0.16x_1 + 0.08x_2 + 0.12x_3}{x_1 + x_2 + x_3}$$

Dado que la ecuación (3.19) especifica que $x_1 + x_2 + x_3 = 50\,000$ y ya que el inversionista desea un crecimiento porcentual promedio de 12 por ciento, podemos volver a escribir la ecuación como

$$\frac{0.16x_1 + 0.08x_2 + 0.12x_3}{50\,000} = 0.12$$

o, al multiplicar ambos lados de la ecuación por 50 000, tenemos

$$0.16x_1 + 0.08x_2 + 0.12x_3 = 6\,000 \tag{3.20}$$

Esta ecuación indica que el incremento anual total en el valor de mercado para estas tres inversiones debe equivaler a \$6 000 (o 12 por ciento de \$50 000).

La condición de riesgo ponderado se determina exactamente de la misma manera. Para calcular el riesgo promedio por dólar invertido, se debe multiplicar cada dólar por el factor de riesgo asociado con la inversión de ese dólar. Se deben sumar éstos en todas las inversiones diferentes y dividirse entre la inversión total. Se generaliza esta relación por medio de la ecuación.

$$\text{Riesgo promedio} = \frac{\text{suma de los riesgos ponderados para todas las inversiones}}{\text{total de dólares invertidos}}$$

Se puede expresar esta ecuación en nuestro ejemplo como

$$\frac{0.12x_1 + 0.09x_2 + 0.08x_3}{50\,000} = 0.10$$

o

$$0.12x_1 + 0.09x_2 + 0.08x_3 = 5\,000 \tag{3.21}$$

❑

Ejercicio de práctica

Verifique que cuando se resuelven simultáneamente las ecuaciones (3.19) a (3.21), $x_1 = 20\,000$, $x_2 = 20\,000$ y $x_3 = 10\,000$. Interprete esta solución para el inversionista.

Sección 3.4 Ejercicios de seguimiento

1. Una compañía fabrica tres productos, cada uno de los cuales debe procesarse en tres departamentos. La tabla 3.4 resume las horas de trabajo requeridas por unidad de cada producto en cada departamento. Las capacidades de horas de trabajo mensuales para los tres departamentos son 1 800, 1 450 y 1 900, respectivamente. Determine si se puede producir al mes una combinación de los tres productos que consuma el total de horas de trabajo disponibles en cada departamento.

Tabla 3.4

Departamento	Producto 1	Producto 2	Producto 3
A	3	2	5
B	4	1	3
C	2	4	1

2. Una compañía fabrica tres productos, cada uno de los cuales se debe procesar en tres departamentos diferentes. La tabla 3.5 resume las horas requeridas por unidad de cada producto en cada departamento. Las capacidades de horas de trabajo mensuales para los tres departamentos son 1 600, 800 y 1 800, respectivamente. Determine si se podría producir al mes una combinación de los tres productos que consuma en su totalidad las horas de trabajo disponibles en cada departamento.

Tabla 3.5

Departamento	Producto 1	Producto 2	Producto 3
A	4	5	2
B	3	2	3
C	1	4	2

3. Una compañía fabrica tres productos, se debe procesar cada uno en un departamento. La tabla 3.6 resume los requerimientos de horas de trabajo y materia prima por unidad de cada producto. Cada mes se tienen disponibles 1 500 horas de trabajo y 3 800 libras de materia prima. Si la producción mensual combinada para los tres productos debe equivaler a 500 unidades, determine si hay alguna combinación de los tres productos que ocupe totalmente las disponibilidades mensuales de trabajo y materia prima y logre el objetivo de producción de 500 unidades.

Tabla 3.6

	Producto		
	1	**2**	**3**
Horas de trabajo/unidad	3	2	4
Libras de materia prima/unidad	10	8	6

4. Una compañía fabrica tres productos, se debe procesar cada uno en un departamento. La tabla 3.7 resume los requerimientos de horas de trabajo y materia prima por unidad de cada producto. Cada mes se tienen disponibles 1 300 horas de trabajo y 4 700 libras de materia prima. Si la producción combinada de estos tres productos debe ser igual a 400 unidades, determine si hay alguna combinación de los tres productos que agote las disponibilidades mensuales de trabajo y materia prima y logre el objetivo de producción de 400 unidades.

Tabla 3.7

	Producto		
	1	**2**	**3**
Horas de trabajo/unidad	5	2	4
Libras de materia prima/unidad	15	10	12

5. Un proceso de mezclado combina tres componentes para crear una mezcla final de 60 000 galones. Los tres componentes cuestan \$2.00, \$1.50 y \$1.25 por galón, respectivamente. El costo total de los componentes debe ser igual a \$90 000. Otro requerimiento de la mezcla es que el número de galones usados del componente 1 debe ser el doble de la cantidad utilizada del componente 3. Determine si se puede producir al mes una combinación de los tres productos que lleve a una mezcla final de 60 000 galones con un costo de \$90 000 y que satisfaga las restricciones de mezclado.

6. Un inversionista dispone de \$500 000. Se consideran tres inversiones, cada una de las cuales tiene una tasa de interés anual esperada. Las tasas de interés son 15, 10 y 18 por ciento, respectivamente. El objetivo del inversionista es un rendimiento promedio de 15 por ciento en las tres inversiones. Dado el alto rendimiento en la alternativa de inversión 3, el inversionista quiere que la cantidad en esta alternativa sea igual a 40 por ciento de la inversión total. Determine si hay una estrategia de inversión significativa que satisfaga estos requerimientos.

7. Problemas de la mezcla dietética Un dietista planea el menú de la cena para el comedor de una universidad. Se servirán tres alimentos principales, cada uno con contenidos nutricionales diferentes. El objetivo es que el contenido nutricional de la cena satisfaga los niveles diarios mínimos de tres diferentes vitaminas. La tabla 3.8 resume el contenido vitamínico *por onza* de cada alimento. Además, se indican los requerimientos diarios mínimos (MDR, por sus siglas en inglés) de las tres vitaminas. Determine el número de onzas de cada alimento que se debe incluir en la comida de manera que se satisfagan los niveles de requerimientos mínimos diarios para las tres vitaminas.

Tabla 3.8

		mg/oz		
Vitamina	**MDR**	**Comida 1**	**Comida 2**	**Comida 3**
1	29	5	3	2
2	20	2	1	3
3	21	1	5	2

8. **Cultivo de bacterias** Un cultivo bacterial contiene tres tipos de bacterias. Cada tipo requiere ciertas cantidades de carbono, fosfato y nitrógeno para sobrevivir. Los requerimientos diarios se muestran en la tabla 3.9. Cada día se aplican al cultivo 100 000 unidades de una fuente de carbono, 135 000 unidades de una fuente de fosfato y 230 000 unidades de una fuente de nitrógeno. Determine cuántas unidades de cada tipo de bacteria se pueden mantener en el cultivo.

Tabla 3.9

Tipo de bacteria	Carbono, unidades/día	Fosfato, unidades/día	Nitrógeno, unidades/día
A	2	4	3
B	3	1	5
C	6	2	8

3.5 Notas finales

Conforme concluimos nuestro análisis de los sistemas de ecuaciones lineales, cabe hacer unas cuantas observaciones:

❑ *Los requerimientos de los sistemas de ecuaciones son muy específicos*. De hecho, hay muchas aplicaciones en que las relaciones de interés son igualdades estrictas. Sin embargo, veremos en capítulos posteriores que muchas aplicaciones implican relaciones que son menos restrictivas, las cuales se representan matemáticamente por medio de desigualdades. Por ejemplo, en este capítulo presentamos ejemplos y ejercicios que establecían condiciones que requerían que se consumieran todas las horas de trabajo en un conjunto de departamentos o toda la materia prima para fabricar un conjunto de productos. De modo similar, vimos aplicaciones que establecían que se gastara el presupuesto total de un programa. Estas relaciones se establecieron en muchas aplicaciones como desigualdades. Para los recursos en un proceso de producción, el requerimiento se puede expresar como

$$\textit{Cantidad utilizada del recurso} \leq \textit{cantidad de recurso disponible}$$

De forma similar, se puede expresar como una desigualdad un requerimiento presupuestal

$$\textit{Cantidad gastada} \leq \textit{cantidad disponible}$$

❑ *Es posible que no haya una solución que se pueda implementar en una aplicación real.* Los requerimientos de un sistema de ecuaciones pueden ser demasiado específicos para satisfacerse. Esto se indicará ya sea por medio de 1) una señal de que no hay ninguna solución por el método de solución o 2) una solución que contiene valores que no son viables en la aplicación (por ejemplo $x_1 = -500$, donde x_1 equivale al número de unidades fabricadas de un producto).

❑ *Los valores fraccionales o decimales de las variables pueden ser un problema en una aplicación.* Aunque las soluciones para muchos de los ejemplos y ejercicios de este capítulo implicaron convenientemente valores enteros para las variables de un sistema de ecuaciones, *la situación más probable* es que se tengan valores decimales o fraccionales. Esto puede ser un problema para implementar el resultado matemático. Los resultados decimales pueden no ser un problema, si la variable de decisión representa algo que es posible dividir con facilidad. Por ejemplo, si un resultado de $x_2 = 10.23$ representa el número de galones o libras de algún componente que se debe usar en un proceso de mezcla, se puede implementar fácilmente el resultado matemático. Por otro lado, no se puede implementar el resultado matemático si x_2 representa el número recomendado de Boeing 747 que una aerolínea debe comprar. Es preciso analizar el resultado matemático a la luz de la situación real y se hace la recomendación de que la implementación es viable.

❑ TÉRMINOS Y CONCEPTOS CLAVE

conjunto solución 92
dimensiones 92
ecuaciones equivalentes 103
ecuaciones inconsistentes 94
método de eliminación de Gauss 103
no hay solución 94
operaciones de fila básicas 103
procedimiento de eliminación 95
sistema de ecuaciones 92
solución única 93
una infinidad de soluciones 94

❑ EJERCICIOS ADICIONALES

SECCIÓN 3.1

En los ejercicios 1 a 10, determine la naturaleza del conjunto solución (solución única, una infinidad de soluciones o ninguna solución) al comparar las pendientes y las intersepciones de *y* de las líneas rectas correspondientes.

1. $$\begin{aligned} 3x - 4y &= 20 \\ -9x + 12y &= -40 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} -x + 3y &= -4 \\ 5x - 15y &= -20 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 4x - 2y &= 18 \\ 2x + y &= 10 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} 2x + 3y &= -24 \\ 5x - 4y &= 36 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} x - 2y &= 0 \\ 3x + 4y &= 0 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} 16x - 4y &= 24 \\ -4x + y &= 10 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} x - 2y &= 10 \\ -4x + 8y &= -6 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} 3x - 4y &= 0 \\ -6x + 8y &= 0 \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} -12x + 2y &= -48 \\ 6x - y &= 2 \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} 8x - 3y &= 60 \\ 20x + 8y &= -100 \end{aligned}$$

Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones. Para cualquier sistema que tenga una infinidad de soluciones, especifique la forma generalizada de la solución.

11. $$\begin{aligned} 4x - 2y &= -40 \\ 3x + 4y &= 25 \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} x + y &= 6 \\ 3x - 2y &= 3 \end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned} 6x + 3y &= 6 \\ 2x + 4y &= 14 \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} 5x - 2y &= 18 \\ 3x + y &= 2 \end{aligned}$$

15. $$\begin{aligned} 2x - 3y &= -1 \\ -10x + 15y &= 5 \end{aligned}$$

16. $$\begin{aligned} x - 2y &= -8 \\ -4x + 8y &= 10 \end{aligned}$$

17. $$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 3x - 2y &= 18 \\ -x + 3y &= -13 \\ 5x - y &= 23 \\ -x - 4y &= 8 \end{aligned}$$

18. $$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x - 3y &= -10 \\ x + 2y &= 2 \\ -5x + y &= 12 \\ 3x - 2y &= 10 \end{aligned}$$

19. $$\begin{aligned} 3x + y &= 10 \\ x - y &= -2 \\ 2x + 3y &= 16 \\ x + y &= 4 \end{aligned}$$

20. $$\begin{aligned} x + y &= -1 \\ 2x - 3y &= 8 \\ x + 2y &= -3 \\ 4x - 3y &= 10 \end{aligned}$$

SECCIÓN 3.2

Resuelva los siguientes sistemas usando el método de eliminación de Gauss.

21. $$\begin{aligned} -3x + 2y &= 22 \\ 5x + 4y &= 0 \end{aligned}$$

22. $$\begin{aligned} 5x - 8y &= 1 \\ 4x + 2y &= 26 \end{aligned}$$

23. $$\begin{aligned} 5x - 3y &= -2 \\ -25x + 15y &= 10 \end{aligned}$$

24. $$\begin{aligned} x - 2y &= 4 \\ -5x + 10y &= 10 \end{aligned}$$

25. $$\begin{aligned} 3x - 4y &= 8 \\ -2x + 2y &= -6 \end{aligned}$$

26. $$\begin{aligned} 4x - 8y &= -32 \\ -x + 2y &= 10 \end{aligned}$$

27. $$\begin{aligned} 15x - 3y &= 24 \\ -5x + y &= -8 \end{aligned}$$

28. $$\begin{aligned} x - y &= 3 \\ 5x + 2y &= -20 \end{aligned}$$

29. $$\begin{aligned} 6x - y &= 26 \\ 2x + 3y &= 2 \end{aligned}$$

30. $$\begin{aligned} 4x + 5y &= -5 \\ 6x - 3y &= 45 \end{aligned}$$

31. $$\begin{aligned} -x + 2y &= -4 \\ 5x - 10y &= 20 \end{aligned}$$

32. $$\begin{aligned} -2x + y &= -3 \\ 12x - 6y &= 14 \end{aligned}$$

33. $$\begin{aligned} 7x - 4y &= 1 \\ 4x + 2y &= -8 \end{aligned}$$

34. $$\begin{aligned} 8x - 3y &= 49 \\ 2x + 3y &= 1 \end{aligned}$$

SECCIÓN 3.3

Resuelva los sistemas siguientes usando la eliminación de Gauss.

35. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -2 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned}$$

36. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 11 \end{aligned}$$

37. $$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\ -9x_1 + 3x_2 - 6x_3 &= -18 \end{aligned}$$

38. $$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 6x_2 - 3x_3 &= 25 \end{aligned}$$

39. $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= -5 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -12 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

40. $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= -2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

41. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_3 + x_3 &= -4 \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 &= 12 \\ -3x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 10 \end{aligned}$$

42. $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\ -6x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= -10 \end{aligned}$$

43. $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 9 \end{aligned}$$

44. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 40 \end{aligned}$$

45. $$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 2 \\ 3x_1 - 2x_3 &= 6 \end{aligned}$$

46. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= -2 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -4 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned}$$

47. $$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= 15 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 &= 16 \end{aligned}$$

48. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 7 \end{aligned}$$

***49.** Suponga que se representa un sistema de ecuaciones de (3 × 3) por medio de tres planos que se intersecan en una línea recta común. ¿Cuántas variables se especificarían como arbitrarias en la solución generalizada?

***50.** Suponga en el ejercicio 49 que los tres planos son idénticos. ¿Cuántas variables se especificarían como arbitrarias?

***51.** Suponga que se puede considerar que un sistema de ecuaciones de (2 × 4) se representa con hiperplanos idénticos en un espacio de cuatro dimensiones. ¿Cuántas variables se especificarían como arbitrarias en la solución generalizada?

***52.** Suponga que se puede considerar que un sistema de ecuaciones de ($m \times n$) se representa con m hiperplanos idénticos en un espacio de n dimensiones. ¿Cuántas variables se especificarían como arbitrarias en la solución generalizada?

SECCIÓN 3.4

53. Un fabricante de café se interesa en mezclar tres tipos de granos de café para obtener una mezcla de café final de 10 000 libras. Los tres granos componentes cuestan $2.40, $2.60 y $2.00 por libra, respectivamente. El fabricante quiere mezclar las 10 000 libras con un costo total de $21 000. En la mezcla de café, una restricción es que las cantidades usadas de los granos componentes 1 y 2 sean iguales. Determine si hay una combinación de los tres tipos de granos que lleve a una mezcla final de 10 000 libras con un costo de $21 000 y que satisfaga la restricción de mezcla.

54. **Mezcla dietética** Un dietista planea una comida que consiste en tres tipos de alimentos. En la planeación de la comida, el dietista quiere satisfacer los requerimientos mínimos diarios (MDR) de tres vitaminas. La tabla 3.10 resume el contenido vitamínico por onza de cada tipo de alimento, expresado en miligramos (mg). Determine si hay alguna combinación de los tres alimentos que satisfaga con exactitud el MDR de las tres vitaminas.

Tabla 3.10

	Contenido de vitamina/onza, mg		
Tipo de alimento	**Vitamina 1**	**Vitamina 2**	**Vitamina 3**
1	4	2	1
2	6	8	6
3	3	4	2
MDR	52	56	34

55. Un destilador quiere mezclar tres componentes de bourbon para obtener whisky de primera. Suponiendo que no hay mermas en el proceso de mezclado, se desean mezclar 50 000 litros del whisky. El único requerimiento de mezclado es que la cantidad utilizada del bourbon 1 sea el doble de la del bourbon 3. Además, se destinaron $130 000 para comprar los bourbon componentes. Los tres bourbon cuestan $2.50, $2.00 y $3.00 por litro, respectivamente. Determine si hay una combinación de los tres bourbon que produzca los 50 000 litros deseados. Si es así, ¿qué cantidades se deberían usar?

56. **Mezcla: cuidado del césped** Un fabricante de fertilizantes para césped va a mezclar tres fertilizantes en una mezcla personalizada. Cada uno de los fertilizantes personalizados se caracteriza por su contenido de alimento para plantas y contenido de herbicida. Los porcentajes son (por peso).

Fertilizante 1: 50 por ciento de alimento para plantas y 20 por ciento de herbicida
Fertilizante 2: 60 por ciento de alimento para plantas y 10 por ciento de herbicida
Fertilizante 3: 40 por ciento de alimento para plantas y 30 por ciento de herbicida

Se debe producir un lote de 10000 libras de la mezcla personalizada que tiene un contenido de alimento para plantas de 48 por ciento y 22 por ciento de herbicida. Determine las cantidades de los fertilizantes que se deben mezclar para satisfacer estos requerimientos.

57. Administración de fondo para el fideicomiso Un fondo de fideicomiso tiene $200 000 para invertir. Se identificaron tres alternativas de inversión, que ganan 10 por ciento, 7 por ciento y 8 por ciento, respectivamente. Se estableció el objetivo de ganar un ingreso anual de $16 000 sobre la inversión total. Una condición que el fideicomiso estipuló es que la inversión combinada en las alternativas 2 y 3 debe ser el triple de la cantidad invertida en la alternativa 1. Determine la cantidad de dinero que se debe invertir en cada opción con el fin de satisfacer los requerimientos del fondo para el fideicomiso.

❑ EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. Resuelva gráficamente el sistema de ecuaciones siguiente de manera gráfica.

$$\begin{aligned} x + 5y &= -4 \\ -3x + 2y &= -5 \end{aligned}$$

2. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 5x - 2y &= 25 \\ 4x + y &= 7 \\ 2x - 5y &= 31 \\ x + y &= -2 \end{aligned}$$

3. *a*) ¿Cuáles son las posibilidades del conjunto solución para un sistema de ecuaciones de (20 × 15)?
b) ¿Para un sistema de (15 × 20)?

4. Resuelva el sistema de ecuaciones siguiente por medio del método de eliminación de Gauss.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 10 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 20 \\ -3x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= -30 \end{aligned}$$

5. Los siguientes son resultados del método de eliminación de Gauss. Interprete su significado.

$$a)\ \begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{array} \qquad b)\ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

6. Una compañía fabrica tres productos, cada uno de los cuales se debe procesar en tres departamentos diferentes. La tabla 3.11 resume las horas requeridas por unidad de cada producto en cada departamento así como sus capacidades semanales en cada departamento. Formule el sistema de ecuaciones y despeje cualquier combinación de los tres productos que consuma en su totalidad la disponibilidad de trabajo semanal en todos los departamentos. Interprete sus resultados.

Tabla 3.11

	Producto			
Departamento	***A***	***B***	***C***	**Horas disponibles por semana**
1	6	2	2	70
2	7	4	1	60
3	5	5	3	55

❑ EJERCICIOS POR COMPUTADORA

Resuelva los sistemas de ecuaciones siguientes usando un software apropiado.

1.

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 5\\
2x_1 - x_3 + 3x_4 &= 12\\
2x_2 - 5x_3 + x_4 - x_5 &= 12\\
3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 - 3x_5 &= 23\\
5x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 4x_5 &= -6
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 30\\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 130\\
3x_1 - 2x_3 + 4x_5 &= 105\\
5x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= -5\\
4x_1 - 10x_2 + x_3 - 5x_4 - x_5 &= -55
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 0\\
3x_1 - 2x_3 + 4x_4 - 3x_6 &= 0\\
5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + x_6 &= 26\\
2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 + 3x_5 - x_6 &= -2\\
3x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= -18\\
x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 5x_5 &= 24
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 12\\
2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_5 &= 5\\
x_1 + x_3 - 2x_4 + x_5 - 4x_6 &= -8\\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 6x_6 &= 46\\
4x_1 - 2x_3 + x_4 - x_5 + 3x_6 &= 6\\
x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 &= 0
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 + 2x_7 + x_8 &= 30\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &= 20\\
3x_1 - 2x_3 + x_4 - 2x_5 + x_7 &= 10\\
5x_3 - 2x_4 + x_5 - 2x_7 &= 3\\
x_1 + x_2 &= 7\\
x_5 + x_6 + x_7 &= 6\\
5x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 + x_5 - 5x_6 - x_7 + 2x_8 &= 17\\
x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 - x_8 &= 0
\end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned}
2x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 - x_5 + x_6 - 3x_7 + x_8 &= 100\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &= 50\\
2x_1 + 3x_2 - 2x_5 + 3x_6 &= 50\\
x_1 + x_2 + x_3 &= 15\\
x_6 + x_7 + x_8 &= 25\\
5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 - x_6 + 5x_7 + 6x_8 &= 165\\
4x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 3x_5 + 2x_7 &= 35\\
x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 + x_7 - x_8 &= -50
\end{aligned}$$

7. La XYZ Manufacturing Company fabrica cinco productos diferentes, cada uno de los cuales debe procesarse en cinco departamentos distintos, *A* a *E*. La tabla 3.12 indica el número de horas requeridas para producir una unidad de cada producto en cada departamento. También se indica el número de horas de producción disponibles cada semana en cada uno de los departamentos. La compañía quiere determinar si hay alguna cantidad de los cinco productos que se pueda producir cada semana que dé como resultado la utilización total de las horas disponibles en todos los departamentos.

a) Formule el sistema de ecuaciones lineales apropiado.

b) Determine las combinaciones de los cincos productos que utilizarán los cinco departamentos a su máxima capacidad. ¿Cómo se asignará la capacidad semanal de cada departamento a los cinco productos?

Tabla 3.12

Departamento	Producto 1	2	3	4	5	Horas disponibles por semana
A	2	1	4	3	2	330
B	4	2	3	2	1	330
C	5	4	2	4	3	440
D	3	2	2	2	3	320
E	1	1	1	1	1	130

8. Una compañía fabrica cinco productos diferentes. Se debe procesar cada uno de los productos en cinco departamentos distintos, *A* a *E*. La tabla 3.13 indica el número de horas requeridas para producir una unidad de cada producto en cada departamento. También se indica el número de horas de producción disponibles por mes en cada uno de los cinco departamentos. La compañía quiere determinar la combinación de los cinco productos que se pueden fabricar cada mes de modo que utilice en su totalidad las horas disponibles en los departamentos.

a) Formule el sistema de ecuaciones lineales apropiado.

b) Determine las combinaciones de los cinco productos que satisfacen el sistema de ecuaciones. ¿Cómo se asignará la capacidad de cada departamento entre los cinco productos?

Tabla 3.13

Departamento	Producto 1	2	3	4	5	Horas disponibles por semana
A	3	4	2	1	4	1 150
B	5	3	4	2	1	1 050
C	2	5	3	6	4	2 200
D	4	4	5	4	3	1 700
E	2	5	5	5	4	2 000

9. Un dietista planea el menú para la cena de una escuela preparatoria. Se considera incluir seis elementos importantes en la comida, cada una se caracteriza por un contenido nutricional diferente. El objetivo es el de satisfacer los niveles de requerimientos mínimos diarios (MDR) de seis vitaminas diferentes. La tabla 3.14 muestra el contenido vitamínico por onza de cada alimento, expresado en miligramos (mg). Además, se indica el requerimiento mínimo diario de las seis vitaminas, también en miligramos. El problema es determinar las cantidades de cada alimento que se deben incluir en la comida para satisfacer los seis requerimientos vitamínicos.

a) Formule el sistema de ecuaciones adecuado para este problema.

b) ¿Qué cantidades de cada alimento se deben incluir?

Tabla 3.14

Vitamina	MDR	Alimento 1	2	3	4	5	6
1	23	4	3	0	2	4	1
2	34	5	3	4	0	0	2
3	32	0	2	6	4	3	4
4	16	0	0	2	3	5	2
5	39	5	6	2	0	3	5
6	26	2	3	2	4	2	2

10. A un fabricante de café le interesa mezclar cinco tipos de granos de café para obtener una mezcla final de 120 000 libras de café. Los cinco granos componentes cuestan \$2, \$3, \$4, \$2 y \$2 por onza, respectivamente. El presupuesto para comprar los cinco componentes es de \$300 000. Se determinaron tres restricciones para la mezcla del café: 1) la combinación de los compuestos 1 y 2 debe constituir exactamente la mitad de la mezcla final; 2) los componentes 1 y 5 deben constituir juntos el 25 por ciento exacto de la mezcla final, y 3) la cantidad del componente 4 que se mezcla debe ser tres veces la cantidad usada del componente 3.

a) Formule el sistema de ecuaciones que cumple todos los requerimientos de este problema de mezclado.

b) ¿Cuántas libras de cada componente se deben utilizar en la mezcla final?

Apéndice: procedimiento de eliminación para sistemas de (3 × 3)

El procedimiento de eliminación para sistemas de (3 × 3) es similar al de los sistemas de (2 × 2). El objetivo es comenzar con el sistema de (3 × 3) y reducirlo a un sistema equivalente con dos variables y dos ecuaciones. Con una de las tres variables eliminada, se emplea el mismo procedimiento para los sistemas de (2 × 2) para eliminar una segunda variable, lo que da como resultado un sistema de (1 × 1). Después de despejar la variable restante, se sustituye su valor de manera secuencial en el sistema de (2 × 2) y al final en el sistema de (3 × 3) para determinar los valores de las otras dos variables. La figura 3.13 muestra el proceso por medio de un esquema. En la figura 3.13 se elimina primero x_1, seguido por x_2. No es necesario este orden; éste es simplemente ilustrativo.

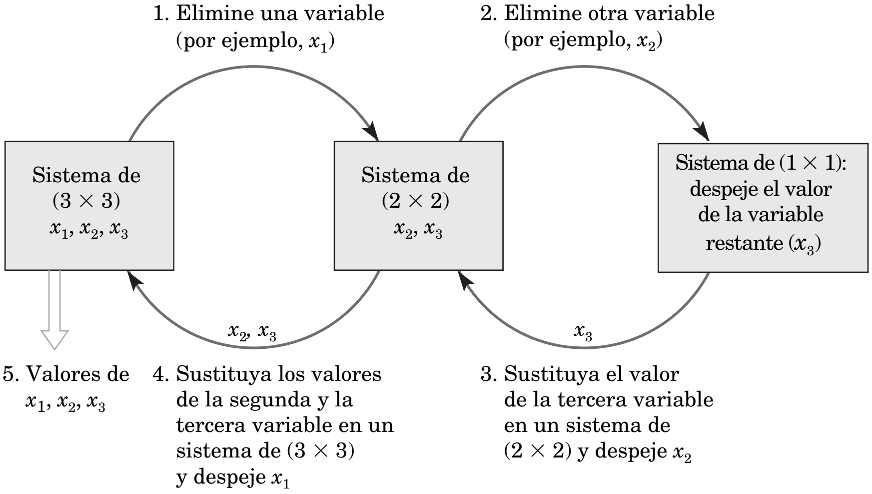


Figura 3.13 Procedimiento de eliminación para sistemas de (3 × 3).

El procedimiento de eliminación para un sistema de (3 × 3) es el siguiente.

Procedimiento de eliminación para sistemas de (3 × 3)

I *Sume múltiplos de dos de las tres ecuaciones cualesquiera con el fin de eliminar una de las tres variables. El resultado debe ser una ecuación que implica las otras dos variables.*

II *Repita el paso I con otro par de ecuaciones originales, eliminando la misma variable como en el paso I. Este segundo par de ecuaciones incluirá una de las dos ecuaciones usadas en el paso I y la ecuación que no se utilizó en el paso I.*

III *El resultado de los pasos I y II debe ser un sistema de (2 × 2). Use el procedimiento para sistemas de (2 × 2) (página 90) para determinar los valores de las dos variables restantes.*

IV *Sustituya los valores de estas dos variables en una de las ecuaciones originales. Despeje el valor de la tercera variable.*

Si durante cualquier fase del procedimiento de eliminación se obtiene como resultado una identidad [véase el paso IIIB del procedimiento (2 × 2)], entonces el conjunto solución contiene un número infinito de elementos. Una excepción de esto es el caso en que el paso I da como resultado una identidad y el paso II un enunciado falso o contradicción. ¿Cuál es la implicación gráfica de estos dos resultados? *Si en cualquier etapa se obtiene un enunciado falso [paso IIIC del procedimiento de (2 × 2)], entonces el sistema de ecuaciones original no tiene solución.*

Ejemplo 20 **Solución única** Determine el conjunto solución para el sistema de ecuaciones siguiente.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6 \tag{3.22}$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \tag{3.23}$$

$$4x_1 + 5x_2 - 10x_3 = 13 \tag{3.24}$$

SOLUCIÓN

Aunque no hay diferencia en cuál variable se elimina primero, eliminemos x_2. Si se suman las ecuaciones (3.22) y (3.23), se expresa la ecuación (3.25) resultante en términos de x_1 y x_3:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ \hline 3x_1 & & & + & 4x_3 & = & 10 \end{array} \tag{3.25}$$

Al multiplicar la ecuación (3.23) por +5 y sumarla a la ecuación (3.24) se produce la nueva ecuación (3.26), como sigue:

$$[5 \cdot \text{ecuación (3.23)}] \rightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcr} 10x_1 & - & 5x_2 & + & 15x_3 & = & 20 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & - & 10x_3 & = & 13 \\ \hline 14x_1 & & & + & 5x_3 & = & 33 \end{array} \tag{3.26}$$

Ya que se eliminó x_2, el sistema se redujo al sistema de (2 × 2)

$$3x_1 + 4x_3 = 10 \tag{3.25}$$

$$14x_1 + 5x_3 = 33 \tag{3.26}$$

Al proceder como lo hicimos en la sección 3.2, podemos eliminar x_3 multiplicando la ecuación (3.25) por +5 y la ecuación (3.26) por – 4. Cuando se suman las dos ecuaciones, se elimina x_3 y se forma la ecuación (3.27):

$$\begin{array}{l} [5 \cdot \text{ecuación (3.25)}] \rightarrow \\ [-4 \cdot \text{ecuación (3.26)}] \rightarrow \\ \\ \end{array} \quad \begin{array}{rcrcr} 15x_1 & + & 20x_3 & = & 50 \\ -56x_1 & - & 20x_3 & = & -132 \\ \hline -41x_1 & & & = & -82 \end{array} \tag{3.27}$$

Al despejar x_1 en la ecuación (3.27), obtenemos $x_1 = 2$. Si se sustituye este valor en la ecuación (3.25), se determina el valor de x_3 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 3(2) + 4x_3 &= 10 \\ 4x_3 &= 4 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Sustituir los valores de $x_1 = 2$ y $x_3 = 1$ en la ecuación (3.22) da

$$2 + x_2 + 1 = 6$$

o bien

$$x_2 = 3$$

Verifique al sustituir estos valores en las ecuaciones (3.23) y (3.24) que el conjunto solución consiste en $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ y $x_3 = 1$.

Ejemplo 21

(Ninguna solución) Determine el conjunto solución para el sistema de ecuaciones siguiente:

$$-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 12 \tag{3.28}$$

$$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 10 \tag{3.29}$$

$$6x_1 - 3x_2 - 9x_3 = 24 \tag{3.30}$$

SOLUCIÓN

Se puede eliminar la variable x_1 al multiplicar la ecuación (3.29) por $+2$ y sumarla a la ecuación (3.28), como sigue:

$$\begin{array}{rr} & -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 12 \\ [2 \cdot \text{ecuación (3.29)}] \rightarrow & 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 20 \\ \hline & 5x_2 + 13x_3 = 32 \end{array} \tag{3.31}$$

De modo similar, se puede eliminar x_1 al multiplicar la ecuación (3.29) por –6 y sumarla a la ecuación (3.30), o bien

$$\begin{array}{rr} [-6 \cdot \text{ecuación (3.29)}] \rightarrow & -6x_1 - 12x_2 - 30x_3 = -60 \\ & 6x_1 - 3x_2 - 9x_3 = 24 \\ \hline & -15x_2 - 39x_3 = -36 \end{array} \tag{3.32}$$

La eliminación de x_1 deja un sistema de (2 × 2)

$$5x_2 + 13x_3 = 32 \tag{3.31}$$

$$-15x_2 - 39x_3 = -36 \tag{3.32}$$

Para eliminar x_2, se multiplica la ecuación (3.31) por +3 y se suma a la ecuación (3.32), o

$$\begin{array}{lrcr} [3 \cdot \text{ecuación } (3.31)] \rightarrow & 15x_2 + 39x_3 & = & 96 \\ & -15x_2 - 39x_3 & = & -36 \\ \hline & 0 & = & 60 \end{array} \tag{3.33}$$

Nótese que la ecuación (3.33) es una contradicción, lo que significa que el sistema de ecuaciones original no tiene solución.

Ejemplo 22 **(Una infinidad de soluciones)** Determine el conjunto solución del sistema de ecuaciones

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20 \tag{3.34}$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = -5 \tag{3.35}$$

$$6x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 30 \tag{3.36}$$

SOLUCIÓN

Verifique que se puede eliminar x_3 y se puede encontrar la ecuación (3.37) al multiplicar la ecuación (3.34) por −1 y sumar esta nueva ecuación a la ecuación (3.35):

$$x_1 - 4x_2 = -25 \tag{3.37}$$

Verifique también que se forma la ecuación (3.38) al multiplicar la ecuación (3.34) por – 4 y sumar esto a la ecuación (3.36):

$$2x_1 - 8x_2 = -50 \tag{3.38}$$

Para eliminar x_1 en las ecuaciones (3.37) y (3.38), se puede multiplicar la ecuación (3.37) por – 2 y sumarla a la (3.38). Cuando se realizan estas operaciones, la ecuación (3.39) es una identidad:

$$\begin{array}{rcr} -2x_1 + 8x_2 & = & 50 \\ 2x_1 - 8x_2 & = & -50 \\ \hline 0 & = & 0 \end{array} \tag{3.39}$$

Ésta es la señal de que el sistema original tiene una infinidad de soluciones.

Para determinar miembros particulares del conjunto solución, regrese a una de las últimas ecuaciones significativas generadas durante el procedimiento de eliminación [ecuaciones (3.37) y (3.38)]. Después, despeje una de las variables en términos de la otra. Para ilustrarlo, despejemos x_1 en la ecuación (3.37).

$$x_1 = 4x_2 - 25 \tag{3.40}$$

Ahora, sustituimos el lado derecho de esta ecuación en una de las ecuaciones originales en que x_1 aparezca. Si sustituimos en la ecuación (3.34), tenemos

$$\begin{aligned}(4x_2 - 25) + x_2 + x_3 &= 20\\ 5x_2 + x_3 &= 45\end{aligned}$$

Despejar x_3 da

$$x_3 = 45 - 5x_2 \tag{3.41}$$

Las ecuaciones (3.40) y (3.41) presentan x_1 y x_2 en términos de x_3. Por tanto, una manera en que podemos especificar el conjunto solución es

$$\boxed{\begin{aligned}&x_2 \text{ arbitrario}\\ &x_1 = 4x_2 - 25\\ &x_3 = 45 - 5x_2\end{aligned}}$$

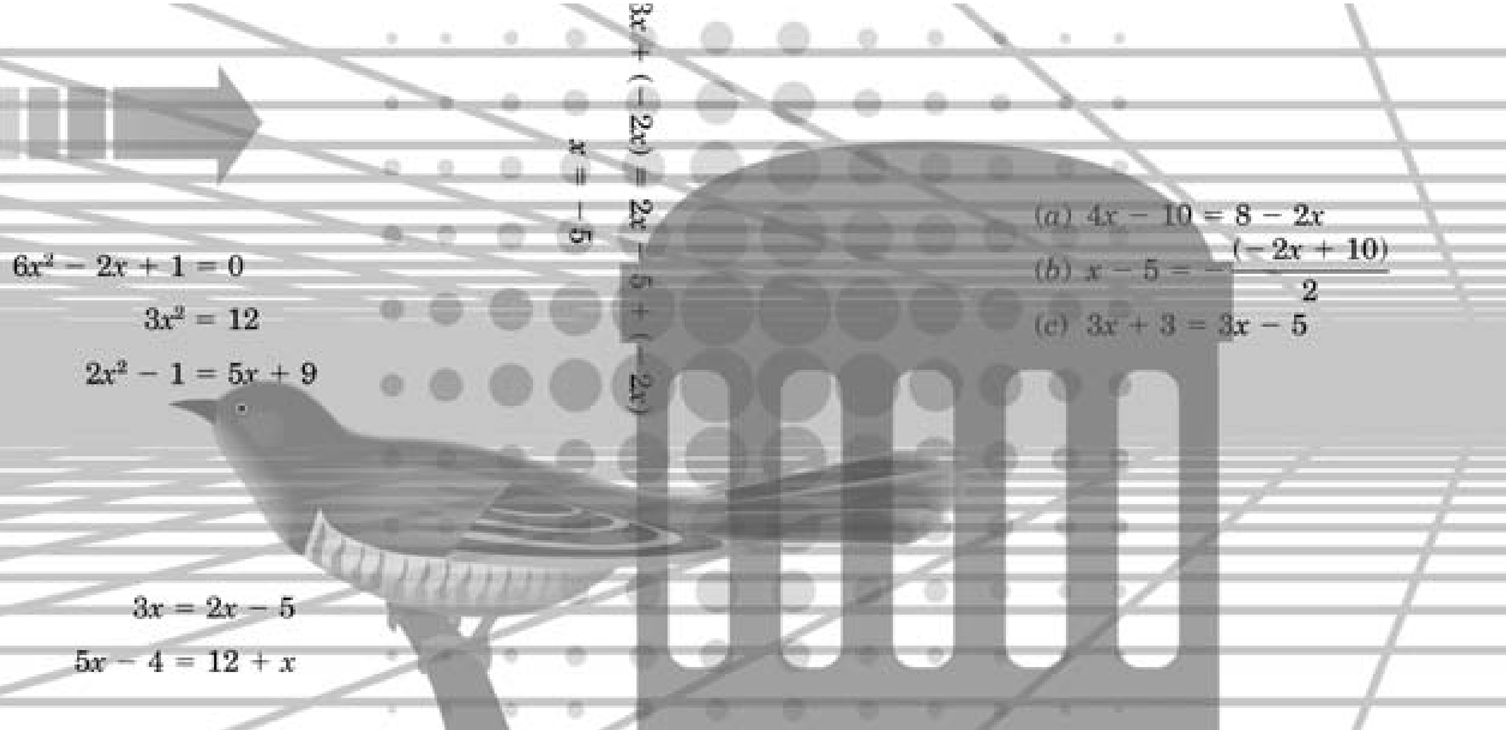
Usando esta especificación, verifique que *una* solución del sistema original es $x_1 = -5$, $x_2 = 5$ y $x_3 = 20$. ❑

CAPÍTULO 4

Funciones matemáticas

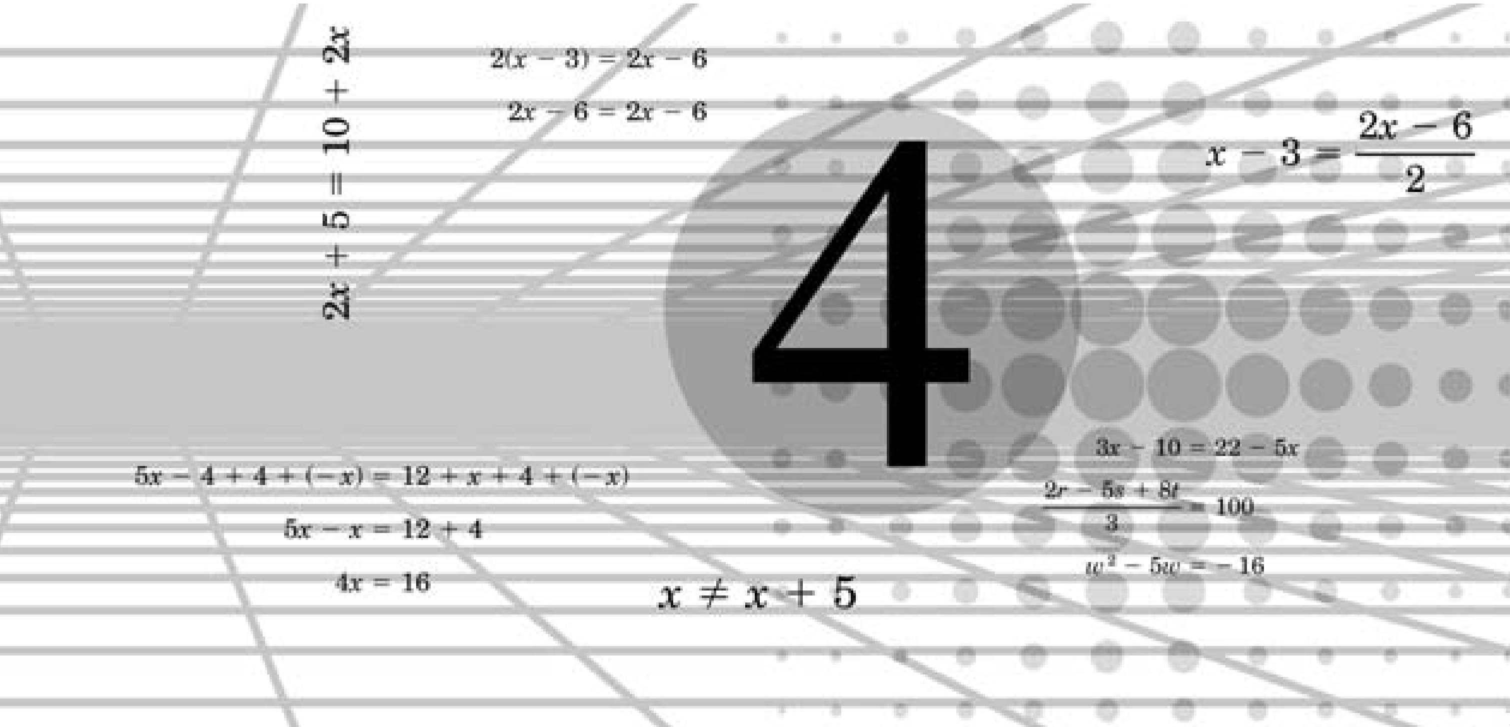
4.1 FUNCIONES
4.2 TIPOS DE FUNCIONES
4.3 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LAS FUNCIONES

Términos y conceptos clave
Fórmulas importantes
Ejercicios adicionales
Evaluación del capítulo



OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Permitir que el lector comprenda la naturaleza y la notación de las funciones matemáticas.
- Proporcionar ilustraciones de la aplicación de las funciones matemáticas.
- Ofrecer un panorama breve de tipos importantes de funciones y sus características.
- Analizar la representación gráfica de las funciones.



ESCENARIO DE MOTIVACIÓN: Acumulación militar progresiva

Al inicio de la crisis del Golfo Pérsico en 1990, Estados Unidos desplegó cientos de miles de tropas en Arabia Saudita. A causa del potencial de guerra química, las tropas necesitaban usar con urgencia máscaras antigas. El Departamento de Defensa negoció un contrato con un fabricante para surtir dos tipos de máscaras antigas. Los dos tipos costaban \$175 y \$225, respectivamente. Dada la necesidad urgente, el contrato especificaba que si el número combinado de máscaras antigas entregado cada semana era mayor que 5 000, el gobierno pagaría al fabricante un bono de \$50 000 más \$25 por cada unidad por encima de las 5 000. *Para esto se desea una fórmula que exprese la relación matemática entre las ventas semanales en dólares al gobierno y el número de unidades surtidas de los dos tipos de máscaras antigas. [Ejemplo 10]*

La aplicación de las matemáticas yace en la capacidad de identificar una representación matemática relevante de un fenómeno del mundo real. Esta relación a menudo se conoce como ***modelo matemático***. Un modelo es relevante si capta con éxito los atributos del fenómeno que son significativos para el constructor del modelo. Al igual que un modelo a escala de un avión muestra la apariencia física de un avión real, un modelo matemático de una función de la demanda representa las interrelaciones entre, digamos, el precio de una mercancía y la cantidad demandada.

Es importante repetir que los modelos matemáticos pueden reflejar una realidad exactamente; no obstante, con frecuencia se *aproximan* a la realidad. Si el modelo es una buena aproximación, puede ser muy útil en el estudio de la realidad y toma de decisiones relacionadas con ésta. Si un modelo no es una buena aproximación, es importante que comprenda esto. Ya sea que efectúe por sí mismo el análisis matemático o si se le proporcionan los resultados de un análisis matemático, es importante que entienda las suposiciones, fuerzas y limitaciones de los modelos utilizados. *¡Haga preguntas!* Realice análisis y tome decisiones de manera informada.

4.1 Funciones

En los modelos matemáticos, por lo general se representan las relaciones significativas por medio de ***funciones matemáticas*** o simplemente ***funciones.*** Las funciones constituyen una piedra angular de gran parte de lo que sigue en este libro. El propósito de este capítulo es presentar este importante tema.

Definición de funciones

Se puede considerar una función como un dispositivo de entrada/salida. A un dato de entrada (o conjunto de datos de entrada) se le aplica (o se les aplica) la regla matemática que transforma (manipula) el dato (o datos) de entrada en un dato de salida específico. (Véase la figura 4.1.) Considere la ecuación $y = x^2 - 2x + 1$. Si los datos de *entrada* son valores de x, arbitrariamente elegidos, la ecuación produce valores de y como datos de salida. Para ilustrarlo:

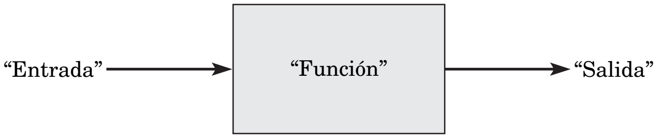


Figura 4.1 Representación de entrada/salida de una función.

Entrada	Salida correspondiente
Si $x = 1$	$y = (1)^2 - 2(1) + 1 = 0$
Si $x = -5$	$y = (-5)^2 - 2(-5) + 1 = 36$
Si $x = 10$	$y = (10)^2 - 2(10) + 1 = 81$

La ecuación proporciona la *regla* que nos permite transformar un valor de *x* en un valor correspondiente de *y*. Es posible expresar verbalmente la regla para *esta* ecuación como "tome el valor de entrada y elévelo al cuadrado, reste dos veces el valor de entrada y sume 1". Nótese que para cualquier valor de entrada, se determina un valor único de salida.

> ### Definición: Función
>
> Una ***función*** es una regla matemática que asigna a cada valor de entrada ***uno y sólo un*** valor de salida.
>
> ### Dominio/rango
>
> Ul ***dominio*** de una función es el conjunto que consiste en todos los valores de entrada posibles. El ***rango*** de una función es el conjunto de todos los valores de salida posibles.

A menudo el proceso de asignación de valores de salida a los correspondientes valores de entrada es conocido como ***mapeo***. La notación

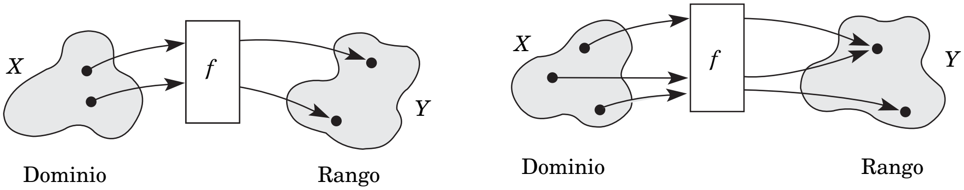
$$f: x : y$$

representa el mapeo del conjunto de valores de entrada *x* en el conjunto de valores de salida *y*, usando la regla de mapeo *f*.

La figura 4.2 ilustra algunos puntos importantes en relación con las funciones. El mapeo indicado en la figura 4.2*a*) cumple con la definición de una función. A cada valor indicado en el dominio corresponde un valor único en el rango de la función. De manera similar, el mapeo de la figura 4.2*b*) cumple con la definición. El hecho de que dos valores diferentes en el dominio se "transformen" en el mismo valor en el rango no viola la definición. Sin embargo, el mapeo de la figura 4.2*c*) no representa una función, ya que a un valor en el dominio se le asignan dos valores en el rango.

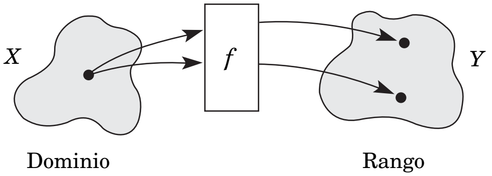
La naturaleza y la notación de las funciones

Las funciones, como las trataremos, sugieren que el valor de algo depende del valor de *una o más* cosas diferentes. Hay incontables relaciones funcionales en el mundo que nos rodea.



a) Cumple con la definición de función

b) Cumple con la definición de función



c) No cumple con la definición de función

Figura 4.2 Mapeos de la muestra.

El número de personas en una playa puede depender de la temperatura y el día de la semana, las cantidades vendidas de un producto pueden depender del precio que se cobra por producto y los precios de las marcas competidoras, las calificaciones pueden depender del tiempo que un estudiante dedica al estudio, las tasas de impuestos de una ciudad pueden depender del nivel del gasto municipal y la cantidad de dólares que un estado paga puede depender del número de personas desempleadas.

El lenguaje matemático proporciona una manera de describir cómo se relacionan funcionalmente las variables. La ecuación

$$\boxed{y = f(x)}$$

denota una relación funcional entre las variables x y y. Se puede describir verbalmente esta ecuación como si "y *es igual a* f *de* x" o "y *es una función de* x". *No se debe interpretar esta ecuación como* "y *es igual a* f *por* x". Cuando decimos que y es una *función de* x, queremos decir que el valor de la variable *y depende de x* y se determina únicamente por el valor de la variable x; x es la variable de entrada y y la variable de salida. Los papeles respectivos de las dos variables hacen que la variable x reciba el nombre de ***variable independiente*** y la variable y se denomine ***variable dependiente***. De forma alternativa, a menudo nos referimos a la variable y como el ***valor*** de la función. "f" es el ***nombre*** de la función o regla de mapeo.

Aunque y representa por lo general la variable dependiente, x la variable independiente y f el nombre de la función, se puede utilizar *cualquier* letra para representar las variables dependiente e independiente y el nombre de la función. La ecuación

$$u = g(v)$$

es una manera de expresar que se determina el valor de una variable dependiente u por el valor de la variable independiente v. Y el nombre de la función o regla que relaciona las dos variables es g.

Ejemplo 1 Imagine que se le ha contratado como vendedor. Su patrón le indicó que su salario dependerá del número de unidades que venda cada semana. Si suponemos que

y = *salario semanal en dólares*
x = *número de unidades vendidas cada semana*

se puede representar la dependencia definida por su patrón mediante la ecuación

$$y = f(x)$$

donde f es el nombre de la función del salario. ❑

Suponga que su patrón le dio la ecuación siguiente para determinar su salario semanal:

$$y = f(x) = 3x + 25 \tag{4.1}$$

Dado cualquier valor para x, la sustitución de este valor en f dará como resultado el valor correspondiente de y. Por ejemplo, si deseamos calcular su salario semanal cuando vende 100 unidades, sustituir $x = 100$ en la ecuación (4.1) da

$$\begin{aligned} y &= 3(100) + 25 \\ &= \$325 \end{aligned}$$

> Para la función $y = f(x)$, el valor de y que corresponde al valor de entrada $x = b$ se denota con $f(b)$.

En la ecuación (4.1) se puede definir el salario asociado con la venta de 75 unidades como $f(75)$. Para evaluar $f(75)$, sólo sustituya el valor 75 en la ecuación (4.1) en cualquier lado en donde aparezca x, o bien

$$\begin{aligned} f(75) &= 3(75) + 25 \\ &= \$250 \end{aligned}$$

De modo similar, con $f(0)$ se denota el valor de y que corresponde a $x = 0$ y se calcula como $f(0) = 3(0) + 25 = \$25$.

La figura 4.3 es un diagrama esquemático de la función del salario que ilustra la naturaleza de los datos de entrada/salida.

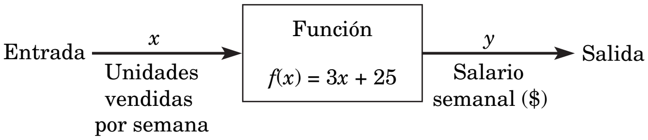


Figura 4.3 Función del salario semanal.

Ejemplo 2 Dada la relación funcional

$$\begin{aligned} z &= h(t) \\ &= t^2 + t - 10 \end{aligned}$$

a) $h(0) = (0)^2 + (0) - 10 = -10$
b) $h(-5) = (-5)^2 + (-5) - 10 = 25 - 5 - 10 = 10$
c) $h(u + v) = (u + v)^2 + (u + v) - 10$
$= u^2 + 2uv + v^2 + u + v - 10 = u^2 + u + 2uv + v + v^2 - 10$

Observe que en el inciso *c*, el valor de entrada para *t* es la suma $u + v$. Para evaluar $h(u + v)$, el procedimiento es exactamente el mismo que en las partes *a*) y *b*). En cualquier parte en donde aparezca *t* en la función, sustituimos la cantidad $u + v$.

Ejercicio de práctica

Para $t = u(v) = 2v^2 - 5v$, determine *a*) $u(-5)$ y *b*) $u(x - y)$. *Respuesta*: *a*) 75, *b*) $2x^2 - 5x - 4xy + 5y + 2y^2$.

Ejemplo 3 El departamento de policía de una ciudad pequeña contempla la compra de un auto patrulla adicional. Los analistas de la policía estiman que el costo de la compra de un automóvil totalmente equipado (subcompacto, pero con mucha potencia) es de \$18 000. También estiman un costo operativo promedio de \$0.40 por milla.

a) Determine la función matemática que representa el costo total *C* de la posesión y operación del automóvil en términos de las *x* millas conducidas.
b) ¿Cuáles son los costos totales proyectados si se conduce el automóvil 50 000 millas durante su tiempo de vida?
c) ¿Si se conduce 100 000 millas?

SOLUCIÓN

a) En este ejemplo, se nos pidió determinar la función que relaciona el costo total *C* con las *x* millas conducidas. Por el momento excluiremos cualquier consideración sobre el valor de recuperación (o reventa). La primera pregunta es: ¿qué variable depende de la otra? Una segunda lectura del problema y algo de reflexión sobre las dos variables deben llevar a la conclusión de que el costo total depende del número de millas conducidas o

$$C = f(x)$$

En esta etapa se debe ser capaz de escribir la función del costo como

$$C = f(x) = 0.40x + 18\,000$$

Si no puede escribir de inmediato la función del costo, suponga dos valores de muestra del millaje (variable independiente) y determine el costo asociado (variable dependiente). Examine los respectivos valores de las variables y vea si comienza a surgir un patrón. Si es así, entonces *articule su modelo mental* (o de manera más simple, escriba la función).

Probemos este planteamiento. ¿Cuál sería el costo total si el auto se condujera 0 millas (suponiendo que se comprara)? Su modelo mental debería responder "$18 000". ¿Cuál sería el costo total si se condujera el vehículo 10 000 millas? $22 000. ¿Qué sucedería si se condujera 20 000 millas? $26 000. Si no le es difícil encontrar estas respuestas, de hecho tiene algún modelo mental del costo. Ahora es el momento de expresar ese modelo matemáticamente. El costo total de posesión y operación del auto patrulla es la suma de dos costos componentes: costo de compra y costo de operación. Y el tipo de cálculo que debería hacer al responder cada pregunta es multiplicar el número de millas por $0.40 y sumar este resultado al costo de compra de $18 000. O bien

$$\begin{aligned} C &= f(x) \\ &= \text{costo total de operación} + \text{costo de compra} \\ &= (\text{costo de operación por milla})\ (\text{número de millas}) + \text{costo de compra} \end{aligned}$$

o sea $C = 0.40x + 18\,000$

b) Si se conduce el automóvil 50 000 millas, se estima que el costo total equivale a

$$\begin{aligned} C &= f(50\,000) \\ &= 0.40(50\,000) + 18\,000 \\ &= \$38\,000 \end{aligned}$$

c) De modo similar, con 100 000 millas

$$\begin{aligned} C &= f(100\,000) \\ &= 0.40(100\,000) + 18\,000 \\ &= \$58\,000 \end{aligned}$$

❑

Consideraciones de dominio y rango

Con anterioridad se definió el dominio de una función como el conjunto de todos los valores de entrada posibles. Dado que nos enfocaremos en funciones con *valores reales*, el dominio consiste en todos los valores reales de la variable independiente para los cuales se define y es real la variable dependiente. Para determinar el dominio, en ocasiones es más fácil identificar los valores que *no* se incluyen en el dominio (es decir, encontrar las excepciones). Dado el dominio, el rango de una función es el conjunto correspondiente de valores para la variable dependiente. Es posible que sea más difícil identificar el rango que definir el dominio. En este momento nos preocuparemos menos por este proceso. Analizaremos el rango con mayor detalle cuando estudiemos la representación gráfica más adelante en este capítulo.

Ejemplo 4 Dada la función

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ &= x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

se puede sustituir cualquier valor real por x, lo que da como resultado un valor correspondiente y único de y. Si se define D como el dominio de f,

$$D = \{x \mid x \text{ es real}\}$$

Ejemplo 5 La función

$$\begin{aligned} u &= f(v) \\ &= \frac{1}{v^2 - 4} \end{aligned}$$

tiene la forma de un cociente. Se debe excluir del dominio cualquier valor de v que dé como resultado el denominador igual a cero, ya que la división entre 0 es indefinida. El denominador es igual a cero cuando $v^2 - 4 = 0$ o cuando v tiene el valor ya sea de $+2$ o de -2. El dominio de la función incluye todos los números reales *excepto* $+2$ y -2, o bien $D = \{v|v \text{ es real y } v \neq \pm 2\}$.

Ejemplo 6 Para la función

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ &= \sqrt{x - 5} \end{aligned}$$

x puede tener cualquier valor para el cual la expresión debajo del signo de la raíz cuadrada es positiva o cero. (¿Por qué sucede esto?) Para determinar estos valores,

$$x - 5 \geq 0$$

cuando

$$x \geq 5$$

Por consiguiente, el dominio de la función incluye todos los números reales que son mayores o iguales que 5, o $D = \{x|x \text{ es real y } x \geq 5\}$.

Ejemplo 7 La función

$$y = f(x) = \sqrt{x^2 + x - 12}$$

está definida para todos los valores de x que dan como resultado $x^2 + x - 12 \geq 0$. En forma equivalente, los valores son aquellos para los que

$$(x + 4)(x - 3) \geq 0$$

El producto de los dos factores es igual a cero cuando cualquiera de los dos factores equivale a cero. Por tanto, dos miembros del dominio son $x = -4$ y $x = 3$. El producto será positivo en dos circunstancias: ambos factores son positivos o ambos factores son negativos. Es decir,

	$(x + 4)$	$(x - 3)$	> 0
cuando	$+$	$+$	
o	$-$	$-$	

Los dos factores son positivos, respectivamente, cuando

$$x + 4 > 0 \quad \text{y} \quad x - 3 > 0$$

o sea

$$x > -4 \quad \text{y} \quad x > 3$$

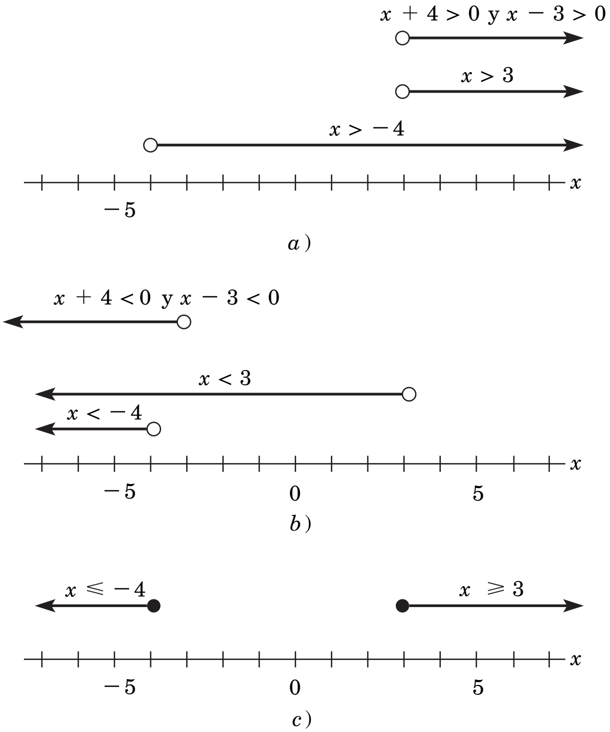


Figura 4.4 Dominio de $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 12}$

Al usar la recta numérica de la figura 4.4*a*) para reflejar estos resultados, vemos que los valores de x que tienen como resultado ambos factores positivos son $x > 3$. De modo similar, los dos factores son negativos cuando

$$x + 4 < 0 \qquad \text{y} \qquad x - 3 < 0$$

o

$$x < -4 \qquad \text{y} \qquad x < 3$$

La figura 4.4*b*) ilustra que ambos factores son negativos cuando $x < -4$.

La figura 4.4*c*) fusiona ambos resultados de nuestro análisis (incluyendo los valores de x que causan que el radicando sea igual a cero) para ilustrar que el dominio de $f(x)$ es

$$D = \{x | x \leq -4 \text{ o } x \geq 3$$ ❑

Ejercicio de práctica

Determine el dominio de la función $y = f(x) = \sqrt{10 - x}$. *Respuesta*: $x \leq 10$.

Dominio y rango restringidos

Estudiamos los conceptos de dominio y rango en un sentido meramente matemático. En un sentido práctico puede haber condiciones en una aplicación que restrinjan más el dominio y el rango de una función. Volviendo una vez más al ejemplo de la patrulla, el dominio matemático de la función del costo $C = 0.40x + 18\,000$ incluye cualquier valor real de x. No obstante, en el contexto de la aplicación deberíamos evitar que x tenga valores no negativos (es imposible que haya millas negativas recorridas). Además, podría haber consideraciones prácticas que establezcan un límite superior para x. Por ejemplo, si el departamento tiene la política de no conducir ninguna patrulla a más de 150 000 millas, entonces se tendría que restringir x a valores no mayores que 150 000. Por tanto, el ***dominio restringido*** de esta aplicación es

$$0 \leq x \leq 150\,000$$

El ***rango restringido*** de esta función de costo, en vista de las restricciones sobre x, sería

$$\$18\,000 \leq C \leq \$78\,000$$

al suponer que se compra el automóvil.

Es muy común que en problemas aplicados, las variables independientes se restrinjan a *valores enteros*. En la función del salario que se presentó con anterioridad

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ &= 3x + 25 \end{aligned}$$

es posible que se restrinja el número de unidades vendidas cada semana, x, a valores enteros. Por consiguiente, se podría definir el dominio de $f(x)$ como

$$D = \{x \mid x \text{ es entero} \qquad \text{y} \qquad 0 \leq x \leq u\}$$

El límite inferior de x es cero, excluyendo la posibilidad de ventas negativas y u es un límite superior de las ventas que podría reflejar consideraciones tales como el potencial máximo de ventas en el distrito del vendedor.

Nótese que para esta función, la restricción de enteros del dominio de f da como resultado un rango restringido a valores enteros. El rango tiene un límite inferior de 25 y un límite superior igual a $3u + 25$ o

$$R = \{25, 28, 31, 34, \ldots, 3u + 25\}$$

El salario máximo es también una función del potencial máximo de ventas.

Ejemplo 8 **(Plan de incentivos salariales)** Un fabricante ofrece a las personas que trabajan en un producto en particular un incentivo salarial. El tiempo estándar para completar una unidad es de 15 horas. Se paga a los trabajadores un promedio de \$8 por hora hasta un máximo de 15 horas por cada unidad del producto. Si una unidad del producto requiere más de 15 horas, sólo se paga al trabajador por las 15 horas que la unidad debería haber requerido. El fabricante creó un incentivo salarial por la terminación de una unidad en menos de 15 horas. Por cada hora por debajo del estándar de 15 horas, el salario por hora del trabajador aumenta \$1.50. Suponga que se aplica el incentivo de \$1.50 por hora a cualquier ahorro incremental que incluya fracciones de hora [por ejemplo, si se completa una unidad en 14.5 horas, el salario por hora equivaldría a \$8 + 0.5(\$1.50) = \$8.75]. Determine la función $w = f(n)$, donde w es la tasa salarial promedio en dólares y n es el número de horas requeridas para completar una unidad del producto.

SOLUCIÓN

La función de la tasa salarial tiene un dominio restringido de $n \geq 0$, ya que los tiempos de producción negativa no tienen significado. Además, se describirá la función en dos partes. El incentivo salarial se aplica sólo cuando el tiempo de producción es menor a 15 horas. Por ello, si $n \geq 15$, $w = 8$. Si el tiempo de producción es menor que 15 horas, se determina el incentivo salarial como

$$w = 8 + 1.5\,(\text{número de horas por debajo del estándar de 15 horas})$$

o bien $$w = 8 + 1.5\,(15 - n) = 30.5 - 1.5n$$

Evaluemos esta parte de la función. Si se produce una unidad en 13 horas, se mejoró el tiempo estándar por 2 horas y el trabajador debería ganar \$11 por hora. Sustituir $n = 13$ en la función da

$$\begin{aligned} w &= 30.5 - 1.5(13) \\ &= 30.5 - 19.5 \\ &= 11.0 \end{aligned}$$

Por ello, el enunciado formal de la función del salario es

$$w = f(n) = \begin{cases} 30.5 - 1.5n & 0 \leq n < 15 \\ 8 & n \geq 15 \end{cases}$$ ❑

Funciones de varias variables

En el caso de muchas funciones matemáticas, el valor de una variable dependiente depende de más de una variable independiente. Las funciones que contienen más de una variable independiente se denominan ***funciones de varias variables***. En la mayoría de las aplicaciones del mundo real es más apropiado usar funciones de varias variables. Por ejemplo, es probable que indicar que la utilidad depende sólo del número de unidades vendidas sobresimplifique la situación. Normalmente muchas variables interactúan entre sí con el fin de determinar la utilidad de una empresa.

Las ***funciones de dos variables*** son un tipo de funciones de varias variables. Las funciones de dos variables (en comparación con las ***funciones de una variable***) tienen dos variables independientes. La notación

$$z = f(x, y)$$

sugiere que la variable dependiente z depende de los valores de las dos variables independientes x y y. Éste es un ejemplo de una función con dos variables

$$z = f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - 5$$

La notación para evaluar funciones de varias variables es muy similar a la de las funciones de una variable independiente. Si deseamos evaluar $f(x, y)$ cuando $x = 0$ y $y = 0$, esto se denota como $f(0, 0)$. Para la función anterior

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= (0)^2 - 2(0)(0) + (0)^2 - 5 \\ &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-10, 5) &= (-10)^2 - 2(-10)(5) + 5^2 - 5 \\ &= 100 + 100 + 25 - 5 \\ &= 220 \end{aligned}$$

$$f(u, v) = u^2 - 2uv + v^2 - 5$$

La figura 4.5 ilustra la naturaleza de entrada/salida de las funciones de dos variables.

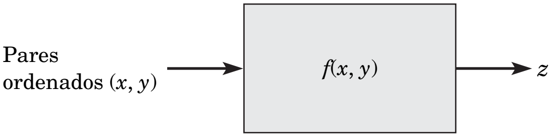


Figura 4.5 Naturaleza de entrada/salida de las funciones de dos variables.

Ejercicio de práctica

Dada $z = f(x, y) = x^3 - x^2y + 5y$, determine $f(5, -2)$. *Respuesta*: 165.

Para determinar el dominio de funciones de dos variables, se busca la combinación de pares ordenados para los cuales la función está bien definida, como se ilustra en la figura 4.6. Por ejemplo, considere la función

$$z = f(x, y) = \frac{x^2 - 2y^2 + 4xy}{3x - y} \tag{4.2}$$

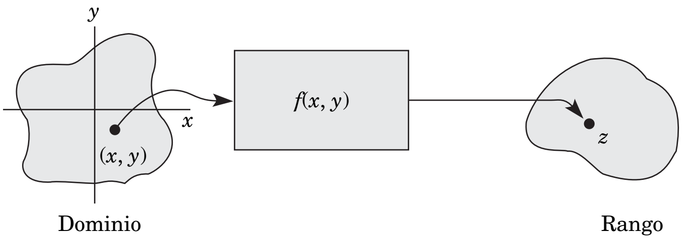


Figura 4.6 Representación del dominio de $f(x, y)$.

El numerador de esta función está definido para cualquier combinación de valores reales de x y y. De modo similar, el denominador está definido para cualesquiera valores reales de x y y. Sin embargo, la función f no es definida para valores donde $3x - y = 0$.

Se puede especificar el dominio de f como

$$D = \{(x, y) \mid 3x - y \neq 0\}$$

En la figura 4.7 se representa gráficamente el dominio.

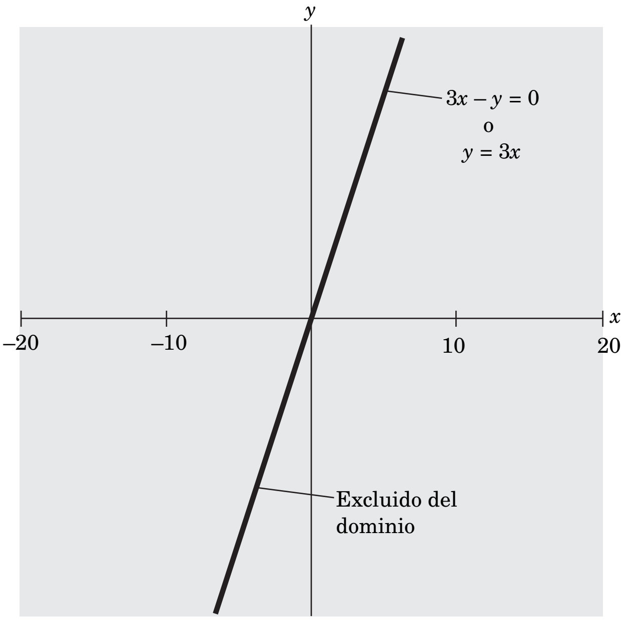


Figura 4.7 Dominio de $f(x, y) = \dfrac{x^2 - 2y^2 + 4xy}{3x - y}$.

Conforme aumenta el número de variables independientes, la convención de usar una letra diferente para representar cada variable independiente puede resultar complicada. De ahí que una manera conveniente de representar funciones de varias variables es el uso de ***variables con subíndices***. Una forma general de expresar una función donde el valor de una variable dependiente y depende del valor de n variables independientes es

$$y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

El ***subíndice*** es el índice entero positivo que se encuentra a la derecha y debajo de cada x. El índice simplemente numera las variables independientes y le permite distinguir una de otra. En este libro usaremos con frecuencia la notación de subíndice.

Ejemplo 9 Dada la función

$$\begin{aligned} y &= f(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_3^2x_4 - 25 \\ f(-2, 0, 1, 4) &= (-2)^2 - 2(-2)(0) + (1)^2(4) - 25 \\ &= 4 - 0 + 4 - 25 \\ &= -17 \end{aligned}$$

Ejemplo 10 **(Acumulación militar progresiva; escenario de motivación)** Al inicio de la crisis del Golfo Pérsico en 1990, Estados Unidos desplegó cientos de miles de tropas en Arabia Saudita. A causa del potencial de guerra química, las tropas necesitaban usar con urgencia máscaras antigas. El Departamento de Defensa negoció un contrato con un fabricante para surtir dos tipos de máscaras antigas. Los dos tipos costaban \$175 y \$225, respectivamente. Dada la necesidad urgente, el contrato especificaba que si el número combinado de máscaras antigas entregado cada semana era mayor que 5 000, el gobierno pagaría al fabricante un bono de \$50 000 más \$25 por cada unidad por encima de las 5 000. Determine la función que expresa las ventas semanales en dólares como una función del número de máscaras surtidas de cada tipo.

SOLUCIÓN

Si S = *ventas semanales, dólares*
x_1 = *número de máscaras antigas tipo 1 surtidas cada semana*
x_2 = *número de máscaras antigas tipo 2 surtidas cada semana*

se definirá la función $S = f(x_1, x_2)$ en dos partes, como se hizo en el ejemplo 8. El pago del productor depende de la producción semanal combinada. Si la producción *semanal* combinada es menor o igual a 5 000 unidades, el pago se realiza con la tasa regular o

$$S = 175x_1 + 225x_2$$

Si la producción semanal combinada es menor o igual a 5 000 unidades, el fabricante recibe un bono total de \$50 000 más \$25 adicionales por unidad por encima de las 5 000. Esto se expresa matemáticamente como

$$\begin{aligned} S &= 175x_1 + 225x_2 + 50\,000 + 25(x_1 + x_2 - 5\,000) \\ &= 175x_1 + 225x_2 + 50\,000 + 25x_1 + 25x_2 - 125\,000 \\ &= 200x_1 + 250x_2 - 75\,000 \end{aligned}$$

La función completa de las ventas es

$$S = f(x_1, x_2) = \begin{cases} 175x_1 + 225x_2 & x_1 + x_2 \leq 5\,000 \\ 200x_1 + 250x_2 - 75\,000 & x_1 + x_2 > 5\,000 \end{cases}$$

Suponga que durante una semana dada el productor surte 1 500 máscaras del tipo 1 y 3 000 del tipo 2. Ya que $x_1 + x_2 = 4\,500 < 5\,000$, el productor recibiría una compensación igual a

$$\begin{aligned} f(1\,500, 3\,000) &= 175(1\,500) + 225(3\,000) \\ &= 262\,500 + 675\,000 \\ &= \$937\,500 \end{aligned}$$

Si se surten 3 000 máscaras de cada tipo durante una semana dada,

$$\begin{aligned} f(3\,000, 3\,000) &= 200(3\,000) + 250(3\,000) - 75\,000 \\ &= 600\,000 + 750\,000 - 75\,000 \\ &= \$1\,275\,000 \end{aligned}$$ ❑

PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR

Examine la función de las ventas para la condición $x_1 + x_2 > 5\,000$. Aunque sólo se aplica el bono de \$25 a unidades en exceso de las 5 000, parece que todas las unidades reciben el bono de \$25. ¿Y dónde está el bono de \$50 000 en la función? ¿Qué representan $-75\,000$? Al parecer, la reordenación y simplificación de esta función distorsionan la lógica de las relaciones. ¡Aclárenos la lógica!

En el resto del capítulo, las funciones analizadas contendrán una variable independiente. Más adelante en el libro regresaremos a las funciones que implican más de una variable independiente.

Sección 4.1 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 16, determine $f(0)$, $f(-2)$ y $f(a + b)$.

1. $f(x) = 5x - 10$
2. $f(x) = 3x + 5$
3. $f(x) = -x + 4$
4. $f(x) = -x/2$
5. $f(x) = mx + b$
6. $f(x) = mx$
7. $f(x) = x^2 - 9$
8. $f(x) = -x^2 + 2x$
9. $f(t) = t^2 + t - 5$
10. $f(r) = tr^2 - ur + v$
11. $f(u) = u^3 - 10$
12. $f(u) = -2u^3 + 5u$
13. $f(n) = n^4$
14. $f(t) = 100$
15. $f(x) = x^3 - 2x + 4$
16. $f(x) = 25 - x^2/2$

En los ejercicios 17 a 40, determine el dominio de la función.

17. $f(x) = -10$
18. $f(x) = 25$
19. $f(x) = 5x - 10$
20. $f(x) = -x + 3$
21. $f(x) = mx + b$
22. $f(x) = -ax$
23. $f(x) = 25 - x^2$
24. $f(x) = x^2 - 4$
25. $f(x) = \sqrt{x + 4}$
26. $f(x) = \sqrt{-2x + 25}$
27. $f(t) = \sqrt{-t - 8}$
28. $f(t) = \sqrt{9 - t^2}$
29. $f(r) = \sqrt{r^2 + 9}$
30. $f(r) = \sqrt{25 - r^2}$
31. $f(x) = 10/(4 - x)$
32. $f(x) = (x - 4)/(x^2 - 6x - 16)$
33. $f(u) = (3u - 5)/(-u^2 + 2u + 5)$
34. $f(t) = \sqrt{-t - 10}/(-3t^3 + 5t^2 + 10t)$
35. $f(x) = \sqrt{2.5x - 20}/(x^3 + 2x^2 - 15x)$
36. $h(v) = \sqrt{10 - v/3}/(v^5 - 81v)$
37. $g(h) = \sqrt{h^2 - 4}/(h^3 + h^2 - 6h)$
38. $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 6}$
39. $f(x) = \sqrt{x^2 + 8x + 15}$
40. $h(r) = \sqrt{r^2 - 16}$

41. La función $C(x) = 15x + 80\,000$ expresa el costo total $C(x)$ (en dólares) de fabricar x unidades de un producto. Si el número máximo de unidades que se pueden producir es 50 000, determine el dominio restringido y el rango para esta función del costo.

42. **Función de la demanda** La función $q = f(p) = 280\,000 - 35p$ es una *función de la demanda* que expresa la cantidad demandada de un producto q como una función del precio cobrado del producto p, expresado en dólares. Determine el dominio restringido y el rango de esta función.

43. **Función de la demanda** La función $q = f(p) = 180\,000 - 30p$ es una función de la demanda que expresa la cantidad demandada de un producto q como una función del precio cobrado del producto p, indicado en dólares. Determine el dominio restringido y el rango de esta función.

44. **Primas de seguros** Una compañía de seguros tiene un método simplificado para determinar la prima anual para una póliza de seguro de vida. Se cobra una cuota anual sencilla de \$150 anuales para todas las pólizas más \$2.50 por cada mil dólares de la cantidad de la póliza. Por ejemplo, una póliza de \$20 000 costaría \$150 por la cuota fija más \$50, que corresponden al valor nominal de la póliza. Si p es igual a la prima anual en dólares y x equivale al valor de la póliza (expresado en miles de dólares), determine la función que se puede utilizar para calcular las primas anuales.

45. En el ejercicio 44, suponga que la póliza mínima que se emitirá es de \$10 000 y la máxima cantidad asegurada será \$500 000. Determine el dominio restringido y el rango de la ecuación encontrada en el ejercicio 44.

46. Una compañía eléctrica local usa el método siguiente para calcular las cuentas eléctricas mensuales para un tipo de clientes. Se evalúa un cargo de servicio mensual de \$5 por cada cliente. Además, la compañía cobra \$0.095 por kilowatt hora. Si c es igual a la cuota mensual expresada en dólares y k es el número de kilowatts hora usados durante un mes:

a) Determine la función que expresa el cargo mensual de un cliente como una función del número de kilowatts hora.

b) Use esta función para calcular la cuota mensual para un cliente que usa 850 kilowatts hora.

47. Refiérase al ejercicio 46 y suponga que el método de cálculo de cuentas de electricidad se aplica para clientes que usan entre 200 y 1 500 kilowatts hora por mes. Determine el dominio restringido y el rango de la función de ese ejercicio.

48. **Arrendamiento de automóviles** Una agencia de arrendamiento de automóviles renta autos con una tasa de \$15 por día más \$0.08 por milla conducida. Si y es igual al costo de la renta de un auto en dólares por un día y x equivale al número de millas conducidas en un día:

a) Determine la función $y = f(x)$ que expresa el costo diario de la renta de un automóvil.

b) ¿Cuál es $f(300)$? ¿Qué representa $f(300)$?

c) Comente sobre el dominio restringido de la función.

49. En la fabricación de un producto, una empresa incurre en dos tipos de costos. Se incurre en costos anuales fijos de \$250 000 sin importar el número de unidades producidas. Además, para la empresa cada unidad producida tiene un costo de \$6. Si C es igual al costo total anual en dólares y x es igual al número de unidades producidas en un año:

a) Determine la función $C = f(x)$ que expresa el costo anual.

b) ¿Cuál es $f(200\,000)$? ¿Qué representa $f(200\,000)$?

c) Indique el dominio restringido y el rango restringido de la función si la capacidad máxima de producción es de 300 000 unidades por año.

50. **Plan de incentivo salarial** Un productor de un producto perecedero ofrece un incentivo salarial a los conductores de sus camiones. Una entrega estándar toma un promedio de 20 horas. Se paga a los conductores con una tasa de \$10 por hora hasta un máximo de 20 horas. Hay un incentivo para los conductores que hagan el viaje en menos de 20 horas (¡pero no en mucho menos!). Por cada hora por debajo de las 20, el salario aumenta \$2.50. (El incremento salarial de \$2.50 por hora se aplica a fracciones de hora. Es decir, si un viaje toma 19.5 horas, el aumento en el salario es de 0.5 × \$2.50 o \$1.25.) Determine la función $w = f(n)$, donde w es el salario por hora (en dólares) y n el número de horas para completar el viaje.

51. **Impulso de las membresías** Un pequeño club de salud trata de estimular nuevas membresías. Por tiempo limitado se reducirá la cuota anual normal de \$300 a \$200. Como un incentivo adicional, para cada miembro nuevo por encima de los 60, el cargo anual por cada miembro se reducirá \$2 más. Determine la función $p = f(n)$, donde p es la cuota de membresía para miembros nuevos y n es el número de miembros nuevos.

52. Dada $f(x, y) = x^2 - 6xy + 2y^2$, determine *a)* $f(0, 0)$, *b)* $f(-1, 2)$ y *c)* $f(5, 10)$.

53. Dada $g(u, v) = 2u^2 + 5uv + v^3$, determine *a)* $g(0, 0)$, *b)* $g(-5, 2)$, *c)* $g(5, 10)$ y *d)* $g(x, y)$.

54. Dada $v(h, g) = h^2/2 - 5hg + g^2 + 10$, determine *a)* $v(0, 0)$, *b)* $v(4, 2)$ y *c)* $v(-2, -5)$.

55. Dada $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 2x_3)^2$, determine *a)* $f(1, 1, 1)$, *b)* $f(2, 3, -1)$ y *c)* $f(2, 0, -4)$.

56. Dada $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + 2x_1^2x_2 - 3x_2x_3 - 10$, determine *a)* $f(0, 2, -3)$, *b)* $f(-2, 1, 5)$ y *c)* $f(3, 0, -5)$.

57. Dada $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 - 5x_2x_4 + x_1x_3x_4$, determine *a)* $f(0, 1, 0, 1)$ y *b)* $f(2, 1, 2, -3)$.

58. Dada $f(a, b, c, d) = 4ab - a^2bd + 2c^2d$, determine *a)* $f(1, 2, 3, 4)$ y *b)* $f(2, 0, 1, 5)$.

59. Dada $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 - 5x_3x_4$, determine *a)* $f(1, 10, 4, -5)$, *b)* $f(2, 2, 2, 2)$ y *c)* $f(a, b, c, d)$.

60. Una compañía estima que el número de unidades que vende cada año es una función de los gastos en publicidad por radio y televisión. La función específica es

$$z = f(x, y) = 20\,000x + 40\,000y - 20x^2 - 30y^2 - 10xy$$

donde z es igual al número de unidades vendidas por año, x equivale a la cantidad gastada en publicidad televisiva y y es la cantidad gastada en publicidad por radio (ambas en miles de dólares).

a) Determine las ventas anuales esperadas si se gastan \$50 000 en publicidad en televisión y \$20 000 en publicidad en radio.

b) ¿Cuáles son las ventas esperadas si se gastan \$80 000 y \$100 000, respectivamente?

61. **Modelo de asignación de precios** Un fabricante vende dos productos relacionados, cuyas demandas se caracterizan por las dos funciones de la demanda siguientes:

$$q_1 = f_1(p_1, p_2) = 250 - 4p_1 - p_2$$

$$q_2 = f_2(p_1, p_2) = 200 - p_1 - 3p_2$$

donde p_j es igual al precio (en dólares) del producto j y q_j es la demanda (en miles de unidades) del producto j.

a) ¿Cuántas unidades de cada producto se espera que se demanden si se cobra \$20/unidad del producto 1 y \$40/unidad del producto 2?

b) ¿Cuántas unidades se esperan si los precios unitarios son \$40 y \$30, respectivamente?

62. **Albergue familiar** Un centro de apoyo para mujeres que proporciona albergue para mujeres y niños provenientes de hogares con abuso emprende una campaña popular de recaudación de fondos en la comunidad. Un componente de la campaña es la venta de dos tipos de caramelos. La utilidad del dulce es \$0.50 y \$0.75 por barra para los dos tipos, respectivamente. El proveedor de los dulces ofreció un incentivo si el número total de barras de caramelo vendidas es de más de 2 000. Por cada barra por encima de las 2 000, el centro ganará \$0.25 adicionales. Determine la función $P = f(x_1, x_2)$, donde P es igual a la utilidad total en dólares y x_j es igual al número de barras vendidas del tipo j. Si se venden 750 y 900 barras, respectivamente, ¿cuál es la utilidad esperada? ¿Si se venden 1 500 y 2 250, respectivamente?

63. Se paga a un vendedor un salario base semanal y gana una comisión por cada unidad vendida de tres productos diferentes. El salario base es de \$60 y las comisiones por unidad vendida son \$2.50, \$4.00 y \$3.00, respectivamente. Si S equivale al salario semanal del vendedor y x_j es igual al número de unidades vendidas del producto j durante una semana dada, determine la función del salario $S = f(x_1, x_2, x_3)$. ¿Cuál sería el salario semanal si el vendedor vende 20, 35 y 15 unidades, respectivamente, de los tres productos?

64. En el ejercicio previo, suponga que el vendedor puede ganar un bono si la venta combinada de los tres productos excede las 50 unidades por semana. El bono es igual a \$25 más una comisión adicional de \$1.25 por todas las unidades vendidas por encima de las 50. Determine la función del salario semanal $S = f(x_1, x_2, x_3)$. ¿Cuál sería el salario ganado por las 20, 35 y 15 unidades vendidas en el ejercicio anterior?

4.2 Tipos de funciones

Es posible clasificar las funciones de acuerdo con sus características estructurales. A continuación se presenta un análisis de algunas de las funciones más comunes. En los capítulos 5 y 6 se tratan estas funciones de manera más detallada. Se analizarán las funciones *exponenciales* y *logarítmicas* en el capítulo 7.

Funciones constantes

Una ***función constante*** tiene la forma general

$$\boxed{y = f(x) = a_0} \tag{4.3}$$

donde a_0 es real. Por ejemplo, la función

$$y = f(x) = 20$$

es una función constante. No obstante el valor de x, el rango consiste en el valor único 20. Es decir,

$$f(-10) = 20$$

$$f(1\,000) = 20$$

$$f(a + b) = 20$$

Como se muestra en la figura 4.8, para las funciones constantes cada valor en el dominio se mapea en el mismo valor en el rango.

Ejemplo 11

(Ingreso marginal) El ***ingreso marginal*** es un importante concepto en la economía. El ingreso marginal es el *ingreso adicional derivado de la venta de una unidad más un producto o un servicio.*

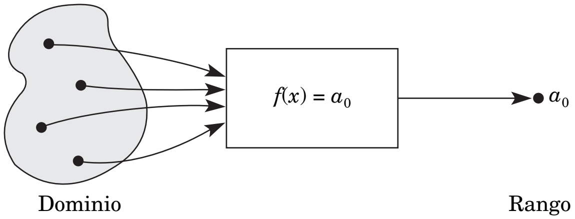


Figura 4.8 Mapeo de una función constante.

Si se vende cada unidad de un producto al mismo precio, el ingreso marginal es siempre igual al precio. Por ejemplo, si un producto se vende en \$7.50 por unidad, se puede definir una función del ingreso marginal como una *función constante*

$$\text{MR} = f(x) = 7.5$$

donde MR representa el ingreso marginal y x es igual al número de unidades vendidas del producto. ❑

Funciones lineales

Una ***función lineal*** tiene la forma general (pendiente-intersección)

$$\boxed{y = f(x) = a_1x + a_0} \tag{4.4}$$

donde a_0 y a_1 son constantes. Debe reconocer esta forma del capítulo 2. Esta función se representa gráficamente por medio de una línea que tiene una pendiente de a_1 e intersección de y en $(0, a_0)$. La función

$$y = f(x) = -2x + 15$$

es una función lineal que se grafica como una línea con una pendiente de -2 e intersección de y en (0, 15).

Ejemplo 12 **(Costo total)** Los contadores y economistas a menudo definen el ***costo total*** (dólares que salen de una organización) en términos de dos componentes: ***costo variable total*** y ***costo fijo total***. Se deben sumar estos dos componentes al determinar el ***costo total***. El costo de posesión y operación de la patrulla del ejemplo 3 es un ejemplo de una función *lineal* del costo total. La función del costo

$$C(x) = 0.40x + 18\,000$$

representaba los costos variables totales por medio del término *0.40x* y el costo fijo con el término *18 000.* Compare la estructura de la función del costo con la ecuación (4.4) para confirmar que en efecto se trata de un ejemplo de una función lineal. ❑

En el capítulo siguiente nos enfocaremos en este importante tipo de funciones.

Funciones cuadráticas

Una ***función cuadrática*** tiene la forma general

$$\boxed{y = f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0} \tag{4.5}$$

donde a_2, a_1 y a_0 son constantes con $a_2 \neq 0$. La función

$$y = f(x) = 3x^2 - 20x + 100$$

es una función cuadrática con $a_2 = 3$, $a_1 = -20$ y $a_0 = 100$. La función

$$y = f(x) = -\frac{x^2}{2}$$

es una función cuadrática con $a_2 = \frac{1}{2}$ y $a_1 = a_0 = 0$.

Ejemplo 13

(Función de la demanda) Una ***función de la demanda*** es una relación matemática que expresa el modo en que varía la cantidad demandada de un artículo con el precio que se cobra por el mismo. La función de la demanda para un producto particular es

$$q_d = f(p)$$

o bien

$$q_d = p^2 - 70p + 1\,225$$

donde q_d equivale al número de unidades demandadas y p es igual al precio expresado en dólares. Nótese que esta función de la demanda particular es *cuadrática*. En relación con la ecuación (4.5), $a_2 = 1$, $a_1 = -70$ y $a_0 = 1\,225$. De acuerdo con esta función, se espera que la cantidad demandada a un precio de \$10 sea igual a

$$\begin{aligned} f(10) &= (10)^2 - 70(10) + 1\,225 \\ &= 100 - 700 + 1\,225 \\ &= 625 \text{ unidades} \end{aligned}$$

A un precio de \$30,

$$\begin{aligned} f(30) &= (30)^2 - 70(30) + 1\,225 \\ &= 900 - 2\,100 + 1\,225 \\ &= 25 \text{ unidades} \end{aligned}$$

❑

Ejercicio de práctica

¿Qué precio se debe cobrar para eliminar cualquier demanda del producto? *Respuesta*: \$35.

Se estudiarán con detalle las funciones cuadráticas en el capítulo 6.

Funciones cúbicas

Una ***función cúbica*** tiene la forma general

$$\boxed{y = f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0} \tag{4.6}$$

donde a_3, a_2, a_1 y a_0 son constantes con $a_3 \neq 0$. La función

$$y = f(x) = x^3 - 40x^2 + 25x - 1\,000$$

es una función cúbica con $a_3 = 1$, $a_2 = -40$, $a_1 = 25$ y $a_0 = -1\,000$.

Ejemplo 14

(Control de epidemias) Una epidemia se propaga en un estado grande del oeste. Funcionarios de salud estiman que el número de personas que se verán afectadas por la enfermedad es una función del tiempo desde que se detectó la enfermedad por primera vez. Específicamente, la función es

$$n = f(t) = 0.05t^3 + 1.4$$

donde n es igual al número estimado de personas afectadas (determinado en cientos) y t es igual al número de días desde que se detectó la epidemia por primera vez. Se supone que esta función de aproximación sea razonablemente precisa para $0 \leq t \leq 30$. Después de 30 días, la enfermedad siguió su curso histórico. ¿Cuántas personas se espera que se vean afectadas después de 10 días?

SOLUCIÓN

El número esperado de personas contagiadas con la enfermedad después de 10 días es

$$\begin{aligned} f(10) &= 0.05(10)^3 + 1.4 \\ &= 0.05(1\,000) + 1.4 \\ &= 50 + 1.4 \\ &= 51.4 \text{ (cientos de personas)} \end{aligned}$$

❑

Ejercicio de práctica

¿Cuántas personas se espera que contraigan la enfermedad después de 30 días? ¿Qué interpretación se puede dar a la constante 1.4 de la función? *Respuesta*: 1 351.4 o 135 140 personas. Aproximadamente se contagiarán 140 personas para cuando se detecte.

Función polinomial

Cada una de las funciones anteriores es un ejemplo de una función polinomial. Una ***función polinomial de grado n*** tiene la forma general

$$\boxed{y = f(q) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0} \qquad \textbf{(4.7)}$$

donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ son constantes con $a_n \neq 0$. *El exponente en cada* x *debe ser un entero no negativo* y el grado del polinomio es la mayor potencia (exponente) en la función. La función

$$y = f(x) = x^5$$

es una función polinomial de quinto grado con $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ y $a_5 = 1$.

Observe que las funciones constantes, lineales, cuadráticas y cúbicas son funciones de grado 0, 1, 2 y 3, respectivamente.

Funciones racionales

Una ***función racional*** tiene la forma general

$$\boxed{y = f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}} \qquad \textbf{(4.8)}$$

donde tanto g *como* h *son funciones polinomiales.* Las funcionas racionales se llaman así a causa de su estructura de razón. La función

$$y = f(x) = \frac{2x}{5x^3 - 2x + 10}$$

es un ejemplo de una función racional donde $g(x) = 2x$ y $h(x) = 5x^3 - 2x + 10$.

Ejemplo 15

(Rehabilitación de discapacidad) A menudo los terapeutas físicos encuentran que el proceso de rehabilitación se caracteriza por un efecto de rendimientos decrecientes. Es decir, la funcionalidad recobrada aumenta normalmente con la duración de un programa de terapia, pero con el paso del tiempo en menores cantidades respecto de los esfuerzos adicionales del programa. Para una discapacidad particular, los terapeutas desarrollaron una función matemática que describe el costo C de un programa de terapia como una función del porcentaje de funcionalidad recuperada x. La función es una función *racional* de forma

$$\begin{aligned} C &= f(x) \\ &= \frac{5x}{120 - x} \qquad 0 \leq x \leq 100 \end{aligned}$$

donde C se mide en miles de dólares. Por ejemplo, se estima que el costo de la terapia para obtener una recuperación de 30 por ciento es igual a

$$\begin{aligned} f(30) &= \frac{5(30)}{120 - 30} \\ &= \frac{150}{90} \\ &= 1.667 \text{ (miles de dólares)} \end{aligned}$$

❑

Ejercicio de práctica

Determine el costo de la terapia para obtener una funcionalidad de 10 por ciento. 60 por ciento. 100 por ciento. *Respuesta*: \$454; \$5 000; \$25 000

Combinación de funciones

Aparte de las formas funcionales mencionadas hasta ahora, se pueden combinar las funciones algebraicamente para crear una función resultante. Si

$$f(x) = 3x - 5 \qquad g(x) = x^2 - 2x + 1 \qquad h(x) = x^3 \qquad \text{y} \qquad j(x) = 1/2x^4$$

es posible combinar estas funciones de ciertas maneras para formar nuevas funciones. Los siguientes son ejemplos de ***suma***, ***diferencia producto*** y ***cociente de funciones***.

1 $p(x) = f(x) + g(x) = (3x - 5) + (x^2 - 2x + 1) = x^2 + x - 4$ (función suma)
2 $q(x) = h(x) - j(x) = x^3 - 1/2x^4$ (función diferencia)
3 $r(x) = f(x)h(x) = (3x - 5)x^3 = 3x^4 - 5x^3$ (función producto)
4 $s(x) = h(x)/j(x) = x^3/(1/2x^4) = x^3(2x^4/1) = 2x^7$ (función cociente)

El dominio de una función suma, diferencia o producto consiste en el conjunto de valores de la variable independiente para los cuales *ambas* funciones están bien definidas. De modo similar, el dominio de funciones cociente que tienen la forma general $u(x)/v(x)$ consiste en los valores de x para los que tanto u como v están bien definidas, *excepto* para valores que dan como resultado $v(x) = 0$.

Funciones compuestas

Además de la combinación algebraica de funciones para formar funciones nuevas, se pueden relacionar funciones compuestas de otra manera. Existe una ***función compuesta*** cuando se puede ver una función como una función de los valores de otra.

Si $y = g(u)$ y $u = h(x)$, la función compuesta $y = f(x) = g(h(x))$ se crea al sustituir $h(x)$ en la función $g(u)$ en cualquier lugar donde u aparece. *Y para definir* f(x) = g(h(x)), x *debe estar en el dominio de* h y h(x) *debe estar en el dominio de* g. Es decir, el valor de entrada x debe permitir un valor de salida único y definible u, y la entrada de la u resultante cuando ingresa en $g(u)$ debe producir una salida única y definible y. La figura 4.9 ilustra esquemáticamente la naturaleza de las funciones compuestas.

Para ilustrar estas funciones, suponga que la función

$$y = g(x) = 2x + 50$$

indica que el salario semanal y de un vendedor se determina por el número de unidades x vendidas cada semana. Suponga que un análisis reveló que la cantidad vendida cada semana por el vendedor depende del precio cobrado por el producto. Se da esta función h por la regla

$$x = h(p) = 150 - 2.5p$$

donde p es igual al precio, expresado en dólares.

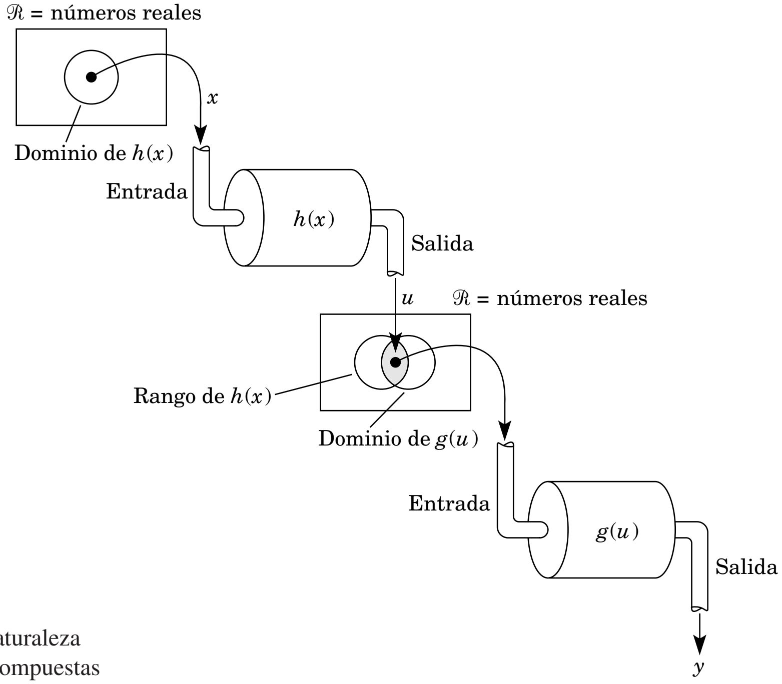


Figura 4.9 La naturaleza de las funciones compuestas

Por tanto, para calcular el salario de un vendedor, la *entrada* inicial es el precio de venta para la semana dada. Esto determinará la *salida* de $h(p)$, el número de unidades que se espera vender. Esta salida se convierte en una entrada de $g(x)$ para determinar el salario semanal. Se ilustran estas relaciones en la figura 4.10*a*). Por ejemplo, suponga que el precio en una semana dada es \$30. El número de unidades que se espera vender en la semana es

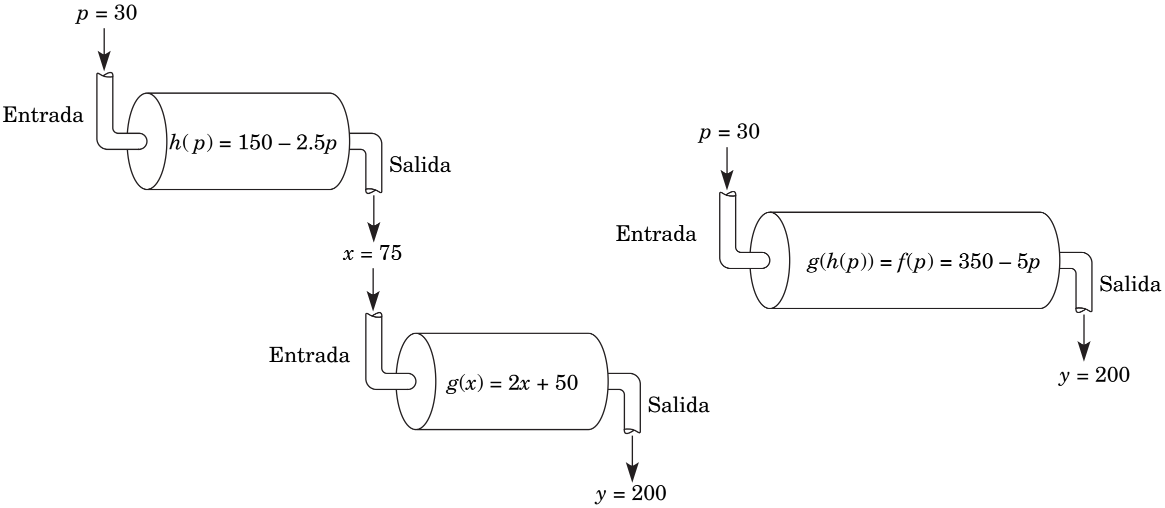
$$\begin{aligned} x &= h(30) \\ &= 150 - 2.5(30) = 150 - 75 = 75 \text{ unidades} \end{aligned}$$

Ya que se conoce el número de unidades que se espera vender, se calcula el salario semanal como

$$\begin{aligned} y &= g(75) \\ &= 2(75) + 50 = \$200 \end{aligned}$$

Puesto que el salario semanal depende del número de unidades vendidas cada semana y que el número de unidades vendidas depende del precio por unidad, se puede determinar el salario semanal como una función del precio por unidad. O bien

$$y = f(p) = g(h(p))$$



a) Funciones componentes *b*) Función compuesta

Figura 4.10

Para definir esta función, sustituimos $h(p)$ en $g(x)$ en cualquier lugar donde aparece x. Es decir,

$$\begin{aligned} y &= g(150 - 2.5p) \\ &= 2(150 - 2.5p) + 50 \\ &= 300 - 5p + 50 \end{aligned}$$

o
$$y = f(p) = 350 - 5p$$

La función $f(p)$ es una función compuesta, habiéndose formado al combinar $g(x)$ y $h(p)$. Podemos calcular el salario semanal esperado directamente a partir de $f(p)$ si conocemos el precio de venta para una semana dada, como se muestra en la figura 4.10*b*). Con un precio de $30,

$$\begin{aligned} y &= f(30) \\ &= 350 - 5(30) = 350 - 150 = \$200 \end{aligned}$$

que es el mismo precio que determinamos con anterioridad.

Ejemplo 16 Si $y = g(u) = u^2 - 2u + 10$ y $u = h(x) = x + 1$, se encuentra la función compuesta $y = f(x) = g(h(x))$ al sustituir $h(x)$ en $g(u)$ en cualquier lugar donde aparece u.

$$\begin{aligned} y = f(x) &= g(h(x)) \\ &= g(x + 1) \\ &= (x + 1)^2 - 2(x + 1) + 10 \\ &= x^2 + 2x + 1 - 2x - 2 + 10 \\ &= x^2 + 9 \end{aligned}$$

Ejemplo 17 Si $y = g(u) = 2u^3$ y $u = h(x) = x^2 - 2x + 5$, determine *a*) $g(h(x))$, *b*) $g(h(2))$ y *c*) $g(h(-3))$.

SOLUCIÓN

a) $y = g(h(x)) = 2(x^2 - 2x + 5)^3$
b) $g(h(2)) = 2[(2)^2 - 2(2) + 5]^3 = 2(5)^3 = 2(125) = 250$
c) $g(h(-3)) = 2[(-3)^2 - 2(-3) + 5]^3 = 2(20)^3 = 2(8\,000) = 16\,000$ ❑

Sección 4.2 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios siguientes, clasifique (si es posible) cada función por tipo (constante, lineal, cuadrática, cúbica, polinomial, racional).

1. $f(x) = 2^x$
2. $f(x) = -24$
3. $f(x) = (x - 5)/2$
4. $f(x) = x^2 - 25$
5. $f(x) = 2x^0$
6. $f(x) = x^5 + 2x^3 - 100$
7. $f(x) = 10 - x/4$
8. $f(x) = 10/x$
9. $f(x) = \log_{10} x$
10. $f(x) = (x^4 - 5x^2)/(x^6 + 5)$
11. $g(h) = -25/h^5$
12. $h(s) = 3 - 4s + s^2 - s^3/4$
13. $v(t) = x^2/\sqrt{x^3}$
14. $f(u) = (5u - 3)^0/4$
15. $f(n) = 50/(4)^3$
16. $g(h) = \sqrt{100/(5)^2}$

17. $f(x) = 10^x$

18. $f(x) = x^{16}/\sqrt{x}$

19. $f(t) = t^5/(36 - t^8)$

20. $f(x) = 3^{2x}$

21. $f(x) = \log_{10}(x + 5)$

22. $v(h) = \log_e h$

23. $f(x) = [(x - 9)^0]^3$

24. $f(x) = [(x + 4)^5]^0$

25. Dada la forma general de una función constante expresada por medio de la ecuación (4.3), determine el dominio de estas funciones.

26. Dada la forma general de una función polinomial indicada por la ecuación (4.7), determine el dominio de dichas funciones.

27. Dada la forma general de una función racional expresada mediante la ecuación (4.8), determine el dominio de estas funciones.

28. La ganancia total de plantar x_j acres en una granja j se expresa como la función

$$P(x_1, x_2, x_3) = 500x_1 + 650x_2 + 450x_3 - 300\,000$$

a) Cuál es la utilidad total si se plantan 200 acres en la granja 1 250 acres en la granja 2 y 150 acres en la granja 3?

b) Cuál es la utilidad total si se plantan 500, 300 y 700 acres, respectivamente, en las tres granjas?

c) Identifique una combinación de plantaciones que dé como resultado una utilidad igual a cero.

29. Se estima el valor de un camión por medio de la función

$$V = f(t) = 20\,000 - 3\,000t$$

donde V es igual al valor expresado en dólares y t es igual a la antigüedad del camión expresada en años.

a) ¿Qué tipo de función es ésta?

b) ¿Cuál es el valor después de 3 años?

c) ¿Cuándo será el valor igual a 0?

30. Un departamento de policía determinó que se puede estimar el número de crímenes graves que ocurren por semana como una función del número de policías asignados al patrullaje preventivo. Específicamente, la función matemática es

$$c = f(p) = 900 - 3.5p$$

donde c es igual al número de crímenes por semana y p equivale al número de oficiales asignados al patrullaje preventivo.

a) ¿Qué tipo de función es ésta?

b) ¿Cuál es el número esperado de crímenes por semana si se asignan 150 oficiales al patrullaje preventivo?

c) ¿Cuántos oficiales se deberían asignar si se desea reducir los niveles de criminalidad a 500?

d) ¿Cuántos oficiales se tendrían que asignar para reducir los niveles de criminalidad a 0?

31. El ingreso total de la venta de un producto particular depende del precio cobrado por unidad. Específicamente, la función del ingreso es

$$R = f(p) = 1\,500p - 50p^2$$

donde R equivale al ingreso total en dólares y p es el precio, también expresado en dólares.

a) ¿Qué tipo de función es ésta?
b) ¿Qué ingreso total se espera obtener si el precio es de \$10?
c) ¿Qué precio(s) daría(n) como resultado un ingreso total igual a cero?

32. **Funciones de la oferta** Una función de la oferta indica el número de unidades de un producto que los proveedores quieren llevar al mercado como una función del precio que los consumidores están dispuestos a pagar. La función siguiente es una función de la oferta

$$q_s = 0.5p^2 - 200$$

donde q_s es igual al número de unidades vendidas y p equivale al precio de venta.
a) ¿Qué tipo de función es ésta?
b) ¿Qué cantidad se debería entregar si el precio de mercado es \$30? ¿\$50?
c) ¿Qué precio daría como resultado 0 unidades llevadas al mercado?

33. La función de la utilidad de una empresa es

$$P(q) = -10q^2 + 36\,000q - 45\,000$$

donde q equivale al número de unidades vendidas y P es igual a la utilidad anual en dólares.
a) ¿Qué tipo de función es ésta?
b) ¿Cuál es la utilidad esperada si se venden 1 500 unidades?

34. **Valor de recuperación** Una aerolínea importante compra un tipo particular de avión en \$75 millones. La compañía estima que el precio de recuperación (reventa) se pondera bien por medio de la función

$$S = f(x) = 72 - 0.0006x$$

donde S equivale al valor de recuperación (en millones de dólares) y x es igual al número de horas de tiempo de vuelo del avión.
a) ¿Qué tipo de función es ésta?
b) ¿Cuál es el valor de recuperación esperado después de 10 000 horas de tiempo de vuelo?
c) ¿Cuántas horas debe volar el avión para que el valor de recuperación sea igual a cero?
d) ¿Qué interpretación daría a la intersección de y? ¿Por qué piensa que esto no es igual a 75?

35. La función de demanda de un producto es

$$q_d = p^2 - 90p + 2\,025 \qquad 0 \leq p \leq 45$$

donde q_d es el número de unidades demandadas y p es el precio por unidad, expresado en dólares.
a) ¿Qué tipo de función es ésta?
b) ¿Cuántas unidades se demandarán con un precio de \$30?
c) ¿Qué precio(s) daría(n) como resultado una demanda cero del producto?

36. Una epidemia se propaga en un rebaño de ganado bovino. Se estima el número esperado de ganado contagiado por la enfermedad mediante la función

$$n = f(t) = 0.08t^3 + 5$$

donde n equivale al número de cabezas de ganado contagiadas y t es igual al número de días desde que se detectó la enfermedad por vez primera. ¿Cuánto ganado se espera que se contagie después de 10 días? ¿Después de 20 días?

37. Dada $f(x) = x^2 - 3$ y $g(x) = 10 - 2x$, determine *a)* $f(x) + g(x)$, *b)* $f(x) \cdot g(x)$ y *c)* $f(x)/g(x)$.
38. Dada $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 3/(x - 1)$, determine *a)* $f(x) - g(x)$, *b)* $f(x) \cdot g(x)$ y *c)* $f(x)/g(x)$.
39. Si $y = g(u) = u^2 - 4u + 10$ y $u = h(x) = x - 4$, determine *a)* $g(h(x))$, *b)* $g(h(-2))$ y *c)* $g(h(1))$.
40. Dada $y = g(u) = 3u^2 + 4u$ y $u = h(x) = x + 8$, determine *a)* $g(h(x))$, *b)* $g(h(-2))$ y *c)* $g(h(1))$.
41. Si $y = g(u) = u^2 + 2u$ y $u = h(x) = x^3$, determine *a)* $g(h(x))$, *b)* $g(h(0))$ y *c)* $g(h(2))$.
42. Dada $c = h(s) = s^2 - 8s + 5$ y $s = f(t) = 10$, determine *a)* $h(f(t))$, *b)* $h(f(3))$ y *c)* $h(f(-2))$.
43. Dada $y = g(u) = (2)^u$ y $u = h(x) = x + 2$, determine *a)* $g(h(x))$, *b)* $g(h(3))$ y *c)* $g(h(-2))$.
44. Dada $y = g(u) = (u - 5)^2$ y $u = h(x) = x^2 + 1$, determine *a)* $g(h(x))$, *b)* $g(h(5))$ y *c)* $g(h(-3))$.

4.3 Representación gráfica de las funciones

A lo largo de este libro se utiliza el modelo visual con tanta frecuencia como es posible para reforzar su comprensión de diferentes conceptos matemáticos. El modelo visual más frecuentemente tomará la forma de una representación gráfica. En esta sección estudiamos la representación gráfica de funciones que implican dos variables.

Representación gráfica de funciones en dos dimensiones

Las funciones que tienen una o dos variables independientes se pueden representar gráficamente. Esta presentación gráfica ofrece una dimensión adicional para entender las funciones matemáticas. Llegará a apreciar la mayor comprensión y discernimiento que ofrecen las gráficas.

La representación gráfica requiere una dimensión para cada variable independiente contenida en una función y una para el valor funcional o variable dependiente. Por consiguiente, las funciones con una variable independiente se grafican en dos dimensiones o en un ***espacio bidimensional***. Las funciones con dos variables independientes se grafican en tres dimensiones o en un ***espacio tridimensional***. Cuando una función contiene más de tres variables, se pierde la representación gráfica.

Las funciones que contienen dos variables se grafican en un conjunto de ejes de coordenadas rectangulares. Normalmente, se selecciona el eje vertical para representar la variable dependiente de la función; por lo general, se selecciona el eje horizontal para representar la variable independiente.

Para graficar una función matemática, simplemente podemos *asignar* diferentes valores del dominio a la variable independiente y *calcular* el valor correspondiente para la variable dependiente. Los pares de valores ordenados resultantes para las dos variables representan valores que satisfacen la función. También especifican las coordenadas de puntos que caen en la gráfica de la función. Para *trazar* la función, determine un *número adecuado de pares ordenados* de valores que satisfacen la función; localice sus coordenadas respecto de un par de ejes. *Una estos puntos con una curva suave para determinar un trazo de la gráfica de la función.* (A pesar de que este planteamiento bastará por el momento, más adelante aprenderemos maneras más eficientes de trazar funciones.)

Ejemplo 18 Ya sabemos cómo graficar relaciones lineales. Para trazar la función lineal

$$y = f(x) = 2x - 4$$

simplemente necesitamos las coordenadas de dos puntos. Debería reconocer ésta como la forma de pendiente-intersección de una línea recta con pendiente de 2 e intersección de y en $(0, -4)$. Al establecer y igual a cero, identificamos la intersección de x como $(2, 0)$. La figura 4.11 es una representación gráfica de la función.

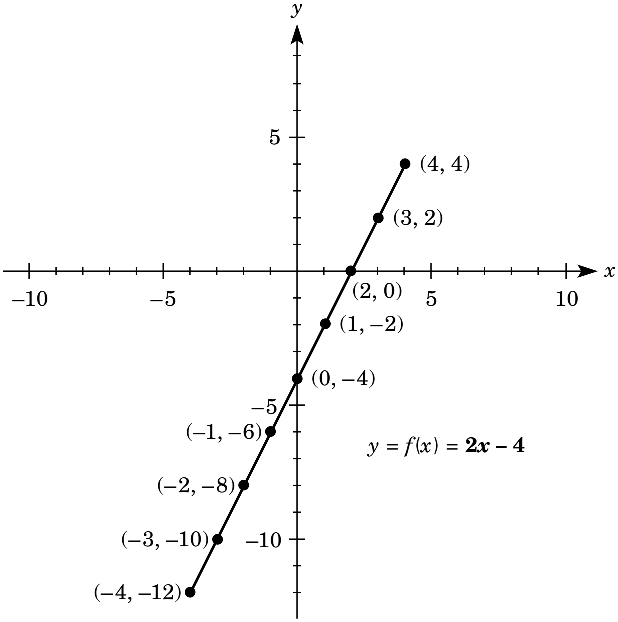


Figura 4.11 Trazo de $f(x) = 2x - 4$.

Ejemplo 19 Para trazar la ***función cuadrática***

$$\begin{aligned} u &= f(v) \\ &= 10v^2 + 20v - 100 \end{aligned}$$

se calculan los pares de muestra para u y v como se indica en la tabla 4.1. Estos puntos se trazan en la figura 4.12 y se unieron para ofrecer un trazo de la función. Nótese que el eje horizontal se identifica con la variable independiente v y el eje vertical con la variable dependiente u. En contraposición a la función lineal del ejemplo anterior, es evidente que no se puede representar esta función cuadrática por medio de una línea recta.

Tabla 4.1

v	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
u	140	50	−20	−70	−100	−110	−100	−70	−20	50	140

❑

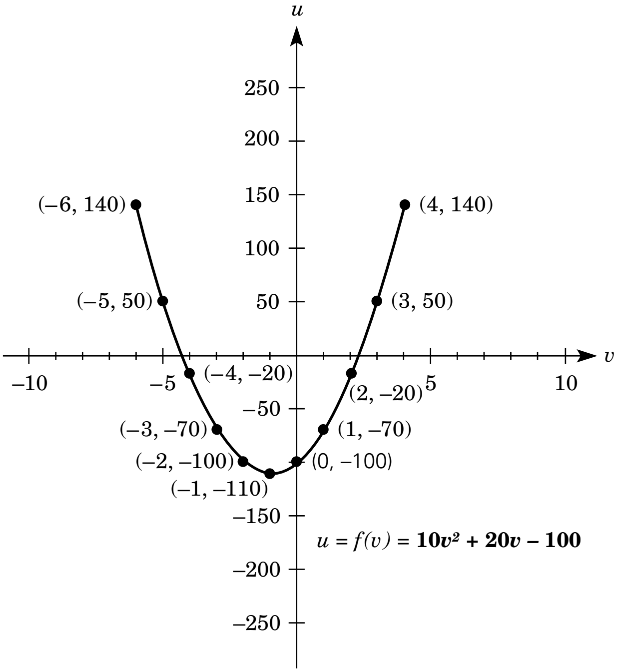


Figura 4.12 Trazo de $f(v) = 10v^2 + 20v - 100$.

NOTA Cabe señalar algunos puntos relacionados con la representación gráfica de las funciones. **En primer lugar**, siempre es útil determinar el conjunto de puntos muestra que quiere graficar *antes de establecer las escalas de los ejes*. Al hacer esto, determina el rango de valores que desea graficar para las dos variables. Una vez que ha determinado estos rangos, puede determinar la escala adecuada que se debe usar en cada eje. **En segundo término**, no es necesario que los dos ejes tengan la misma escala. Las unidades de un eje pueden representar millones y las del otro eje unidades individuales. De modo similar, los intervalos que se utilizan para establecer la escala de cada eje no necesitan tener la misma anchura (analice las escalas de la figura 4.12). Si pasa por alto esta posibilidad, su gráfica puede llegar más allá de los bordes de su papel. (El autor ha tenido en clase situaciones en que las gráficas requerían puntos por debajo del suelo y por encima del techo.) **Por último**, la unidad de medida para una variable no tiene que ser la misma que para la otra variable. La función del costo en el ejemplo de las patrullas mostraría el costo *en dólares* en un eje y las millas conducidas en el otro.

PUNTO PARA PENSAR Y ANALIZAR

¿Cuál sería el efecto sobre la forma de la gráfica del ejemplo anterior si el eje vertical tuviera la misma escala que el eje horizontal? ¿Qué sucedería si el eje horizontal tuviera la misma escala que el eje vertical? Dada la figura 4.12, determine el rango de $f(v)$.

Ejemplo 20

Para trazar la ***función cúbica***

$$y = f(x) = x^3$$

se calculan los puntos muestra como aparecen en la tabla 4.2. Se trazan estos puntos, dando como resultado el trazo de f en la figura 4.13.

Tabla 4.2

x	0	1	2	3	−1	−2	−3
y	0	1	8	27	−1	−8	−27

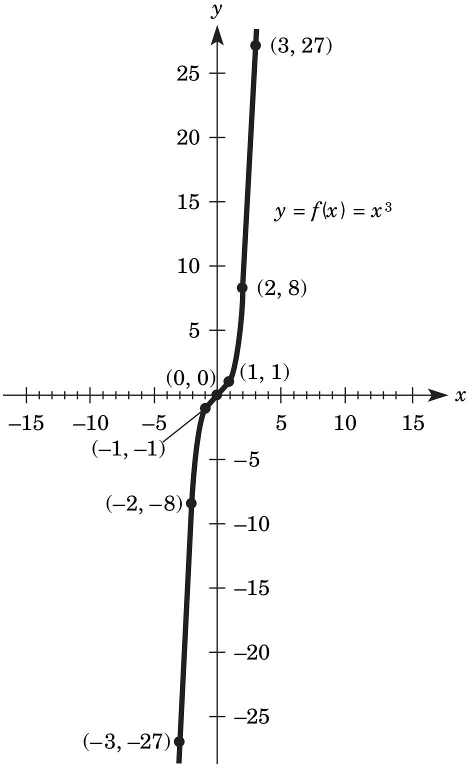


Figura 4.13 Trazo de $f(x) = x^3$.

❑

Ejemplo 21 Como hemos visto en este capítulo, la relación funcional existente entre variables en ocasiones se describe con más de una ecuación. Para ilustrarlo, suponga que *y* equivale al salario semanal en dólares de un vendedor y *x* es igual al número de unidades de un producto vendido durante una semana. Dado que el salario semanal depende del número de unidades vendidas, suponga que se aplica la siguiente función.

$$y = f(x) = \begin{cases} 2x + 50 & \text{donde } 0 \leq x < 40 \\ 2.25x + 75 & \text{donde } x \geq 40 \end{cases}$$

Si el número de unidades vendidas durante una semana es menor que 40, el vendedor percibe un salario base de \$50 y una comisión de \$2 por unidad vendida. Si el número de unidades es 40 o más, un bono de \$25 aumenta la porción básica del salario a \$75. Además, la comisión sobre *todas* las unidades se incrementa a \$2.25 por unidad.

La figura 4.14 ilustra la gráfica de la función. Nótese que la gráfica sólo usa el cuadrante I, donde tanto *x* como *y* son positivas. El trazo de la función se hace en dos "secciones" lineales rectas. Cada sección de la gráfica es válida para cierta porción del dominio de la función. Se utiliza el círculo abierto (○) en el extremo del primer segmento para indicar que el punto *no* es parte de la gráfica. Corresponde a una división en la función en $x = 40$. El punto correspondiente a $x = 40$ es el primer punto en el segundo segmento de la función y se representa por medio del círculo sólido (●). Trace esta función y verifique su forma. ❑

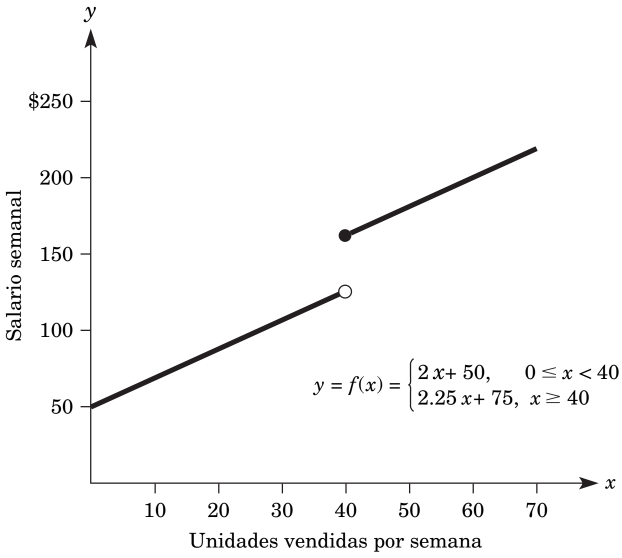


Figura 4.14 Función lineal seccionada.

❑

Prueba de la línea recta vertical

Por la definición de una función, cada elemento del dominio debe corresponder a uno y sólo un elemento en ese rango. Esta propiedad permite una simple revisión gráfica para determinar si una gráfica representa una función matemática. Si se traza una línea recta vertical a través de cualquier valor en el dominio, sólo intersecará en un punto la gráfica de la función. En contraste, si una línea recta vertical interseca una curva en más de un punto, la curva no es la gráfica de una función. La curva de la figura 4.15 no representa una función puesto que la línea recta vertical punteada interseca la curva en dos puntos. Dos valores en el rango, y_1 y y_2, están asociados con un valor en el dominio, x_0. La gráfica representa una *relación* pero no una función.

En esta sección hemos introducido la representación gráfica de las funciones matemáticas. El procedimiento que se ha presentado se debe denominar método de "fuerza bruta" en el sentido de que es necesario determinar un número "adecuado" de puntos con el fin de tener una idea razonable de la forma de la gráfica de una función. Sin embargo, ¡sí funciona! La experiencia responderá la pregunta de cuántos puntos serán apropiados.

A lo largo del libro de texto seguiremos aprendiendo sobre las funciones matemáticas. Pronto podrá reconocer las diferencias estructurales entre las funciones lineales y las diversas funciones no lineales y con este conocimiento le será más fácil determinar una contraparte visual o gráfica. Por ejemplo, nuestros análisis de las ecuaciones lineales del capítulo 2 nos permiten reconocer que las funciones de los ejemplos 18 y 21 son lineales; por consiguiente, sabemos que se trazarán como líneas rectas que se pueden definir por medio de dos puntos.

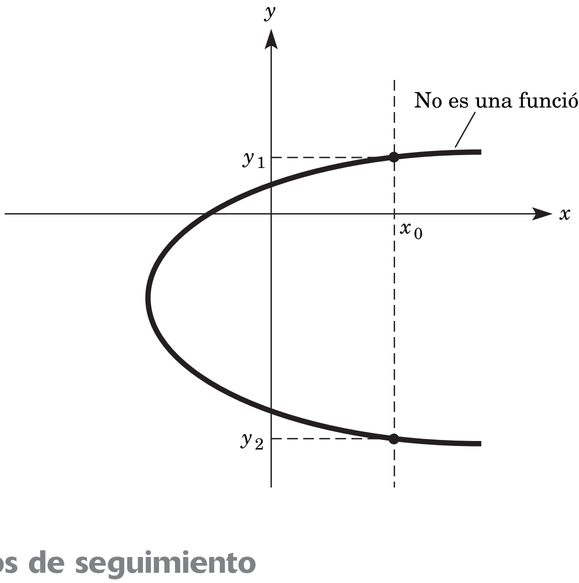


Figura 4.15 Prueba de la línea recta vertical para una función.

Sección 4.3 Ejercicios de seguimiento

Trace cada una de las siguientes funciones.

1. $f(x) = 8 - 3x$
2. $f(x) = 4 - x/2$
3. $f(x) = x^2 - 2x + 1$
4. $f(x) = x^2 - 9$

5. $f(x) = x^2 + 5x$ **6.** $f(x) = -x^2 + 4$

7. $f(x) = x^3 + 2$ **8.** $f(x) = -x^3 - 1$

9. $f(x) = x^4$ **10.** $f(x) = -x^4 + 2$

11. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & x \geq 0 \\ -x + 2 & x < 0 \end{cases}$ **12.** $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x - 2 & x < 0 \end{cases}$

13. $f(x) = \begin{cases} 4 & x \leq -2 \\ |x| & -2 < x < 2 \\ -4 & x \geq 2 \end{cases}$ **14.** $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & -2 < x < 2 \\ -x - 3 & x \leq -2 \\ x - 3 & x \geq 2 \end{cases}$

15. **Función de la demanda**. En el ejemplo 13 analizamos la función cuadrática de la demanda

$$q_d = f(p) = p^2 - 70p + 1\,225$$

Trace esta función si el dominio restringido es $0 \leq p \leq 20$.

16. **Control de epidemias**. En el ejemplo 14 analizamos la función cúbica

$$n = f(t) = 0.05t^3 + 1.4$$

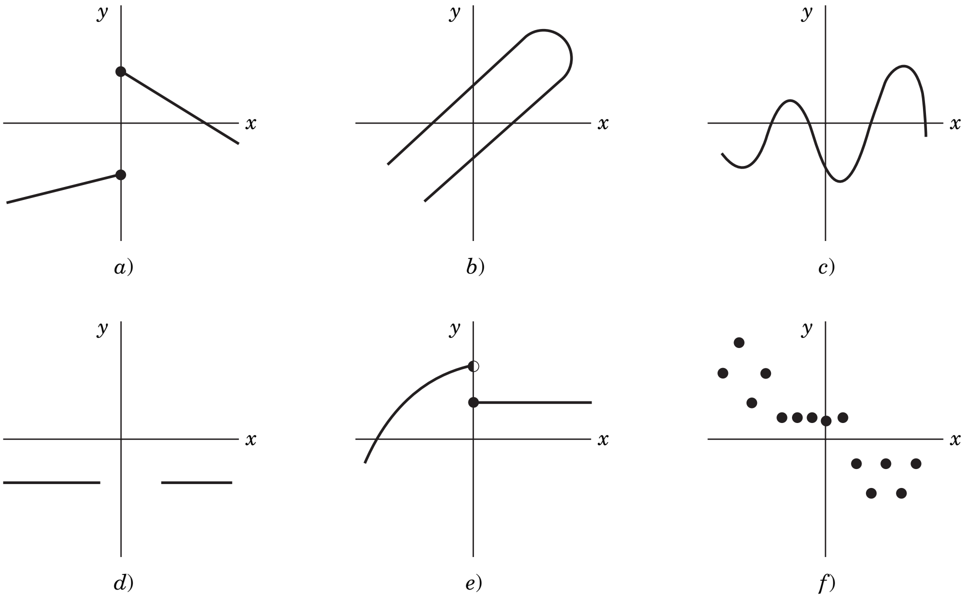
donde n era el número (en cientos) de personas que se esperaba que contrajeran una enfermedad t días después de ser detectada por el departamento de salud. Trace esta función suponiendo un dominio restringido $0 \leq t \leq 30$.

17. En la figura 4.16, identifique las gráficas que sí representan funciones.

18. En la figura 4.17, identifique las gráficas que sí representan funciones.

19. Dada la gráfica de alguna función $f(x)$ en la figura 4.18, explique cómo cambiaría la gráfica si quisiéramos trazar $f(x) + c$, donde c es un número real positivo. ¿Cómo se vería la gráfica de $f(x) - c$? [*Sugerencia:* Grafique $f(x) = x^2$ y compárela con las gráficas de $g(x) = x^2 + 1$ y $h(x) = x^2 - 1$.]

20. Dada la gráfica de alguna función $f(x)$ en la figura 4.19, explique cómo cambiaría la gráfica si deseáramos trazar $-f(x)$. [*Sugerencia*: Grafique $f(x) = x^2$ y compárela con la gráfica de $g(x) = -x^2$.]



a) *b*) *c*) *d*) *e*) *f*)

Figura 4.16

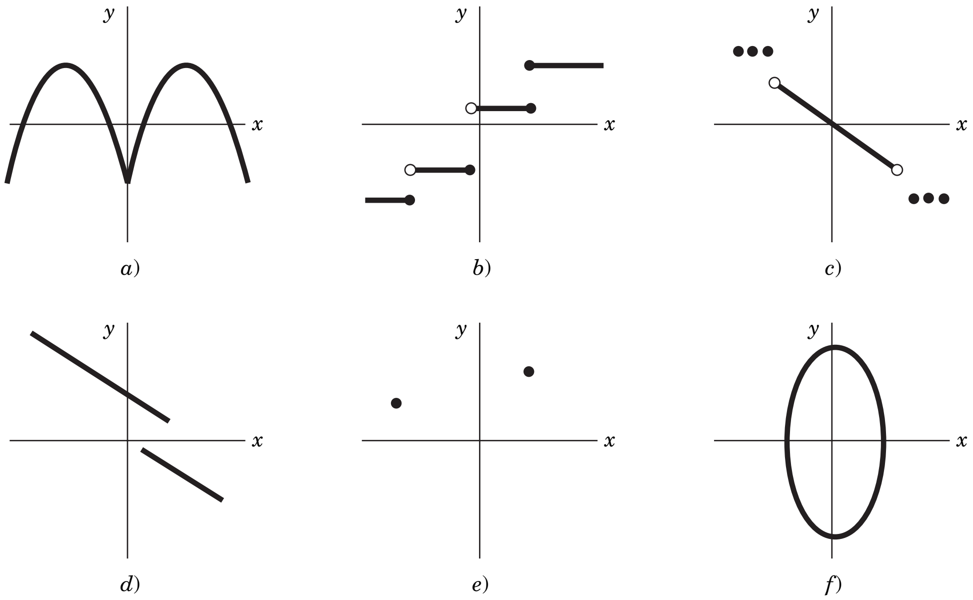


Figura 4.17

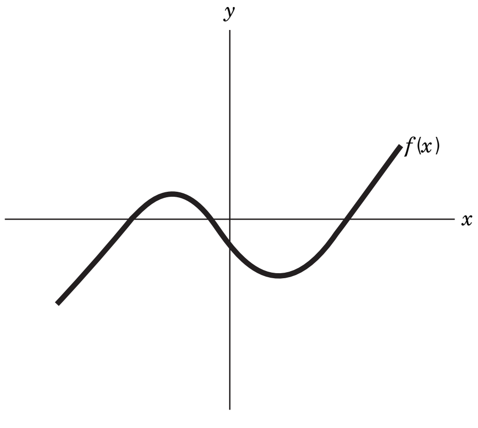


Figura 4.18

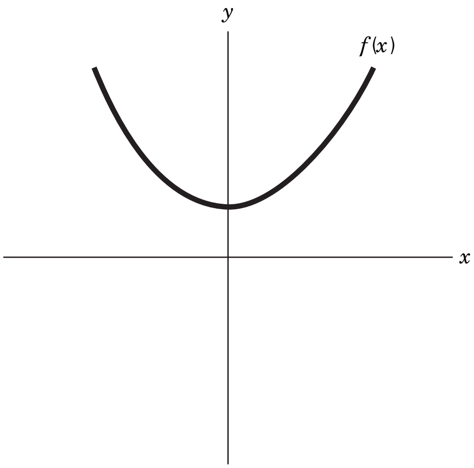


Figura 4.19

TÉRMINOS Y CONCEPTOS CLAVE

dominio 143
dominio y rango restringidos 150
función 143
función compuesta 164
función constante 158
función cuadrática 160
función cúbica 161
función de dos variables 151
función de varias variables 151
función lineal 159
función polinomial 162
función racional 162
funciones de una variable 151
mapeo 143
rango 143
variable dependiente 144
variable independiente 144
variables con subíndices 153

FÓRMULAS IMPORTANTES

$y = f(x) = a_0$ **Función constante** **(4.3)**
$y = f(x) = a_1x + a_0$ **Función lineal** **(4.4)**
$y = f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ **Función cuadrática** **(4.5)**
$y = f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ **Función cúbica** **(4.6)**
$y = f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ **Función polinomial** **(4.7)**
$y = f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ **Para polinomios *g* y *h*** **Función racional** **(4.8)**

EJERCICIOS ADICIONALES

SECCIÓN 4.1

En los ejercicios 1 a 12, determine *a*) $f(1)$, *b*) $f(-2)$ y *c*) $f(a - b)$.

1. $f(x) = -5x + 2$
2. $f(x) = -x^2 + 3x + 10$
3. $f(t) = 10 - t + t^3$
4. $f(u) = \sqrt{8}$
5. $f(x) = x/(-2 - x)$
6. $f(r) = r^3 - 5r^2 + 3$
7. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
8. $f(v) = (v - 1)/(-4 + v^2)$
9. $f(z) = z^4/\sqrt{64}$
10. $f(x) = 2^x$
11. $f(x) = (x - 2)^{2x}$
12. $f(t) = (3t^2 + 5)/(1 - t^2 + t^{10})$

En los ejercicios 13 a 24, determine el dominio de la función.

13. $f(x) = 100^x$
14. $f(x) = 4^x/(x^9 - 256x)$
15. $f(x) = \sqrt{x/(8 - x)}$
16. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}/(4 - x^2)$
17. $f(x) = \sqrt{(x - 2)/(x^2 - 16)}$
18. $f(x) = \sqrt{x^3 - 8}$
19. $f(x) = (2)^{2x}$
20. $f(x) = e^{x^2}$, donde $e = 2.718\ldots$
21. $g(u) = \sqrt{10 - \dfrac{u}{4}}\Big/(u^2 - 64)$
22. $h(t) = (2)^t/\sqrt{t^2 - 7t - 12}$
23. $f(v) = \sqrt{v^2 - 9}/(v^3 - 4v)$
24. $r(s) = \sqrt{25 - s}/(3)^s$
25. Dada $f(a, b) = 3a^2 - 2ab + 5b^2$, determine *a*) $f(-2, 3)$ y *b*) $f(x + y, x - y)$.

26. Dada $f(a, b, c, d) = a^3 - 2abc + cd^2 - 5$, determine *a*) $f(-1, 2, 0, 1)$ y *b*) $f(0, 0, 0, 0)$.

27. Dada $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2x_3 - 10$, determine *a*) $f(0, 1, -3)$ y *b*) $f(10, -10, 10)$.

28. Dada $h(x, y, z) = x^2yz^3$, determine *a*) $h(2, -3, 1)$ y *b*) $h(a + b, a, b)$.

29. Se ha dado a una estación de radio local el derecho exclusivo de promover un concierto en la arena cívica de la ciudad, la cual tiene capacidad para 30 000 personas. La comisión para la estación de radio es \$5 000 más \$2.50 por cada boleto vendido para el concierto.

a) Determine la función $C = f(n)$, donde C equivale a la comisión pagada a la estación de radio, expresada en dólares, y n es igual al número de boletos vendidos.

b) Determine el dominio restringido y el rango para esta función.

30. Se ha contratado a un vendedor para vender tres productos. Se paga al vendedor sobre una base de comisión, ganando \$2.50, \$3.00 y \$2.00 por unidad, respectivamente, para los productos 1, 2, y 3. Además, el vendedor recibe un salario base de \$40 por semana. x_j representa el número de unidades vendidas por semana del producto j para $j = 1, 2, 3$ y s es igual al salario semanal en dólares.

a) Determine la función del salario $s = f(x_1, x_2, x_3)$.

b) Si se estima que las ventas semanales máximas para los tres productos son 20, 35 y 25 unidades, determine el dominio restringido y el dominio y el rango para la función del salario.

SECCIÓN 4.2

En los ejercicios 31 a 44, clasifique cada función por tipo (constante, lineal, cuadrática, etc.), si es posible.

31. $g(u) = (u^2 - 10u)/3$

32. $f(x) = (24 - x + 3x^2 + x^{10})/(x - 50)$

33. $g(h) = \log_{10}(0.01)$

34. $f(t) = (5t^3 - 3t^2)^0$

35. $f(s) = (0.25)^{s2+3s}$

36. $f(x) = \log_5(x + 1)$

37. $f(x) = 3x/(25 - x^5)$

38. $f(n) = (5)^n/25$

39. $f(x) = (x^2 - 4)^4$

40. $f(x) = \sqrt[3]{x^{12}}$

41. $f(x) = 7.5(x^5)^0$

42. $g(h) = (3h/2)/15$

43. $f(x) = \sqrt{x}/x^3$

44. $f(t) = (t^2 - 3t + 12)/\sqrt{(t^4 + t^2)^0}$

45. Inscripciones en la universidad Una universidad proyecta que las inscripciones disminuirán mientras el grupo de solicitantes en edad universitaria empieza a reducirse. Han estimado que el número de solicitudes para los próximos años se comportarán de acuerdo con la función

$$a = f(t) = 6\,500 - 250t$$

donde a equivale al número de solicitudes de admisión a la universidad y t es igual al tiempo en años medido desde el año actual ($t = 0$).

a) ¿Esta función es un ejemplo de qué clase de funciones?

b) ¿Cuál es el número de solicitudes esperadas dentro de 5 años? ¿Dentro de 10 años?

c) ¿Cree que esta función es precisa como un indicador de pronóstico indefinidamente en el futuro? ¿Qué tipos de factores influirían el dominio restringido en t?

46. Control de armas de fuego Con los índices de criminalidad al alza, se estima que el número de pistolas en circulación está aumentando. El FBI utiliza la función

$$n = f(t) = 25.5 + 0.025t$$

donde n equivale al número de pistolas en circulación (expresado en millones) y t representa el tiempo medido en años desde este año en curso ($t = 0$).

a) ¿Esta función es un ejemplo de qué clase de funciones?
b) ¿Cuál es el número estimado de pistolas dentro de 20 años?
c) ¿Cuánto tiempo tomará para que el número de pistolas sea 26.5 millones?

47. Se calcula el costo total de producir x unidades de un producto por medio de la función del costo

$$C = f(x) = 60x + 0.2x^2 + 25\,000$$

donde C es el costo total medido en dólares.

a) ¿Esta función es un ejemplo de qué clase de funciones?
b) ¿Cuál es el costo asociado con la producción de 25 000 unidades?
c) ¿Cuál es el costo asociado con la producción de 0 unidades? ¿Qué término se podría emplear para describir este costo?

48. Un minorista ha determinado que el costo anual C de la compra, posesión y mantenimiento de sus productos se comporta de acuerdo con la función

$$C = f(q) = \frac{20\,000}{q} + 0.5q + 50\,000$$

donde q es el tamaño (en unidades) de cada pedido comprado a los proveedores.

a) ¿Cuál es el costo anual si el tamaño del pedido es igual a 1 000 unidades? ¿2 000 unidades?
b) Vea si puede determinar el dominio restringido para esta función. (*Sugerencia*: No podrá llegar a un número determinado en el caso del límite superior; en su lugar, analice los factores que influirán en ese valor.)

49. Si $y = g(u) = u^3 - 5u$ y $u = h(x) = x^2 - 4$, determine *a*) $g(h(x))$ y *b*) $g(h(2))$.

50. Si $y = g(u) = u - 5$ y $u = h(x) = x^2 - 3x + 6$, determine *a*) $g(h(x))$ y *b*) $g(h(-2))$.

51. Si $y = f(r) = r^2$, $r = g(s) = s^2 - 4$ y $s = h(x) = x - 3$, determine las funciones compuestas *a*) $g(h(x))$ y *b*) $f(g(h(x)))$.

SECCIÓN 4.3

Trace las siguientes funciones

52. $f(x) = -3$

53. $f(x) = -x^2 + 9$

54. $f(x) = -x^5$

55. $f(x) = 2^x$

56. $f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ 2 & 0 \le x < 3 \\ x & x \ge 3 \end{cases}$

57. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ -x^2 & x \ge 0 \end{cases}$

58. Un vendedor recibe un salario base mensual de \$250 más una comisión de \$4 por cada unidad vendida. Si las ventas mensuales exceden 500 unidades, el vendedor recibe un bono de \$150 más \$2.50 adicionales por todas las unidades vendidas por encima de las 500 unidades.

a) Formule la función de la compensación mensual $S = f(x)$, donde S equivale a la compensación mensual en dólares y x es igual al número de unidades vendidas por mes.
b) Trace la función de la compensación.

❑ EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. Determine el dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x - 6}$$

2. La función $V = f(t) = 36\,000 - 4\,500t$ expresa que el valor de una pieza de equipo es una función de su antigüedad. V representa el valor (en dólares) y t es la antigüedad del equipo (en años). Determine el dominio restringido y el rango para esta función.

3. Una agente de viajes planea un viaje de una semana para esquiar para los estudiantes de una universidad local. El paquete incluye el boleto de avión, transferencias, hospedaje, desayuno y comida todos los días y boletos de airfare. El boleto es de $450 por persona a menos que el número de personas que contrata exceda 150. En este caso, el precio del paquete para todas las personas disminuye $2.50 por cada persona por encima de las 150. Si p equivale al precio del paquete en dólares y n es igual al número de personas que contratan el viaje, determine la función $p = f(n)$.

4. Si $y = g(u) = u^2/(1 - 2u)$ y $u = h(x) = x + 5$, determine las funciones compuestas *a*) $g(h(x))$ y *b*) $g(h(-5))$.

5. Clasifique cada una de las siguientes funciones (constantes, lineales, etc.), si es posible.

a) $f(x) = x^6/\sqrt{x}$
b) $f(x) = x^3/(1 - 3x + x^2)$
c) $f(x) = 1/(10 - x + x^2)^{-1}$
d) $f(x) = (120 - 5x)/24$

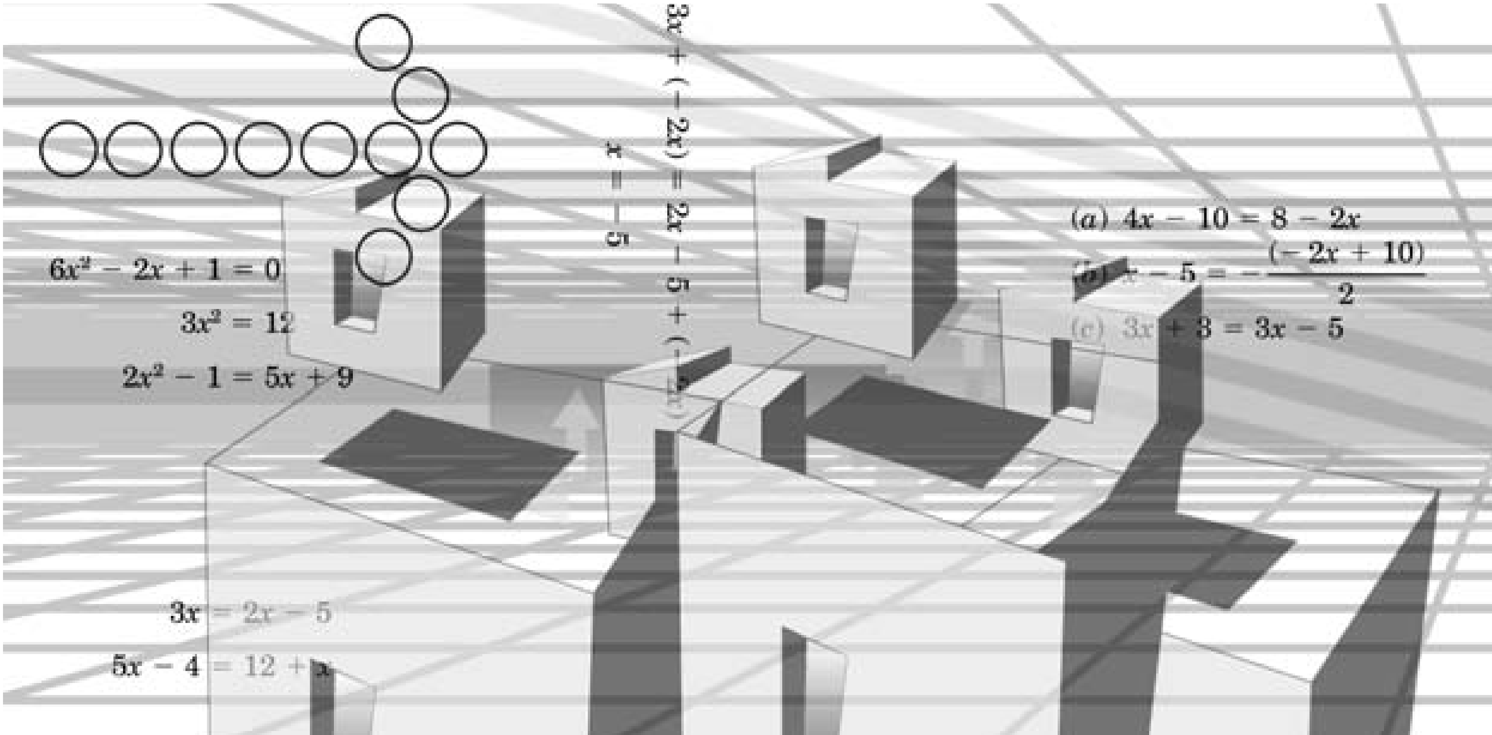
6. Trace la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Funciones lineales: aplicaciones

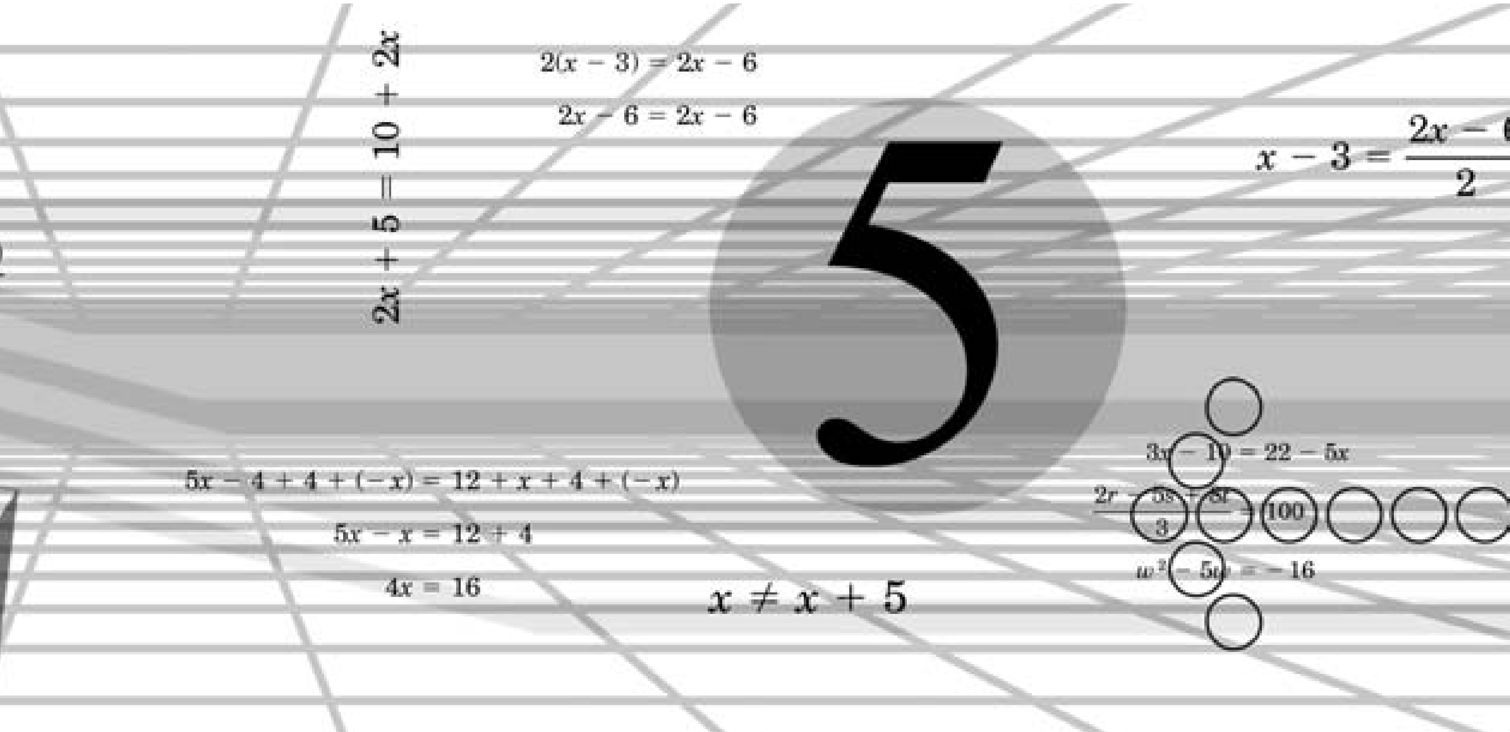
5.1 FUNCIONES LINEALES
5.2 OTROS EJEMPLOS DE FUNCIONES LINEALES
5.3 MODELOS BASADOS EN EL PUNTO DE EQUILIBRIO

Términos y conceptos clave
Fórmulas importantes
Ejercicios adicionales
Evaluación del capítulo
Minicaso: decisión de cambio de automóvil



OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Presentar un análisis de las características de las funciones lineales.
- Presentar una amplia variedad de aplicaciones de las funciones lineales.



ESCENARIO DE MOTIVACIÓN: Impuestos federales sobre la renta

En 1990, las tasas federales de impuestos para un matrimonio eran las que se muestran en la tabla.

Ingreso gravable		
Mayor que	**Pero no mayor que**	**Tasa tributaria**
$ 0	$ 32 450	15%
32 450	78 400	28
78 400	162 770	33
162 770		28

Lo que se desea es una fórmula o un conjunto de fórmulas que permitan al matrimonio calcular sus impuestos federales una vez que conozcan su ingreso gravable. [Ejemplo 10]

En este capítulo ampliamos el material mostrado en los capítulos 2 y 4 al presentar un análisis de las funciones lineales. Después de revisar la forma y las suposiciones subyacentes en estas funciones, veremos ejemplos que ilustran las aplicaciones de estos modelos en los negocios, la economía y otras áreas.

5.1 Funciones lineales

Forma general y suposiciones

Definición: Función lineal que incluye una variable independiente

Una *función lineal f* que incluye una variable independiente x y una variable dependiente y tiene la forma general

$$y = f(x) = a_1x + a_0 \tag{5.1}$$

donde a_1 y a_0 son constantes, $a_1 \neq 0$.

Debe estar familiarizado con la ecuación (5.1) a partir del capítulo anterior. Además debe reconocer ésta como la forma de pendiente-intersección de una ecuación lineal con pendiente a_1 e intersección de y que ocurre en $(0, a_0)$. *Para una función lineal que tiene la forma de la ecuación (5.1), un cambio en el valor de y es directamente proporcional a un cambio en el valor de x.* Este índice de cambio es constante y se representa por medio de la pendiente a_1.

El ejemplo 1 del capítulo 4 presentó la función lineal del salario

$$y = f(x) = 3x + 25$$

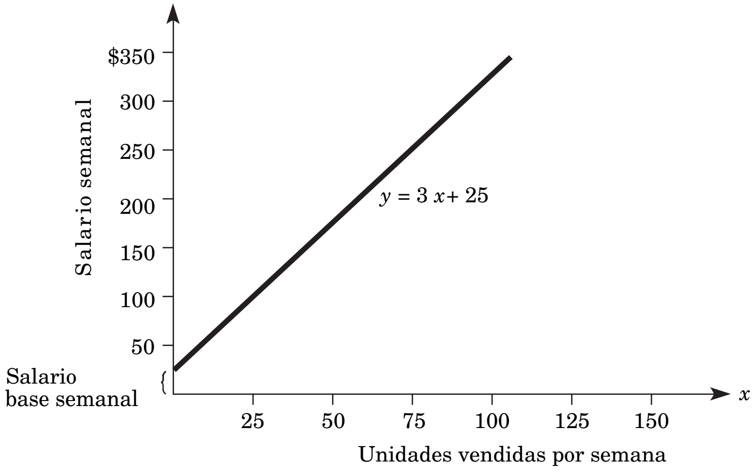


Figura 5.1 Función lineal del salario.

donde y se define como el salario semanal en dólares y x representa el número de unidades vendidas por semana. En esta función del salario, se paga al vendedor un salario base de $25 por semana y una comisión de $3 por unidad vendida. El cambio en el salario semanal de la persona es directamente proporcional al cambio en el número de unidades vendidas. Es decir, la pendiente de 3 indica el aumento en el salario semanal asociado con cada unidad adicional vendida. La gráfica de la función del salario aparece en la figura 5.1. Nótese que esta gráfica se encuentra en el primer cuadrante y restringe x y y a valores no negativos. ¿Esto tiene sentido?

Definición: Función lineal que incluye dos variables independientes

Una función lineal f que incluye dos variables independientes x_1 y x_2 y una variable de demanda y tiene la forma general

$$y = f(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 \tag{5.2}$$

donde a_1 y a_2 son constantes (no cero) y a_0 es una constante.

Para una función lineal con la forma de la ecuación (5.2), la variable y depende conjuntamente de los valores de x_1 y x_2. El valor de la variable y en proporción directa cambia en los valores de x_1 y x_2. De modo específico, si x_1 se incrementa 1 unidad, y aumentará a_1 unidades. Y si x_2 aumenta 1 unidad, y cambiará a_2 unidades.

Ejemplo 1 Suponga que el salario de un vendedor depende del número de unidades vendidas cada semana de cada uno de dos productos. Más específicamente, suponga que la función del salario

$$y = f(x_1, x_2)$$

es

$$y = 5x_1 + 3x_2 + 25$$

donde y = *salario semanal,* x_1 = *número de unidades vendidas del producto 1* y x_2 = *número de unidades vendidas del producto 2*. Esta función del salario sugiere un salario semanal base de \$25 y comisiones por unidad vendida de \$5 y \$3, respectivamente, para los productos 1 y 2. ❑

Definición: Función lineal de *n* variables independientes

Una función lineal f de n variables independientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y una variable dependiente y tiene la forma general

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

o bien

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0 \tag{5.3}$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes (diferentes de cero) y a_0 es una constante.

Funciones lineales del costo

Las organizaciones se interesan en los costos porque reflejan los dólares que salen de la organización. Estos flujos de egreso con frecuencia se pagan en salarios, materias primas, provisiones, renta, calefacción, servicios y demás. Como hemos mencionado, los contadores y economistas definen a menudo el costo total en términos de dos componentes: ***costo variable total*** y ***costo fijo total***. Se deben sumar estos dos componentes para determinar el costo total. La función del costo de posesión y operación del auto patrulla del ejemplo 3 del capítulo 4 es un ejemplo de una función lineal del costo. La función del costo

$$C(x) = 0.40x + 18\,000$$

tenía costos variables que variaban con el número de millas conducidas y costos fijos de \$18 000.

El total de costos variables varía con el nivel de entrada (insumos) y se calcula como el producto del **costo variable por unidad de salida** y el nivel de salida (producción). En un escenario de producción, el costo variable por unidad se compone por lo general de los costos de materia prima y trabajo. En el ejemplo de la patrulla, el costo variable por milla consistía en los costos de operación por milla como la gasolina, aceite, costos de mantenimiento y depreciación.

Las funciones lineales de los costos muy a menudo son realistas, aunque ignoran la posibilidad de ***economías*** o ***deseconomías de escala***. Esto es, las funciones lineales del costo implican ***rendimientos constantes a escala***. Los rendimientos constantes a escala implican que no obstante el número de unidades producidas, el costo variable de cada unidad es el mismo. Esta suposición ignora la posibilidad de que los elementos del proceso de producción (trabajadores o máquinas) pueden ser más eficientes conforme aumenta el número de unidades producidas o que la compra de materias primas en grandes cantidades puede dar como resultado descuentos por cantidad que a su vez pueden reducir el costo variable por unidad producida (éste es un ejemplo de economías de escala). La función del costo de la patrulla supone que los costos operativos por milla serán \$0.40 sin que tenga importancia el número de millas conducidas. Podríamos esperar que más allá del tiempo de vida de un equipo, como la patrulla, éste será menos eficiente y requerirá mayor mantenimiento. Esto se puede traducir en un mayor costo variable por unidad. Algunos modelos de costo reconocen estas "no linealidades" potenciales al utilizar alguna medida del *costo variable promedio por unidad.* En otras situaciones se podría desarrollar un conjunto de funciones lineales del costo, cada uno más apropiado para ciertos casos dependiendo del nivel de salida seleccionado.

El ejemplo siguiente ilustra la formulación de una función lineal del costo.

Ejemplo 2

Una empresa que fabrica un solo producto se interesa en determinar la función que expresa el costo total anual y como una función del número de unidades fabricadas x. Los contadores indican que los gastos fijos cada año son de \$50 000. También estiman que los costos de la materia prima para cada unidad producida son \$5.50 y los costos de trabajo por unidad son \$1.50 en el departamento de ensamble, \$0.75 en el cuarto de acabado y \$1.25 en el departamento de empaque y distribución.

La función del costo total tendrá la forma

$$\boxed{\begin{aligned} y &= C(x) \\ &= \text{costo variable total} + \text{costo fijo total} \end{aligned}}$$

Los costos variables totales dependen de dos componentes: costos de la materia prima y costos del trabajo. Los costos del trabajo se determinan sumando los costos de trabajo respectivos de los tres departamentos. Se define el costo total por medio de la función

$$\boxed{y = \text{costo total de la materia prima} + \text{costo total del trabajo} + \text{costo fijo total}}$$

$$= \begin{matrix}\text{costo total}\\ \text{de la materia}\\ \text{prima}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{costo del trabajo}\\ \text{(departamento}\\ \text{de ensamble)}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{costo del trabajo}\\ \text{(cuarto de}\\ \text{acabado)}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{costo del trabajo}\\ \text{(departamento}\\ \text{de envíos)}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{costo}\\ \text{fijo}\\ \text{total}\end{matrix}$$

o

$$y = 5.50x + (1.50x + 0.75x + 1.25x) + 50\,000$$

lo que se simplifica como

$$y = f(x) = 9x + 50\,000$$

El 9 representa el costo variable combinado por unidad de \$9.00. Es decir, por cada unidad adicional producida, el costo total aumentará \$9. ❑

Funciones lineales del ingreso

Con frecuencia nos referimos al dinero que fluye hacia una organización ya sea por la venta de productos o por la prestación de servicios como ***ingreso***. El modo más fundamental de calcular el ingreso total de la venta de un producto (o servicio) es

$$\boxed{\text{Ingreso total} = (\text{precio})(\text{cantidad vendida})}$$

Una suposición en esta relación es que el precio de venta es el mismo para todas las unidades vendidas.

Suponga que una empresa fabrica *n* productos. Si x_i es igual al número de unidades vendidas del producto *i* y p_j es igual al precio del producto *j*, la función que le permite calcular el ingreso total de la venta de *n* productos es

$$\boxed{R = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + \cdots + p_nx_n} \qquad \textbf{(5.4)}$$

Esta función de ingreso se puede expresar de modo más conciso usando la *notación de suma* como

$$\boxed{R = \sum_{j=1}^{n} p_jx_j} \qquad \textbf{(5.5)}$$

Quienes ven por primera vez la notación de suma quizá quieran referirse al apéndice B donde encontrarán una introducción de este concepto.

Ejemplo 3

Una agencia local de renta de autos, Hurts Renta-Lemon, trata de competir con algunas empresas nacionales más grandes. La gerencia comprende que a muchos viajeros no les preocupan adornos superficiales como ventanas, tapacubos, radios y calentadores. I. T. Hurts, propietario y presidente de Hurts, ha estado reciclando autos usados para que formen parte de su flotilla. Hurts también simplificó la estructura de tasa de renta al cobrar una tarifa sencilla de \$9.95 por día por el uso de un automóvil. El ingreso total del año es una función lineal del número de días de renta de autos de la agencia, o *si R = ingreso anual en dólares* y *d = número de días de renta de autos durante el año,*

$$R = f(d) = 9.95d$$

❑

Funciones lineales de la utilidad

La ***utilidad*** de una organización es la diferencia entre el ingreso total y el costo total. Expresado en forma de ecuación,

$$\boxed{\text{Utilidad} = \text{ingreso total} - \text{costo total}} \qquad \textbf{(5.6)}$$

Si $$\text{Ingreso total} = R(x)$$

y $$\text{Costo total} = C(x)$$

donde x representa la cantidad producida y vendida, entonces la utilidad se define como

$$P(x) = R(x) - C(x) \tag{5.7}$$

Cuando el ingreso total excede al costo total, la utilidad es positiva. En dichos casos la utilidad puede recibir el nombre de **ganancia neta** o **utilidad neta**. Cuando el costo total excede el ingreso total, la utilidad es negativa. En tales casos, la utilidad puede llamarse **pérdida neta** o **déficit**. Cuando el ingreso y el costo son funciones lineales de la(s) misma(s) variable(s), la función de la utilidad es una función lineal de la(s) misma(s) variable(s).

Ejemplo 4 Una empresa vende un solo producto en \$65 por unidad. Los costos variables por unidad son de \$20 por materiales y \$27.50 por trabajo. Los costos fijos anuales son \$100 000. Elabore la función de la utilidad expresada en términos de x, el número de unidades producidas y vendidas. ¿Cuál es la utilidad si las ventas anuales son 20 000 unidades?

SOLUCIÓN

Si el producto se vende en \$65 por unidad, se calcula el ingreso total utilizando la función lineal

$$R(x) = 65x$$

De modo similar, el costo total anual consiste en costos de materiales, costos de trabajo y costos fijos:

$$C(x) = 20x + 27.50x + 100\,000$$

que se reduce a la función lineal del costo

$$C(x) = 47.50x + 100\,000$$

Por tanto, es posible calcular la función de la utilidad como

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 65x - (47.50x + 100\,000) \\ &= 17.50x - 100\,000 \end{aligned}$$

Nótese que $P(x)$ es una función lineal. La pendiente de 17.50 indica que para cada unidad adicional producida y vendida, la utilidad aumenta \$17.50. Esto se conoce en los negocios y la economía como **utilidad marginal** (la suma a la utilidad total de la venta de la unidad siguiente).

Si la empresa vende 20 000 unidades durante el año,

$$\begin{aligned} P(20\,000) &= 17.50(20\,000) - 100\,000 \\ &= 350\,000 - 100\,000 \\ &= 250\,000 \end{aligned}$$

Ejemplo 5 **(Planeación de la agricultura)** Una organización agricultora tiene tres granjas diferentes que se utilizarán el año próximo. Cada granja tiene características únicas que la hacen ideal sólo para una cosecha. La tabla 5.1 indica la cosecha seleccionada para cada granja, el costo anual de la plantación de 1 acre de cosecha, el ingreso esperado derivado de cada acre y los costos fijos asociados con la operación de cada granja. Además de los costos fijos relacionados con la operación de cada granja, la corporación como un todo tiene costos fijos anuales de \$75 000. Determine la función de la utilidad para la operación de las tres granjas si x_j = *número de acres plantados en la granja j*, r_j = *ingreso por acre en la granja j*, c_j = *costo por acre en la granja j* y F_j = *costo fijo en la granja j*.

Tabla 5.1

Granja	Cosecha	Costo/acre (c_j)	Ingreso/acre (r_j)	Costo fijo (F_j)
1	Frijol de soya	\$ 900	\$1 300	\$150 000
2	Maíz	1 100	1 650	175 000
3	Papa	750	1 200	125 000

SOLUCIÓN

El ingreso total proviene de la venta de las cosechas plantadas en cada una de las tres granjas, o

$$\begin{aligned} R(x_1, x_2, x_3) &= r_1 x_1 + r_2 x_2 + r_3 x_3 \\ &= 1\,300x_1 + 1\,650x_2 + 1\,200x_3 \end{aligned}$$

Los costos totales son la suma de los de las tres granjas más los costos fijos corporativos, o

$$\begin{aligned} C(x_1, x_2, x_3) &= c_1x_1 + F_1 + c_2x_2 + F_2 + c_3x_3 + F_3 + 75\,000 \\ &= 900x_1 + 150\,000 + 1\,100x_2 + 175\,000 + 750x_3 + 125\,000 + 75\,000 \\ &= 900x_1 + 1\,100x_2 + 750x_3 + 525\,000 \end{aligned}$$

La utilidad total es una función lineal que se calcula como

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2, x_3) &= R(x_1, x_2, x_3) - C(x_1, x_2, x_3) \\ &= 1\,300x_1 + 1\,650x_2 + 1\,200x_3 - (900x_1 + 1\,100x_2 + 750x_3 + 525\,000) \\ &= 400x_1 + 550x_2 + 450x_3 - 525\,000 \end{aligned}$$

❑

Sección 5.1 Ejercicios de seguimiento

1. Escriba la forma general de una función lineal con cinco variables independientes.

2. Suponga que el vendedor del ejemplo 1 (página 185) tiene un objetivo salarial de \$800 por semana. Si el producto *B* no está disponible una semana, ¿cuántas unidades del producto *A* se deben vender para lograr el objetivo salarial? Si el producto *A* no está disponible ¿cuántas unidades se deben vender del producto *B*?

3. Suponga en el ejemplo 1 (página 185) que el vendedor recibe un bono cuando la venta combinada de los dos productos es de más de 80 unidades. El bono es de \$2.50 por unidad para cada unidad en exceso de las 80. Con este programa de incentivos, la función del salario se debe describir por medio de dos funciones lineales diferentes. ¿Cuáles son y cuándo son válidas?

4. Para el ejemplo 4 (página 189), ¿cuántas unidades se deben producir y vender para *a*) ganar una utilidad de \$1.5 millones, y *b*) tener una utilidad de cero (equilibrio)?

5. Un fabricante de microcomputadoras produce tres modelos distintos. La tabla siguiente resume los precios de venta al mayoreo, el costo de material por unidad y el costo de trabajo por unidad. Los costos fijos anuales son \$25 millones.

	Microcomputadora		
	Modelo 1	**Modelo 2**	**Modelo 3**
Precio de venta al mayoreo/unidad	\$500	\$1 000	\$1 500
Costo del material/unidad	175	400	750
Costo del trabajo/unidad	100	150	225

a) Determine la función del ingreso total conjunto de las ventas de los tres modelos diferentes de microcomputadoras.

b) Determine la función del costo total anual de la fabricación de los tres modelos.

c) Determine la función de la utilidad de la venta de los tres modelos.

d) ¿Cuál es la utilidad anual si la empresa vende 20 000, 40 000 y 10 000 unidades, respectivamente, de los tres modelos?

6. Para el ejemplo 5 (página 190), el consejo de directores votó por el siguiente programa de plantación para el próximo año: se plantarán 1 000 acres en la granja 1, 1 600 en la granja 2 y 1 550 en la granja 3.

a) ¿Cuáles son las utilidades esperadas del programa?

b) Una sequía de verano provocó que se redujeran los ingresos por acre en 20, 30 y 10 por ciento, respectivamente, en las tres granjas. ¿Cuál es la utilidad esperada del programa de plantación antes mencionado?

7. Renta de automóviles Una agencia de renta de automóviles compra autos nuevos cada año para usarlos en la agencia. Los autos nuevos cuestan \$15 000. Se usan por 3 años, después de los cuales se venden en \$4 500. El propietario de la agencia estima que los costos variables de la operación de los autos, aparte de la gasolina, son \$0.18 por milla. Se rentan los autos a una tarifa sencilla de \$0.33 por milla (sin incluir la gasolina).

a) Formule la función del ingreso total asociado con la renta de uno de los autos por un total de x millas en un periodo de 3 años.

b) Formule la función de costo total asociada con la renta de un auto por un total de x millas en 3 años.

c) Formule la función de la utilidad.

d) ¿Cuál es la ganancia si se renta el automóvil por 60 000 millas en un periodo de 3 años?

e) ¿Qué millaje se requiere para tener una utilidad de cero en 3 años?

8. Una compañía fabrica un producto que vende en \$55 por unidad. Para la empresa cada unidad tiene un costo de \$23 en gastos variables y los costos fijos sobre una base anual son \$400 000. Si x es igual al número de unidades producidas y vendidas durante el año:

a) Formule la función lineal del costo total.

b) Formule la función lineal del ingreso total.

c) Formule la función lineal de la utilidad.
d) ¿Cuál es la utilidad anual si se producen y venden 10 000 unidades durante el año?
e) ¿Qué nivel de producción se requiere para obtener una utilidad de cero?

9. Una gasolinera vende gasolina regular sin plomo y premium sin plomo. El precio por galón que la gasolinera cobra es de $1.299 en el caso de la regular sin plomo y de $1.379 por la premium sin plomo. El costo por galón del proveedor es $1.219 por la regular sin plomo y $1.289 por la premium. Si x_1 equivale al número de galones vendidos de gasolina regular y x_2 el número de galones vendidos de gasolina premium:
a) Formule la función del ingreso de la venta de x_1 y x_2 galones, respectivamente, de los dos tipos de gasolina.
b) Formule la función del costo total de la compra de x_1 y x_2 galones, respectivamente, de los dos tipos.
c) Formule la función de la utilidad total.
d) ¿A cuánto se espera que ascienda la utilidad total si la gasolinera vende 100 000 galones de gasolina regular sin plomo y 40 000 de gasolina premium sin plomo?

5.2 Otros ejemplos de funciones lineales

En esta sección veremos, por ejemplo, otras aplicaciones de las funciones lineales.

Ejemplo 6

(Depreciación en línea recta) Cuando las organizaciones compran equipo, vehículos, construcciones y otros tipos de "activos de capital", los contadores por lo regular asignan el costo del artículo al periodo en que se usa el artículo. Para un camión que cuesta $20 000 y que tiene una vida útil de 5 años, los contadores podrían asignar $4 000 por año como un costo de posesión del camión. El costo asignado a cualquier periodo dado recibe el nombre de ***depreciación***.

Los contadores también llevan registros de cada activo mayor y su valor actual de alguna forma o como antes lo hacían en "libros". Por ejemplo, el valor del camión puede aparecer en cualquier estado contable como $20 000 en el momento de la compra, $20 000 − $4 000 = $16 000 un año después de la fecha de compra y así sucesivamente. También se puede considerar la depreciación como la cantidad que disminuyó el valor en libros de un activo.

Aunque hay una variedad de métodos de depreciación, uno de los más sencillos es la ***depreciación en línea recta***. En este método la tasa de depreciación es constante. Esto implica que el valor en libros disminuye como una función lineal con el paso del tiempo. *Si V es igual al valor en libros (en dólares) de un activo* y *t equivale al tiempo (en años) medido a partir de la fecha de compra* para el camión antes mencionado,

$$\begin{aligned} V &= f(t) \\ &= \text{costo de compra} - \text{depreciación} \end{aligned}$$

o

$$= 20\,000 - 4\,000t$$

La gráfica de esta función aparece en la figura 5.2.

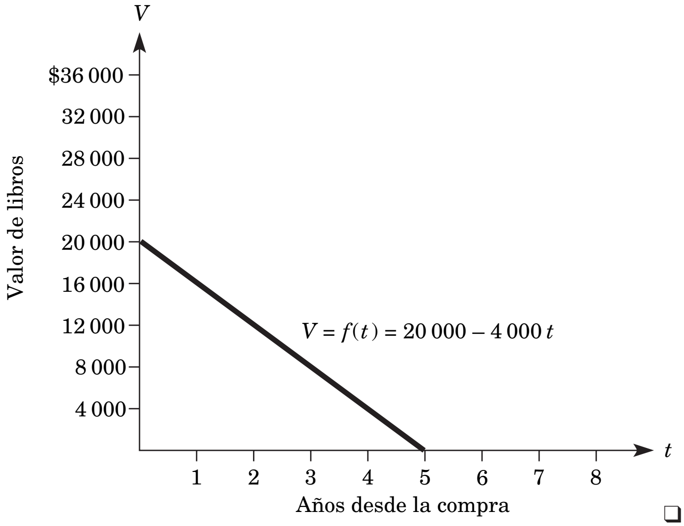


Figura 5.2 Función del valor en libros basada en la depreciación en línea recta.

❑

Ejercicio de práctica

Defina el dominio restringido y el rango de esta función. *Respuesta*: dominio = $\{t|0 \leq t \leq 5\}$; rango = $\{V|0 \leq V \leq 20000\}$.

Ejemplo 7

(Funciones lineales de la demanda) Como se estudió en el ejemplo 13 del capítulo 4, una ***función de la demanda*** es una relación matemática que expresa la manera en que varía la cantidad demandada de un artículo con el precio que se cobra por el mismo. Por lo regular, la relación entre estas dos variables (*cantidad demandada* y *precio por unidad*) es *inversa*; es decir, un *decremento* en el precio da como resultado un *incremento* en la demanda. El propósito de las ventas especiales casi siempre es

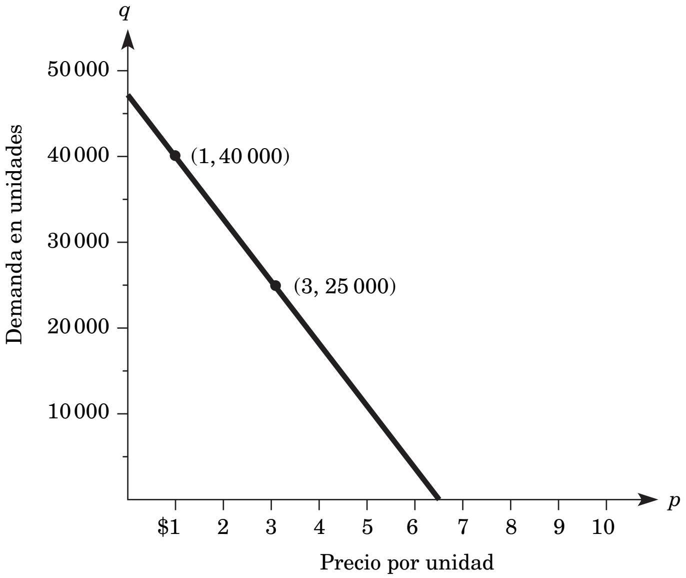


Figura 5.3 Función lineal de la demanda.

estimular la demanda. Si los supermercados bajaran el precio del filete mignon a $0.75 por libra, tal vez habría un aumento considerable en la demanda de ese artículo. Por otro lado, los *incrementos* en el precio del producto normalmente dan como resultado un *decremento* en la demanda. La frase *subir los precios para que la gente no compre* se refiere a la pérdida de clientes como consecuencia de los aumentos del precio. Si de pronto el precio del filete mignon fuera el triple, con todos los demás factores como los niveles de ingreso manteniéndose constantes, mucha gente que en la actualidad es capaz de comprarlo quedaría fuera del mercado.

Por supuesto, hay excepciones para este comportamiento. Es probable que la demanda de productos o servicios que se consideran como *necesidades* fluctúe menos con cambios moderados en el precio. Los artículos como medicamentos prescritos, servicios médicos y ciertos artículos alimenticios son ejemplos de esta clase de productos.

A pesar de que la mayoría de las funciones de la demanda no son lineales, hay situaciones en que la relación de la demanda es una función lineal o se puede aproximar razonablemente bien por medio de una función lineal. La figura 5.3 ilustra una función lineal de la demanda con dos puntos de datos muestra. Aunque la mayor parte de los libros de economía miden el precio en el eje vertical y la cantidad demandada en el eje horizontal, invertiremos la clasificación de los ejes, como se ilustra en la figura 5.3. El motivo de esto es que la mayoría de los consumidores ven la relación de la demanda con la forma

$$\text{Cantidad demandada} = f\,(\text{precio por unidad})$$

Es decir, los consumidores responden al precio. Por tanto, se traza la cantidad demandada, la variable dependiente, sobre el eje vertical.

Verifique, usando los métodos del capítulo 2, que la función de la demanda de la figura 5.3 tiene la forma

$$q = f(p) = 47\,500 - 7\,500p$$ ❑

PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR

Interprete el significado de la intersección de q en este ejemplo. ¿Parece válido? ¿Cuál es la interpretación de la intersección de p? ¿Cuál es la interpretación de la pendiente en esta función?

Ejemplo 8

(Funciones lineales de la oferta) Una ***función de la oferta*** relaciona el precio de mercado con las cantidades que los proveedores están dispuestos a producir y vender. Las funciones de la oferta implican que lo que se pone en el mercado depende del precio que la gente está dispuesta a pagar. En contraposición a la naturaleza inversa del precio y la cantidad demandada, la cantidad que los proveedores están dispuestos a ofrecer varía directamente con el precio del mercado. *Con todos los otros factores iguales*, cuanto más alto es el precio de mercado, más querrá producir y vender un proveedor; entre más bajo sea el precio que las personas están dispuestas a pagar, menor será el incentivo para producir y vender. Suponga que tiene un barco langostero. Con todos los demás factores iguales, ¿qué incentivo hay para sacar su bote y su tripulación si la langosta se vende al mayoreo en $0.25 por libra? ¿Cuál es el incentivo si se vende al mayoreo en $10 por libra?

Al igual que con las funciones de la demanda, algunas veces se pueden hacer aproximaciones de las funciones de la oferta por medio de funciones lineales. La figura 5.4 ilustra una función de la oferta. Observe que al nombrar el eje vertical q, se sugiere que

$$\text{Cantidad ofrecida} = f\,(\text{precio de mercado})$$

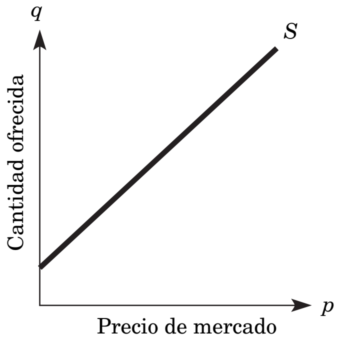


Figura 5.4 Función lineal de la oferta.

❑

PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR

¿Qué sugiere la intersección de q en la figura 5.4 sobre la relación entre la oferta y el precio de mercado? Si la curva de la oferta aparece como en la figura 5.5, ¿qué sugiere la intersección de p acerca de la relación? ¿Qué cantidad cree que es la más representativa de una relación real de la función de la oferta? ¿Por qué?

Ejemplo 9

(Equilibrio de mercado: dos productos competidores) Dadas las funciones de la oferta y la demanda de un producto, se tiene **equilibrio de mercado** si hay un precio en el que la cantidad demandada es igual a la cantidad ofrecida. Este ejemplo demuestra el equilibrio de mercado para dos productos competidores. Suponga que se estimaron las funciones de la demanda y la oferta siguientes para dos productos competidores.

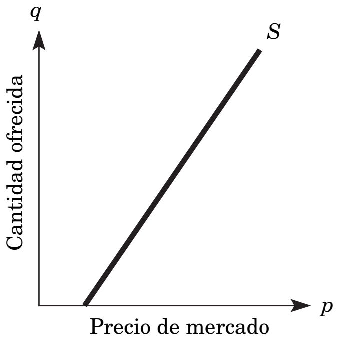


Figura 5.5 Función lineal de la oferta.

$$\left.\begin{aligned} q_{d1} &= f_1(p_1, p_2) = 100 - 2p_1 + 3p_2 \\ q_{s1} &= h_1(p_1) = 2p_1 - 4 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{(demanda, producto 1)} \\ &\text{(oferta, producto 1)} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} q_{d2} &= f_2(p_1, p_2) = 150 + 4p_1 - p_2 \\ q_{s2} &= h_2(p_2) = 3p_2 - 6 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{(demanda, producto 2)} \\ &\text{(oferta, producto 2)} \end{aligned}$$

donde q_{d1} = *cantidad demandada del producto 1*
q_{s1} = *cantidad ofrecida del producto 1*
q_{d2} = *cantidad demandada del producto 2*
q_{s2} = *cantidad ofrecida del producto 2*
p_1 = *precio del producto 1, dólares*
p_2 = *precio del producto 2, dólares*

Nótese que las funciones de la demanda y la oferta son lineales. También obsérvese que la cantidad demandada de un producto dado depende no sólo del precio del producto sino también del precio del producto competidor. La cantidad ofrecida de un producto sólo depende del precio de ese producto.

Habría equilibrio de mercado en el mercado de estos dos productos si existieran (y se ofrecieran) precios tales que

$$q_{d1} = q_{s1}$$

y

$$q_{d2} = q_{s2}$$

La oferta y la demanda son iguales para el producto 1 cuando

$$100 - 2p_1 + 3p_2 = 2p_1 - 4$$

o bien

$$4p_1 - 3p_2 = 104 \tag{5.8}$$

La oferta y la demanda son iguales para el producto 2 cuando

$$150 + 4p_1 - p_2 = 3p_2 - 6$$

o bien

$$-4p_1 + 4p_2 = 156 \tag{5.9}$$

Si se resuelven las ecuaciones (5.8) y (5.9) de manera simultánea, se identifican los precios de equilibrio como $p_1 = 221$ y $p_2 = 260$. Este resultado sugiere que si se asignan los precios de los productos en forma correspondiente, las cantidades demandadas y ofrecidas serán iguales para *cada* producto. ❑

Ejercicio de práctica

Dados los precios antes identificados, calcule q_{d1}, q_{s1}, q_{d2} y q_{s2}. ¿Se satisfacen las condiciones de equilibrio? *Respuesta*: $q_{d1} = q_{s1} = 438$, $q_{d2} = q_{s2} = 774$; sí.

PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR

Explique la lógica subyacente de las suposiciones de las funciones de la demanda y la oferta. Es decir, ¿por qué el precio de un producto al igual que el precio del producto competidor afectan la demanda del producto? Explique la lógica del signo más del producto "competidor" en cada función de la demanda. ¿Qué se supone al incluir una sola variable de precio en las funciones de la oferta? ¿En qué circunstancias sería apropiado incluir ambos precios en estas funciones?

Ejemplo 10

(Impuestos federales sobre la renta; Escenario de motivación) En 1990, los impuestos federales sobre la renta para un matrimonio que declara en forma conjunta fueron (repitiendo la tabla del Escenario de motivación) los que se proporcionan en la tabla 5.2. Lo que se desea es una función matemática que permita a la pareja calcular su pasivo tributario, dado su ingreso gravable.

Tabla 5.2

Tasas de impuestos federales de 1990
(matrimonio que declara en forma conjunta)

Ingreso gravable		
Mayor que	**Pero no mayor que**	**Tasa tributaria**
$ 0	$ 32 450	15
32 450	78 400	28
78 400	162 770	33
162 770		280

SOLUCIÓN

Suponga que

x = *ingreso gravable, dólares*
T = *deudas de impuestos federales sobre la renta, dólares*

Queremos identificar la función

$$T = f(x)$$

Primero, debemos comprender la información de la tabla 5.2. Si el ingreso gravable de una pareja es de $0 a $32 450, deben pagar un impuesto federal sobre la renta de 15 por ciento del ingreso gravable. Si su ingreso gravable es mayor que $32 450 pero no mayor que $78 400, deben pagar 15 por ciento sobre los primeros $32 450 y 28 por ciento sobre todos los ingresos por encima de los $32 450. Si su ingreso gravable es mayor que $78 400 pero no mayor que $162 770, deben pagar 15 por ciento sobre los primeros $32 450, 28 por ciento sobre los $45 950 siguientes ($78 400 − $32 450) y 33 por ciento de todos los ingresos por encima de los $78 400. Por tanto, la tasa tributaria sólo se aplica al ingreso que cae en el rango correspondiente.

Se expresará la función del impuesto por medio de cuatro funciones componentes diferentes, una por cada uno de los rangos de ingresos gravables indicados en la tabla 5.2. Por ejemplo, si el ingreso gravable es de \$0 a \$32 450,

$$T = 0.15x$$

Si el ingreso gravable es mayor que \$32 450 pero no mayor que \$78 400,

$$\begin{aligned} T &= 0.15(32\,450) + 0.28(x - 32\,450) \\ &= 4\,867.5 + 0.28x - 9\,086 \\ &= 0.28x - 4\,218.5 \end{aligned}$$

Si el ingreso gravable es mayor que \$78 400 pero no mayor que \$162 770,

$$\begin{aligned} T &= 0.15(32\,450) + 0.28(45\,950) + 0.33(x - 78\,400) \\ &= 4\,867.5 + 12\,866 + 0.33x - 25\,872 \\ &= 0.33x - 8\,138.5 \end{aligned}$$

Si el ingreso gravable es mayor que \$162 770,

$$\begin{aligned} T &= 0.15(32\,450) + 0.28(45\,950) + 0.33(84\,370) + 0.28(x - 162\,770) \\ &= 4867.5 + 12\,866 + 27\,842.1 + 0.28x - 45\,575.6 \\ &= 0.28x \end{aligned}$$

La función completa del pasivo tributario es

$$T = f(x)$$
$$= \begin{cases} 0.15x & 0 < x \leq 32\,450 \\ 0.28x - 4\,218.5 & 32\,450 < x \leq 78\,400 \\ 0.33x - 8\,138.5 & 78\,400 < x \leq 162\,770 \\ 0.28x & 162\,770 < x \end{cases}$$

La figura 5.6 presenta una gráfica de esta función del pasivo tributario para personas registradas como "Matrimonio que declara de manera conjunta" para 1990. ❑

Ejemplo 11 **(Impuestos del seguro social)** La figura 5.7 es una gráfica de los impuestos del seguro social recaudados en los años 1980-1989. La cantidad cobrada por año parecía aumentar, aproximadamente, con una tasa lineal. En 1980, los impuestos del seguro social cobrados fueron \$150 000 millones y en 1989, \$352 000 millones. Usando estos dos puntos de datos, desarrolle una función lineal que estime los impuestos del seguro social cobrados como una función del tiempo desde 1980.

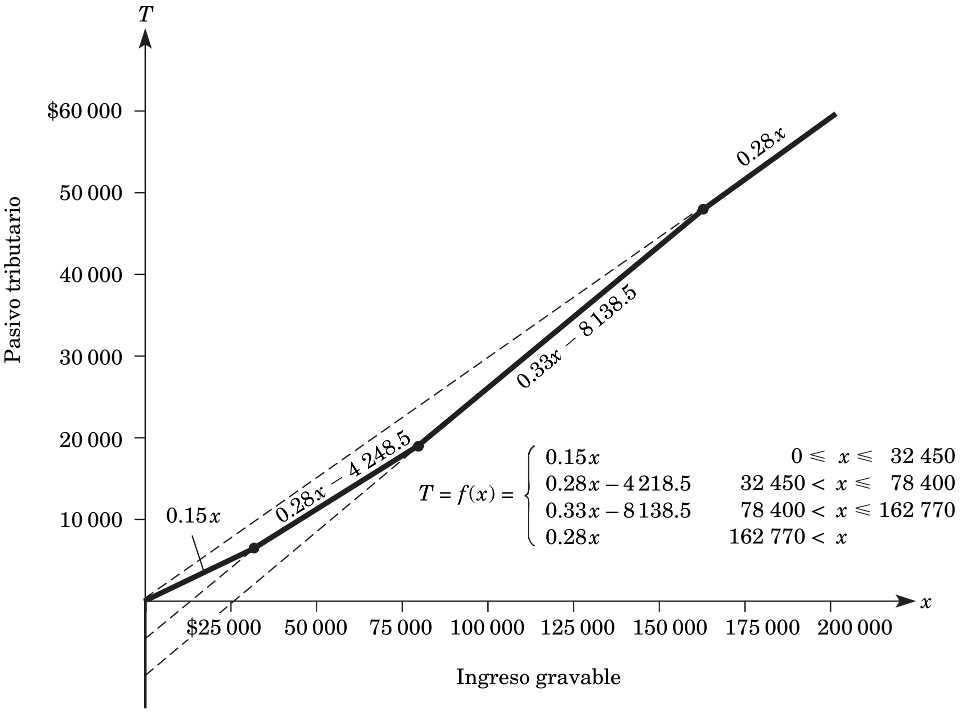


Figura 5.6 Pasivo tributario en 1990: matrimonio que declara en forma conjunta.

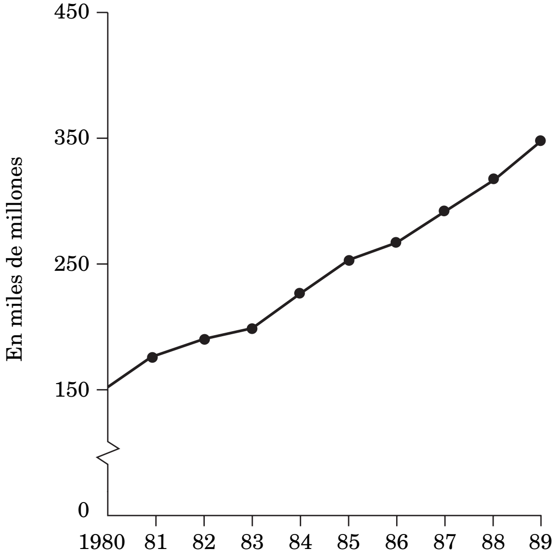


Figura 5.7 Impuestos del seguro social. (Datos: Office of Management & Budget, DRI/McGraw-Hill.)

SOLUCIÓN

Si definimos

S = *impuestos del seguro social cobrados, miles de millones de dólares*

t = *tiempo medido en años desde 1980*

queremos determinar la función lineal que tiene la forma

$$S = f(t) = a_1 t + a_0$$

Los dos puntos de datos (t, S) son (0, 150) y (9, 352). Por observación, el valor de a_0 equivale a 150. Al sustituir el punto de datos para 1989 en la forma de pendiente-intersección da

$$\begin{aligned} 352 &= a_1(9) + 150 \\ 202 &= 9a_1 \\ 22.44 &= a_1 \end{aligned}$$

Por consiguiente, la función lineal aproximada es

$$S = f(t) = -22.44t + 150$$ ❑

Sección 5.2 Ejercicios de seguimiento

1. Se compra una maquinaria en $80 000. Los contadores decidieron utilizar un método de depreciación en línea recta con la máquina depreciada en su totalidad después de 6 años. Suponiendo que V es el valor en libros de la máquina y t la antigüedad de la máquina, determine la función $V = f(t)$. (Suponga que no hay valor de recuperación.)

2. **Depreciación en línea recta con valor de recuperación** Muchos activos tienen un **valor de reventa**, o **de recuperación**, aun después de haber cumplido los propósitos para los que se compraron originalmente. En tales casos, el costo asignado durante la vida del activo es la diferencia entre el costo de compra y el valor de recuperación. El costo asignado a cada periodo es el costo asignado dividido entre la vida útil. En el ejemplo 6, suponga que se estima que el camión (que cuesta $20 000) se puede revender en $2 500 al cabo de los 5 años. El costo total que se debe asignar al periodo de 5 años es el costo de compra menos el valor de reventa, o $20 000 − $2 500 = $17 500. Utilizando la depreciación en línea recta, la depreciación anual será

$$\begin{aligned} \frac{\text{Costo de compra} - \text{valor de salvamento}}{\text{Vida útil (años)}} &= \frac{20\,000 - 2\,500}{5} \\ &= \frac{17\,500}{5} \\ &= 3\,500 \end{aligned}$$

La función que expresa el valor en libros V como una función del tiempo t es

$$V = f(t) = 20\,000 - 3\,500t, \qquad 0 \le t \le 5$$

En el ejercicio 1 suponga que la máquina tendrá un valor de recuperación de \$7 500 al cabo de 6 años. Determine la función $V = f(t)$ para esta situación.

3. Se compra una maquinaria en \$300 000. Los contadores decidieron usar un método de depreciación en línea recta con la máquina depreciada en su totalidad después de 8 años. Si se supone que V es el valor en libros de la máquina y t la antigüedad de la máquina, determine la función $V = f(t)$. Suponga que no hay valor de recuperación.

4. Suponga en el ejercicio 3 que se puede revender la máquina después de 8 años en \$28 000. Determine la función $V = f(t)$.

5. Una compañía compra autos para el uso de sus ejecutivos. El costo de compra este año es de \$25 000. Se conservan los autos 3 años, después de los cuales se espera que tengan un valor de reventa de \$5 600. Si los contadores usan la depreciación en línea recta, determine la función que describe el valor de libros V como una función de la antigüedad del automóvil t.

6. Un departamento de policía cree que los índices de arrestos R son una función del número n de oficiales vestidos de civil asignados. Se define el *índice de arrestos* como el porcentaje de casos en que se ha hecho arrestos. Se cree que la relación es lineal y que cada oficial adicional asignado al destacamento vestido de civil da como resultado un aumento en el índice de arrestos de 1.20 por ciento. Si la actual fuerza policiaca vestida de civil consiste en 16 oficiales y el índice de arrestos es 36 por ciento:

a) Defina la función $R = f(n)$.
b) Interprete el significado de intersección de R.
c) Determine el dominio restringido y el rango de la función.
d) Trace la función.

7. Dos puntos de una función lineal de la demanda son (\$20, 80 000) y (\$30, 62 500).

a) Determine la función de la demanda $q = f(p)$.
b) Determine qué precio daría como resultado una demanda de 50 000 unidades.
c) Interprete la pendiente de la función.
d) Defina el dominio restringido y el rango de la función.
e) Grafique $f(p)$.

8. Dos puntos (p, q) en una función lineal de la demanda son (\$24, 60 000) y (\$32, 44 400).

a) Determine la función de la demanda $q = f(p)$.
b) ¿Qué precio daría como resultado una demanda de 80 000 unidades?
c) Interprete la pendiente de la función.
d) Determine el dominio restringido y el rango.
e) Trace $f(p)$.

9. Dos puntos en una función lineal de la oferta son (\$4.00, 28 000) y (\$6.50, 55 000).

a) Determine la función de la oferta $q = f(p)$.
b) ¿Qué precio daría como resultado que los proveedores ofrezcan 45 000 unidades?
c) Determine e interprete la intersección de p.

10. Dos puntos (p, q) en una función lineal de la oferta son (\$3.50, 116 000) y (\$5.00, 180 000).

a) Determine la función de la oferta $q = f(p)$.
b) ¿Qué precio daría como resultado que los proveedores ofrezcan a la venta 135 000 unidades?
c) Interprete la pendiente de la función.
d) Determine e interprete la intersección de p.
e) Trace $f(p)$.

11. **Pensión alimenticia** Encuestas recientes indican que el pago de pensiones alimenticias tiende a declinar con el tiempo transcurrido después del decreto de divorcio. Una encuesta usa la función para estimar

$$p = f(t) = 90 - 12.5t$$

donde p representa el porcentaje de casos en que se hacen los pagos y t es el tiempo medido en años después del decreto de divorcio.

a) Interprete la intersección de p.
b) Interprete la pendiente.
c) ¿En qué porcentaje de casos se paga la pensión alimenticia después de 5 años?
d) Trace $f(t)$.

12. Lesiones deportivas Una encuesta entre jugadores de futbol americano de preparatorias y universidades sugiere que está aumentando el número de lesiones que terminan con la carrera de los jugadores de este deporte. En 1980, el número de dichas lesiones fue 925; en 1988 el número fue 1 235. Si se supone que las lesiones aumentan con un índice lineal:

a) Determine la función $n = f(t)$, donde n es igual al número de lesiones por año y t el tiempo medido en años desde 1980.
b) Interprete el significado de la pendiente de esta función.
c) ¿Cuándo se espera que el número de dichas lesiones supere la marca de 1 500?

13. Prospectos de matrimonio Datos publicados por el Census Bureau en 1986 indicaron la probabilidad de que con el paso del tiempo se casen las mujeres que nunca se han casado. Los datos indicaron que mientras mayor sea la mujer, menor es la posibilidad del matrimonio. Específicamente, dos estadísticas indicaron que las mujeres sin casarse nunca a los 45 tienen un 18 por ciento de probabilidad de casarse y las mujeres mayores de 25 años tenían una probabilidad de 78 por ciento. Suponga que un ajuste lineal para estos dos puntos de datos ofrece una aproximación razonable para la función $p = f(a)$, donde *p es la probabilidad de matrimonio* y *a la edad de las mujeres nunca casadas.*

a) Determine la función lineal $p = f(a)$.
b) Interprete la pendiente y la intersección de p.
c) ¿Los valores de la parte *b*) parecen razonables?
d) Si el dominio restringido de la función es $20 \leq a \leq 50$, determine $f(20)$, $f(30)$, $f(40)$ y $f(50)$.

14. Familiar con ingresos de dos personas La figura 5.8 ilustra los resultados de una encuesta relacionada con las familias con ingresos de dos personas. Los datos reflejan el porcentaje de parejas casadas con esposas que trabajan por cuatro años diferentes. El porcentaje parece aumentar aproximadamente con un índice lineal. Usando los puntos de datos para 1960 y 1988:

a) Determine la función lineal $P = f(t)$, donde P equivale al porcentaje de parejas casadas con esposas que trabajan y t es el tiempo medido en años *desde* 1950 ($t = 0$ corresponde a 1950).

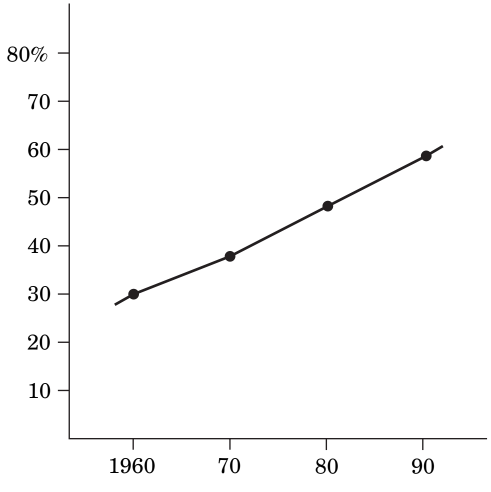


Figura 5.8 Porcentaje de parejas casadas con esposas que trabajan.

b) Interprete el significado de la pendiente y la intersección de P.

c) ¿Cuándo se espera que el porcentaje exceda 75 por ciento?

15. Gastos de educación La figura 5.9 ilustra los datos por estudiante en escuelas públicas de Estados Unidos en un periodo de tres décadas. Los gastos se expresan en "dólares constantes", los cuales representan un filtro de salida de los efectos de la inflación. El aumento en los gastos por estudiante parece ocurrir aproximadamente con un índice lineal. En 1958, los gastos por estudiante fueron \$1 750; en 1984, los gastos fueron \$3 812.50. Utilizando estos dos puntos de datos:

a) Determine la función lineal de aproximación $E = f(t)$, donde E es igual a los gastos esperados por estudiante en dólares y t el tiempo medido en años *desde* 1955 ($t = 0$ corresponde a 1955).

b) Interprete la pendiente y la intersección de E.

c) De acuerdo con esta función, ¿cuáles serán los gastos esperados por estudiante en el año 2000?

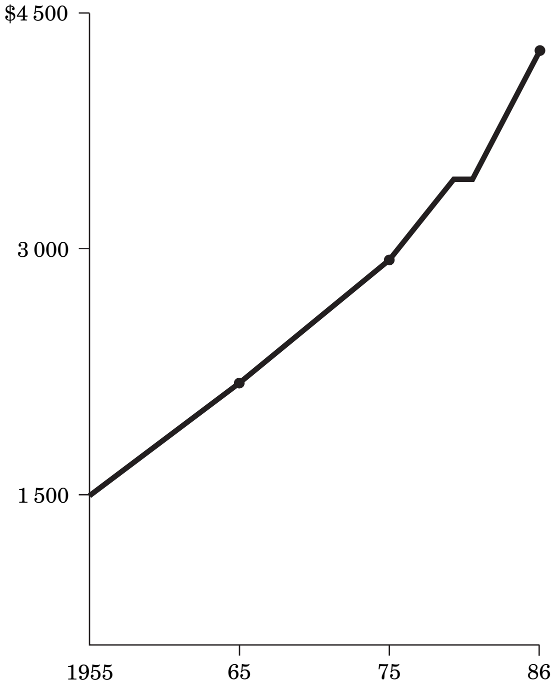


Figura 5.9 Gastos por estudiante en escuelas públicas de Estados Unidos (dólares constantes). (Fuente: U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics)

16. Walt Disney Company La figura 5.10 muestra las utilidades operativas anuales de Walt Disney Company entre 1986 y 1900 (estimadas). Durante este periodo, las utilidades operativas parecen haber aumentado aproximadamente de manera lineal. En 1987, las utilidades operativas anuales eran \$0.762 millones; en 1989, fueron \$1.220 millones. Utilizando estos dos puntos de datos:

a) Determine la función lineal $P = f(t)$, donde P equivale a las utilidades operativas anuales y t es igual al tiempo medido en años *desde* 1986.

b) Interprete la pendiente y la intersección de P.

c) Usando esta función, estime las utilidades operativas anuales para Walt Disney Company en el año 2000.

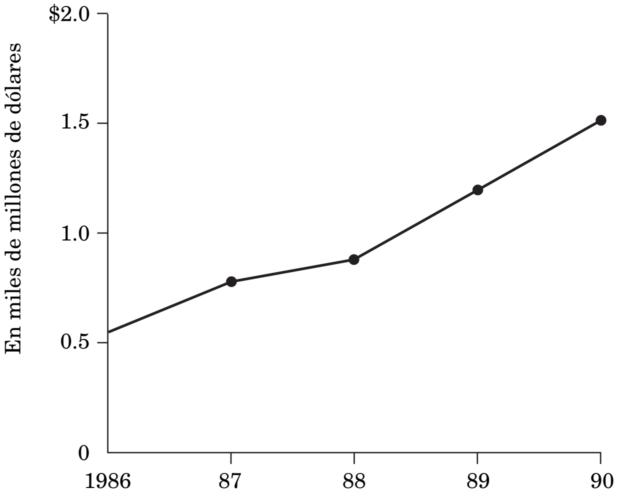


Figura 5.10 Utilidades operativas anuales, Walt Disney Company (Datos: Company Reports, Wertheim Schroder & Co.)

17. Depresión económica La figura 5.11 refleja una tendencia general a la baja económica en la ciudad de Nueva York. Esta figura presenta el índice de vacantes en oficinas de Manhattan durante el periodo de 1985 a 1990. El incremento en el índice de vacantes parece aproximadamente lineal. El índice de vacantes en 1986 era 9.4 por ciento; en 1989, el índice era 13.2 por ciento. Usando estos dos puntos de datos:

a) Determine la función lineal $V = f(t)$, donde V equivale al índice estimado de vacantes (en porcentaje) y t es igual al tiempo medido en años desde 1985.

b) Interprete la pendiente y la intersección de V.

c) Usando esta función, estime el índice de vacantes en 1995.

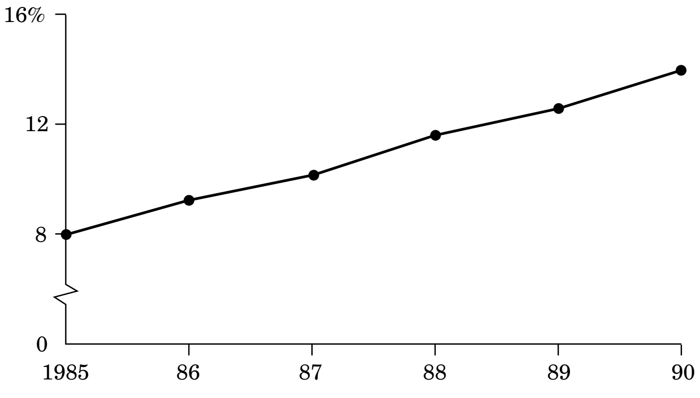


Figura 5.11 Porcentaje de vacantes en oficinas de Manhattan. (Business Week, 18 de junio de 1990)

18. **Impuestos federales sobre la renta** La tabla 5.3 contiene las tasas tributarias federales de 1990 para una sola persona. Determine la función $T = f(x)$, donde T representa el pasivo tributario (en dólares) para una sola persona y x expresa el ingreso gravable (en dólares).

Tabla 5.3

Ingreso gravable		
Mayor que	**Pero no mayor que**	**Tasa tributaria**
\$ 0	\$19 450	15%
19 450	47 050	28
47 050	97 620	33
97 620		28

19. **Equilibrio de mercado** Dadas las siguientes funciones de la demanda y la oferta para dos productos competidores,

$$q_{d1} = 82 - 3p_1 + p_2$$
$$q_{s1} = 15p_1 - 5$$
$$q_{d2} = 92 + 2p_1 - 4p_2$$
$$q_{s2} = 32p_2 - 6$$

determine si hay precios que ponen en equilibrio los niveles de oferta y demanda para los dos productos. De ser así, ¿cuáles son las cantidades de equilibrio?

*20. **Equilibrio de mercado: tres productos competidores** Las siguientes son las funciones de la oferta y la demanda para tres productos competidores.

$$q_{d1} = 46 - 10p_1 + 2p_2 + 2p_3$$
$$q_{s1} = 12p_1 - 16$$
$$q_{d2} = 30 + 2p_1 - 6p_2 + 4p_3$$
$$q_{s2} = 6p_2 - 22$$
$$q_{d3} = 38 + 2p_1 + 4p_2 - 8p_3$$
$$q_{s3} = 6p_3 - 10$$

Determine si hay precios que ponen en equilibrio los niveles de oferta y demanda para cada uno de los tres productos. En caso de que así sea, ¿cuáles son las cantidades de equilibrio de la oferta y la demanda?

5.3 Modelos basados en el punto de equilibrio

En esta sección estudiaremos los ***modelos basados en el punto de equilibrio***, un conjunto de herramientas de planeación que pueden ser y han sido muy útiles en la administración de organizaciones. Un indicador importante del desempeño de una compañía se refleja por medio de la llamada línea inferior del estado de ingresos de la empresa; es decir, ¡qué utilidad se gana! El análisis del punto de equilibrio se enfoca en la rentabilidad de una empresa. En el análisis del punto de equilibrio, una preocupación importante es el nivel de operación o el nivel de producción que daría como resultado una **utilidad cero**. Este nivel de operaciones o producción se denomina ***punto de equilibrio***. El punto de equilibrio es un punto de referencia útil en el sentido de que representa el nivel de operación en que el **ingreso total equivale al costo total**. Cualquier cambio de este nivel operativo dará como resultado ya sea una ganancia o una pérdida.

El análisis del punto de equilibrio es particularmente valioso como una herramienta de planeación cuando las empresas contemplan expansiones como la oferta de nuevos productos o servicios. De modo similar, es útil para evaluar las ventajas y desventajas de iniciar un nuevo proyecto empresarial. En cada caso, el análisis permite proyectar la rentabilidad.

Suposiciones

En este estudio nos enfocaremos en situaciones en que tanto la función del costo total como la función del ingreso total son lineales. El uso de una función lineal del costo implica que los costos variables por unidad son constantes o bien se puede suponer que son constantes. La función lineal del costo supone que los costos variables totales dependen del nivel de operación o producción. También se supone que la porción del costo fijo de la función del costo es constante en el nivel de operación o producción que se considera.

La función lineal del ingreso total supone que el precio de venta por unidad es constante. Cuando el precio de venta no es constante, en ocasiones se selecciona el precio promedio para los fines de la conducción del análisis.

Otra suposición es que el precio por unidad es mayor que el costo variable por unidad. *Piénselo un momento.* Si el precio por unidad es menor que el costo variable por unidad, una empresa perderá dinero en cada unidad producida y vendida. Nunca podría haber una condición de punto de equilibrio.

Análisis del punto de equilibrio

En el análisis del punto de equilibrio el principal objetivo es determinar el punto de equilibrio. Es posible expresar el punto de equilibrio en términos de 1) *volumen de la producción* (o nivel de actividad), 2) *total de ventas en dólares,* o quizás 3) *porcentaje de capacidad de producción.* Por ejemplo, se puede indicar que una empresa tendrá un punto de equilibrio en 100 000 unidades de producción, cuando el total de ventas es de $2.5 millones o cuando la empresa opera a 60 por ciento de su capacidad. Nos enfocaremos sobre todo en la primera de estas tres maneras.

Los métodos para efectuar el análisis del punto de equilibrio más bien son sencillos y directos, y hay maneras alternativas de determinar el punto de equilibrio. El planteamiento común es el siguiente:

1. *Formule el costo total como una función de x, el nivel de producción.*
2. *Formule el ingreso total como una función de x.*
3. *Puesto que hay condiciones de equilibrio cuando el ingreso total equivale al costo total, establezca C(x) igual a R(x) y despeje x. El valor resultante de x es el nivel del punto de equilibrio de la producción y se podría expresar como* x_{BE} ($x_{Break-Even}$; $x_{Punto\ de\ equilibrio}$).

Una alternativa para el paso 3 es elaborar la función de la utilidad $P(x) = R(x) - C(x)$, establecer $P(x)$ igual a cero y despejar x_{BE}.

El ejemplo siguiente ilustra ambos planteamientos.

Ejemplo 12

Un grupo de ingenieros se interesa en formar una compañía para producir detectores de humo. Han desarrollado un diseño y estiman que los costos variables por unidad, incluyendo materiales, trabajo y costos de comercialización son de \$22.50. Los costos fijos asociados con la formación, operación y administración de la compañía y la compra de equipo y maquinaria ascienden a un total de \$250 000. Estiman que el precio de venta será de \$30 por detector.

a) Determine el número de detectores de humo que se deben vender para que la empresa tenga el punto de equilibrio en el proyecto.

b) Datos mercadotécnicos preliminares indican que la empresa puede esperar vender aproximadamente 30 000 detectores durante la vida del proyecto si los detectores se venden en \$30 por unidad. Determine las utilidades esperadas con este nivel de producción.

SOLUCIÓN

a) Si *x* es el número de detectores de humo producidos y vendidos, se representa la función del ingreso total mediante la ecuación

$$R(x) = 30x$$

Se representa la función del costo total por medio de la ecuación

$$C(x) = 22.50x + 250\,000$$

La condición del punto de equilibrio ocurre cuando el ingreso total equivale al costo total o cuando

$$\boxed{R(x) = C(x)} \tag{5.10}$$

Para este problema, se calcula el punto de equilibrio como

$$30x = 22.50x + 250\,000$$

o bien

$$7.50x = 250\,000$$

y

$$x_{BE} = 33\,333.33 \text{ unidades}$$

El planteamiento alternativo consiste en escribir primero la función de la utilidad y se establece igual a 0, como sigue:

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 30x - (22.50x + 250\,000) \\ &= 7.50x - 250\,000 \end{aligned}$$

Al establecer la función de la utilidad *P* igual a 0, tenemos

$$\begin{aligned} 7.50x - 250\,000 &= 0 \\ 7.50x &= 250\,000 \end{aligned}$$

o bien
$$x_{BE} = 33\,333.33 \text{ unidades}$$

Éste es el mismo resultado y nuestra conclusión es que *dados los parámetros (valores) de costo y precio supuestos*, la empresa debe vender 33 333.33 unidades para tener el punto de equilibrio.

Ejercicio de práctica

Verifique que el ingreso total y el total de costos equivalgan ambos a $1 000 000 (tomando en cuenta el redondeo) en el punto de equilibrio.

b) Con ventas proyectadas de 30 000 detectores de humo,

$$\begin{aligned} P(30\,000) &= 7.5(30\,000) - 250\,000 \\ &= 225\,000 - 250\,000 = -25\,000 \end{aligned}$$

Esto sugiere que si todas las estimaciones (precio, costo y demanda) resultan ciertas, la empresa puede esperar perder $25 000 en el proyecto.

Ejemplo 13

(Planteamiento gráfico) La esencia del análisis del punto de equilibrio se ilustra con gran eficacia por medio del análisis gráfico. La figura 5.12*a*) ilustra la función del ingreso total, la figura 5.12*b*) la función del costo total y la figura 5.12*c*) una gráfica compuesta que muestra ambas funciones para el ejemplo 12. Observe en la figura 5.12*b*) que el componente del costo fijo se distingue del componente del costo variable. En *cualquier* nivel de producción *x*, la distancia vertical dentro del área sombreada indica el costo fijo de $250 000. A esto se suma el costo variable total, que se representa por medio de la distancia vertical en *x* dentro del área más clara. La suma de estas dos distancias verticales representa el costo total *C*(*x*).

En la figura 5.12*c*) se grafican las dos funciones en el mismo conjunto de ejes. El punto en que se intersecan las dos funciones representa el único nivel de salida en que el ingreso total y el costo total son iguales. Éste es el punto de equilibrio. Para todos los puntos a la izquierda del punto de equilibrio, la función del costo *C* tiene un mayor valor que la función del ingreso *R*. En esta región, la distancia vertical que separa las dos funciones representa la pérdida que ocurriría en un nivel de producción dado. A la derecha de $x = 33\,333$, $R(x)$ es mayor que $C(x)$ o $R(x) > C(x)$. Para niveles de producción mayores que $x = 33\,333$, la distancia vertical que separa $R(x)$ y $C(x)$ representa la utilidad en un nivel de producción determinado.

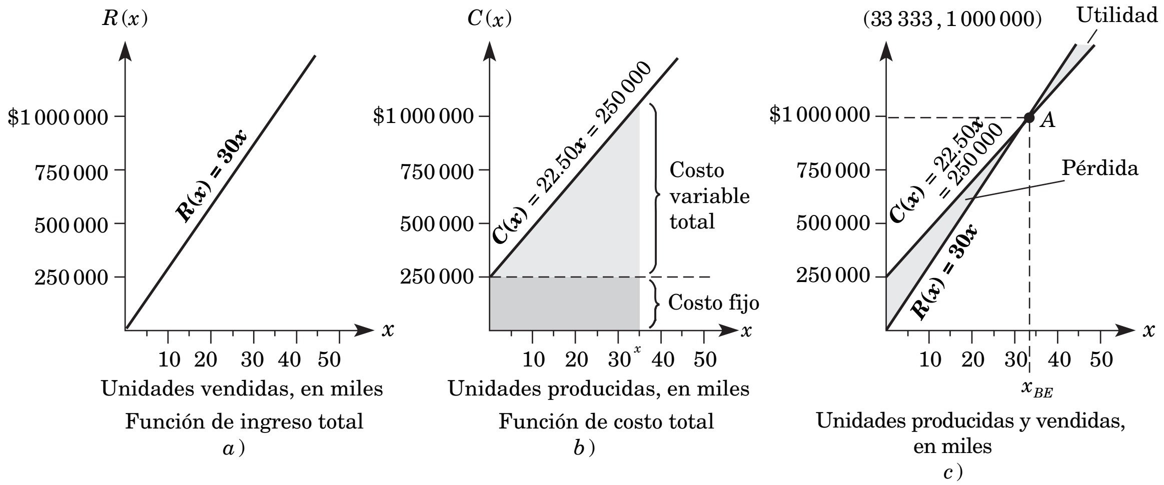


Figura 5.12

La figura 5.13 ilustra la función de la utilidad P para este ejemplo. El punto de equilibrio se identifica por medio de la coordenada de x y la intersección de x. Nótese que a la izquierda del punto de equilibrio, la función de la utilidad se encuentra por debajo del eje de las x, indicando una utilidad negativa o pérdida. A la derecha, $P(x)$ se halla por encima del eje de las x, expresando una utilidad positiva. ❑

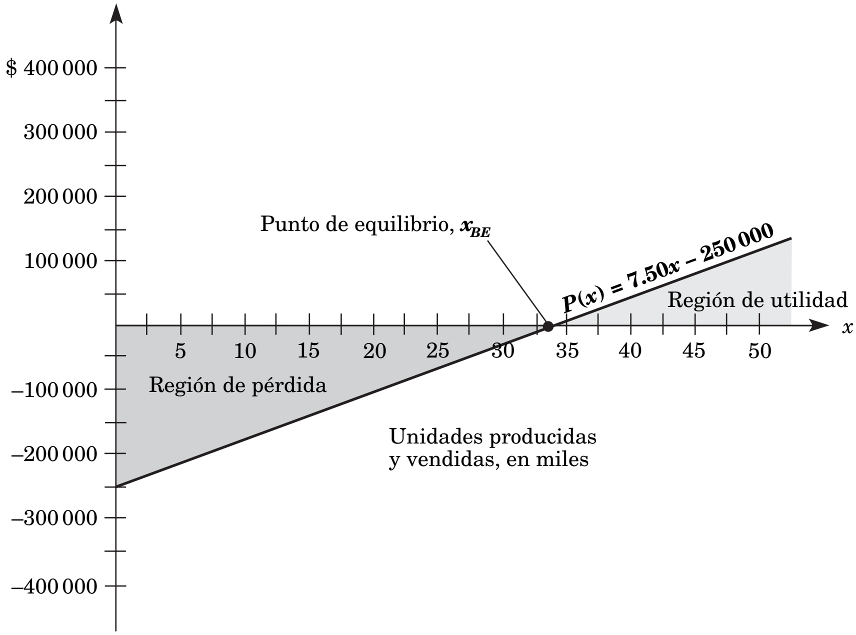


Figura 5.13 Función de la utilidad.

PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR

Analice cualquier cambio en la figura 5.13 y el punto de equilibrio si *a*) el precio por unidad sube (baja), *b*) el costo fijo aumenta (disminuye) y *c*) el costo variable se incrementa (se reduce).

Una forma alternativa de considerar el punto de equilibrio es en términos de la ***contribución a la utilidad***. En tanto que el precio por unidad *p* exceda el costo variable por unidad v, la venta de cada unidad da como resultado una contribución a la utilidad. La diferencia entre *p* y v se denomina ***margen de utilidad.*** O expresado en forma de ecuación,

$$\boxed{\text{Margen de utilidad} = p - v, \quad p > v} \qquad \textbf{(5.11)}$$

El margen de utilidad generado de la venta de unidades se debe asignar primero a la recuperación de cualquier costo fijo que exista. Con menores niveles de producción, la ***contribución a la utilidad total*** (margen de utilidad para todas las unidades vendidas) normalmente es menor que los costos fijos, lo que implica que la utilidad total sea negativa (véase la figura 5.13). Sólo habrá una utilidad positiva cuando la contribución a la utilidad *total* excede el costo fijo. Como consecuencia de esta orientación (que el margen de utilidad por unidad contribuye primero a recuperar los costos fijos, después de lo cual contribuye a la utilidad), el margen de utilidad a menudo recibe el nombre de ***contribución al costo fijo y a la utilidad***.

Con esta perspectiva en mente, es posible considerar el cálculo del punto de equilibrio como la determinación del número de unidades por producir y vender con el fin de recuperar los costos fijos. Por consiguiente, el cálculo del punto de equilibrio es así

$$\begin{matrix}\text{Nivel de producción del}\\ \text{punto de equilibrio}\end{matrix} = \frac{\text{Costo fijo}}{\text{Contribución al costo fijo y a la utilidad}}$$

o bien

$$\boxed{x_{BE} = \frac{FC}{p - v}} \qquad \textbf{(5.12)}$$

De hecho, si resuelve problemas de punto de equilibrio estableciendo $R(x) = C(x)$ o la utilidad $P(x)$ igual a cero, el cálculo final realizado es el de la ecuación (5.12). Aplicar la ecuación (5.12) al ejemplo 12 da

$$\begin{aligned} x_{BE} &= \frac{250\,000}{30\,000 - 22.50} \\ &= \frac{250\,000}{7.5} \\ &= 33\,333.33 \end{aligned}$$

Si regresa al ejemplo 12, el cálculo final se reduce al anterior, no obstante el planteamiento que se tome.

Ejemplo 14

(Planeación de convención) Una organización profesional planea su convención anual para celebrarse en San Francisco. Se están haciendo arreglos con un hotel grande en que tendrá lugar la convención. Se cobrará a los participantes en la convención de 3 días una tarifa sencilla de \$500 por persona, la cual incluye tarifa de registro, habitación, todos los alimentos y propinas. El hotel cobra \$20 000 a la organización por el uso de las instalaciones como salas de juntas, salón de baile e instalaciones recreativas. Además, el hotel cobra \$295 por persona por habitación, alimentos y propinas. La organización profesional se apropia de \$125 de la tarifa de \$500 como cuotas anuales para depositarse en la tesorería de la oficina nacional. Determine el número de participantes necesarios para que la organización recupere el costo fijo de \$20 000.

SOLUCIÓN

La contribución al costo fijo y la utilidad es la tarifa de registro (precio) por persona menos el costo por persona que el hotel cobra menos el porcentaje por participante de la organización, o bien

$$\text{Contribución por participante} = \text{tarifa de registro} - \begin{array}{c}\text{cargo del hotel}\\ \text{por persona}\end{array} - \text{cuotas anuales}$$

$$= 500 - 295 - 125 = \$80$$

Por tanto, de acuerdo con la ecuación (5.12), el número de participantes requeridos para recuperar el costo fijo es

$$x_{BE} = \frac{20\,000}{80} = 250 \text{ personas}$$

Ejemplo 15

(La película “Dick Tracy”) En el verano de 1990 se estrenó la película “Dick Tracy”, protagonizada por Warren Beatty y Madonna. Se estimaba que a Walt Disney Company le costaría \$45 millones producir y comercializar la película. Se estimaba que la película tendría que tener una cantidad bruta de \$100 millones en taquilla para “tener el punto de equilibrio”. *¿Qué porcentaje de las entradas brutas esperaba ganar Disney con esta película?*

SOLUCIÓN

Este ejemplo requiere un tipo de análisis ligeramente distinto relacionado con el concepto del punto de equilibrio. Si *x equivale al porcentaje del bruto de entradas*, la información que se nos proporciona es que Disney tendría el punto de equilibrio si las entradas brutas equivalieran a \$100 millones. Los costos que necesitan recuperar son los \$45 millones en costos de producción y mercadotecnia. Por tanto, para obtener el punto de equilibrio

$$(\text{Entradas brutas})(\%\text{ de Disney de las entradas brutas}) = 45 \text{ millones}$$

o

$$100x = 45$$

$$x = 45/100 = 0.45$$

Por ello, la participación de Disney de las entradas brutas debe ser igual a 45%.

Ejemplo 16 **(Decisión de computadora propia contra oficina de servicio)** Un grupo numeroso de practicantes médicos tiene 30 médicos de tiempo completo. Actualmente, hay personal de oficina que hace a mano toda la facturación a los pacientes. Dado el alto volumen de facturación, la gerente de la empresa cree que es hora de pasar de la facturación a clientes a mano a la facturación computarizada. Se consideran dos opciones: 1) el grupo de práctica puede comprar su propia computadora y software y hacer la facturación por sí mismo o 2) el grupo puede contratar una oficina de servicio de cómputo que hará la facturación a los pacientes.

Los costos de cada alternativa son una función del número de facturas a clientes. La oferta inferior presentada por una oficina de servicio daría como resultado una tarifa anual sencilla de $3 000 más $0.95 por factura procesada. Con la ayuda de un consultor de cómputo, la gerente de la empresa ha estimado que el grupo puede arrendar un pequeño sistema de cómputo empresarial y el software requerido con un costo de $15 000 por año. Se estima que los costos variables de llevar la facturación de esta manera son de $0.65 por factura.

Si *x equivale al número de pacientes por año*, el costo de facturación anual usando una oficina de servicio se representa por medio de la función

$$S(x) = 3\,000 + 0.95x$$

El costo anual de arrendar un sistema de cómputo y hacer la facturación ellos mismos se expresa mediante la función

$$L(x) = 15\,000 + 0.65x$$

Estas dos alternativas tienen el mismo costo cuando

$$S(x) = L(x)$$

o bien

$$3\,000 + 0.95x = 15\,000 + 0.65x$$

$$0.30x = 12\,000$$

$$x = 40\,000$$

Por consiguiente, si el número esperado de facturas a pacientes por año es mayor que 40 000, la opción de arrendamiento es la menos costosa. Si se espera que el número de facturas a pacientes sea menor que 40 000, la opción de la oficina de servicio es menos costosa. La figura 5.14 ilustra las dos funciones del costo.

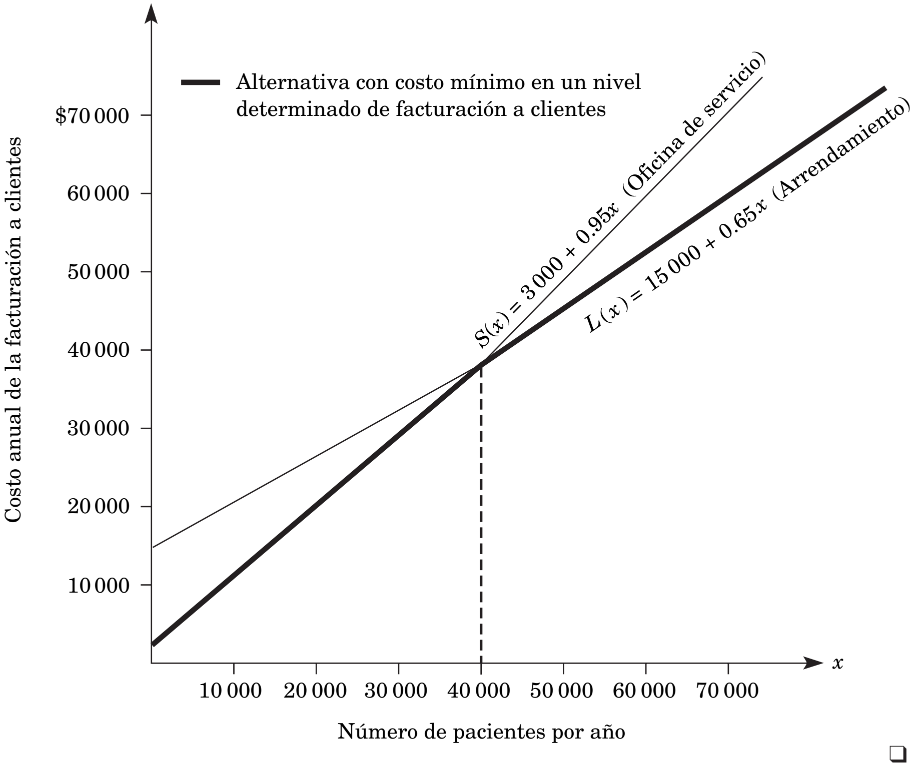


Figura 5.14 Funciones del costo de facturación a pacientes: dos opciones.

❑

PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR

Suponga que se espera que el volumen de facturación a clientes sea de 35 000 por año. ¿Qué razones que favorecen la opción de *arrendamiento* podría presentar a la gerente de la empresa? Analice las ventajas y desventajas potenciales que no son cuantificables para las opciones de *arrendamiento* y *oficina de servicio.*

Ejemplo 17

(Revisión de la facturación a pacientes: tres alternativas) Suponga que en el ejemplo anterior la gerente de la empresa no está convencida de que el procesamiento por computadora sea un medio de facturación a clientes con costo más efectivo. Estima que procesar manualmente las facturas cuesta al grupo de práctica $1.25 por factura, o bien

$$M(x) = 1.25x$$

Analicemos las implicaciones si se considera este método como una tercera opción. Las tres funciones del costo se grafican juntas en la figura 5.15. Si la estudia con cuidado, debe llegar a las conclusiones siguientes:

1. *Los segmentos de línea gruesos destacan la opción menos costosa en cualquier nivel de facturación a pacientes.*
2. *Si se espera que el número de facturas a pacientes sea de menos de 10 000, el sistema manual es el menos costoso.*
3. *Si se espera que el número de facturas a pacientes sea de entre 10 000 y 40 000, el arreglo con la oficina de servicio es el menos costoso.*
4. *Si se espera que el número de facturas a pacientes sea de más de 40 000, el arreglo de arrendamiento es el menos costoso.*

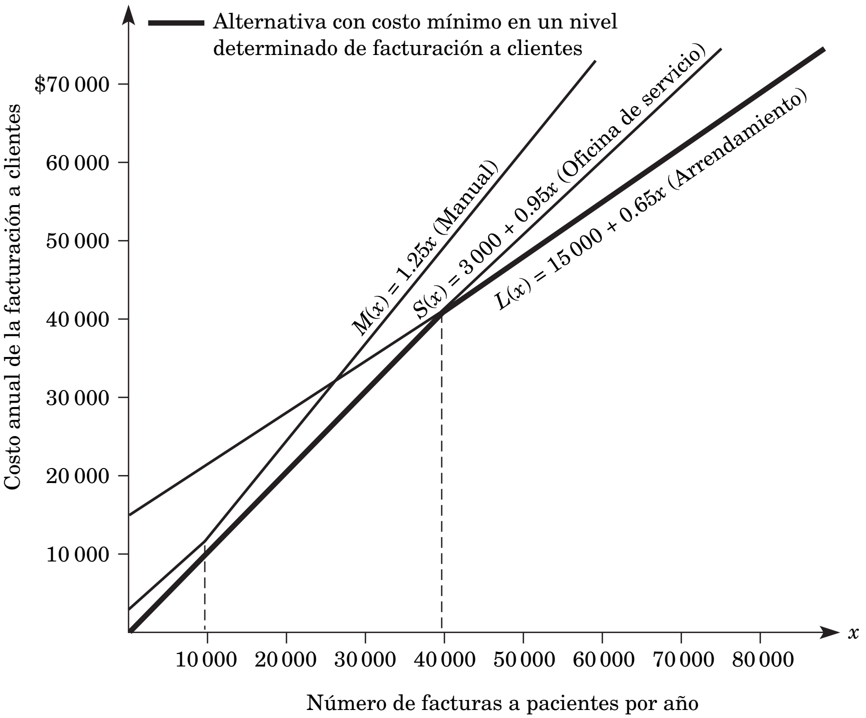


Figura 5.15 Funciones del costo de facturación a pacientes: tres opciones.

❑

NOTA Al realizar el análisis del punto de equilibrio para más de dos alternativas (como en este ejemplo), es muy recomendable que trace primero las funciones pertinentes. En ocasiones, la interacción que ocurre entre tales funciones no siempre es la que se podría esperar. Un trazo le mostrará rápidamente la interacción.

Ejemplo 18 **(Análisis de múltiples productos)** Nuestro análisis en esta sección se ha limitado a situaciones con un solo producto/servicio. En situaciones con múltiples productos, es posible efectuar el análisis del equilibrio cuando se conoce una ***mezcla de productos***. La mezcla de productos expresa la razón de niveles de producción para diferentes productos. Por ejemplo, una empresa que tiene tres productos podría producir 3 unidades del producto A y 2 unidades del producto B por cada unidad del producto C. En esta situación podríamos decir que 1 ***unidad de la mezcla del producto*** consiste en 3 unidades del producto A, 2 unidades de B y 1 unidad del producto C. Si es posible definir una mezcla de productos, podemos efectuar un análisis del equilibrio usando esto como la medida de producción.

Tabla 5.4

	Producto		
	A	**B**	**C**
Precio/unidad	$40	$30	$55
Costo variable/unidad	30	21	43
Margen de utilidad	$10	$ 9	$12

Suponga que estos tres productos tienen los atributos de precio y costo que se presentan en la tabla 5.4. El costo fijo combinado de los tres productos es $240 000. Puesto que *1 unidad de la mezcla de productos* consiste en 3 unidades de A, 2 unidades de B y 1 unidad de C, la *contribución a la utilidad por unidad de la mezcla de productos equivale a*

$$3(\$10) + 2(\$9) + 1(\$12) = \$60$$

Si suponemos que *x equivale al número de unidades de la mezcla de productos*, la función de la utilidad para los tres productos es

$$P(x) = 60x - 240000$$

El punto de equilibrio ocurre cuando $P(x) = 0$, o

$$\begin{aligned} 60x - 240\,000 &= 0 \\ 60x &= 240\,000 \\ x &= 4\,000 \end{aligned}$$

La empresa tendrá el punto de equilibrio cuando produzca 4 000 unidades de la mezcla de productos o 12 000 unidades de A, 8 000 unidades de B y 4 000 unidades de C. ❑

El análisis que se presenta en el ejemplo 18 presume que se conoce una mezcla de productos. Si no se conoce con exactitud la mezcla de productos pero se puede hacer una aproximación de la misma, este análisis aún es valioso como una herramienta de planeación.

Sección 5.3 Ejercicios de seguimiento

1. Una empresa vende un producto en \$45 por unidad. Los costos variables por unidad son \$33 y los costos fijos equivalen a \$450 000. ¿Cuántas unidades se deben vender para tener el punto de equilibrio?

2. Un universitario emprendedor ha decidido comprar un negocio de lavado de automóviles en su localidad. El lavado de automóvil tendrá un precio de \$5.50 y se espera que el costo variable por auto (jabón, agua, trabajo, etc.) sea igual a \$1.50. ¿Cuántos automóviles se deben lavar para recuperar el precio de compra de \$150 000?

3. Una organización de caridad planea una rifa para recaudar \$10 000. Se venderán 500 boletos para la rifa de un auto nuevo. El auto le costará a la organización \$15 000. ¿Cuánto debería costar cada boleto si la organización desea una utilidad neta de \$10 000?

4. Un editor tiene un costo fijo de \$250 000 asociado con la producción de un libro de matemáticas a nivel universitario. La contribución a la utilidad y el costo fijo de la venta de cada libro es \$6.25.

a) Determine el número de libros que se deben vender para lograr el punto de equilibrio.

b) ¿Cuál es la utilidad esperada si se venden 50 000 libros?

5. Un equipo de futbol americano de una universidad local ha agregado un nivel nacional al programa del año entrante. El otro equipo acordó jugar el partido por una tarifa garantizada de \$100 000 más 25 por ciento de las localidades. Suponga que el precio por boleto es de \$12.

a) Determine el número de boletos que se deben vender para recuperar la garantía de \$100 000.

b) ¿Cuántos boletos se deben vender si los funcionarios de la universidad desean una utilidad neta de \$240 000 del partido?

c) Si se asegura un éxito de taquilla de 50 000 aficionados, ¿qué precio permitiría a la universidad obtener una utilidad de \$240 000?

d) Si se supone de nuevo un éxito de taquilla, ¿cuál sería la utilidad total si se cobra el precio de \$12?

6. **Decisión de producción o compra** Suponga que un fabricante puede comprar un componente necesario a un proveedor con un costo de \$9.50 por unidad o invertir \$60 000 en equipo y fabricar el artículo con un costo de \$7.00 por unidad.

a) Determine la cantidad para la que los costos totales sean iguales para las alternativas de *producción* o *compra*.

b) ¿Cuál es la alternativa del costo mínimo si se requieren 15 000 unidades? ¿Cuál es el costo mínimo?

c) Si el número de unidades requeridas del componente se aproxima a la cantidad del punto de equilibrio, ¿qué factores podrían influir en la decisión final de producir o comprar?

7. Una arena cívica local negocia un contrato con una gira de un espectáculo de patinaje sobre hielo, Icey Blades. Icey Blades cobra una tarifa sencilla de \$60 000 por noche más 40 por ciento de las localidades. La arena cívica planea cobrar un precio por todos los asientos, \$12.50 por boleto.

a) Determine el número de boletos que se deben vender cada noche para lograr el punto de equilibrio.

b) ¿Cuántos boletos se deben vender si la arena cívica tiene el objetivo de una compensación de \$15 000 cada noche?

c) ¿Cuál sería la utilidad por noche si la asistencia promedio es de 7 500 personas por noche?

8. En el ejercicio anterior, suponga que la experiencia pasada con este espectáculo indica que la asistencia promedio debe ser igual a 7 500 personas.

a) ¿Qué precio del boleto permitiría a la arena tener el punto de equilibrio?

b) ¿Qué precio del boleto permitiría ganar una utilidad de \$15 000?

9. **Selección de equipo** Una empresa tiene para escoger dos alternativas de equipo para fabricar un producto. Un equipo automatizado cuesta \$200 000 y fabrica artículos con un costo de \$4 por unidad. Otro equipo semiautomatizado cuesta $125 000 y fabrica artículos con un costo de $5.25 por unidad.

a) ¿Qué volumen de producción hace que los dos equipos cuesten lo mismo?

b) Si se deben producir 80 000 unidades, ¿cuál es el equipo menos costoso? ¿Cuál es el costo mínimo?

10. Robótica Un fabricante se interesa en introducir la tecnología robótica en uno de sus procesos de producción. El proceso proporcionaría un "ambiente hostil" para los humanos. Para ser más específicos, el proceso incluye la exposición a muy altas temperaturas al igual que a vapores potencialmente tóxicos. Se han identificado dos robots que parecen tener las capacidades para ejecutar las funciones del proceso de producción. Al parecer no hay diferencias significativas en las velocidades a que trabajan los dos modelos. Un robot cuesta $180 000 y tiene costos estimados de mantenimiento de $100 por hora de operación. El segundo tipo de robot cuesta $250 000 con costos estimados de mantenimiento de $80 por hora de operación.

a) ¿En qué nivel de operación (total de horas de producción) los dos robots cuestan lo mismo? ¿Cuál es el costo asociado?

b) Defina los niveles de operación para los que cada robot sería menos costoso.

11. Desarrollo de software de computadoras Una empresa utiliza una computadora para una variedad de propósitos. Uno de los mayores costos asociados con la computadora es el desarrollo de software (escritura de programas de cómputo). El vicepresidente de sistemas de información quiere evaluar si es menos costoso tener su propio personal de programación o que una empresa de desarrollo de software haga los programas. Los costos de ambas opciones son una función del número de líneas de código (declaraciones del programa). El vicepresidente estima que el desarrollo interno cuesta $1.50 por línea de código. Además, los costos generales anuales de emplear a los programadores son $30 000. El software desarrollado fuera de la empresa cuesta, en promedio, $2.25 por línea de código.

a) ¿Cuántas líneas de código por año hacen que los costos de las dos opciones sean iguales?

b) Si se estiman las necesidades de programación en 30 000 líneas por año, ¿cuáles son los costos de las dos opciones?

c) En la parte *b*) ¿cuál sería el costo por línea de código de desarrollo interno para que las dos opciones cuesten lo mismo?

12. Análisis de sensibilidad Ya que los parámetros (constantes) utilizados en los modelos matemáticos con frecuencia son estimaciones, es posible que los resultados reales difieran de los resultados proyectados por el análisis matemático. Para explicar algunas de las incertidumbres que pueden existir en un problema, los analistas a menudo efectúan un *análisis de sensibilidad*. El objetivo es evaluar cuánto puede variar una solución si hay cambios en los parámetros del modelo.

Suponga en el ejercicio anterior que los costos de desarrollo de software por empresas externas podrían en realidad fluctuar en ±20 por ciento de los $2.25 estimados por línea.

a) Vuelva a calcular el punto de equilibrio si los costos son 20 por ciento mayores o menores y compare su resultado con la respuesta original.

b) Junto con la incertidumbre en la parte *a*), los costos variables internos podrían aumentar hasta 30 por ciento a causa de un nuevo contrato sindical. Determine los efectos combinados de estas incertidumbres.

13. Videojuegos Un fabricante líder de videojuegos está por lanzar cuatro juegos nuevos. La tabla siguiente resume los datos de precios y costos. Los costos fijos combinados son $500 000. Un estudio de investigación de mercados pronostica que por cada unidad vendida de Black Hole, se venderán 1.5 unidades de Haley's Comet, 3 unidades de Astervoids y 4 unidades de PacPerson.

a) ¿Cuántas unidades de mezcla de productos se deben vender para tener el punto de equilibrio?

b) ¿Cómo se traduce esto en ventas de los juegos individuales?

	Juego			
	PacPerson	**Astervoids**	**Haley's Comet**	**Black Hole**
Precio de venta	\$50	\$45	\$30	\$20
Costo variable/unidad	20	15	10	10

14. Una compañía fabrica tres productos que se venden con una razón de 4 unidades del producto 2 y 2 unidades del producto 3 por cada unidad vendida del producto 1. La tabla siguiente resume los datos de precios y costos para los tres productos. Si se estima que los costos fijos son \$2.8 millones, determine el número de unidades de cada producto necesario para tener el punto de equilibrio.

	Producto		
	1	**2**	**3**
Precio de venta	\$40	\$32	\$55
Costo variable/unidad	20	24	46

***15.** Una compañía considera la compra de un equipo que se utilizará en la fabricación de un producto nuevo. Se consideran cuatro máquinas. La tabla siguiente resume el costo de compra de cada máquina y el costo variable de producción asociado si se usa la máquina para fabricar el producto nuevo. Determine los rangos de producción en los que cada máquina sería la alternativa menos costosa. Trace las cuatro funciones del costo.

	Costo de compra	**Costo variable/unidad**
Máquina 1	\$ 80 000	\$10.00
Máquina 2	120 000	9.00
Máquina 3	200 000	7.50
Máquina 4	300 000	5.50

❑ TÉRMINOS Y CONCEPTOS CLAVE

contribución al costo fijo y a la utilidad 210
costo 186
costo fijo 186
costo variable 186
depreciación (en línea recta) 192
economías de escala 186
función de la demanda 193
función de la oferta 194
función lineal 184
ingreso 188
margen (contribución) de utilidad 210
modelos basados en el punto de equilibrio 206
punto de equilibrio 206
utilidad 188
valor de recuperación 200

FÓRMULAS IMPORTANTES

$$y = f(x) = a_1 x + a_6 \tag{5.1}$$

$$y = f(x_1, x_2) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 \tag{5.2}$$

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a_0 \tag{5.3}$$

$$P(x) = R(x) - C(x) \tag{5.7}$$

$$\text{Margen de utilidad} = p - v \qquad p > v \tag{5.11}$$

$$\left.\begin{array}{ll} R(x) = C(x) & (5.10) \\ x_{BE} = \dfrac{FC}{p - v} & (5.12) \end{array}\right\} \text{Condiciones de punto de equilibrio}$$

EJERCICIOS ADICIONALES

SECCIÓN 5.1

1. Una empresa vende un producto en \$80 por unidad. Los costos de la materia prima son de \$12.50 por unidad, los costos de trabajo son de \$27.50 por unidad y los costos fijos anuales son de \$360 000.

a) Determine la función de la utilidad $P(x)$, donde x equivale al número de unidades vendidas.

b) ¿Cuántas unidades se tendrían que vender para ganar una utilidad anual de \$250 000?

2. Una empresa fabrica tres productos que vende, respectivamente, en \$25, \$35 y \$50. Los requerimientos de trabajo por cada producto son, respectivamente, 3.0, 4.0 y 3.5 horas por unidad. Suponga que los costos de trabajo son \$5 por hora y los costos fijos anuales son \$75 000.

a) Elabore una función del ingreso total conjunto para las ventas de los tres productos.

b) Determine una función del costo total anual para la producción de los tres productos.

c) Determine la función de la utilidad para los tres productos. ¿Hay algo inusual en esta función?

d) ¿Cuál es la utilidad anual si se venden 20 000, 10 000 y 30 000 unidades, respectivamente, de los tres productos?

SECCIÓN 5.2

3. Una ciudad compró una máquina nueva de revestimiento de asfalto en \$300 000. El contralor de la ciudad indica que se depreciará la máquina usando un método de línea recta. Al cabo de 8 años, se venderá la máquina con un valor de recuperación esperado de \$60 000.

a) Determine la función $V = f(t)$ que expresa el valor en libros V de la máquina como una función de su antigüedad t.

b) ¿Cuál se espera que sea el valor en libros cuando la máquina tenga 6 años de antigüedad?

4. El índice de natalidad en un país particular ha disminuido en años recientes. En 1985, el índice era de 36.4 nacimientos por 1 000 personas. En 1990, el índice de nacimientos era 34.6 nacimientos por 1 000 personas. Suponga que R equivale al índice de natalidad por 1 000 y t es el tiempo medido en años desde 1985 ($t = 0$ para 1985).

a) Determine la función lineal de estimación $R = f(t)$.
b) Interprete el significado de la pendiente.
c) ¿Cuál es el índice de nacimientos esperado para el año 2000 si continúa el patrón lineal?
d) ¿Cuál es el dominio restringido para esta función?
e) Trace la función.

5. **Control de armas de fuego** Con el índice de crímenes al alza, parece aumentar el número de pistolas en circulación. Una encuesta de 10 años entre los habitantes de una ciudad de Estados Unidos mostró un aumento lineal sorprendente del número de pistolas con el paso del tiempo. En 1980, el número estimado de pistolas era 450 000; en 1990, el número estimado era 580 000. Suponga que n representa el número de pistolas en poder de los residentes de la ciudad y t representa el tiempo medido en años desde 1980 ($t = 0$ para 1980).
   a) Usando los dos puntos de datos, determine la función lineal de estimación $n = f(t)$.
   b) Interprete el significado de la pendiente.
   c) Si el número de pistolas continúa en aumento con el mismo índice, ¿cuándo pasará de 750 000 el número de pistolas?
6. **Drogadicción** El Departamento de Salud de un estado estima que el número de consumidores de cocaína en el estado aumenta aproximadamente con un índice lineal. El número estimado de consumidores en 1980 era 950 000; el número estimado en 1985 era 1 025 000.
   a) Usando los dos puntos de datos, determine la función lineal de estimación $n = f(t)$, donde n representa el número de consumidores y t el tiempo medido en años ($t = 0$ para 1980).
   b) Interprete el significado de la pendiente.
   c) Si el número de consumidores continúa en aumento de acuerdo con esta función, ¿cuándo llegará la cifra a 1 250 000?
7. **Alcoholismo** Desde 1980 ha habido un aumento aparentemente lineal en el porcentaje de alcoholismo de una población de una ciudad europea. En 1980, el porcentaje era 10.5 por ciento. En 1990, el porcentaje se elevó a 12.9 por ciento. Si p es el porcentaje de la población que es alcohólica y t representa el tiempo en años desde 1980 ($t = 0$ para 1980):
   a) Determine la función lineal de estimación $p = f(t)$.
   b) Interprete el significado de la pendiente.
   c) Pronostique el porcentaje de alcohólicos esperado en 1996 si sigue el patrón de crecimiento. ¿Cuál es el pronóstico para el año 2000?
8. **Popularidad de una organización para el cuidado de la salud** Una organización para el cuidado de la salud da atención médica a individuos y familias sobre una base prepagada. Normalmente, el suscriptor paga una prima de seguro en que se da la mayor parte de los servicios del cuidado de la salud. Por lo regular, estas organizaciones enfatizan el cuidado preventivo de la salud y los suscriptores generalmente no pagan por la atención en consultorio. Una encuesta indica que cada vez más individuos seleccionan este tipo de plan de seguros. En 1980 había 24 millones de individuos cubiertos con estos tipos de planes. En 1985 el número era 28.4 millones. Si se supone que el crecimiento sucede con un índice lineal:
   a) Determine la función de estimación $n = f(t)$, donde n equivale al número de individuos cubiertos con los planes de organizaciones para el cuidado de la salud y t es el tiempo medido en años ($t = 0$ para 1980).
   b) ¿Cuál se espera que sea el número de individuos cubiertos por la organización para el cuidado de la salud en el año 2000?
9. **Índice de precios al productor** El índice de precios al productor (IPP) mide los precios de venta al mayoreo de bienes que no deben pasar por procesos adicionales y que están listos pa-

ra la venta a los usuarios finales. El IPP mide el costo de una selección de bienes que habrían costado \$100 en 1982. La figura 5.16 es una gráfica de los datos mensuales del IPP entre el 1 de mayo de 1988 y el 1 de octubre de 1990. Durante este periodo, el aumento en el IPP en cierto modo parecía lineal. El IPP era 111.4 el 1 de febrero de 1989 y 122.3 el 1 de octubre de 1990. Utilizando estos dos puntos de datos:

a) Determine la función lineal $I = f(t)$, donde I es igual al índice de precios al productor y t es el tiempo medido en *meses* desde el 1 de enero de 1988 ($t = 0$ corresponde al 1 de enero de 1988).

b) Interprete el significado de la pendiente y la intersección de I.

c) De acuerdo con esta función de estimación, ¿cuál es el IPP esperado el 1 de enero de 1992?

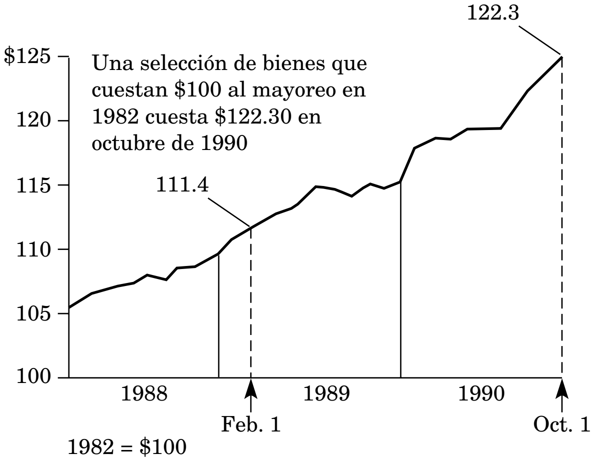


Figura 5.16 Índice de precios al productor. (Fuente: Bureau of Labor Statistics)

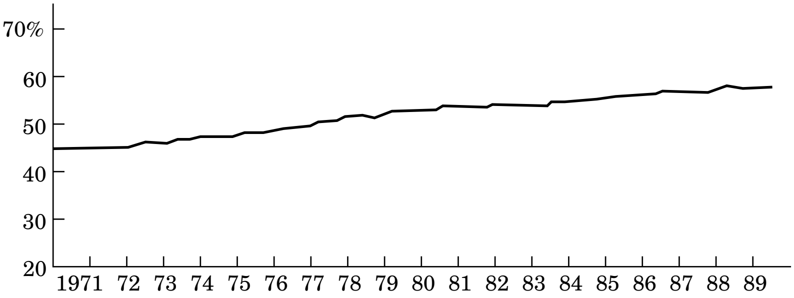


Figura 5.17 Porcentaje de mujeres (de 20 a 24 años de edad) en la fuerza laboral. (Fuente: Bureau of Labor Statistics)

10. Mujeres en la fuerza laboral El número de mujeres en la fuerza de trabajo de Estados Unidos ha aumentado de manera estable por muchas décadas. La figura 5.17 ilustra datos relacionados con el porcentaje de mujeres de 20 a 24 años en la fuerza laboral entre 1971 y 1989. Por observación, el aumento en este grupo de edad fue aproximadamente lineal. En 1978, el

50 por ciento de mujeres en este grupo de edad era parte de la fuerza laboral; en 1985, había 55.4 por ciento. Empleando estos dos puntos de datos:

a) Determine la función lineal de estimación $P = f(t)$, donde P es igual al porcentaje de mujeres de 20 a 24 años de edad en la fuerza de trabajo y t es el tiempo medido en años desde 1971.

b) Interprete la pendiente y la intersección de P.

c) Usando esta función de estimación, pronostique el porcentaje en el año 2000.

11. Impuestos federales sobre la renta La tabla siguiente muestra las tasas tributarias federales en 1991 para los matrimonios que declaran de manera conjunta.

Ingreso gravable		
Mayor que	**Pero no mayor que**	**Tasa tributaria**
$ 0	$34 000	15%
34 000	82 150	28
82 150		31

Determine la función $T = f(x)$, donde T es igual al pasivo tributario (en dólares) para personas casadas que declaran de manera conjunta y x equivale al ingreso gravable (en dólares).

SECCIÓN 5.3

12. Campaña publicitaria Una empresa desarrolla una campaña publicitaria de televisión. Los costos de desarrollo (costos fijos) son $150 000 y la empresa debe pagar $15 000 por minuto por anuncio de televisión. La empresa estima que por cada minuto de publicidad se obtienen como resultado ventas adicionales de publicidad de $70 000. De estos $70 000, se absorben $47 500 para cubrir el costo variable de la producción de los artículos y se deben utilizar $15 000 para pagar el minuto de publicidad. Cualquier remanente es la contribución al costo fijo y la utilidad.

a) ¿Cuántos minutos de publicidad son necesarios para recuperar los costos de desarrollo de la campaña publicitaria?

b) Si la empresa usa 15 anuncios de un minuto, determine el ingreso total, los costos totales (producción y publicidad) y la utilidad (o pérdida) total resultante de la campaña.

13. Renta de automóviles Una agencia de renta de automóviles compra autos nuevos cada año para el uso de la agencia. Los autos cuestan $15 000 nuevos. Se usan por 3 años, después de los cuales se venden en $3 600. El propietario de la agencia estima que los costos variables de operación de los automóviles, excluyendo la gasolina, son $0.16 por milla. Se rentan los autos con una tarifa sencilla de $0.33 por milla (sin incluir la gasolina).

a) ¿Cuál es el millaje de equilibrio para el periodo de 3 años?

b) ¿Cuáles son el ingreso total, el costo total y la utilidad total para el periodo de 3 años si se renta un auto por 50 000 millas?

c) ¿Qué precio por milla se debe cobrar para tener equilibrio si se renta el auto por 50 000 millas en un periodo de 3 años?

d) ¿Qué precio por milla se debe cobrar para ganar una utilidad de $5 000 por auto en su tiempo de vida de 3 años si se renta por un total de 50 000 millas?

14. Una empresa de electrónica de alta tecnología necesita un microprocesador especial para usarlo en una microcomputadora que fabrica. Se identificaron tres alternativas para satisfacer sus necesidades. Puede comprar los microprocesadores de un proveedor con un costo de \$10 cada uno. La empresa también puede comprar uno de dos equipos automatizados y fabricar los microprocesadores. Un equipo cuesta \$80 000 y tendría costos variables por microprocesador de \$8. Un equipo más automatizado cuesta \$120 000 y daría como resultado costos variables de \$5 por unidad. Determine las alternativas con costo mínimo para diferentes rangos de producción (como se determinó en el ejemplo 17).

15. Un nuevo participante en el mercado de "jeans de diseñador" es Françoise Strauss, una prima francesa del sobrino bisnieto de Levi's. Françoise planea comercializar tres estilos de jeans. La tabla siguiente resume los datos de precios y costos. Los costos fijos combinados son de \$7.5 millones. Un estudio de investigación de mercados proyecta una mezcla de productos para la que por cada par del estilo *A*, se venderán dos pares de *B* y cuatro pares de *C*. ¿Cuántos pares de cada estilo se deben vender para tener el punto de equilibrio?

	Estilo		
	A	**B**	**C**
Precio de venta	\$45	\$36	\$28
Costo variable/par	19	17	14

16. Una compañía planea producir y vender tres productos. La tabla siguiente resume los datos de costos y precios para los tres productos. Los funcionarios de la compañía estiman que los tres productos se venderán en una mezcla de 3 unidades del producto 2 y 5 del producto 3 por cada 2 unidades del producto 1. Si se estima que los costos fijos sean \$3.7 millones, determine el número necesario de unidades de cada producto para lograr el equilibrio.

	Estilo		
	1	**2**	**3**
Precio de venta	\$85	\$80	\$95
Costo variable/par	50	40	67

❑ EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. Una compañía vende un producto en \$150 por unidad. Los costos de la materia prima son \$40 por unidad, los costos de trabajo son \$55 por unidad, los costos de distribución son \$15 por unidad y los costos fijos anuales son \$200 000.

a) Determine la función de la utilidad $P = f(x)$, donde x es igual al número de unidades vendidas.

b) ¿Cuántas unidades se deben vender para obtener una utilidad anual de \$750 000?

2. La cantidad de pasajeros ha disminuido en una pequeña aerolínea regional, aproximadamente, con un índice lineal. En 1981, el número de pasajeros era 245 000; en 1986, el número era 215 000. Si n es el número de pasajeros que utilizan la aerolínea por año y t es igual al tiempo medido en años ($t = 0$ para 1981):

a) Determine la función lineal de estimación $n = f(t)$.

b) Interprete el resultado de la pendiente.

c) ¿Cuál es el número esperado de pasajeros en el año 2000?

d) Se estima que la aerolínea saldrá del mercado si el número de pasajeros es menor que 180 000. ¿Cuándo sucederá esto, de acuerdo con su función de la parte *a*)?

3. **Incremento en la población de internos** La figura 5.18 refleja un incremento en el número promedio de internos en las cárceles de Baltimore. A comienzos de 1984 hubo un aumento considerable en el número promedio. Se puede hacer una aproximación del incremento entre 1984 y 1988 por medio de una función lineal. Si el número promedio esperado de internos era 1 720 en 1984 y 2 590 en 1988:

a) Determine la función de estimación $N = f(t)$, donde N es igual al número promedio de internos en la cárcel y t equivale al tiempo medido en años desde 1984.

b) Interprete la pendiente y la intersección de N.

c) De acuerdo con esta función, ¿cuál se espera que sea el número promedio de internos en 1990?

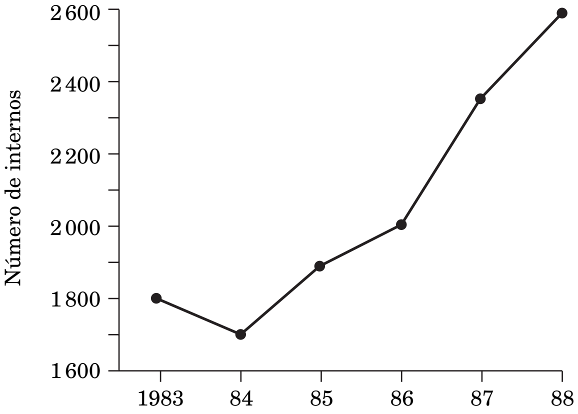


Figura 5.18 Población promedio en cárceles de la ciudad. (Fuente: Baltimore City Jail)

4. Una compañía considera comprar un equipo que se utilizará para fabricar un producto nuevo. Se consideran tres máquinas. La máquina 1 cuesta \$100 000 y se estima que el costo variable de la fabricación del producto nuevo sea \$25. La máquina 2 cuesta \$150 000 con un costo variable de producción de \$22.50. La máquina 3 cuesta \$180 000 con un costo variable de \$21. Determine los rangos de producción en que cada máquina tiene la alternativa de menor costo. Trace las tres funciones en una gráfica.

5. Suponga que se usa la función del ingreso $R(x)$ y la función del costo total $C(x)$ para llevar a cabo el análisis del punto de equilibrio. ¿Cuál es el efecto esperado sobre el nivel de producción de equilibrio x_{BE} si (con todo lo demás constante):

a) el precio por unidad baja?

b) el costo variable por unidad disminuye?

c) el costo fijo baja?

MINICASO

DECISIÓN DE CAMBIO DE AUTOMÓVIL

Dado el alto costo de la gasolina, los dueños de autos constantemente buscan maneras de economizar en gastos de conducción. Una alternativa costosa para muchas personas estriba en comprar un auto que tiene un millaje por gasolina considerablemente mejor que el de su auto actual. Chamberlain desarrolló una fórmula matemática para calcular cuántos años tendría que conducir una persona su automóvil nuevo para hacer que los ahorros en gasolina compensen el costo de la venta del automóvil viejo y la compra de uno nuevo.* Las variables que se deben usar en este análisis son:

y = número de años para justificar la compra de un auto nuevo
m = millaje por gasolina del automóvil actual, millas por galón
n = millaje por gasolina del automóvil nuevo, millas por galón
c = costo neto del auto nuevo (costo de compra menos ganancias de la venta del automóvil actual)
d = número promedio de millas conducidas por año
p = precio de gasolina por galón

Chamberlain determina este periodo de "punto de equilibrio" usando la relación general

$$\begin{array}{c}\text{Costo de gasolina del auto actual}\\ \text{durante el periodo del punto}\\ \text{de equilibrio}\end{array} = \begin{array}{c}\text{costo de gasolina del auto}\\ \text{nuevo durante el periodo}\\ \text{del punto de equilibrio}\end{array} + \begin{array}{c}\text{costo neto del}\\ \text{auto nuevo}\end{array}$$

o

$$f_{\text{viejo}}(y) = f_{\text{nuevo}}(y)$$

1. Usando las variables antes definidas, determine las expresiones para $f_{\text{viejo}}(y)$ y $f_{\text{nuevo}}(y)$.
2. Establezca $f_{\text{viejo}}(y)$ igual a $f_{\text{nuevo}}(y)$ y derive la fórmula general del periodo de equilibrio y.
3. Determine el periodo de equilibrio si el auto actual tiene un valor de \$8 000 y rinde 14 millas por galón. El auto nuevo tiene un precio de compra de \$16 000 y recorre alrededor de 46 millas por galón. Actualmente la gasolina tiene un precio de \$1.50 por galón. Suponga un millaje anual de 24 000 millas.
4. Analice la sensibilidad del periodo del punto de equilibrio a los cambios en el precio de la gasolina. Para evaluar esto, suponga que el precio actual puede variar en ±25 por ciento de la cifra de \$1.50. ¿Hay un gran cambio en el periodo de equilibrio?
5. Vuelva a trabajar con las partes 1 a 3 si la incógnita es x, el número de millas conducidas. Es decir, suponga que deseamos desarrollar una fórmula que nos permita determinar el número de millas que va a conducir un auto (en vez del número de años). El millaje promedio por año d no es una parte de este modelo.
6. Mencione las suposiciones de este modelo. ¿Qué suposiciones no son realistas? ¿Por qué? ¿Qué factores del costo no se consideraron?

---

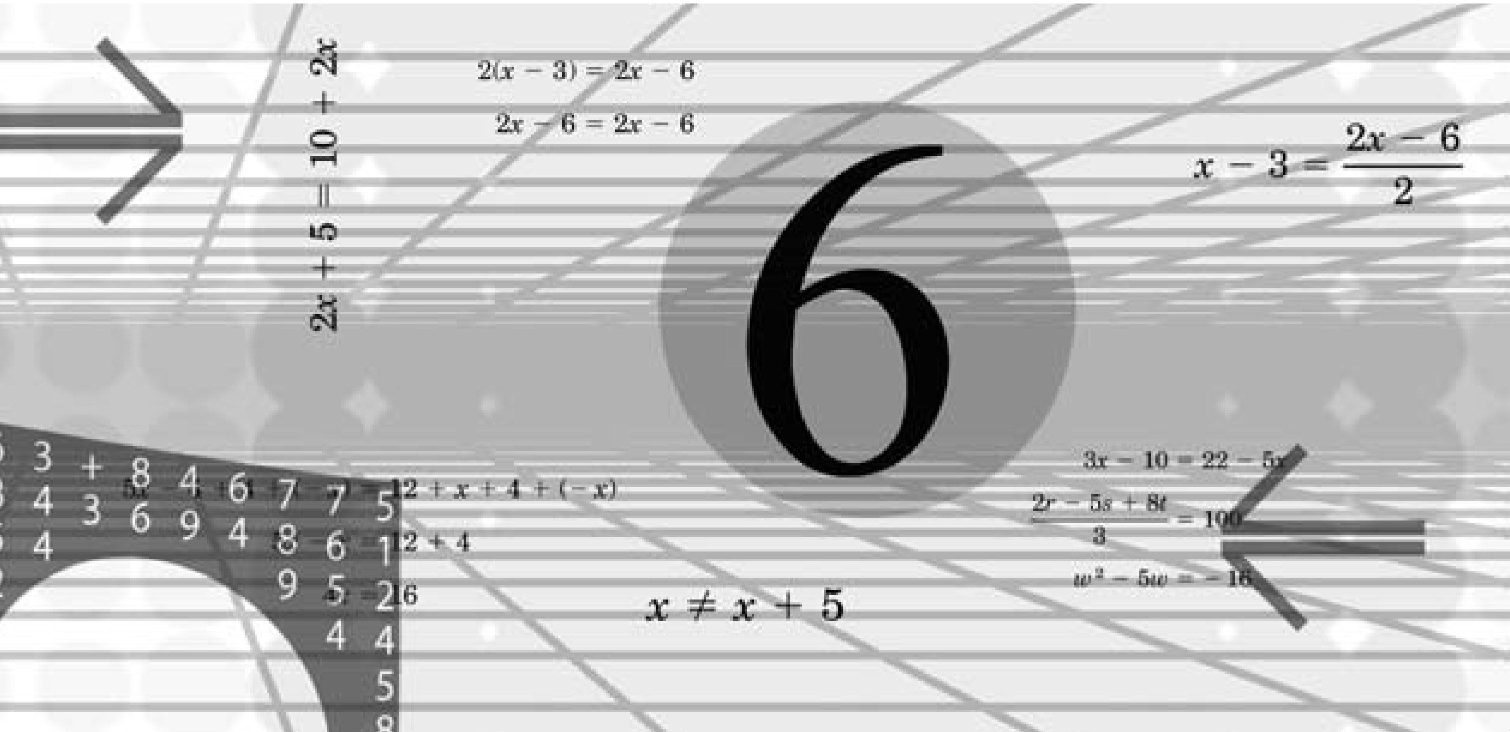
* "Should the Gas Guzzler Go?" (carta), *Science*, volumen 207, página 1028, marzo de 1980.

CAPÍTULO 6

Funciones cuadráticas y polinomiales

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- En general, introducir al lector a las funciones no lineales.
- En forma más específica, ofrecer un entendimiento de las características algebraicas y gráficas de las funciones cuadráticas y polinomiales.
- Ilustrar una variedad de aplicaciones de estos tipos de funciones.



ESCENARIO DE MOTIVACIÓN: Aumento de salarios de la NBA

Los salarios promedio de los jugadores de la Asociación Nacional de Baloncesto (NBA; *National Basketball Association*) han aumentado con un índice significativo. En el ejemplo 8 se presenta gráficamente la información salarial real. Dada la información salarial, *lo que se desea es determinar una función que se pueda usar para estimar el salario promedio del jugador en años futuros.*

Hasta este punto, nos hemos concentrado principalmente en las matemáticas lineales (en contraposición a las no lineales). Sin embargo, aunque las matemáticas lineales son útiles y convenientes, hay varios fenómenos que no se comportan de manera lineal y no se pueden hacer aproximaciones adecuadas utilizando funciones lineales. En este capítulo introduciremos algunas de las funciones no lineales más comunes. El propósito de este capítulo es que se familiarice con los atributos de estas funciones e ilustrar algunas áreas de aplicación.

6.1 Funciones cuadráticas y sus características

Una de las funciones no lineales más comunes es la función cuadrática.

Forma matemática

Definición: Función cuadrática

Una ***función cuadrática*** que incluye la variable independiente x y la variable dependiente y tiene la forma general

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c \tag{6.1}$$

donde a, b y c son constantes, $a \neq 0$.

¿Puede ver la razón por la que el coeficiente de x^2 no puede ser igual a 0? Si $a = 0$ y b y c no son cero, la ecuación (6.1) se convierte en

$$y = bx + c$$

que es una función lineal. En tanto que $a \neq 0$, b y c pueden tener cualquier valor.

Ejemplo 1

¿Cuál de las funciones siguientes es una función cuadrática?

a) $y = f(x) = 5x^2$
b) $u = f(v) = -10v^2 - 6$
c) $y = f(x) = 7x - 2$
d) $g = f(h) = -6$
e) $y = f(x) = x^2 + 10x$
f) $y = f(x) = 6x^2 - 40x + 15$
g) $y = f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x + 5$

SOLUCIÓN

a) $y = 5x^2$ es una función cuadrática. De acuerdo con la forma general de la ecuación (6.1), $a = 5$, $b = 0$ y $c = 0$.
b) $u = -10v^2 - 6$ es una función cuadrática donde, de acuerdo con la ecuación (6.1), $a = -10$, $b = 0$ y $c = -6$.

c) $y = 7x - 2$ *no* es una función cuadrática, ya que no hay término de x^2 o bien $a = 0$.
d) $g = -6$ no es una función cuadrática por la misma razón que en la parte *c*).
e) $y = x^2 + 10x$ es una función cuadrática donde $a = 1$, $b = 10$ y $c = 0$.
f) $y = 6x^2 - 40x + 15$ es una función cuadrática donde $a = 6$, $b = -40$ y $c = 15$.
g) $y = 2x^3 + 4x^2 - 2x + 5$ no es una función cuadrática porque contiene el término de tercer grado $2x^3$. ❑

NOTA En el capítulo 4 indicamos la forma general de una función cuadrática como

$$y = f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \qquad a_2 \neq 0 \qquad \textbf{(4.4)}$$

Debe observar que las ecuaciones (4.4) y (6.1) son equivalentes. Sólo se cambiaron los nombres de los coeficientes.

Ejercicio de práctica

¿Cuál de las funciones siguientes es una función cuadrática?

a) $y = f(x) = (50 - 0.001x)x$
b) $y = f(x) = 3x(1 - x^2)$
c) $s = g(t) = [2t(t - 1)/t](10)$

Respuesta: *a*) y *c*).

Representación gráfica

Se grafican como ***parábolas*** todas las funciones cuadráticas que tienen la forma de la ecuación (6.1). La figura 6.1 ilustra dos parábolas con orientaciones distintas. Se dice que una parábola que "se abre" hacia arriba, como en la figura 6.1*a*), es ***cóncava hacia arriba***. Se dice que una parábola que "se abre" hacia abajo, como en la figura 6.1*b*), es ***cóncava hacia abajo.**** El punto en que la parábola alcanza su "pico superior" cuando es cóncava hacia arriba o su "pico inferior" cuando es cóncava hacia abajo recibe el nombre de ***vértice*** de la parábola. Los puntos *A* y *B* son los ***vértices*** respectivos de las dos parábolas en la figura 6.1.

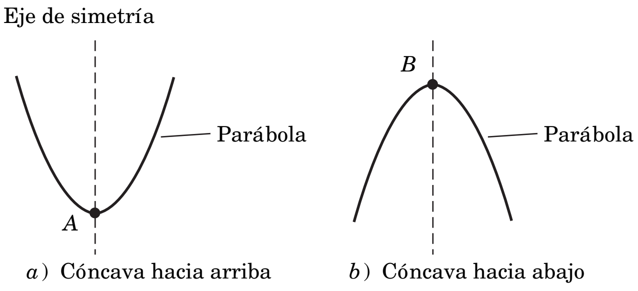


Figura 6.1 Parábolas.

a) Cóncava hacia arriba *b*) Cóncava hacia abajo

---

* En el capítulo 16 encontrará un análisis más detallado de la *concavidad* de las funciones.

Dada la función cuadrática con la forma de la ecuación (6.1), las coordenadas del vértice de la parábola correspondiente son

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) \tag{6.2}$$

donde a, b y c son los parámetros o constantes de la ecuación (6.1).

Una parábola es una curva que tiene una simetría particular. En la figura 6.1, la línea vertical punteada que pasa por el vértice se llama **eje de simetría**. Esta línea separa la parábola en dos mitades simétricas. Si pudiera doblar un lado de la parábola usando el eje de simetría como una bisagra, encontraría que las dos mitades coinciden (es decir, son imágenes reflejadas una de otra).

Podemos trazar la gráfica de una función cuadrática utilizando los métodos de "fuerza bruta" que estudiamos en el capítulo 4. No obstante, hay ciertos atributos esenciales de las funciones cuadráticas que nos permiten dibujar la parábola correspondiente con relativa facilidad. Si es posible determinar la ***concavidad*** de la parábola, ***la intersección de y***, ***la intersección (o bien las intersecciones) de x*** y el ***vértice***, se puede trazar una parábola razonable.

Concavidad Una vez que se ha reconocido una función con la forma cuadrática general de la ecuación (6.1), se puede determinar la concavidad de la parábola por el signo del coeficiente del término de x^2. Si $\boldsymbol{a > 0}$, la función se grafica como una parábola que es ***cóncava hacia arriba***. Si $\boldsymbol{a < 0}$, la parábola es ***cóncava hacia abajo***.

Ejemplo 2 En el ejemplo 1, se determinó que las funciones siguientes son cuadráticas.

a) $y = f(x) = 5x^2$

b) $u = f(v) = -10v^2 - 6$

c) $y = f(x) = x^2 + 10x$

d) $y = f(x) = 6x^2 - 40x + 15$

¿Cuál es la concavidad de la parábola que representa cada función cuadrática?

SOLUCIÓN

a) La gráfica de $y = 5x^2$ es cóncava *hacia arriba,* ya que $a = +5$.
b) La gráfica de $u = -10v^2 - 6$ es cóncava *hacia abajo,* puesto que $a = -10$.
c) La gráfica de $y = x^2 + 10x$ es cóncava *hacia arriba,* dado que $a = +1$.
d) La gráfica de $y = 6x^2 - 40x + 15$ es cóncava *hacia arriba* porque $a = +6$. ❑

Intersección de *y* En el capítulo 2 se definió la ***intersección de y*** de una función. Gráficamente, se identificó la intersección de y como el punto en que la línea interseca el eje de las y. De manera algebraica, se identificó el intercepto de y como el valor de y cuando x es igual a 0, o bien $f(0)$. Por tanto, para funciones cuadráticas que tienen la forma

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

$f(0) = c$, o bien la intersección de y de la parábola correspondiente ocurre en $(0, c)$.

Ejemplo 3 ¿Cuáles son las intersecciones de y de las funciones cuadráticas del ejemplo 2?

SOLUCIÓN

a) Para $y = 5x^2$, $f(0) = 0$, o bien la intersección de y ocurre en (0, 0).
b) Para $u = -10v^2 - 6$, $f(0) = -6$, o bien el cruce de u se localiza en (0, −6).
c) Para $y = x^2 + 10x$, $f(0) = 0$, o bien la intersección de y tiene lugar en (0, 0).
d) Para $y = 6x^2 - 40x + 15$, $f(0) = 15$, o bien el cruce de y se sitúa en (0, 15). ❑

Intersección (o bien intersecciones) de *x* En el capítulo 2 también se definió la ***intersección de x*** de una función como el(los) punto(s) en que la gráfica de una línea cruza el eje de las x. De igual modo, la intersección de x representa el(los) valor(es) de x cuando y es igual a 0. En el caso de las funciones cuadráticas, es posible que haya una intersección de x, dos intersecciones de x o *ninguna* intersección de x. Se muestran estas posibilidades en la figura 6.2.

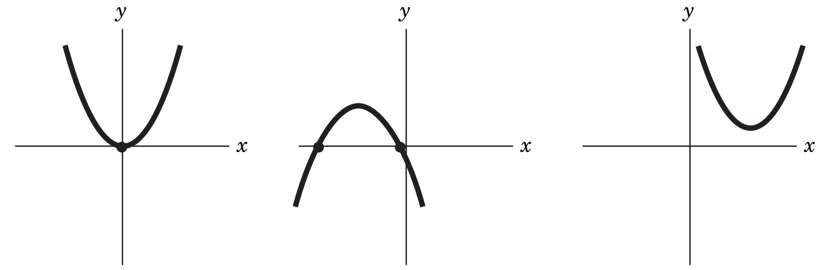


Figura 6.2 Posibilidades de intersección de x para funciones cuadráticas.

a) Una intercección de x *b*) Dos intercecciones de x *c*) Ninguna intercección

Hay varias maneras de determinar las intersecciones de x de una función cuadrática si es que existe alguna. Se encuentran las intersecciones de x al determinar las raíces de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{6.3}$$

Estudiamos dos métodos para determinar las raíces de la ecuación (6.3) en el capítulo 1. Se ilustran estos métodos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4 **(Determinación de raíces por factorización)** Algunas funciones cuadráticas se pueden factorizar (sección A.3, apéndice A) en dos binomios o un binomio y un monomio. Si es posible factorizar la función cuadrática, es fácil determinar las raíces de la ecuación (6.3). Por ejemplo, se pueden determinar los valores de x que satisfacen la ecuación cuadrática

$$6x^2 - 2x = 0$$

al factorizar primero $2x$ de la expresión en el lado izquierdo de la ecuación, lo que da

$$(2x)(3x - 1) = 0$$

Al establecer cada valor igual a 0, se identifican las raíces de la ecuación como

$$2x = 0 \quad \text{o} \quad x = 0$$

y

$$3x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x = \tfrac{1}{3}$$

Por consiguiente, la función cuadrática $y = f(x) = 6x^2 - 2x$ se grafica como una parábola que tiene intersecciones de x en (0, 0) y $(\frac{1}{3}, 0)$.

De modo similar, los valores de x que satisfacen la ecuación

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

se encuentran al factorizar el lado izquierdo de la ecuación, lo que da

$$(x + 3)(x + 3) = 0$$

Cuando se establecen los factores iguales a 0, se encuentra que el único valor que satisface la ecuación es $x = -3$. La función cuadrática $y = f(x) = x^2 + 6x + 9$ se grafica como una parábola con una intersección de x en (−3, 0).

Ejemplo 5 **(Determinación de raíces usando la fórmula cuadrática)** La ***fórmula cuadrática*** *siempre* identificará las raíces reales de una ecuación cuadrática *si existe alguna*.

Recordatorio de álgebra

La ***fórmula cuadrática***, que se usa para identificar las raíces de ecuaciones de forma de la ecuación (6.3), es

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Al emplear la fórmula cuadrática, 1) si $b^2 - 4ac > 0$, tendremos dos raíces reales; 2) si $b^2 - 4ac = 0$, habrá una raíz real y 3) si $b^2 - 4ac < 0$, no habrá raíces reales (sección 1.2).

Dada la función cuadrática $f(x) = x^2 - x - 3.75$, las intersecciones de x ocurren cuando $x^2 - x - 3.75 = 0$. Al referirnos a la ecuación (6.3), $a = 1$, $b = -1$, $c = -3.75$. Al sustituir estos valores en la fórmula cuadrática, se calculan las raíces de la ecuación como

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-3.75)}}{2(1)} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{1+15}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{1 \pm 4}{2} \end{aligned}$$

o bien, usando el signo más, tenemos

$$x = \tfrac{5}{2} = 2.5$$

Al utilizar el signo menos da

$$x = -\tfrac{3}{2} = -1.5$$

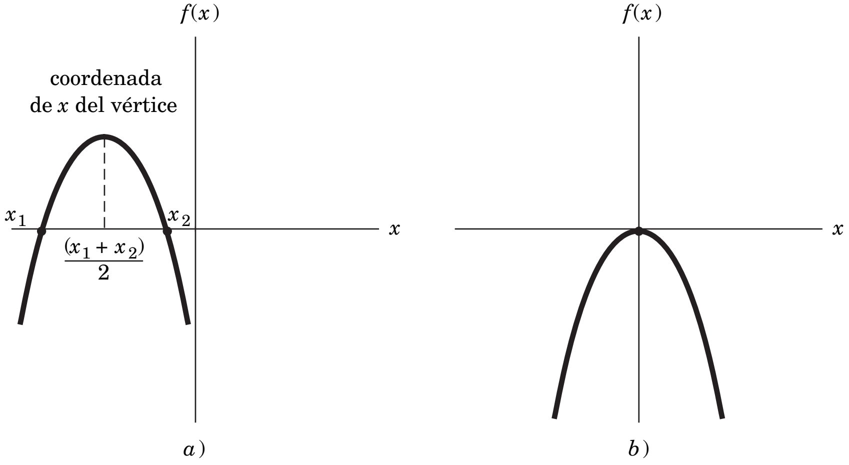
Por consiguiente, hay dos valores de x que satisfacen la ecuación cuadrática. La parábola que representa la función cuadrática cruzará el eje de las x en (2.5, 0) y (−1.5, 0). ❑

Vértice Se puede determinar la posición del vértice de una parábola mediante la fórmula que usa la ecuación (6.2) o quizás por observación de las intersecciones de x (más adelante en el libro demostraremos un procedimiento muy fácil de localización del vértice). El prospecto de memorizar la ecuación (6.2) no lo inspirará y tal vez debería usarse como un último recurso. Si se encuentra en esa situación, la realidad es que sólo debe recordar la fórmula de la coordenada de x del vértice, $-b/2a$. Una manera de recordarlo es que es la misma que la mitad frontal de la fórmula cuadrática como se muestra a continuación.

$$\text{coordenada de } x \text{ del vértice} \longrightarrow \frac{\boxed{-b} \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{\boxed{2a}}$$

Una vez que tenga la coordenada de x del vértice, puede encontrar la coordenada de y al sustituir la coordenada de x en la función cuadrática [es decir, $f(-b/2a)$].

Como consecuencia de la simetría de las parábolas, siempre que una parábola tiene dos intersecciones de x, *la coordenada de x del vértice cae a la mitad entre las dos intersecciones de x*. Cuando una parábola tiene una intersección de x, *el vértice ocurre en la intersección de x*. La figura 6.3 ilustra estas relaciones.



Dos intersecciones de x: la coordenada de x del vértice se encuentra a la mitad

Una intersección de x: la intersección de x es el vértice

Figura 6.3 Relaciones entre el intercepto de x y el vértice.

Ejemplo 6 Localicemos el vértice de la parábola que representa la función

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 20$$

Primero por la fórmula, $a = 2$, $b = 3$ y $c = -20$. Por tanto, la coordenada de x del vértice será

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2(2)} = \frac{-3}{4} = -0.75$$

La coordenada de y del vértice sigue como

$$\begin{aligned} y &= f(-0.75) \\ &= 2(-0.75)^2 + 3(-0.75) - 20 \\ &= 1.125 - 2.25 - 20 \\ &= -21.125 \end{aligned}$$

Por consiguiente, el vértice se localiza en $(-0.75, -21.125)$.

Veamos si las intersecciones de x de esta función son útiles para localizar el vértice. Factorice el lado izquierdo de la función cuadrática:

$$2x^2 + 3x - 20 = 0$$

resultando

$$(2x - 5)(x + 4) = 0$$

Establecer los dos factores en cero da como resultado las raíces de $x = 2.5$ y $x = -4$. La coordenada de x del vértice se encuentra a la mitad entre estos dos valores. En una recta numérica, el punto medio en el intervalo $[a_1, a_2]$ es $(a_1 + a_2)/2$. Por ello, al usar las dos coordenadas de x, la coordenada de x del vértice es

$$\frac{2.5 + (-4)}{2} = \frac{-1.5}{2} = -0.75$$

Ejemplo 7 Suponga que queremos trazar la función cuadrática $f(x) = 3x^2 + 6x - 45$.

Concavidad: Puesto que $a = 3 > 0$, *la parábola que representa esta función será cóncava hacia arriba.*

Intersección de *y*: Dado que $f(0) = -45$, *la intersección de y ocurre en* $(0, -45)$.

Intersección (o intersecciones) de *x*: Al factorizar la función cuadrática da

$$3x^2 + 6x - 45 = 0$$

$$3(x^2 + 2x - 15) = 0$$

$$3(x - 3)(x + 5) = 0$$

Establecer cada factor igual a cero da como resultado las raíces de $x = -5$ *y* $x = 3$. *Por tanto, las intersecciones de x ocurren en* $(-5, 0)$ *y* $(3, 0)$.

Vértice: *Ya que hay dos intersecciones de x, la coordenada de x del vértice estará a la mitad entre los dos. Dado que* $(-5 + 3)/2 = -2/2 = -1$, *la coordenada del vértice es* $x = -1$.

La coordenada de y del vértice es

$$\begin{aligned} f(-1) &= 3(-1)^2 + 6(-1) - 45 \\ &= 3 - 6 - 45 \\ &= -48 \end{aligned}$$

Al combinar la información de estos atributos esenciales genera el dibujo de la función que se presenta en la figura 6.4.

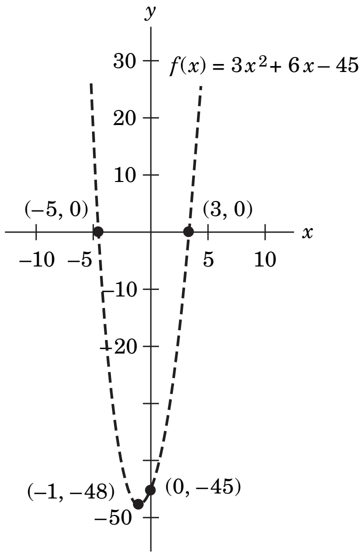


Figura 6.4 Trazo de $f(x) = 3x^2 + 6x - 45$.

Ejercicio de práctica

Dada $f(x) = 2x^2 - x - 15$, determine: *a*) la concavidad, *b*) la intersección de y, *c*) la(las) intersección(intersecciones) de x y *d*) la posición del vértice. *Respuesta*: *a*) hacia arriba, *b*) (0, −15), *c*) (−2.5, 0) y (3, 0), *d*) (0.25, −15.125).

Ejemplo 8 **(Aumento de salarios de la NBA; Escenario de motivación)** Como estudiamos al principio de este capítulo, los salarios de los jugadores de la NBA se benefician con la prosperidad de la Asociación Nacional de Baloncesto. La figura 6.5 ilustra el aumento en el salario promedio de los jugadores. Al parecer, es posible hacer una aproximación razonablemente buena de los datos salariales usando una función cuadrática. Para los años de 1981, 1985 y 1988, los salarios promedio de los jugadores eran \$190 000, \$310 000 y \$600 000, respectivamente. Empleando estos puntos de datos, queremos determinar la función cuadrática que se puede utilizar para estimar los salarios promedio de los jugadores con el paso del tiempo. Expresado desde una perspectiva diferente, queremos determinar si hay una parábola que pase a través de estos puntos. Tratamos de determinar la función cuadrática

$$s = f(t) = at^2 + bt + c \tag{6.4}$$

donde s = *salario promedio del jugador, en miles de dólares*
y t = *tiempo medido en años desde 1981*

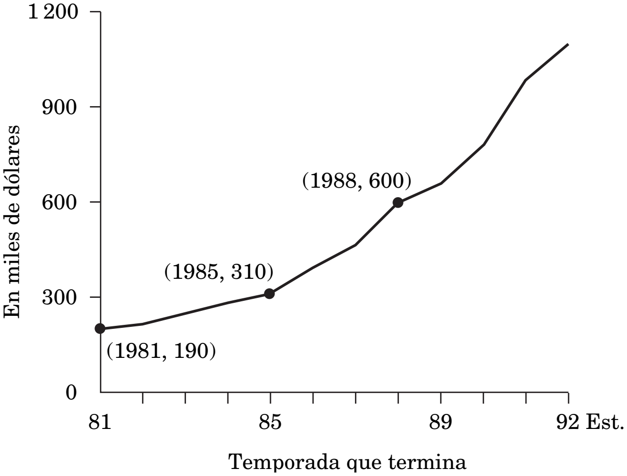


Figura 6.5 Salario promedio por jugador de la NBA. (Datos: Asociación de Jugadores de la NBA)

Nótese que redefinimos la medida del tiempo de los años de calendario reales como años *desde* 1981 (es decir, 1981 → $t = 0$, 1982 → $t = 1$, etc.). Para especificar esta función necesitamos valores para los tres parámetros a, b y c. Con el fin de determinar estos parámetros, necesitamos por lo menos tres puntos de datos. Se traducen los datos del salario para los años de interés en tres puntos de datos (0, 190), (4, 310) y (7, 600). Para determinar los parámetros, sustituimos cada uno de los puntos de datos en la ecuación (6.4).

$$190 = a(0)^2 + b(0) + c$$

$$310 = a(4)^2 + b(4) + c$$

$$600 = a(7)^2 + b(7) + c$$

La simplificación de estas ecuaciones da

$$\begin{aligned} c &= 190 \\ 16a + 4b + c &= 310 \\ 49a + 7b + c &= 600 \end{aligned}$$

Ya que el valor de c se determina de inmediato (uno de nuestros puntos de datos era la intersección de s), podemos sustituir $c = 190$ en las dos otras ecuaciones y despejar a y b. Verifique que los valores resultantes sean $a = 9.524$ y $b = -8.096$.

Concluimos que hay una función cuadrática que se satisface por los tres puntos de datos, o de modo similar, hay una parábola que pasa a través de los tres puntos de datos. La función cuadrática de estimación es

$$s = f(t) = 9.524t^2 - 8.096t + 190 \qquad ❑$$

Ejercicio de práctica

Usando esta función, estime el salario promedio en 1995. *Respuesta*: \$1 943.36 en miles de dólares o \$1 943 360.

PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR

Suponga que se proporcionan los tres puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3). Al sustituir estos puntos en la ecuación (6.1) para despejar a, b y c, ¿a qué conclusión llegaría si el sistema de tres ecuaciones no tiene solución?

Sección 6.1 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 16, determine qué funciones son cuadráticas e identifique los valores de los parámetros de *a*, *b* y *c*.

1. $f(x) = 4x^2 - 20$

2. $f(x) = \dfrac{x^2}{4} + 3x$

3. $g(h) = 3h - 450$

4. $h(u) = 24 - u + u^2/3$

5. $g(s) = (s - 4)^2$

6. $f(x) = (3 - 2x + x^2)^2$

7. $f(x) = (x^2 - 4x + 5)/3$

8. $v(s) = s^2 + (s + 5)/3$

9. $h(x) = (x^2 - 2x)^2$

10. $f(x) = 25 - x^3$

11. $f(x) = \sqrt{x^4 - 4x^2 + 4}$

12. $g(h) = 1\,000 - h^2$

13. $h(v) = 4v - 5 + 20v^2$

14. $f(x) = x^2 - 2x + x^3$

15. $g(h) = \sqrt[3]{(h - 4)^6}$

16. $f(x) = \sqrt[4]{(2 - x)^8}$

En los ejercicios 17 a 32, determine la concavidad de la parábola que representa la función cuadrática, su intersección de *y*, sus intersecciones de *x* si existe alguna y las coordenadas del vértice. Trace la parábola.

17. $f(x) = -x^2$

18. $f(x) = -x^2 + 6x - 9$

19. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

20. $f(x) = x^2 - 4$

21. $f(x) = -x^2 + 5$

22. $f(x) = x^2 - 4x + 4$

23. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 10x$

24. $f(x) = \dfrac{-x^2}{2} + 24x$

25. $f(x) = -x^2 - 9$

26. $f(x) = 3x^2 + 7x - 20$

27. $f(x) = 2x^2 + 4$

28. $f(x) = -3 - x^2$

29. $f(x) = 6x^2 + x - 12$

30. $f(x) = 4x^2 + 5x - 6$

31. $f(x) = -x^2 - 5x$

32. $f(x) = x^2 - 7x + 10$

33. Trace las funciones cuadráticas siguientes, tomando nota de los valores de $|a|$ para cada una y la desviación relativa de las tres parábolas.

$$f(x) = x^2 \qquad f(x) = 0.01x^2 \qquad f(x) = 100x^2$$

34. Determine la ecuación de la función cuadrática que pasa por los puntos (0, 10), (1, 6) y (−2, 24).

35. Determine la ecuación de la función cuadrática que pasa a través de los puntos (1, −1), (−3, −33) y (2, −8).

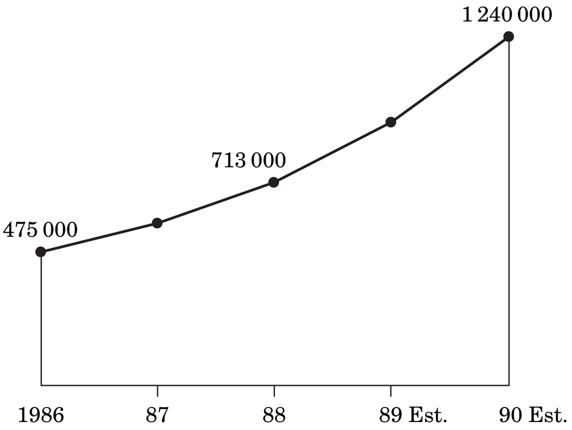


Figura 6.6 Número de personas que trabajan en casa 35 horas o más por semana. (Fuentes: National Work-At-Home Survey by Link Resources Inc.)

36. Trabajo en casa En años recientes, el número de personas que trabajan en casa ha aumentado con rapidez. La figura 6.6 ilustra los datos recopilados en un estudio relacionado con el número de personas que trabajan en casa 35 horas o más por semana. Los datos tienen una apariencia casi cuadrática. Usando los datos para 1986 y 1988 y el valor proyectado para 1990, determine la función cuadrática de estimación $n = f(t)$, donde n es igual al número de personas que trabajan en su hogar

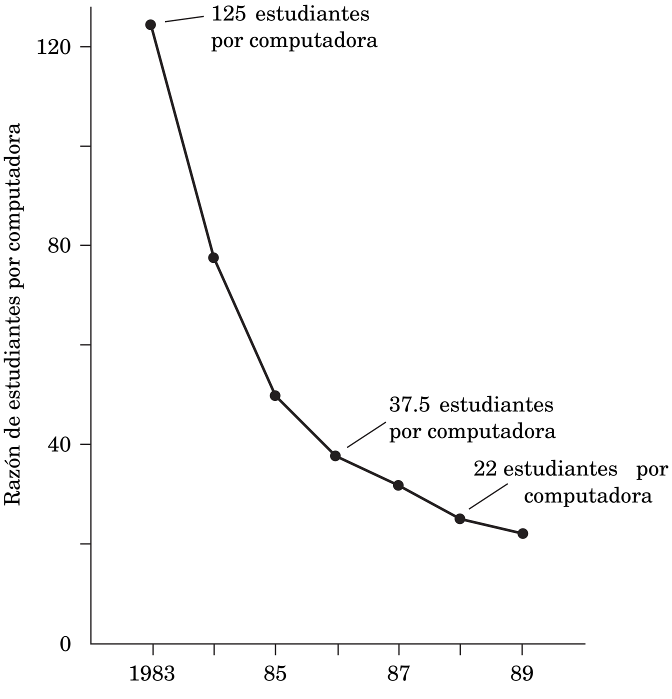


Figura 6.7 Razón de estudiantes por computadora (Fuente: Quality Education Data)

35 o más horas por semana (expresado en miles) y t es el tiempo medido en años desde 1986. De acuerdo con esta función, ¿cuál es el número de personas que se espera trabajen en su hogar en 1995? ¿En 2000?

37. **Computadoras en escuelas públicas** Una encuesta realizada durante 1990 indicó la mayor disponibilidad de computadoras en las aulas de escuelas públicas de Estados Unidos. La figura 6.7 muestra los resultados de esta encuesta. Durante el año académico 1983-1984, el número de estudiantes por computadora era 125. Para el año académico 1986-1987, el número había bajado a 37.5. Para el año académico 1989-1990, el número era 22 estudiantes por computadora. Utilizando estos tres puntos de datos, determine la función cuadrática de estimación $n = f(t)$, donde n representa el número de estudiantes por computadora y t es el tiempo medido en años desde el año académico 1983-1984 (es decir, $t = 0$ corresponde a 1983-1984). Empleando esta función, estime el número de estudiantes por computadora durante el año académico 1990-1991. ¿A qué conclusión puede llegar con base en este resultado?

38. **Industria de los teléfonos celulares en Estados Unidos** La industria de la telefonía celular ha crecido con rapidez desde finales de la década de 1980. La figura 6.8 presenta datos relacionados con el número de suscriptores entre 1985 y 1990. Al parecer, es posible hacer una aproximación razonablemente buena del patrón de crecimiento en el número de suscriptores usando una función cuadrática. Utilizando los puntos de datos para 1985, 1987 y 1989 (200 000, 950 000 y 2 600 000 suscriptores, en forma respectiva), determine la función cuadrática de estimación $n = f(t)$, donde n es igual al número de suscriptores (*indicado en millones*) y t equivale al tiempo medido en años *desde* 1985. De acuerdo con esta función de estimación, ¿cuántos suscriptores se esperan para el año 1995?

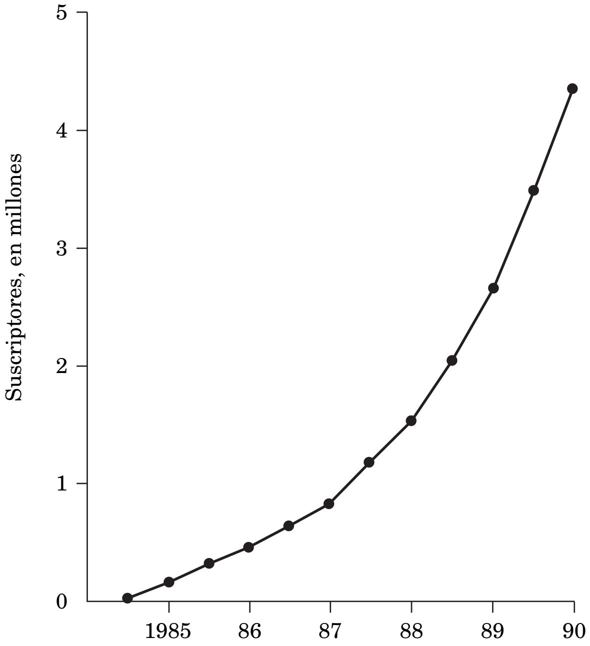


Figura 6.8 Uso de teléfonos celulares en Estados Unidos. (Fuente: Cellular Telecommunications Industry Association)

6.2 Funciones cuadráticas: aplicaciones

En esta sección presentaremos ejemplos que ilustran algunas áreas de aplicación de las funciones cuadráticas.

Ejemplo 9 **(Función cuadrática del ingreso)** Suponga que la función de la demanda de un producto es

$$q = f(p)$$

o bien

$$q = 1\,500 - 50p$$

donde *q representa la cantidad demandada en miles de unidades* y *p es el precio en dólares.*

Se expresa el ingreso total R de la venta de q unidades como el producto de p y q, o

$$R = pq$$

Puesto que la función de la demanda expresa q como una función de p, es posible expresar el ingreso total como una función del precio, o

$$\begin{aligned} R &= h(p) \\ &= p \cdot f(p) \\ &= p(1\,500 - 50p) \\ &= 1\,500p - 50p^2 \end{aligned}$$

Debe reconocer esto como una función cuadrática. En la figura 6.9 se traza la función del ingreso total. Observe que el dominio restringido de la función es $0 \le p \le 30$. ¿Esto tiene sentido? ❑

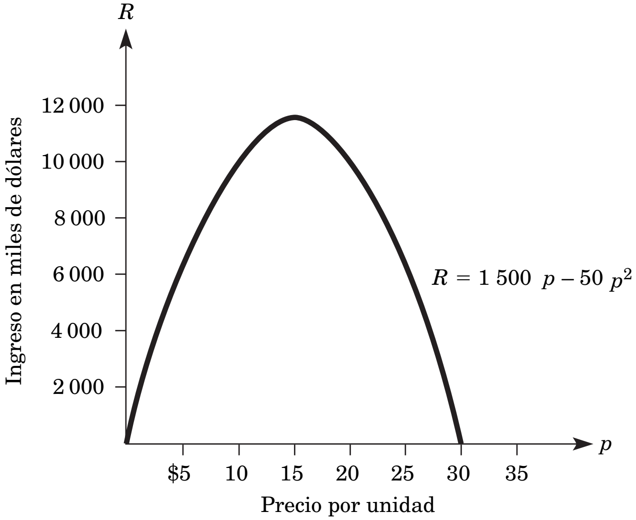


Figura 6.9 Función cuadrática del ingreso.

Ejercicio de práctica

Dadas las intersecciones de p en la figura 6.9, ¿qué valor de p maximiza R? ¿Cuántas unidades se demandarían con este precio? ¿Cuál es el valor máximo de R? *Respuesta*: \$15; 750 (miles) unidades; \$11.25 millones.

Ejemplo 10 **(Funciones cuadráticas de la oferta)** Encuestas de mercado de proveedores de un producto particular han dado lugar a la conclusión de que la función de la oferta tiene una forma aproximadamente cuadrática. Se preguntó a los proveedores qué cantidades estarían dispuestos a surtir con diferentes precios de mercado. Los resultados de la encuesta indicaron que con precios de mercado de \$25, \$30 y \$40, las cantidades que los proveedores estarían dispuestos a ofrecer al mercado eran 112.5, 250.0 y 600.0 (miles) unidades, respectivamente.

Podemos determinar la ecuación de la función cuadrática de la oferta al sustituir las tres combinaciones de precio-cantidad en la ecuación general

$$q_s = f(p)$$

o

$$q_s = ap^2 + bp + c$$

El sistema de ecuaciones resultante es

$$\begin{aligned} 625a + 25b + c &= 112.5 \\ 900a + 30b + c &= 250 \\ 1\,600a + 40b + c &= 600 \end{aligned}$$

que, cuando se resuelve, da valores de $a = 0.5$, $b = 0$ y $c = -200$. Por tanto, se representa la función cuadrática de la demanda que se muestra en la figura 6.10 por medio de

$$q_s = f(p) = 0.5p^2 - 200$$

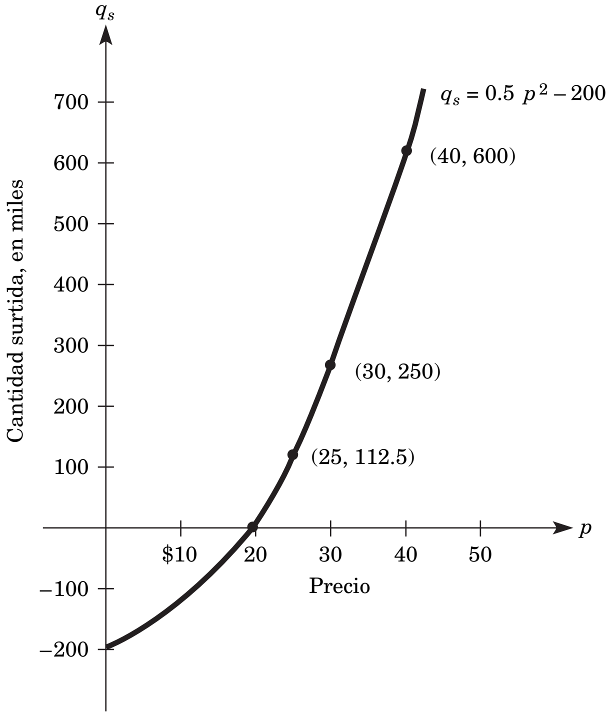


Figura 6.10 Función cuadrática de la oferta.

Se puede estimar la cantidad surtida con cualquier precio de mercado al sustituir el precio en la función de la oferta. Por ejemplo, se estima que la cantidad surtida con un precio de $50 es

$$\begin{aligned} f(50) &= 0.5(50)^2 - 200 \\ &= 0.5(2\,500) - 200 = 1\,250 - 200 = 1\,050 \text{ (miles) unidades} \end{aligned}$$ ❑

PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR

¿Cuál es el dominio restringido de la función de la oferta? ¿Es el mismo que se indica en la figura 6.10? Interprete el significado del intercepto de p. ¿Esta interpretación parece razonable? Interprete el significado de la intersección de q_s. ¿Tiene sentido esta interpretación?

Ejemplo 11

(Funciones cuadráticas de la demanda) En relación con el ejercicio anterior, se efectuó una encuesta entre los consumidores para determinar la función de la demanda del mismo producto. Los investigadores preguntaron a los consumidores si comprarían el producto con varios precios y a partir de sus respuestas hicieron estimaciones de la demanda en el mercado con diversos precios de mercado. Después de trazar puntos datos muestra, se concluyó que se estima mejor la relación de la demanda por medio de una función cuadrática. Los investigadores concluyeron que la representación cuadrática era válida para precios entre $5 y $45.

Tres puntos de datos que se escogieron para "ajustarse" a la curva fueron (5, 2 025) (10, 1 600) y (20, 900). Al sustituir estos puntos de datos en la ecuación general de una función cuadrática y resolver el sistema resultante de manera simultánea da la función de la demanda

$$q_d = g(p)$$

o

$$q_d = p^2 - 100p + 2\,500$$

donde *p equivale al precio de venta en dólares* y q_d *es la demanda expresada en miles de unidades*. La figura 6.11 ilustra la función de la demanda. ❑

Ejercicio de práctica

¿Cuántas unidades se espera que se demanden con un precio de $30? *Respuesta*: 400 (miles) unidades.

Ejemplo 12

(Equilibrio entre la oferta y la demanda) Se puede estimar el equilibrio del mercado entre la oferta y la demanda mediante las funciones de oferta y demanda en los dos ejemplos pasados al determinar el precio de mercado que iguala la cantidad surtida con la cantidad demandada. Se expresa esta condición de equilibrio por medio de la ecuación

$$\boxed{q_s = q_d} \qquad \textbf{(6.5)}$$

Si sustituimos las funciones de la oferta y la demanda de los ejemplos 10 y 11 en la ecuación (6.5), obtenemos

$$0.5p^2 - 200 = p^2 - 100p + 2\,500$$

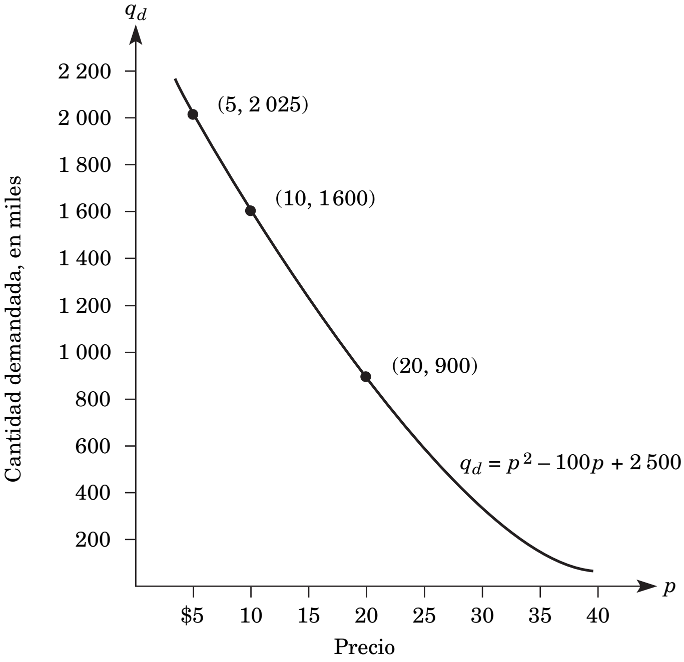


Figura 6.11 Función cuadrática de la demanda.

Se puede reordenar la ecuación de modo que

$$0.5p^2 - 100p + 2\,700 = 0 \qquad \textbf{(6.6)}$$

Es posible utilizar la fórmula cuadrática para determinar las raíces de la ecuación (6.6) como sigue:

$$\begin{aligned} p &= \frac{-(-100) \pm \sqrt{(-100)^2 - 4(0.5)(2\,700)}}{2(0.5)} \\ &= \frac{100 \pm \sqrt{4\,600}}{1} = 100 \pm 67.82 \end{aligned}$$

Los dos valores resultantes son $p = \$32.18$ y $p = \$167.82$. La segunda raíz está fuera del dominio relevante de la función de la demanda ($5 \leq p \leq 45$) y por consiguiente no tiene sentido. Sin embargo, $q_s = q_d$ cuando el precio de venta es \$32.18. La sustitución de $p = 32.18$ en las funciones de la oferta y la demanda da como resultado valores de $q_s = 317.77$ y $q_d = 317.55$. (El redondeo es la razón de la diferencia entre estos dos valores.) De ahí que el equilibrio de mercado ocurre cuando el precio de mercado es igual a \$32.18 y la cantidad de la oferta y la demanda es de 317 770 unidades. La figura 6.12 ilustra estas dos funciones. ❑

PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR

¿Qué sucede con el comportamiento gráfico de $f(p)$ y $g(p)$ que da como resultado dos raíces en la ecuación (6.6)?

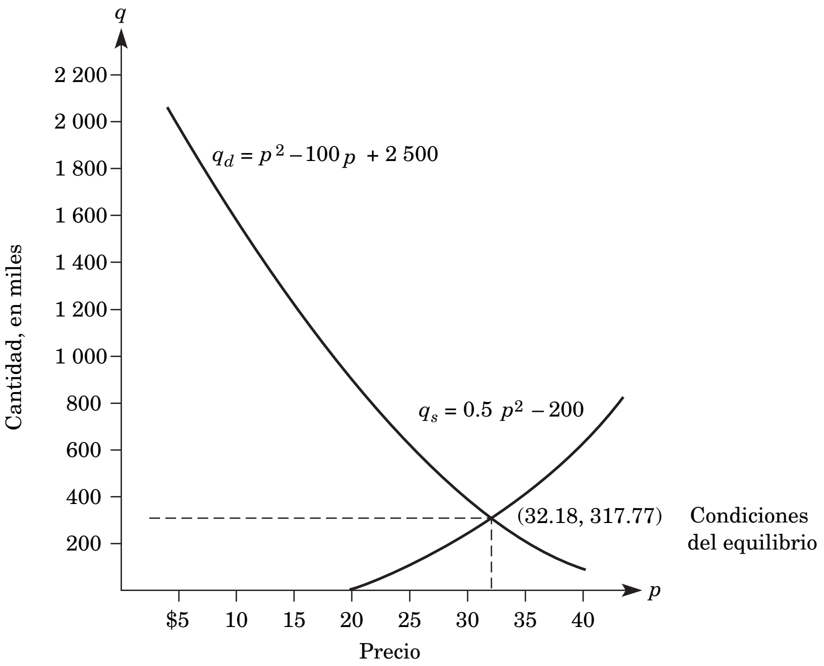


Figura 6.12 Equilibrio entre la oferta y la demanda.

Ejemplo 13 **(Respuesta a las emergencias: modelo de ubicación)** La figura 6.13 ilustra las ubicaciones relativas de tres ciudades a lo largo de una carretera costera. Las tres ciudades son centros turísticos populares y su población aumenta durante los meses de verano. Las tres ciudades creen que sus capacidades de rescate de emergencia y atención médica son inadecuadas durante la temporada vacacional. Han decidido respaldar en forma conjunta una instalación de respuesta a las emergencias que despache camionetas de rescate y paramédicos capacitados. Una pregunta clave se refiere a la ubicación de la instalación.

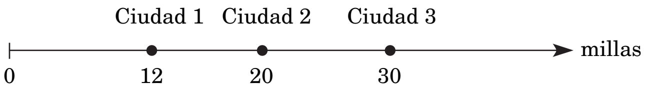


Figura 6.13 Ubicación relativa de las ciudades.

Para seleccionar la ubicación, se ha acordado que la distancia desde la instalación a cada ciudad debe ser tan corta como sea posible con el fin de garantizar tiempos de respuesta rápida. Otra consideración es el tamaño de la población de verano de cada ciudad ya que ésta es una medida de la necesidad potencial de servicio de respuesta a las emergencias. Cuanto más grande es la población de una ciudad, mayor es el deseo de localizar la instalación cerca de la ciudad. Los analistas han decidido que el criterio para seleccionar la ubicación es minimizar la suma de los productos de las poblaciones de verano de cada poblado y el cuadrado de la distancia entre el pueblo y la instalación. Podemos expresar esto en forma más sucinta como

$$\text{Minimice } S = \sum_{j=1}^{3} p_j d_j^2 = p_1 d_1^2 + p_2 d_2^2 + p_3 d_3^2$$

donde p_j *equivale a la población de verano para la ciudad j, expresada en miles, y* d_j *es la distancia entre la ciudad j y la instalación de rescate.*

Si las respectivas poblaciones de verano son 150 000, 100 000 y 20 000 para las tres ciudades, calcule la expresión general para *S*. (*Sugerencia*: *Suponga que x equivale a la ubicación de la instalación respecto del punto cero de la escala en la figura 6.13 y que* x_j *es igual a la ubicación de la ciudad j*. Se calcula la distancia entre la instalación y la ciudad *j* por medio de la ecuación $d_j = x - x_j$.).

SOLUCIÓN

Con *x* definida como la ubicación incógnita de la instalación propuesta, se puede expresar *S* como una función de *x*. Se define la función como

$$\begin{aligned} S &= f(x) \\ &= \sum_{j=1}^{3} p_j(x - x_j)^2 = p_1(x - x_1)^2 + p_2(x - x_2)^2 + p_3(x - x_3)^2 \\ &= 150(x - 12)^2 + 100(x - 20)^2 + 200(x - 30)^2 \\ &= 150x^2 - 3\,600x + 21\,600 + 100x^2 - 4\,000x \\ &\quad + 40\,000 + 200x^2 - 12\,000x + 180\,000 \end{aligned}$$

o bien

$$S = 450x^2 - 19\,600x + 241\,600$$

Nótese que esta función es cuadrática y se graficará como una parábola cóncava hacia arriba. Se minimizará *S* en el vértice de la parábola, o donde

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b}{2a} = \frac{-(-19\,600)}{2(450)} \\ &= \frac{19\,600}{900} = 21.77 \end{aligned}$$

La figura 6.14 presenta un bosquejo de *f*. De acuerdo con la figura 6.15, la instalación de respuesta a las emergencias se localizará 21.77 millas a la derecha del punto cero o 1.77 millas a la derecha de la ciudad 2.

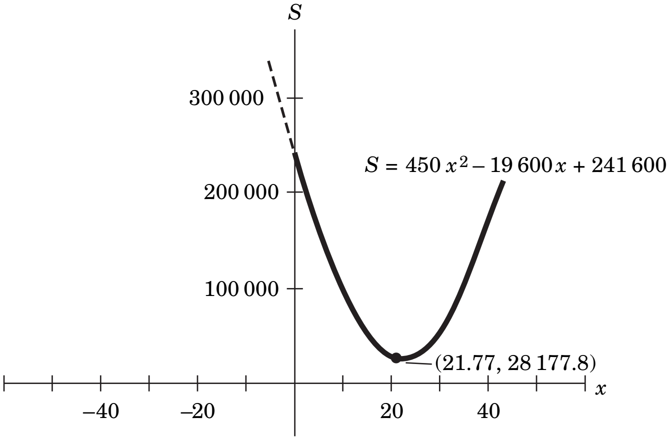


Figura 6.14 Función del criterio: modelo de ubicación de respuesta a las emergencias.

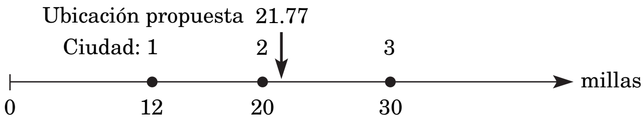


Figura 6.15 Ubicación óptima de la instalación de respuesta a las emergencias.

Reconsideraremos esto en el capítulo 17 y lo resolveremos con otro método. ❑

Sección 6.2 Ejercicios de seguimiento

1. La función de la demanda para un producto particular es

$$q = f(p) = 600\,000 - 2\,500p$$

donde q se expresa en unidades y p en dólares. Determine la función cuadrática del ingreso total, donde R es una función de p o $R = g(p)$. ¿Cuál es la concavidad de la función? ¿Cuál es la intersección de q? ¿A cuánto asciende el ingreso total con un precio de \$50? ¿Cuántas unidades se demandarán con este precio? ¿Con qué precio se incrementará al máximo el ingreso total? (*Sugerencia*: ¿El vértice corresponde a R máximo?)

2. La función de la demanda semanal para un producto particular es

$$q = f(p) = 2\,400 - 15p$$

donde q se expresa en unidades y p en dólares. Determine la función cuadrática del ingreso total,donde R es una función de p o $R = g(p)$. ¿Cuál es la concavidad de la función? ¿Cuál es la intersección de q? ¿A cuánto asciende el ingreso total con un precio de \$50? ¿Cuántas unidades se demandarán con este precio? ¿Con qué precio se aumentará al máximo el ingreso total? (*Sugerencia*: ¿El vértice corresponde al R máximo?)

3. La función de la demanda mensual para un producto particular es

$$q = f(p) = 30\,000 - 25p$$

donde q se expresa en unidades y p en dólares. Determine la función cuadrática del ingreso total, donde R es una función de p o $R = g(p)$. ¿Cuál es la concavidad de la función? ¿Cuál es la intersección de q? ¿A cuánto asciende el ingreso total con un precio de \$60? ¿Cuántas unidades se demandarán con este precio? ¿Con qué precio se maximizará el ingreso total?

4. En el ejercicio 1 se puede expresar el ingreso total en términos ya sea del precio p o de la demanda q. Vuelva a expresar el ingreso total como una función de q en vez de p. Es decir, determine la función $R = h(q)$. (*Sugerencia*: Despeje p en la función de la demanda y multiplique esta expresión por q.)

5. En el ejercicio 2, reformule la función del ingreso total como una función q. (Véase el ejercicio 4 para encontrar una pista.)

6. En el ejercicio 3, reformule la función del ingreso total como una función de q.

7. La función de la oferta $q_s = f(p)$ para un producto es cuadrática. Tres puntos que caen en la función son (30, 1 500), (40, 3 600) y (50, 6 300).

a) Determine la ecuación para la función de la oferta.
b) Haga cualquier observación que pueda acerca del dominio restringido de la función.
c) Calcule e interprete el intercepto de p.
d) ¿Qué cantidad se surtirá con un precio de \$60?

8. La función de la oferta $q_s = f(p)$ para un producto es cuadrática. Tres puntos que caen en la función de la oferta son (60, 2 750), (70, 6 000) y (80, 9 750).

a) Determine la ecuación para la función.
b) Haga cualquier observación que pueda sobre el dominio restringido de la función.
c) Calcule e interprete la intersección de p.
d) ¿Qué cantidad se surtirá con un precio de \$75?

9. La función de la oferta $q_s = f(p)$ para un producto es cuadrática. Tres puntos que caen en la función de la oferta son (40, 600), (50, 3 300) y (80, 15 000).

a) Determine la ecuación para la función.
b) Haga cualquier observación que pueda en cuanto al dominio restringido de la función.
c) Calcule e interprete la intersección de p.
d) ¿Qué cantidad se surtirá con un precio de \$100?

10. La función de la demanda $q_d = f(p)$ para un producto es cuadrática. Tres puntos que caen en la función son (5, 1 600), (10, 900) y (20, 100). Determine la ecuación para la función de la demanda. ¿Qué cantidad se demandará con un precio de mercado de \$25?

11. La función de la demanda $q_d = f(p)$ para un producto es cuadrática. Tres puntos que caen en la función son (10, 2 700), (20, 1 200) y (30, 300). Determine la ecuación para la función de la demanda. ¿Qué cantidad se demandará con un precio de mercado de \$5?

12. La función de la demanda $q_d = f(p)$ para un producto es cuadrática. Tres puntos que caen en la función son (10, 3 800), (30, 1 000) y (15, 2 800). Determine la ecuación para la función de la demanda. ¿Qué cantidad se demandará con un precio de mercado de \$20?

13. Las funciones de la oferta y la demanda para un producto son $q_s = p^2 - 400$ y $q_d = p^2 - 40p + 2\,600$. Determine el precio y la cantidad de equilibrio del mercado.

14. Las funciones de la oferta y la demanda para un producto son $q_s = 4p^2 - 500$ y $q_d = 3p^2 - 20p + 1\,000$. Determine el precio y la cantidad de equilibrio del mercado.

15. En el ejemplo 13, suponga que el criterio es minimizar la suma de los cuadrados de las distancias que separan la instalación de respuesta a las emergencias y las tres ciudades; es decir,

$$S = \sum_{j=1}^{3} d_j^2$$

a) Determine la función de la distancia $S = f(x)$.
b) Determine la ubicación que minimiza S.

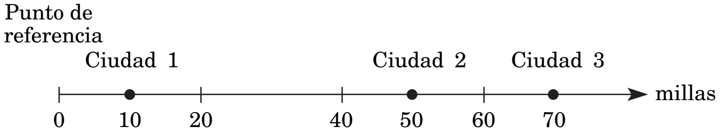


Figura 6.16 Modelo de ubicación para una organización para el cuidado de la salud.

16. **Organización para el cuidado de la salud** La figura 6.16 ilustra las posiciones relativas de tres ciudades. Una gran organización para el cuidado de la salud (HMO) desea construir una clínica satélite para dar servicio a tres ciudades. La ubicación de la clínica x debe ser tal que se minimice la suma de los cuadrados de las distancias entre la clínica y cada ciudad. Podemos expresar el criterio como

$$\text{Minimice } S = \sum_{j=1}^{3} (x_j - x)^2$$

donde x_j es la ubicación de la ciudad j y x es la ubicación de la clínica.

a) Determine la función de la distancia $S = f(x)$.

b) Determine la ubicación que minimiza S.

17. En el ejercicio 16, suponga que se debe seleccionar la ubicación para minimizar la suma de los productos del número de miembros de la HMO en cada ciudad y el cuadrado de la distancia que separa la ciudad y la organización para el cuidado de la salud, o bien

$$\text{Minimice } S = \sum_{j=1}^{3} p_j d_j^2$$

donde p_j equivale al número de miembros de la HMO en la ciudad j y d_j es igual a la distancia que separa la ciudad j de la instalación de la HMO. Si el número de miembros de cada ciudad es 10 000, 6 000 y 18 000, respectivamente:

a) Determine la función de la distancia $S = f(x)$.

b) Determine la ubicación que minimiza S.

18. **Asociación Nacional de Baloncesto** En el ejemplo 8 de este capítulo se analizaron los salarios con rápido incremento de los jugadores de la Asociación Nacional de Baloncesto (NBA). La razón de estos incrementos es atribuible en gran medida a las mayores ganancias de los

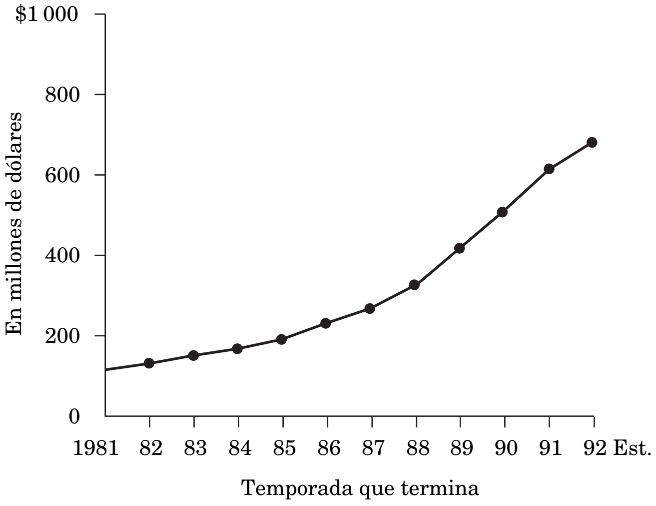


Figura 6.17 Ingresos anuales de la NBA. (Datos: Asociación Nacional de Baloncesto)

equipos de la NBA. La figura 6.17 indica las ganancias brutas de la NBA entre 1981 y 1990. A partir de la gráfica, parece que se podría hacer una aproximación de la función del ingreso por medio de una función cuadrática. Para la temporada que termina en 1981, los ingresos de la liga fueron de \$110 millones. Para los años que terminan de 1986 y 1989, los ingresos fueron \$210 millones y \$400 millones, respectivamente. Usando estos puntos de datos, determine la función de estimación $R = f(t)$, donde R es igual a los ingresos de la liga (en millones de dólares) y t equivale al número de años medido desde la temporada que termina en 1981 ($t = 0$ corresponde a la temporada 1980-1981). Empleando esta función, proyecte las ganancias de la liga en 1995.

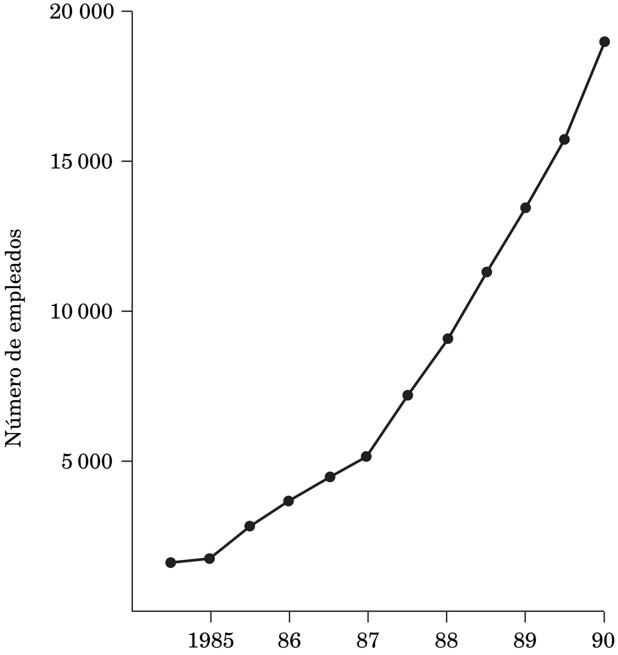


Figura 6.18 Número de personas empleadas en la industria de la telefonía celular.

19. Empleo en la industria de la telefonía La figura 6.18 muestra el incremento en el empleo en la industria de la telefonía celular. Para los años de 1985, 1987 y 1989, el número de personas empleadas era de 2 000, 5 000 y 13 500, respectivamente. Utilizando estos puntos de datos, determine la función cuadrática de estimación $n = f(t)$, donde n es el número de personas empleadas y t representa el tiempo medido en años desde 1985. De acuerdo con esta función de estimación, pronostique el número de personas que se espera estén empleadas en 1996.

6.3 Funciones polinomiales y racionales

Funciones polinomiales

Las funciones lineales y cuadráticas son ejemplos del conjunto general de funciones llamadas ***funciones polinomiales.***

Definición: Función polinomial

Una ***función polinomial*** de grado n que implica la variable independiente x y la variable dependiente y tiene la forma general

$$y = f(x)$$

donde

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{6.7}$$

a_j equivale a una constante para cada j, n es un entero positivo y $a_n \neq 0$.

El grado de un polinomio es el exponente del término elevado a la potencia más alta en la expresión. Una función lineal es una ***función polinomial de primer grado***, en tanto que una función cuadrática es una ***función polinomial de segundo grado***. Una ***función polinomial de tercer grado*** tal que

$$y = x^3 - 2x^2 + 5x + 10$$

se conoce como una ***función cúbica***.

Las funciones cúbicas de la forma $y = f(x)$ tienden a presentar un comportamiento similar al de las que se muestran en la figura 6.19. A pesar de que aprenderemos más acerca de las características gráficas de las funciones en capítulos posteriores, estudiemos un atributo de las funciones polinomiales.

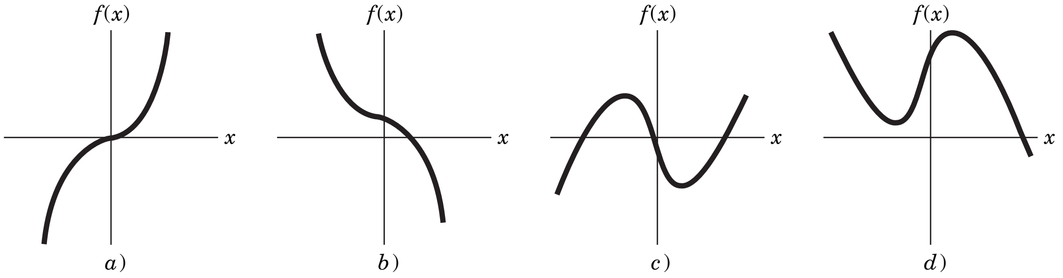


Figura 6.19 Características gráficas de las funciones cúbicas.

Atributo de la dirección extrema

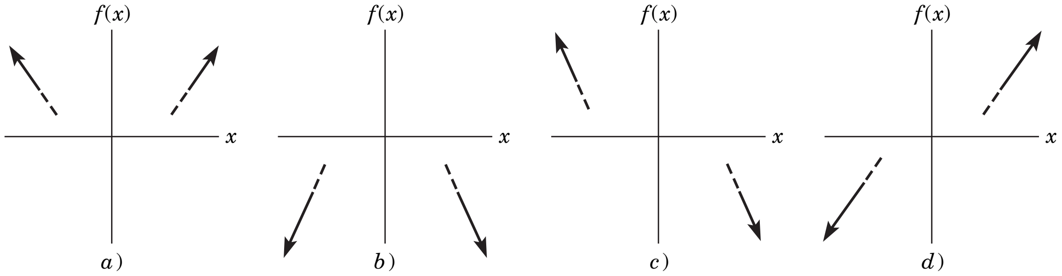
La ***dirección extrema*** de una función f se refiere al comportamiento de $f(x)$ conforme x adquiere valores positivos cada vez más grandes y conforme x adquiere valores negativos cada vez más grandes. Para las funciones polinomiales, el comportamiento extremo de $f(x)$ se determina por el comportamiento del término elevado a la más alta potencia en la función. Esto se basa en la observación de que conforme x es más positivo (o negativo), con el tiempo el término a la más alta potencia contribuirá más al valor de $f(x)$ que todos los otros términos de la función.

Para funciones polinomiales de la forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

el comportamiento extremo depende del término $a_n x^n$. La figura 6.20 ilustra las diferentes posibilidades. El signo de a_n así como si n es non o par son los factores significativos al determinar la dirección extrema. Cuando *n es par*, $x^n > 0$ para x positiva o negativa; para este caso el signo de a_n determina el signo en $a_n x^n$. Cuando *n es impar*, $x^n > 0$ si $x > 0$ y $x^n < 0$ si $x < 0$. Junto con el signo de a_n, la dirección extrema de la gráfica de $f(x)$ (n impar) será diferente para $x > 0$ y $x < 0$.

En la figura 6.19, los casos *a*) y *c*) representan funciones cúbicas en que $a_3 > 0$ y los casos *b*) y *d*) representan las funciones donde $a_3 < 0$.



a) n par $a_n > 0$

b) n par $a_n < 0$

c) n impar $a_n < 0$

d) n impar $a_n > 0$

Figura 6.20 Atributos de la dirección extrema para funciones polinomiales de la forma $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

Ejemplo 14 Para las siguientes funciones polinomiales, determine la dirección extrema de $f(x)$ y trace f.

a) $f(x) = \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^4}{8} - 2.5x^3$ *b*) $g(x) = \dfrac{x^4}{4} - 8x^2 + 10$

SOLUCIÓN

a) La dirección extrema para $f(x)$ se determina por el término $x^5/5$. Conforme x adquiere valores (positivos y negativos) cada vez más grandes, este término con el paso del tiempo se hace dominante al determinar el valor de $f(x)$. Dado que el exponente de este término es impar y que el coeficiente ($\frac{1}{5}$) es positivo, la dirección extrema corresponderá a la situación de la figura 6.20*d*). Los valores positivos de x dan como resultado valores positivos para $f(x)$; los valores negativos de x dan como resultado valores negativos para $f(x)$.

Si se sustituyen suficientes números de valores de x en f y se trazan los pares ordenados resultantes, el bosquejo de f debe ser similar al de la figura 6.21.

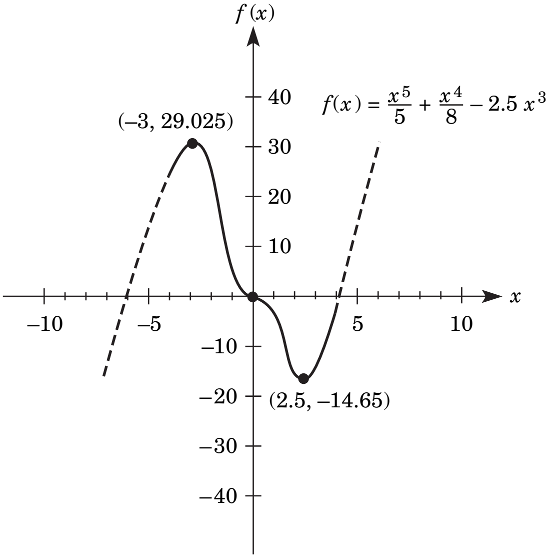


Figura 6.21

b) La dirección extrema de $g(x)$ se determina por el término $x^4/4$. Puesto que el grado de este término es par y que el coeficiente ($\frac{1}{4}$) es positivo, la dirección extrema corresponderá a la situación de la figura 6.20*a*). Tanto los valores positivos *como* negativos de x dan como resultado valores positivos para $f(x)$. Si se identifican y trazan suficientes pares ordenados de valores que satisfacen g, la gráfica de g debe ser parecida a la que se presenta en la figura 6.22.

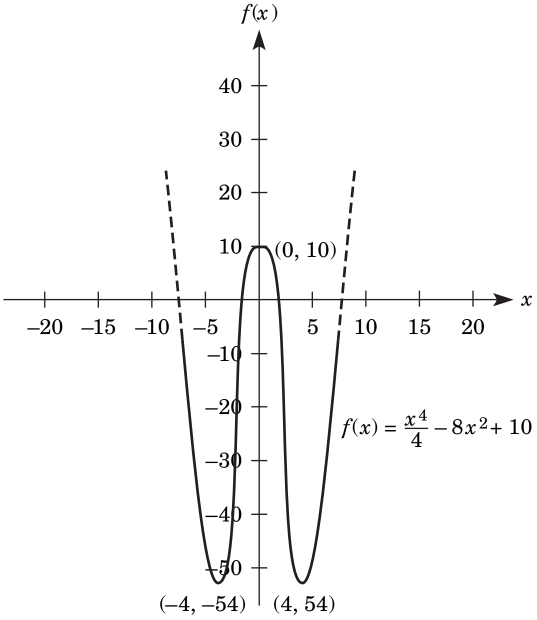


Figura 6.22

NOTA El comportamiento de las funciones polinomiales entre las “colas” de la dirección extrema se puede determinar con mayor facilidad que por medio del método de “fuerza bruta” para trazar muchos pares ordenados. Estudiaremos esto con mayor detalle en el capítulo 16.

Ejemplo 15 **(Diseño de contenedor)** Se construye una caja rectangular abierta cortando esquinas cuadradas de una pieza de cartón de 60 × 60 pulgadas y doblando las pestañas como se muestra en la figura 6.23. El objetivo es seleccionar las dimensiones que maximicen el volumen de la caja. Se encuentra el volumen de la caja al multiplicar el área de la base por la altura de la caja, o bien

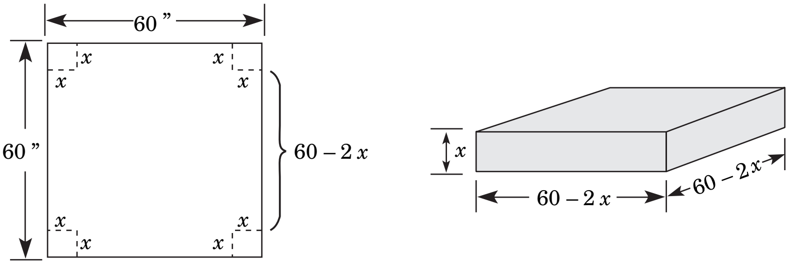


Figura 6.23

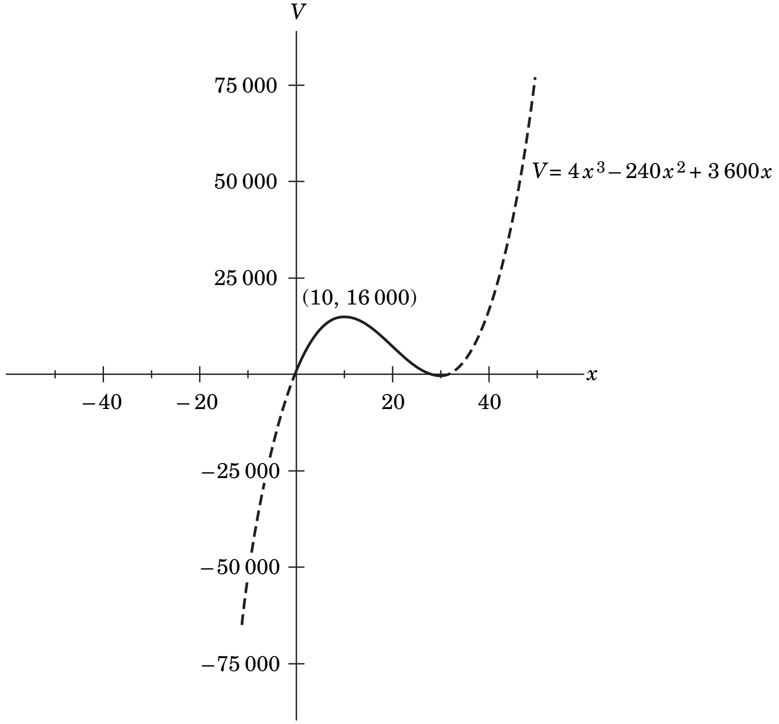


Figura 6.24 Función de volumen del contenedor.

$$\begin{aligned} V = f(x) &= (60 - 2x)(60 - 2x)(x) \\ &= (3\,600 - 240x + 4x^2)(x) \\ &= 3\,600x - 240x^2 + 4x^3 \end{aligned}$$

En la figura 6.24 se traza esta función cúbica. Se puede apreciar que es posible maximizar el volumen con 16 000 pulgadas cúbicas cuando $x = 10$. En el capítulo 17 mostraremos cómo se puede resolver este tipo de problema usando el cálculo diferencial. ❑

Ejercicio de práctica

¿Cuáles son las dimensiones que tienen el mayor volumen? ¿Cuál es el dominio restringido para la función del volumen? ¿Cuál es el rango restringido? *Respuesta*: 40 × 40 × 10 pulgadas; $0 \leq x \leq 30$; $0 \leq V \leq 16\,000$.

Funciones racionales

Como se mencionó en el capítulo 4, las ***funciones racionales*** son funciones expresadas como la ***razón*** o el cociente de dos polinomios.

Definición: Función racional

Una ***función racional*** tiene la forma general

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} \qquad \textbf{(6.8)}$$

donde g es la función polinomial de n-ésimo grado y h es una función polinomial de m-ésimo grado no cero.

Estos son dos ejemplos de funciones racionales

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4} \qquad x \neq 2, -2$$

$$g(x) = \frac{x^3 - 5x + 10}{x} \qquad x \neq 0$$

Ejemplo 16

(Rehabilitación de discapacidades) Los terapeutas físicos a menudo encuentran que el proceso de rehabilitación se caracteriza por un efecto de ganancias decrecientes. Esto es, la funcionalidad recobrada por lo general aumenta con la extensión de un programa de terapia pero con el paso del tiempo en menores cantidades respecto de los esfuerzos de un programa adicional. Para una discapacidad particular, los terapeutas han desarrollado una función matemática que describe el costo C de un programa de terapia como una función del porcentaje de funcionalidad recuperada, x. La función es una función racional que tiene la forma

$$C = f(x)$$

o bien
$$C = \frac{5x}{120 - x} \qquad 0 \leq x \leq 100$$

donde *C* se mide en miles de dólares. Por ejemplo, se estima que el costo de la terapia para lograr una recuperación del 10 por ciento equivale a

$$\begin{aligned} f(60) &= \frac{5(60)}{120 - 60} \\ &= \frac{300}{60} = 0.454 \text{ (miles de dólares)} \end{aligned}$$

Se estima que el costo de lograr una recuperación del 60 por ciento es igual a

$$\begin{aligned} f(60) &= \frac{5(60)}{120 - 60} \\ &= \frac{300}{60} = 5.0 \text{ (miles de dólares)} \end{aligned}$$

En la figura 6.25 se presenta un bosquejo de esta función. ❑

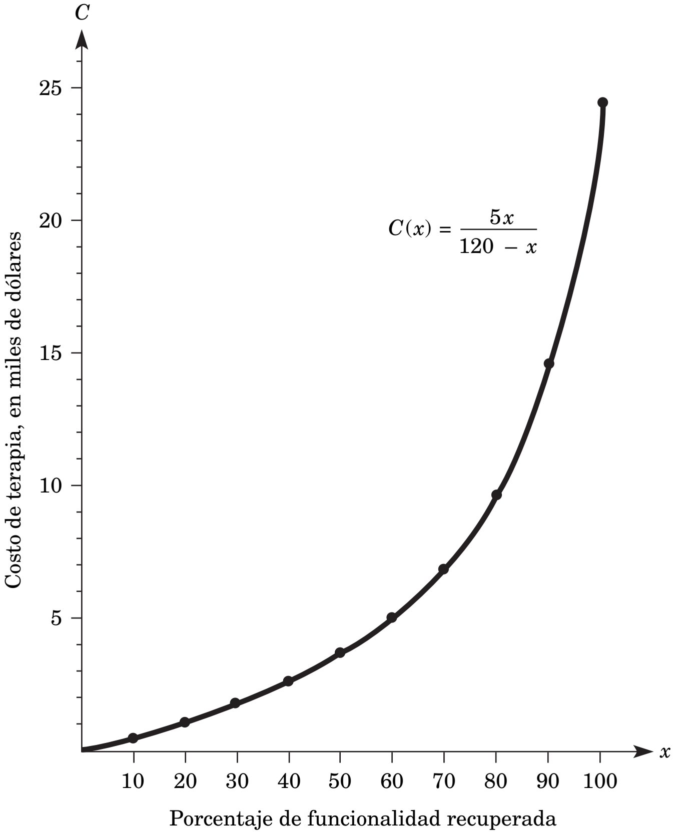


Figura 6.25 Costo de la rehabilitación.

Sección 6.3 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 16, *a*) determine el grado de la función y *b*) determine la dirección extrema para la función.

1. $f(x) = -x^3/4$
2. $f(x) = -x^4/2$
3. $f(x) = x^8$
4. $f(x) = -x^4$
5. $f(x) = x^7 - 7x^3 + 8x^2 - 5x$
6. $f(x) = x^6 - 2x^5 + x^3 - 10x$
7. $f(x) = x^9 - x^7 + x^2 - 1\,000$
8. $f(x) = x^{10} - 5x^4 - 100$
9. $f(x) = -(x^5 - 3x^2 + 5x - 4)/7$
10. $f(x) = x^{12} - \frac{5}{2}x^6 + 1$
11. $f(x) = -5x^8 + 2x^3$
12. $f(x) = -3x^{10} + 12x^9 - 1$
13. $f(x) = -(x + 1)^5$
14. $f(x) = -(x^3 - 2)^4$
15. $f(x) = (2x^3 - 4x)^2$
16. $f(x) = -(x - 2x^4)^3$
17. Trace la función $f(x) = -x^3$.
18. Trace la función $f(x) = -x^5$.
19. Trace la función $f(x) = x^6$.
20. Trace la función $f(x) = -x^4$.
21. Trace la función $f(x) = 5x^5 - 10$.
22. Trace la función $f(x) = -x^4 + 8$.
23. Trace la función $f(x) = 4x^3 + 5$.
24. Trace la función $f(x) = -x^6 + 6$.
25. Trace la función racional $f(x) = 3x/(100 - x)$.
26. Trace la función racional $(x) = 1/(x - 1)$.

27. **Brote de influenza** El Centro para el Control de las Enfermedades informa que un brote de gripe atacará la parte oriental del país. El Centro cree que se puede estimar el número de personas contagiadas por la gripe durante este brote por medio de la función

$$n = f(t) = 0.04t^3 + 2.5$$

donde *n* es igual al número de personas que contrajeron la gripe y *t* equivale al tiempo medido en días a partir de la detección inicial. Se espera que la gripe dure 30 días. Dibuje la función y determine el número de personas que se espera se contagien en el periodo de 30 días.

28. Refiriéndose al ejemplo 15, suponga que la pieza de cartón mide 30 × 60 pulgadas. *a*) Cree la función del volumen $V = f(x)$. *b*) Trace la función. *c*) Estime el valor de *x* que da como resultado el volumen máximo. *d*) Estime el volumen máximo y las dimensiones asociadas de la caja.

❑ TÉRMINOS Y CONCEPTOS CLAVE

atributo de la dirección extrema 250
cóncava hacia arriba (hacia abajo) 229
eje de simetría 230
función polinomial 250
fórmula cuadrática 232
función cuadrática 228
función racional 254
grado del polinomio 250
parábola 229

❑ FÓRMULAS IMPORTANTES

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c \qquad a \neq 0 \quad \text{Función cuadrática} \tag{6.1}$$

$$\left(\frac{-b}{2a}, \quad \frac{4ac - b^2}{4a}\right) \qquad \text{Vértice de la parábola} \tag{6.2}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \textbf{Fórmula cuadrática}$$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad \textbf{Función polinomial} \tag{6.7}$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} \qquad \textbf{Función racional} \tag{6.8}$$

❑ EJERCICIOS ADICIONALES

SECCIÓN 6.1

En los ejercicios 1 a 12, determine la concavidad de la parábola correspondiente, su intersección de *y* e intersecciones de *x* y las coordenadas del vértice...

1. $f(x) = 5x^2 - 3x + 100$

2. $f(x) = \dfrac{5x^2}{100} + 75$

3. $f(x) = -6x^2$

4. $f(x) = 2x^2 + 4x + 7$

5. $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$

6. $f(x) = -x^2 + 16$

7. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - 10x$

8. $f(x) = -10 + 5x + 16x^2$

9. $f(x) = -x^2 - 5x$

10. $f(x) = 25x^2 + 8x - 12$

11. $f(x) = ex^2 + fx + g, \quad e, f, g > 0$

12. $f(x) = -x^2/d, d > 0$

13. Determine la ecuación de la función cuadrática que pasa por los puntos (0, −20), (5, −120) y (−3, −56).

***14.** Verifique que las coordenadas del vértice de la parábola son $\left(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$, donde $f(x) = ax^2 + bx + c$.

***15.** Dada la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, muestre (compruebe) que se pueden determinar las raíces (si existe alguna) por medio de la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

SECCIÓN 6.2

16. Se arroja una bola hacia arriba al aire. Se puede describir la altura de la bola como una función del tiempo de acuerdo con la función $h(t) = -16t^2 + 128t$, donde $h(t)$ es la altura medida en pies y t es el tiempo medido en segundos.

a) ¿Cuál es la altura 2 segundos después de haber arrojado la bola?

b) ¿Cuándo alcanzará la bola su altura máxima?

c) ¿Cuándo tocará el suelo la bola ($h = 0$)?

17. Se deja caer un objeto desde un puente de 400 pies de altura. Se puede determinar la altura del objeto como una función del tiempo (desde que se soltó) de acuerdo con la función $h(t) = 400 - 16t^2$, donde $h(t)$ es la altura medida en pies y t es el tiempo medido en segundos.

a) ¿Cuál es la altura del objeto después de 4 segundos?

b) ¿Cuánto le lleva al objeto tocar el agua?

18. La función de la demanda para un producto particular es

$$q = f(p) = 480\,000 - 3\,000p$$

donde q se expresa en unidades y p en dólares. Determine la función cuadrática del ingreso total $R = g(p)$. ¿Cuál es el ingreso total cuando $p = \$100$?

19. La función de la demanda para un producto particular es

$$q = f(p) = 1\,800 - 7.5p$$

donde q se expresa en unidades y p en dólares. Determine la función cuadrática del ingreso total $R = h(q)$. (Nótese que q es la variable independiente.)

20. La función de la oferta $q_s = f(p)$ para un producto es cuadrática. Tres puntos que caen en la gráfica de la función de la oferta son (20, 150), (30, 400) y (40, 750). Determine la ecuación de la función de la oferta.

21. La función de la demanda para un producto es

$$q_d = p^2 - 70p + 1\,225$$

a) ¿Cuántas unidades se demandarán si se cobra un precio de \$20?
b) Determine la intersección de q_d e interprete su significado.
c) Determine la(las) intersección(intersecciones) de p e interprétela(s).
d) Estime el dominio restringido.

22. La función de la demanda para un producto es

$$q_d = p^2 - 90p + 2\,025$$

a) ¿Cuántas unidades se demandarán si se cobra un precio de \$30?
b) Determine la intersección de q_d e interprete su significado.
c) Determine la(las) intersección(intersecciones) de p e interprétela(s).
d) Estime el dominio restringido.

23. Las funciones de la oferta y la demanda para un producto son $q_s = p^2 - 100$ y $q_d = p^2 - 40p + 400$. Determine el precio y la cantidad de equilibrio del mercado.

24. Las funciones de la oferta y la demanda para un producto son $q_s = p^2 - 525$ y $q_d = p^2 - 70p + 1\,225$. Determine el precio y la cantidad de equilibrio del mercado.

25. Una agencia de viajes local organiza un vuelo charter a un centro vacacional bien conocido. El agente cotizó un precio de \$300 por persona si 100 personas o menos contratan el vuelo. Por cada persona por encima de las 100, el precio para *todos* bajará \$2.50. Por ejemplo, si 101 personas contratan, cada una pagará \$297.50. Suponga que x equivale al número de personas por encima de las 100.

a) Determine la función que indica el precio por persona p como una función de x o $p = f(x)$.
b) En la parte *a*), ¿hay alguna restricción sobre el dominio?
c) Formule la función $R = h(x)$, que expresa el ingreso total de los boletos R como una función de x.
d) ¿Qué valor de x da como resultado el valor máximo de R?
e) ¿Cuál es el valor máximo de R?
f) ¿Qué precio de boleto da como resultado el R máximo?

26. **Plan de incentivos salariales** Un productor de productos perecederos ofrece un incentivo salarial a los conductores de sus camiones. Una ruta de entrega estándar toma un promedio de 20 horas. Se paga a los conductores con una tasa de \$10 por hora hasta un *máximo* de 20 horas (si el viaje requiere 30 horas, sólo se pagan 20 horas a los conductores). Hay un incentivo para los conductores que hagan el viaje en menos de 20 horas. Por cada hora por debajo de las 20, el salario por hora aumenta \$1. Suponga que x es igual al número de horas requeridas para completar el viaje.

a) Determine la función $w = f(x)$, donde w es el salario por hora en dólares.

b) Determine la función que indica el salario del conductor por el viaje como una función de x.

c) ¿Qué tiempo de viaje x maximizará el salario del conductor por el viaje?

d) ¿Qué salario por hora se asocia con este tiempo de viaje?

e) ¿Cuál es el salario máximo?

27. Análisis del punto de equilibrio no lineal La función del costo total de fabricar un producto es

$$C = f(x) = 100x^2 + 1\,300x + 1\,000$$

donde x equivale al número de unidades producidas (en miles) y C representa el costo total (en miles de dólares). Cada unidad de producto se vende en \$2000. Usando x como se definió antes, formule la función del ingreso total (expresado en miles de dólares) y determine

a) El(los) nivel(es) de producción requerido(s) para lograr el punto de equilibrio.

b) El nivel de producción que da como resultado la utilidad máxima.

c) La máxima utilidad esperada.

28. Necesidades eléctricas pico en el horario de verano en Estados Unidos La figura 6.26 es una gráfica de las demandas de electricidad pico en el horario de verano en Estados Unidos como lo compiló el North American Electric Reliability Council. Al parecer, las demandas pico en el horario de verano aumentan aproximadamente de manera cuadrática. Si las demandas pico en el horario de verano en 1981, 1985 y 1988 fueron 427, 450 y 522 (miles de megawatts), respectivamente:

a) Utilice los tres puntos de datos para determinar la función cuadrática de estimación $D = f(t)$, donde D es igual a la demanda pico en el horario de verano en Estados Unidos (en miles de megawatts) y t equivale al tiempo medido en años desde 1981.

b) Utilizando la función de la parte *a*), estime la demanda pico en el horario de verano en 1995 y en 2000.

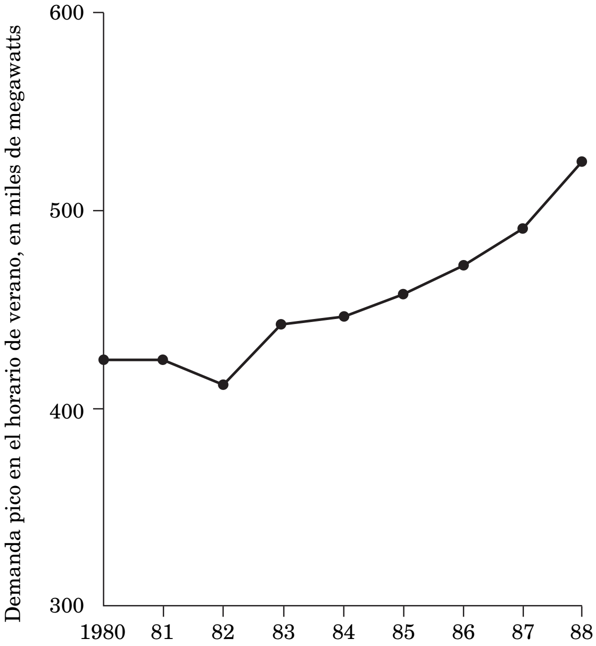


Figura 6.26 Demanda de electricidad pico en el horario de verano en Estados Unidos.

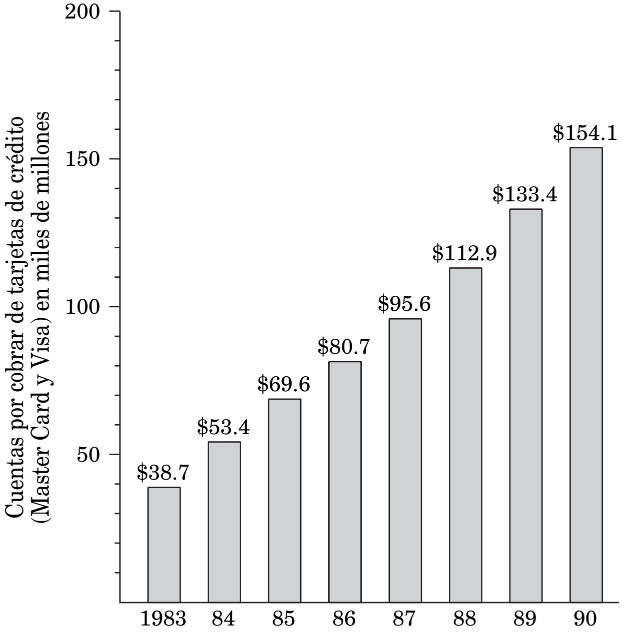


Figura 6.27

29. **Uso de tarjeta de crédito** El uso de tarjetas de crédito del consumidor ha aumentado constantemente. La figura 6.27 ilustra las cuentas por cobrar (cargos) anuales combinadas de MasterCard y Visa para los años 1983-1990.

a) Utilice los datos para los años 1984, 1986 y 1989 para determinar una función *cuadrática* de estimación $C = f(t)$, donde C equivale a las cuentas por cobrar anuales en miles de millones de dólares y t representa el tiempo medido en años desde 1983.

b) Use los datos para los años 1986 y 1988 para determinar una función *lineal* de estimación $C = g(t)$, donde C es igual a las cuentas por cobrar anuales en miles de millones de dólares y t es el tiempo medido en años desde 1983.

c) Use las funciones de las partes *a*) y *b*) para estimar las cuentas por cobrar anuales para el año 1995.

30. **Uso de tarjeta de crédito, continuación** En el ejercicio 29 se desarrollaron dos funciones de estimación (lineal y cuadrática) para las cuentas por cobrar anuales combinadas de MasterCard y Visa. Es interesante determinar cuál de las dos funciones ofrece la mejor estimación de las cuentas por cobrar anuales. Una manera de decidir esto es medir el error asociado con cada función al estimar los 8 puntos de datos de la figura 6.27. Hay diferentes medidas de error. Una medida es la *suma de los cuadrados de las desviaciones* entre las cuentas por cobrar anuales reales para los 8 años y las cuentas por cobrar anuales pronosticadas por medio de las funciones de estimación.

a) Dada la función cuadrática de estimación $f(t)$ encontrada en el ejercicio 29, determine las estimaciones de las cuentas por cobrar anuales para cada uno de los años 1983-1990. Para cada año, determine la diferencia entre las cuentas por cobrar reales y las cuentas por cobrar estimadas y eleve al cuadrado la diferencia. Se determina la medida de error asociada con $f(t)$ al sumar los cuadrados de las diferencias para los 8 años.

b) Al utilizar la función lineal de estimación del ejercicio 29, determine estimaciones de las cuentas por cobrar anuales para cada uno de los años 1983-1990. Como en la parte *a*), determine la suma de los cuadrados de las diferencias entre las cuentas por cobrar reales y las estimadas usando $g(t)$.

c) Con base en los resultados de las partes *a*) y *b*), ¿cuál función de estimación tiene el menor error?

SECCIÓN 6.3

En los ejercicios 31 a 38, determine *a*) el grado de la función y *b*) la dirección extrema de la función.

31. $f(x) = 8x^6 - 4x^3$

32. $f(x) = -x^5/25 - 3x^4 + 65$

33. $f(x) = 4x^5 + 5x^3 - 2x$

34. $f(x) = x^9 - 9x^7 + 5x^3 - 500$

35. $f(x) = -x^8 + 40\,000x^5 - 25x$

36. $f(x) = -x^7 + 4x^5 + 2x^3 - x + 5$

37. $f(x) = (x^7 - 5x^6 + 3x^5 - 5x^4)/100$

38. $f(x) = -x^6/3 + 2x^3 + 4x$

39. Dibuje la función $f(x) = -x^3/2 + 10$.

40. Trace la función $f(x) = -x^5/4 + 5$.

41. Grafique la función $f(x) = x^8$.

42. Grafique la función $f(x) = -x^7$.

43. Bosqueje la función racional $f(x) = 5x/(200 - x)$.

44. Dibuje la función racional $f(x) = 3/(x - 3)$.

❑ EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. Dada la función cuadrática

$$f(x) = 4x^2 + 5x - 20$$

determine *a*) la concavidad, *b*) la intersección de *y*, *c*) la(las) intersección(intersecciones) de *x* y *d*) las coordenadas del vértice de la parábola asociada. *e*) Trace la parábola.

2. La función de la demanda para un producto es

$$q = f(p) = 360\,000 - 45p$$

donde *q* es igual a la cantidad demandada y *p* es el precio en dólares.

a) Determine la función cuadrática del ingreso $R = g(p)$.

b) ¿Qué precio se debería cobrar para maximizar el ingreso total?

c) Trace la función del ingreso total.

3. Prosperidad japonesa En años recientes, la prosperidad en Japón dio como resultado una fuerte inversión de los japoneses en otros países en todo el mundo. La figura 6.28 es una gráfica que muestra la cantidad de dinero invertida en Europa durante la década de 1980. En 1980, 1984 y 1987 las cantidades invertidas fueron \$0.6, \$2.1 y \$6.25 mil millones, respectivamente. Usando estos tres puntos de datos, determine la función cuadrática de estimación $I = f(t)$, donde *I* es igual a la inversión japonesa (en miles de millones de dólares) y *t* es el tiempo medido en años desde 1980. Empleando esta función, estime la inversión esperada en el año de 1995.

4. Determine el grado y la dirección extrema de las funciones siguientes.

a) $f(x) = -\dfrac{(x^3 - 4)^5}{-3}$

b) $f(x) = -(x^3)^4 + 15x^7 - 20x$

5. Se va a construir una caja rectangular abierta cortando esquinas cuadradas de una lámina de metal de 24 × 16 pulgadas y doblando los lados como se muestra en la figura 6.29. Se desea seleccionar las dimensiones que maximicen el volumen de la caja. Formule la función $V = f(x)$, donde V representa el volumen de la caja y x el ancho de la esquina cuadrada.

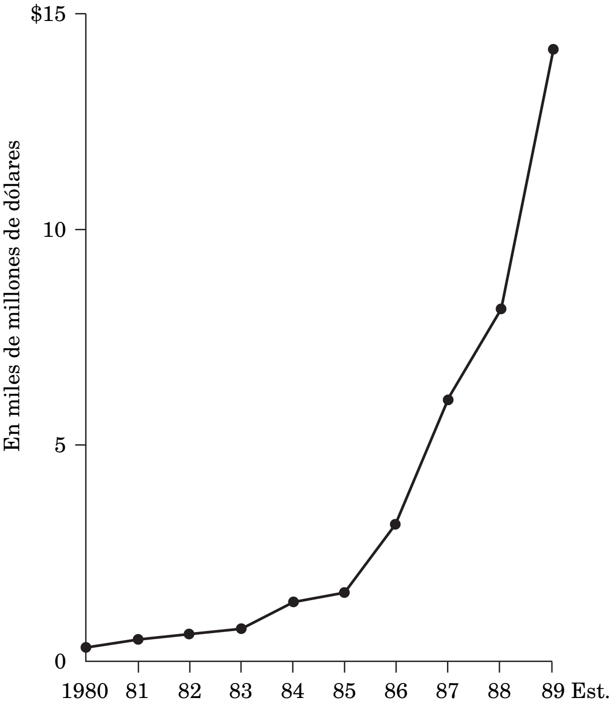


Figura 6.28 Inversión directa de Japón en Europa. (Fuente: Ministerio de Finanzas, Japón)

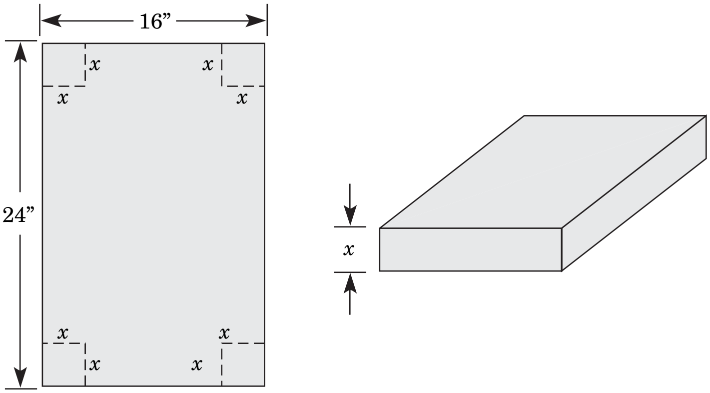


Figura 6.29

MINICASO

GUERRAS DEL COMERCIO MINORISTA

Sears, K Mart y Wal-Mart son los tres comercios minoristas líderes en Estados Unidos. Sears, desde hace mucho tiempo líder en dólares de ventas, comenzó a perder su ventaja a mediados de la década de 1980. La figura 6.30 es una gráfica de los ingresos de las ventas de mercancías (en miles de millones de dólares) de los tres minoristas entre 1983 y 1988. Aunque al parecer K Mart se acercaba a Sears, Wal-Mart hacía avances significativos en comparación con Sears y K Mart. Un analista cree que las ventas de Sears y K Mart aumentaban con un índice aproximadamente lineal durante este periodo y que las ventas de Wal-Mart aumentaban de manera cuadrática.

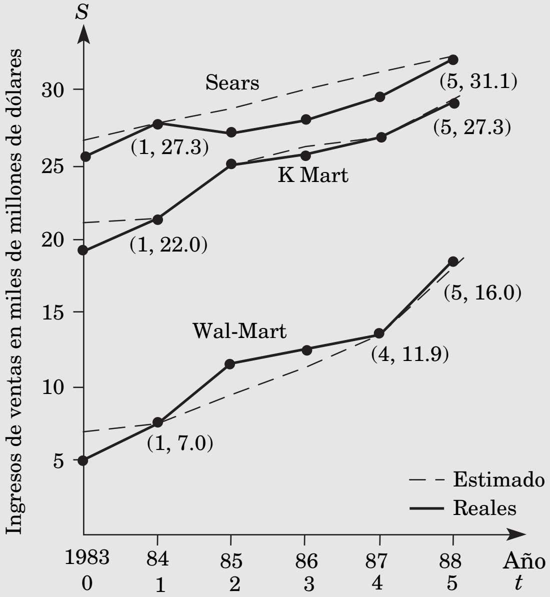
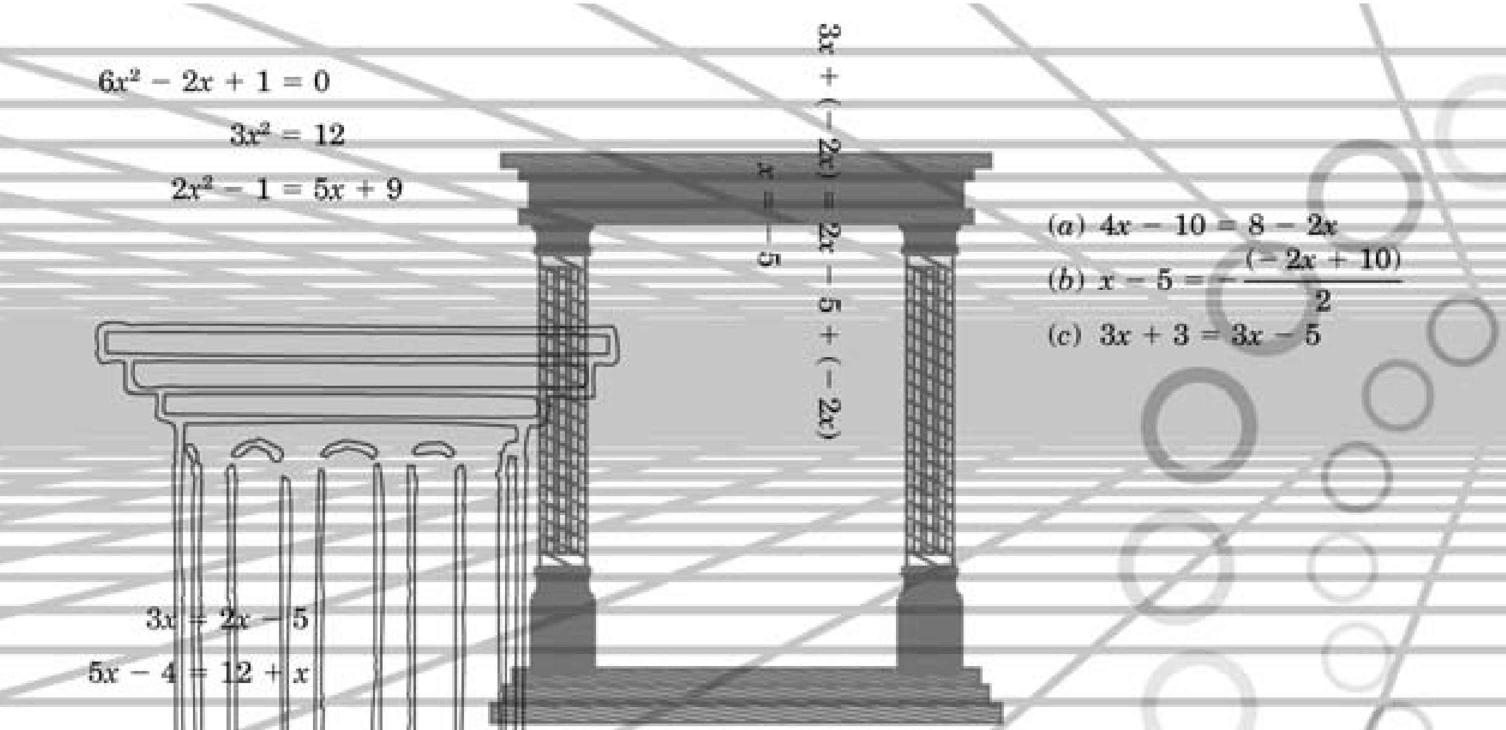


Figura 6.30 Ingresos de las ventas anuales de Sears, K Mart y Wal-Mart.

1. **1.** Usando los puntos de datos para 1984 y 1988, determine la función lineal de estimación $S_1 = f(t)$, donde S_1 es igual a las ventas anuales de Sears (en miles de millones de dólares) y t es el tiempo medido en años desde 1983.
2. **2.** Empleando los puntos de datos para 1984 y 1988, determine la función lineal de estimación correspondiente $S_2 = g(t)$ para K Mart.
3. **3.** Utilizando los puntos de datos para 1984, 1987 y 1988, determine la función cuadrática de estimación $S_3 = h(t)$ para Wal-Mart.
4. **4.** Usando las funciones de estimación S_1, S_2 y S_3, proyecte las ventas anuales para los años 1989-1995.
5. **5.** Empleando las funciones $f(t)$ y $g(t)$, estime el momento en que las ventas anuales de K Mart son iguales que las de Sears.
6. **6.** Usando las funciones $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)$, estime los momentos en que las ventas de Wal-Mart equivalen a las de K Mart y Sears.
7. **7.** Utilizando una referencia apropiada, observe los datos de las ventas anuales de Sears, K Mart y Wal-Mart y determine el error en las estimaciones asociadas con la parte 4 para 1989 y 1990.

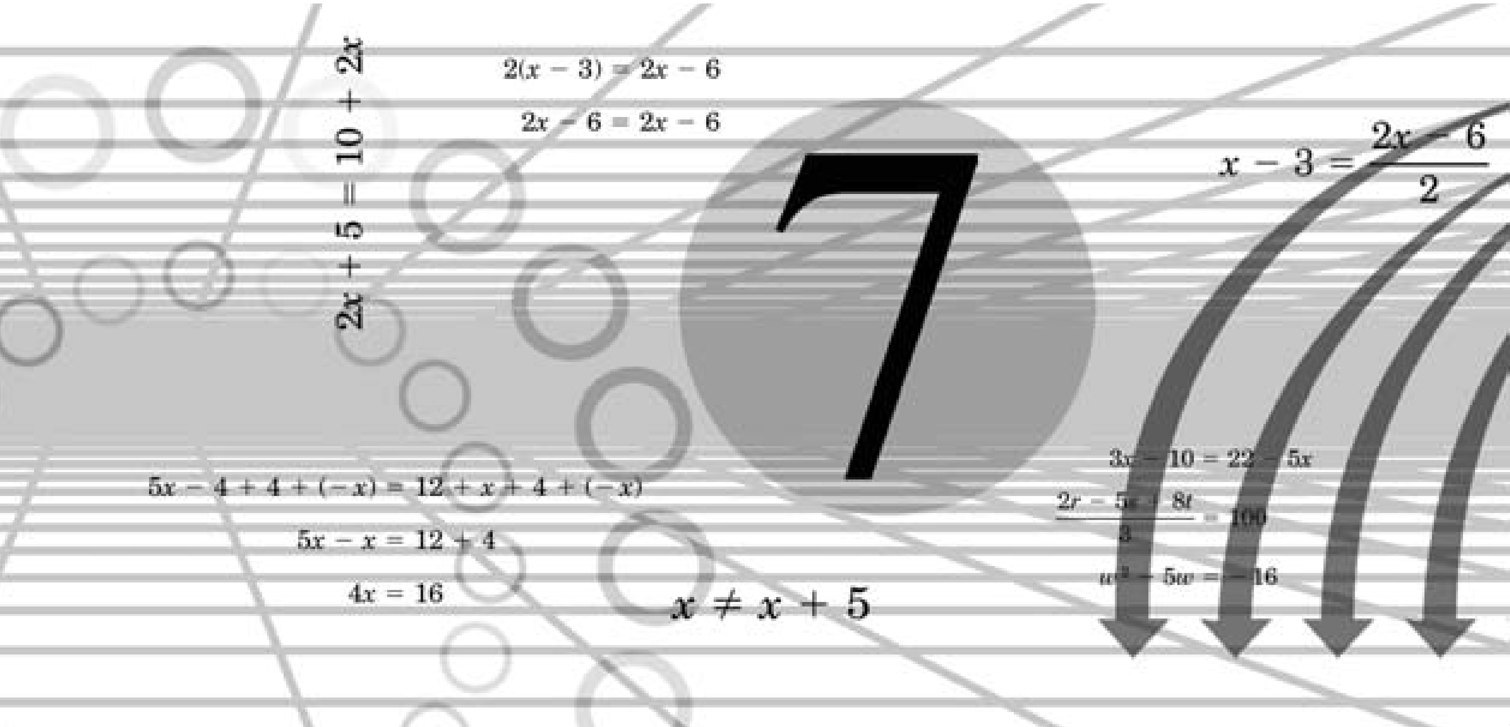
CAPÍTULO 7

Funciones exponenciales y logarítmicas



OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Analizar la naturaleza de las funciones exponenciales y sus características estructurales, así como su comportamiento gráfico.
- Presentar una variedad de aplicaciones de las funciones exponenciales.
- Analizar la naturaleza de los logaritmos y la equivalencia entre formas exponenciales y logarítmicas.
- Analizar las características de las funciones logarítmicas.
- Presentar una variedad de aplicaciones de las funciones logarítmicas.



ESCENARIO DE MOTIVACIÓN: El Supertazón: el increíble costo de la participación

El Supertazón es una extravagancia que se convierte en punto de atención para cientos de millones de fanáticos deportivos cada mes de enero. Para participar en el Supertazón XXV en 1991, el costo de un anuncio de 30 segundos era $800 000. ¿Por qué alguna compañía gastaría tanto dinero por un anuncio de 30 segundos? Porque el Supertazón atrae un público por televisión increíblemente alto a nivel mundial. Antes del Supertazón XXV, los supertazones representaban 5 de los 10 públicos de televisión más grandes en la historia y 17 de los principales 50. En el ejemplo 16 se presentarán datos reales que reflejan el costo incremental de la publicidad en este evento. Lo que se desea es determinar una función que se pueda utilizar para estimar el costo de los anuncios en el Supertazón en años futuros.

Hay dos clases de funciones matemáticas que tienen aplicaciones importantes en los negocios, la economía y las ciencias: las ***funciones exponenciales*** y las ***funciones logarítmicas***. En este capítulo estudiaremos la naturaleza de estas funciones e ilustraciones de su aplicación.

7.1 Características de las funciones exponenciales

Recordatorio de álgebra

Repetimos aquí algunas propiedades importantes de los exponentes y radicales para revisarlos. Suponga que a y b son números positivos y m y n tienen valores reales.

$$\boxed{\text{Propiedad 1: } b^m \cdot b^n = b^{m+n}}$$

Ejemplos:
$$2^2 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$$
$$x^5 x^{-3} = x^{5-3} = x^2$$

$$\boxed{\text{Propiedad 2: } \frac{b^m}{b^n} = b^{m-n} \qquad b \neq 0}$$

Ejemplos:
$$\frac{3^6}{3^3} = (3)^{6-3} = 3^3 = 27$$
$$\frac{x^4}{x} = x^{4-1} = x^3$$

$$\boxed{\text{Propiedad 3: } (b^m)^n = b^{mn}}$$

Ejemplos:
$$(10^3)^2 = 10^{(3)(2)} = 10^6 = 1\,000\,000$$
$$(x^{-2})^5 = x^{(-2)(5)} = x^{-10}$$

$$\boxed{\text{Propiedad 4: } a^m b^m = (ab)^m}$$

Ejemplos: $3^4 2^4 = [(3)(2)]^4 = 6^4 = 1\,296$

$x^2 y^2 = (xy)^2$

$$\boxed{\text{Propiedad 5: } b^{m/n} = \sqrt[n]{b^m}}$$

Ejemplos: $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

$x^{1/4} = \sqrt[4]{x}$

$$\boxed{\text{Propiedad 6: } \sqrt[n]{b^m} = (\sqrt[n]{b})^m}$$

Ejemplos: $\sqrt[3]{27^2} = (\sqrt[3]{27})^2 = (3)^2 = 9$

$$\boxed{\text{Propiedad 7: } b^0 = 1 \quad b \neq 0}$$

Ejemplos: $5\,000^0 = 1$

$(xy)^0 = 1$, siempre que $xy \neq 0$

$$\boxed{\text{Propiedad 8: } b^{-m} = \frac{1}{b^m} \quad b \neq 0}$$

Ejemplos: $(2)^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

$$\frac{1}{x^{-2}} = \frac{1}{1/x^2} = 1\,\frac{x^2}{1} = x^2$$

Si ha olvidado un poco los exponentes, radicales y sus propiedades, es urgente que revise la sección A.5 del apéndice A.

Características de las funciones exponenciales

> ### Definición: Función exponencial
>
> Una función con la forma
>
> $$f(x) = b^x$$
>
> donde $b > 0$, $b \neq 1$ y x es cualquier número real, recibe el nombre de **función exponencial** de base b.

Como ejemplos de funciones exponenciales podemos incluir

$$f(x) = 10^x$$
$$g(x) = (0.5)^x$$

Ejemplo 1

(Excreción de medicamentos) En muchos procesos naturales, el índice con que algo crece o decrece depende de su valor actual. La manera en que el cuerpo elimina los medicamentos es un ejemplo de este tipo de proceso. En el caso de un tipo de medicamento particular, suponga que los riñones excretan del torrente sanguíneo la mitad del medicamento en el cuerpo cada 3 horas. Por tanto, para una dosis inicial de 100 miligramos, el contenido en el cuerpo después de 3 horas sería

$$(100)(\tfrac{1}{2}) = 50 \text{ miligramos}$$

Después de 6 horas, la cantidad restante en el sistema sería

$$(100)(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}) = 25 \text{ miligramos}$$

Luego de 9 horas, la cantidad restante en el sistema sería

$$(100)(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2})(\tfrac{1}{2}) = 12.5 \text{ miligramos}$$

Después de *n periodos de 3 horas*, la cantidad de medicamento que queda en el sistema se describiría por medio de la función

$$A = f(n) = 100(\tfrac{1}{2})^n$$

donde *A equivale al número de miligramos de medicamento restantes en el sistema* y *n es igual al número de periodos (de 3 horas) desde que se administró la dosis inicial.* Cabe señalar que a pesar de que calculamos valores para *A* para incrementos de tiempo de 3 horas, la excreción del medicamento tiene lugar *continuamente*. Por ello, nuestra función es válida tanto para valores enteros como no enteros de *n*. Por consiguiente, la cantidad restante en el sistema después de 10.5 horas es

$$\begin{aligned} A &= f(3.5) = (100)(0.5)^{3.5} \\ &= (100)(0.5)^3(0.5)^{0.5} \\ &= (100)(0.125)(\sqrt{0.5}) \\ &= (100)(0.125)(0.707) \\ &= 8.8375 \text{ miligramos} \end{aligned}$$

❑

Ejercicio de práctica

Estime la cantidad de medicamento en el sistema después de 15 horas. Luego de 22.5 horas. *Respuesta*: 3.125 miligramos; 0.5523 miligramos.

Hay diferentes clases de funciones exponenciales. Una clase importante es la que tiene la forma

$$\boxed{y = f(x) = ab^{mx}} \tag{7.1}$$

donde a, b y m son constantes con valores reales. Una restricción es que $b > 0$ pero $b \neq 1$.

Para que se familiarice con el comportamiento de las funciones exponenciales, estudiaremos algunas de la forma $y = b^x$ [suponiendo que $a = m = 1$ en la ecuación (7.1)].

Ejemplo 2

Podemos bosquejar la función exponencial $f(x) = 2^x$ al determinar un conjunto de pares ordenados que satisfacen la función. La tabla 7.1 presenta una muestra de valores supuestos para x y los valores correspondientes para $f(x)$. Nótese que se puede utilizar la propiedad 8 para evaluar 2^x cuando $x < 0$.

Observe en la figura 7.1 que f es una función *creciente*. Es decir, cualquier incremento en el valor de x da como resultado un aumento en el valor de $f(x)$. Además, la gráfica de f es **asintótica** para el eje negativo de las x. Conforme x se aproxima a un infinito negativo (expresado como $x \to -\infty$), $f(x)$ se aproxima pero nunca llega a un valor de 0.

Tabla 7.1

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**−1**	**−2**	**−3**
$f(x) = 2^x$	1	2	4	8	0.5	0.25	0.125

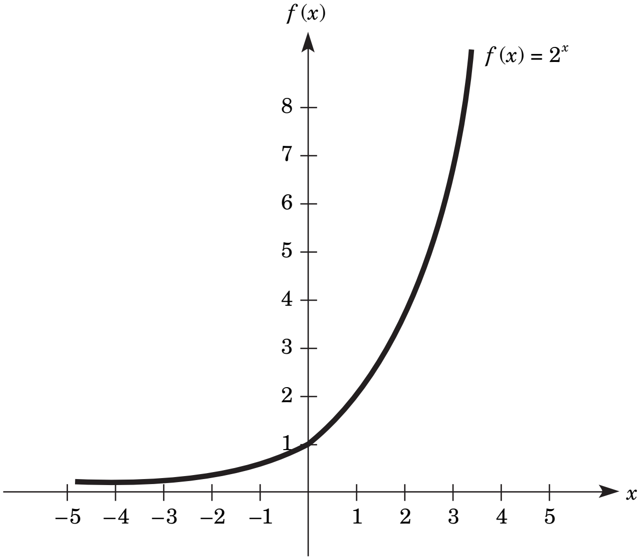


Figura 7.1

❑

Ejemplo 3 **$f(x) = b^x$, donde $b > 1$** La figura 7.2 ilustra gráficas de las tres funciones exponenciales *f*, *g* y *h*.

$$f(x) = 2^x$$
$$g(x) = 2.5^x$$
$$h(x) = 3^x$$

Nótese que cada función tiene una base positiva *b* y la única diferencia entre ellas es la magnitud de *b*. Estas funciones se grafican juntas para ilustrar algunas características del conjunto de funciones.

$$\boxed{f(x) = b^x \quad donde \quad b > 1} \tag{7.2}$$

❑

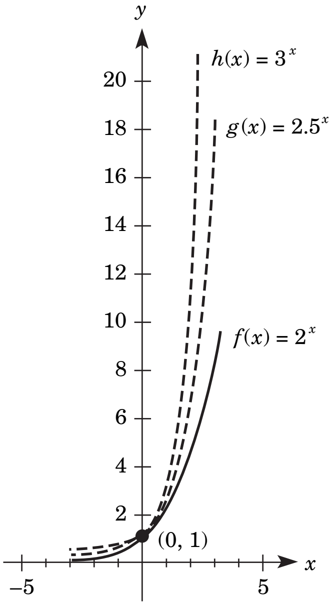


Figura 7.2 $f(x) = b^x$, $b > 1$.

Analice la figura 7.2 y luego confirme las siguientes características de este conjunto de funciones.

Características de las funciones $f(x) = b^x$, donde $b > 1$

I *Se define cada función para todos los valores de x. El dominio de f es el conjunto de números reales.*

II *La gráfica de f cae por completo* sobre *el eje x (el rango es el conjunto de números reales positivos).*

III *La gráfica de f es* asintótica *para el eje x. Esto es, el valor de y se aproxima pero nunca llega a un valor de 0 conforme x se aproxima al infinito negativo.*

> **IV** *La intersección con el eje y ocurre en (0, 1).*
> **V** *y es una función creciente de x; es decir, sobre el dominio de la función cualquier incremento de x se acompaña de un aumento en y. De modo más preciso, esta propiedad sugiere que para $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$.*
> **VI** *Cuanto más grande es la magnitud de la base b, mayor es el índice de incremento en f(x) conforme aumenta el valor de x.*

Esta clase de funciones es particularmente útil al modelar ***procesos de crecimiento***. Veremos ejemplos de estos tipos de aplicaciones en la siguiente sección.

Ejemplo 4 **$f(x) = b^x$, donde $0 < b < 1$** La figura 7.3 ilustra las gráficas de las tres funciones exponenciales

$$f(x) = (0.2)^x$$
$$g(x) = (0.6)^x$$
$$h(x) = (0.9)^x$$

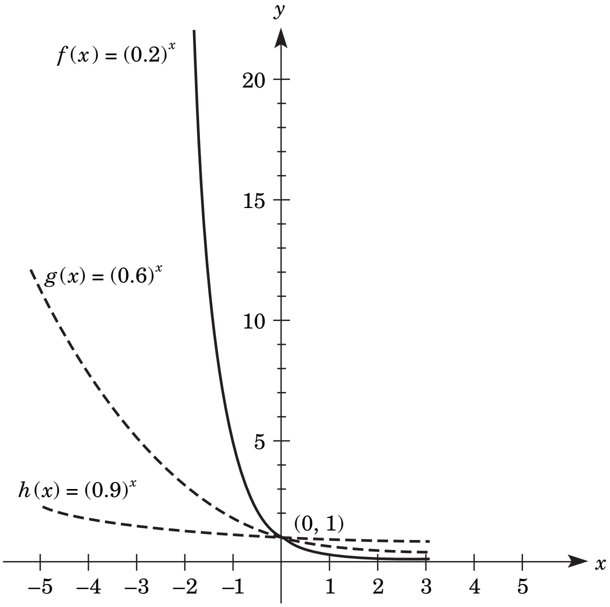


Figura 7.3 $f(x) = b^x$, $0 < b < 1$.

Estas funciones son representativas del conjunto de funciones exponenciales

$$\boxed{f(x) = b^x \qquad 0 < b < 1} \tag{7.3}$$

Las tres funciones ilustradas difieren sólo en la magnitud de b. ❑

Analice la figura 7.3 y confirme las siguientes características de este conjunto de funciones.

Características de las funciones $f(x) = b^x$, $0 < b < 1$

I *Se define cada función para todos los valores de x (el dominio es el conjunto de números reales).*
II *La gráfica de f cae totalmente* sobre *el eje x (el rango es el conjunto de números reales positivos).*
III *La gráfica de f es asintótica para el eje x. Esto es, el valor de y se aproxima pero nunca llega a un valor de 0 conforme x se aproxima al infinito positivo.*
IV *La intersección con el eje y ocurre en (0, 1).*
V *y es una función decreciente de x; es decir, cualquier incremento de x se acompaña de un decremento en y. De modo más preciso, esta propiedad sugiere que para* $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$.
VI *Cuanto más baja es la magnitud de la base b, mayor es el índice de decremento en f(x) conforme aumenta el valor de x.*

Esta clase de funciones es particularmente útil al modelar ***procesos de decaimiento***. En la siguiente sección veremos ejemplos de estas aplicaciones.

PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR

¿Cuáles son las características gráficas de la función exponencial $f(x) = b^x$, donde $b = 1$?

Funciones exponenciales de base *e*

Una clase especial de las funciones exponenciales es de la forma

$$\boxed{y = f(x) = ae^{mx}} \qquad \textbf{(7.4)}$$

La base de esta función exponencial es e, que es un número irracional aproximadamente igual a 2.71828.

Ejercicio de práctica

El número e es el valor de $(1 + 1/n)^n$ conforme n se aproxima a ∞. Para comprender este comportamiento, realice cálculos para completar la tabla siguiente.

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

1	2
2	__________
3	__________
4	__________
5	__________
50	__________
500	__________
5 000	__________
50 000	__________
500 000	__________

Respuesta: 2.25, 2.37037, 2.441406, 2.488320, 2.691588, 2.715569, 2.718010, 2.718255, 2.718279.

Las funciones exponenciales de base *e* son particularmente apropiadas al modelar procesos de crecimiento y decaimiento (tales como crecimiento de las bacterias, crecimiento de la población, decaimiento radiactivo y decremento de la población de especies en peligro de extinción) y la composición continua del interés en las aplicaciones financieras.

Aunque no profundizaremos en el origen de esta constante, adquirirá discernimientos conforme avancemos en el estudio de por qué se utiliza una constante tan inusual como la base para una clase común de funciones exponenciales. Y, de hecho, las funciones exponenciales de base *e* se aplican en mayor medida que cualquier otra clase de función exponencial.

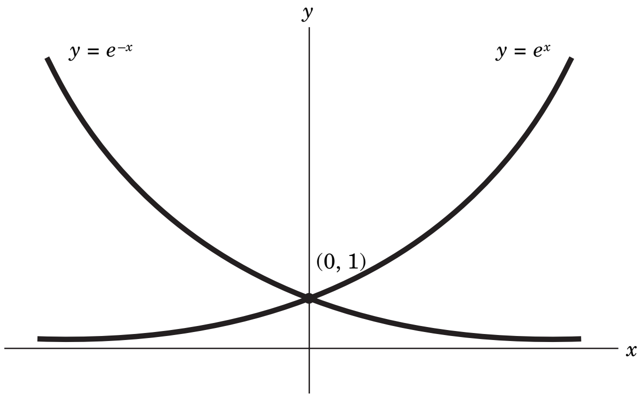


Figura 7.4

Dos funciones exponenciales especiales de esta clase son $y = e^x$ y $y = e^{-x}$. La figura 7.4 ilustra las gráficas de estas dos funciones. Para trazar estas funciones, se deben calcular valores para $(2.71828...)^x$ o $(2.71828...)^{-x}$. Éste podría ser un proceso muy tedioso. Sin embargo, dado que estos cálculos se efectúan con frecuencia, ya se tienen valores disponibles de e^x y e^{-x}. La mayor parte de las calculadoras de mano tienen funciones e^x o e^{-x}. En caso de que no tenga acceso a una calculadora adecuada, también tiene valores disponibles en las tablas como la tabla 1 de la contraportada frontal del libro. Debe sentirse a gusto calculando valores para e^x y e^{-x} ya sea con una calculadora o una tabla.

Ejemplo 5

(Funciones exponenciales modificadas) Ciertas aplicaciones de las funciones exponenciales implican funciones con la forma

$$\boxed{y = f(x) = 1 - e^{-mx}} \tag{7.5}$$

Tabla 7.2

x	0	1	2	3	4
$e-x$	1	0.3679	0.1353	0.0498	0.0183
$1 - e^{-x}$	0	0.6321	0.8647	0.9502	0.9817

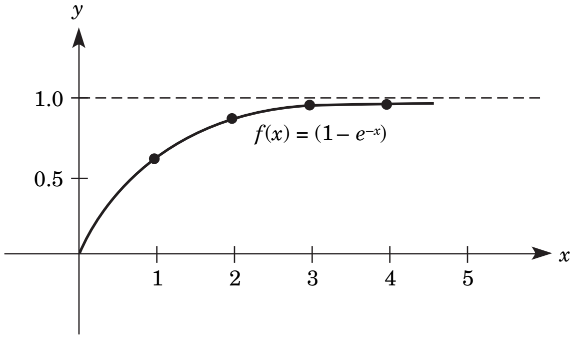


Figura 7.5 Funciones exponenciales modificadas.

Con el fin de ilustrar estas funciones exponenciales modificadas, grafiquemos la función $f(x) = 1 - e^{-x}$, donde $x \geq 0$. La tabla 7.2 contiene algunos puntos de datos muestra para esta función. La gráfica de la función se presenta en la figura 7.5. Nótese que la gráfica de la función es asintótica para la línea $y = 1$. Conforme se incrementa el valor de x, el valor de y se aproxima pero nunca alcanza un valor de 1. Esto sucede porque el segundo término e^{-x} se aproxima pero nunca llega a 0 conforme aumenta el valor de x. Quizá se pueda entender mejor el comportamiento de e^{-x} si se reformula e^{-x} como $1/e^x$. Conforme aumenta el valor de x, el denominador se incrementa más y el cociente $1/e^x$ se acerca pero nunca llega a 0. ❑

Conversión a funciones de base *e*

Hay casos en que son preferibles las funciones exponenciales de base e que aquellas que tienen otra base b. Las funciones exponenciales que tienen una base distinta de e se pueden transformar en funciones de base e equivalentes. Esto sucede porque es posible expresar cualquier número positivo b en forma equivalente como alguna potencia de la base e; es decir, podemos encontrar un exponente n tal que $e^n = b$, donde $b > 0$.

Para ilustrarlo, suponga que tenemos una función exponencial

$$f(x) = 3^x$$

donde la base equivale a 3. Para convertir f en una función de base e equivalente, debemos expresar la base en términos de e. Queremos determinar el exponente n que da como resultado

$$e^n = 3$$

Con base en la tabla 1 (de la contraportada frontal del libro) encontramos que

$$e^{1.1} = 3.0042$$

o

$$e^{1.1} \doteq 3$$

Por consiguiente, podemos expresar la función original como

$$f(x) = 3^x \doteq (e^{1.1})^x$$

o

$$f(x) \doteq e^{1.1x}$$

Para probar la equivalencia de estas funciones, calculemos $f(2)$ usando las formas de base 3 y base e.

Base 3: $f(2) = 3^2 = 9$

Base e: $f(2) = e^{1.1(2)} = e^{2.2}$

Con base en la tabla 1 $e^{2.2} = 9.0250$

Se puede atribuir la diferencia $(9.0250 - 9 = 0.0250)$ al hecho de que no nos es posible encontrar el valor preciso de n que da como resultado $e^n = 3$ con base en la tabla 1. Nuestro valor de $n = 1.1$ se acerca, pero es una aproximación. Tablas más detalladas y una calculadora con una función e^x o el uso de logaritmos (que ilustraremos más adelante) pueden ayudarle a obtener una mejor aproximación.

Sección 7.1 Ejercicios de seguimiento

1. ¿Cuáles de las siguientes funciones se puede considerar que son funciones exponenciales? En el caso de las que no lo son, indique por qué.

a) $y = f(x) = (\pi)^{x^2}$, donde $\pi = 3.14\ .\ .\ .$ *b*) $y = h(x) = \sqrt[x]{0.50}$

c) $y = v(t) = (4)^{t^2-2t+1}$ *d*) $u = v(t) = \sqrt[4]{t^3}$

e) $g = h(x) = 1/e^{2x-1}$ *f*) $y = f(x) = \sqrt{2}x^5$

g) $y = f(x) = (0.5)^{x-6}$ *h*) $y = h(z) = 10^{\sqrt{z}}$

2. *a*) Trace las funciones

$$y = f(x) = 2^x$$

$$y = g(x) = 2^{1.5x}$$

$$y = h(x) = 2^{2x}$$

b) Si se comparan estas funciones con la ecuación (7.1), las diferencias se encuentran en los valores del parámetro *m*. Analice los trazos de la parte *a*). ¿A qué conclusiones se puede llegar con respecto del comportamiento de las funciones exponenciales y el valor de *m*?

3. *a*) Trace las funciones

$$y = f(x) = 2^x$$

$$y = g(x) = 0.5(2)^x$$

$$y = h(x) = 2(2)^x$$

b) Si comparamos estas funciones con la ecuación (7.1), las diferencias se encuentran en los valores del parámetro *a*. Con base en los trazos de la parte *a*), ¿a qué conclusiones podemos llegar acerca del comportamiento de las funciones exponenciales y el valor de *a*?

4. Refiérase a la ecuación (7.2) y las características de tales funciones. Describamos los cambios en dichas funciones si se agrega una constante. Esto es, dada la función exponencial

$$f(x) = b^x + c \qquad \text{donde} \qquad b > 1$$

a) Describa las características I a IV de estas funciones cuando $c > 0$.
b) Describa las características de estas funciones cuando $c < 0$.

5. Refiérase a la ecuación (7.3) y las características de tales funciones. Dada la función exponencial

$$f(x) = b^x + c \qquad \text{donde} \qquad 0 < b < 1$$

a) Describa las características I a IV de estas funciones cuando $c > 0$.
b) Describa las características I a IV de estas funciones cuando $c < 0$.

Para cada una de las siguientes funciones exponenciales, calcule $f(0)$, $f(-3)$ y $f(1)$.

6. $f(x) = 3^{x^2}$
7. $f(x) = 2^{x/2}$
8. $f(x) = e^x$
9. $f(x) = e^{-x/2}$
10. $f(x) = e^{x-2}$
11. $f(x) = e^{x^2/2}$
12. $f(x) = 1 - e^{0.5x}$
13. $f(x) = 10(1 - e^{2x})$
14. $f(x) = \mathrm{e}^{-x}/2$
15. $f(x) = 5e^{-x}/2$
16. $f(x) = (2)^{x^2-2x+1}$
17. $f(x) = (3)^{4-x^2}$
18. $f(x) = 4(1 - e^x)$
19. $f(x) = 3(4 - e^{2x})$
20. $f(x) = 10 - x - e^x$
21. $f(x) = x^2 + 3x - 4e^x$

Trace las siguientes funciones.

22. $f(x) = e^{x/2}$
23. $f(x) = e^{x}/2$
24. $f(x) = 0.5e^{x^2}$
25. $f(x) = -2e^{x}$
26. $f(x) = 5(1 - e^{x})$
27. $f(x) = -2(1 - e^{x})$
28. $f(x) = e^{-x/2}$
29. $f(x) = 1 - e^{0.5x}$
30. $f(x) = 2(1 - e^{-x})$
31. $f(x) = 4(1 - e^{x})$

Convierta cada una de las siguientes funciones exponenciales en funciones exponenciales de base *e* equivalentes.

32. $f(x) = (1.6)^{x}$
33. $f(x) = (2)^{x^2}$
34. $f(x) = (0.6)^{x}$
35. $f(x) = (2.25)^{x/2}$
36. $f(t) = 5(1.6)^{t^2}$
37. $f(t) = 10(0.3)^{t}$
38. $f(t) = 2.5(20)^{t}$
39. $f(t) = -2(90)^{t}$
40. $f(u) = 3(0.5)^{u}$
41. $f(u) = 5(0.6)^{u}(1.6)^{2u}$
42. $f(z) = 2(16)^{z^2}$
43. $f(z) = (10)^{z}(5)^{z}$
44. $f(x) = (0.4)^{x}(0.8)^{x/2}$
45. $f(x) = (0.5)^{x/2}(3)^{x^2}$

46. Trace la función desarrollada en el ejemplo 1.

47. **Excreción de un medicamento con prescripción** En el caso de un medicamento con prescripción particular, los riñones excretan la mitad de la cantidad del medicamento en el torrente sanguíneo cada 4 horas. Dada una dosis inicial de 300 miligramos:

a) Determine la función $A = f(t)$, donde A equivale a la cantidad del medicamento en el torrente sanguíneo (en miligramos) y t es igual al tiempo desde que se administró la dosis, medido en incrementos de 4 horas.

b) ¿Qué cantidad se tiene en el sistema luego de 8 horas? ¿Después de 10 horas? ¿Al cabo de 24 horas?

c) Trace la función.

7.2 Aplicaciones de las funciones exponenciales

Como ya se ha mencionado, las funciones exponenciales tienen una aplicación particular para los *procesos de crecimiento* y *decaimiento*. Los ejemplos de los procesos de crecimiento incluyen el crecimiento de la población, la apreciación en el valor de los activos, la inflación, el crecimiento en el índice con que se utilizan recursos específicos (como la energía) y el incremento en el producto interno bruto (PIB). Los ejemplos de los procesos de decaimiento incluyen el valor reducido de ciertos activos como la maquinaria, la disminución en la tasa de incidencia de ciertas enfermedades conforme se mejoran la investigación y la tecnología, la reducción en el poder adquisitivo de un dólar y el decremento en la eficiencia de una máquina conforme envejece.

Cuando un proceso de crecimiento se caracteriza por un incremento porcentual constante, se denomina ***proceso de crecimiento exponencial***. Cuando un proceso de decaimiento se caracteriza por una disminución porcentual constante en el valor, recibe el nombre de ***proceso de decaimiento exponencial***. Si la población de un país crece de manera constante con un índice de 8 por ciento, el proceso de crecimiento se describe por medio de una *función de crecimiento exponencial.* Si la incidencia de la mortalidad infantil disminuye en forma continua con una tasa de 5 por ciento, se describe el proceso de decaimiento mediante una *función de decaimiento exponencial.*

A pesar de que las funciones de crecimiento exponencial y decaimiento exponencial por lo general se expresan como una función del tiempo, la variable independiente puede representar algún factor diferente del tiempo. No obstante la naturaleza de la variable independiente, el efecto es que *incrementos iguales en la variable independiente dan como resultado cambios porcentuales constantes (incrementos o decrementos) en el valor de la variable dependiente.*

Los siguientes ejemplos ilustran algunas áreas de aplicación de las funciones exponenciales.

Ejemplo 6 **(Interés compuesto)** Se puede utilizar la ecuación

$$\boxed{S = P(1 + i)^n} \qquad \textbf{(7.6)}$$

para determinar la cantidad S que una inversión de P dólares aumentará si recibe interés de i por ciento por periodo compuesto durante n periodos de interés compuesto, suponiendo que se reinvierte cualquier interés acumulado. S se conoce como el *interés compuesto* y P como el *capital*. Si se considera que S es una función de n, se puede considerar que la ecuación (7.6) tiene la forma de la ecuación (7.1). Es decir,

$$S = f(n)$$

o

$$S = ab^{mn}$$

donde $a = P$, $b = 1 + i$, y $m = 1$.

Suponga que $P = \$1\,000$ e $i = 0.08$ por año. La ecuación (7.6) se convierte en

$$S = f(n) = (1\,000)(1.08)^n$$

Para determinar el valor de S dado cualquier valor de n, es necesario evaluar el término exponencial $(1.08)^n$. Si queremos saber a cuánto ascenderá la suma de $1 000 después de 25 años, debemos evaluar $(1.08)^{25}$. Puesto que este tipo de cálculo es tan común, es posible determinar valores para la expresión $(1 + i)^n$ por medio de teclas especiales de funciones en muchas calculadoras o mediante tablas. Se puede utilizar la tabla 1 en la página 10 para evaluar $(1 + 0.08)^{25}$. Con base en la tabla 1,

$$(1 + 0.08)^{25} = 6.8485$$

y

$$f(25) = 1\,000(1.08)^{25} = 1\,000(6.8485) = \$6\,848.50$$

La figura 7.6 es un bosquejo de esta función.

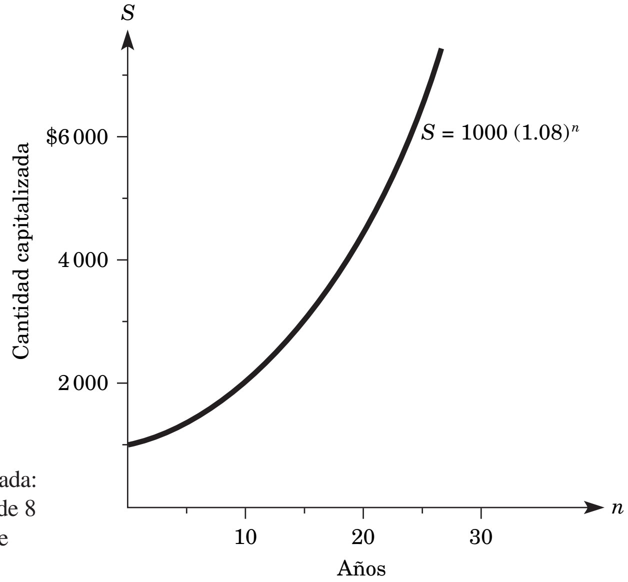


Figura 7.6 Cantidad capitalizada: $1 000 invertidos con una tasa de 8 por ciento por año, capitalizable anualmente.

❑

Ejemplo 7 **(Interés compuesto: capitalización continua)** Cuando se tiene capitalización del interés más de una vez por año, es posible reformular la ecuación (7.6) como

$$\boxed{S = P\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mt}} \qquad \textbf{(7.7)}$$

donde *i equivale a la tasa de interés anual, m es igual al número de periodos de capitalización por año* y *t expresa el número de años.* El producto de *mt* es igual al número de periodos de capitalización durante *t* años.

Los bancos a menudo anuncian la ***capitalización continua*** para las cuentas de ahorros como una manera de promover el negocio. La capitalización continua implica que la capitalización ocurre todo el tiempo. Otra forma de considerar la capitalización continua es que hay un número infinito de periodos de capitalización cada año. En la ecuación (7.7), la capitalización sugeriría que determinamos el valor de *S* conforme *m* se aproxima a $+\infty$.

Es posible demostrar que para la capitalización continua, la ecuación (7.7) se simplifica como

$$\boxed{S = f(t) = Pe^{it}} \qquad \textbf{(7.8)}$$

En el ejemplo 6, calculamos la cantidad a que ascendería una inversión de $1 000 si se invirtieran con una tasa de 8 por ciento por año durante 25 años capitalizable anualmente. Si los $1 000 ganan 8 por ciento por año capitalizado continuamente, ascenderá a una suma

$$\begin{aligned} S &= \$1\,000e^{0.08(25)} \\ &= 1\,000e^{2.0} \end{aligned}$$

A partir de la tabla 1 (en la contraportada frontal del libro) tenemos

$$e^{2.0} = 7.3891$$

y

$$\begin{aligned} S &= \$1\,000(7.3891) \\ &= \$7\,389.10 \end{aligned}$$

Al comparar este valor con el que encontramos en el ejemplo 6, la capitalización continua da como resultado un interés adicional de $\$7\,389.10 - \$6\,848.50 = \$540.60$ durante el periodo de 25 años. Las funciones de capitalización anual y continua aparecen juntas en la figura 7.7.

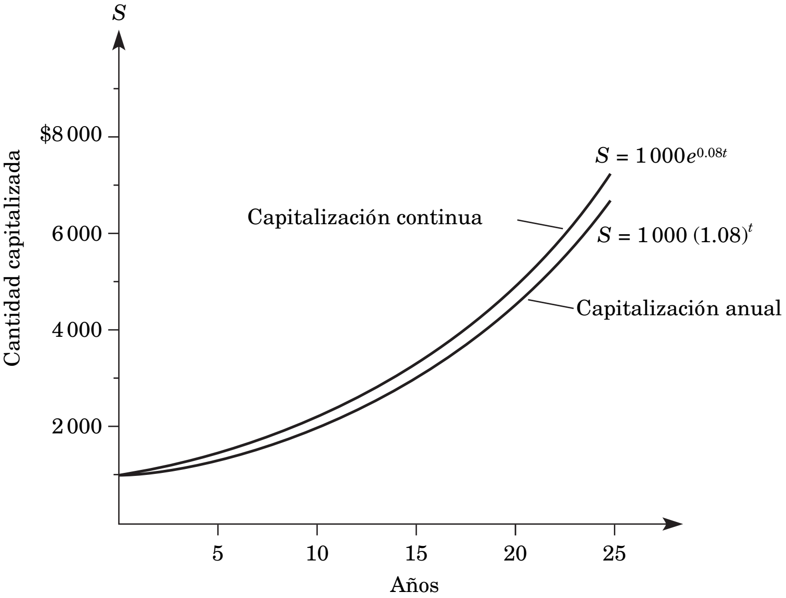


Figura 7.7 Cantidad capitalizada: \$1 000 invertidos con una tasa de 8 por ciento por año, capitalización anual contra continua.

Ejemplo 8

(Proceso de crecimiento exponencial: población) Como se mencionó al principio de esta sección, los *procesos de crecimiento exponencial* se caracterizan por un incremento porcentual constante en el valor con el paso del tiempo. Tales procesos se pueden describir mediante la función general

$$V = f(t)$$

o bien

$$\boxed{V = V_0 e^{kt}} \tag{7.9}$$

donde *V es el valor de la función en el momento t,* V_0 *es el valor de la función en* $t = 0$, *k es el índice de crecimiento porcentual* y *t es el tiempo medido en las unidades apropiadas* (horas, días, semanas, años, etcétera).

La población de un país era de 100 millones de habitantes en 1970. Desde esa época se ha incrementado exponencialmente con un índice constante de 4 por ciento por año. La función que estima el tamaño de la población P (en millones de habitantes) es

$$\begin{aligned} P &= f(t) \\ &= 100e^{0.04t} \end{aligned}$$

donde 100 (millones) es la población en $t = 0$ (1970) y 0.04 es el índice porcentual de crecimiento exponencial.

Se encuentra la población proyectada para 1995 (suponiendo un crecimiento anual continuo con el mismo índice) al evaluar $f(25)$, donde $t = 25$ corresponde a 1995. La población proyectada para el país es

$$\begin{aligned} P &= f(25) \\ &= 100e^{0.04(25)} \\ &= 100e \\ &= 271.83 \text{ (millones)} \end{aligned}$$

En la figura 7.8 se presenta un bosquejo de la función de la población.

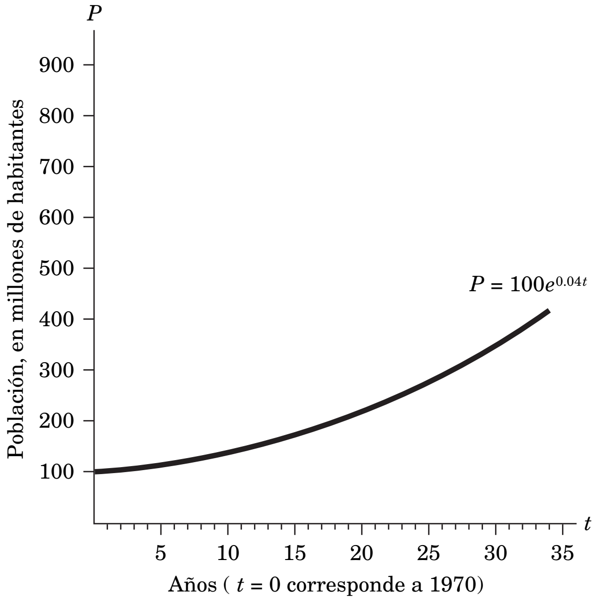


Figura 7.8

Ejercicio de práctica

Para confirmar la naturaleza de las funciones de crecimiento exponencial (es decir, *incrementos iguales* en la variable independiente dan como resultado *aumentos porcentuales constantes* en la variable dependiente), calcule $f(1)$, $f(2)$ y $f(3)$ que reflejen incrementos iguales de 1 en la variable independiente. Luego calcule el incremento porcentual en $f(t)$ entre $t = 1$ y $t = 2$ y entre $t = 2$ y $t = 3$. ¿Son los mismos?

Ejemplo 9

(Procesos de crecimiento exponencial, continuación) Una pregunta interesante en las funciones de crecimiento es, ¿cuánto tiempo pasará para que la función se incremente por algún múltiplo? En el ejemplo 8 puede haber una pregunta relacionada con cuánto tiempo pasará para que la población se duplique. En la ecuación (7.9), el valor de V_0 se duplicará cuando

$$\frac{V}{V_0} = 2$$

Al dividir ambos lados de la ecuación (7.9) entre V_0, obtenemos

$$\frac{V}{V_0} = e^{kt}$$

Por consiguiente, el valor se duplicará cuando

$$e^{kt} = 2$$

Para ilustrar esto, la población del ejemplo 8 se duplicará cuando $V = 200$, o bien

$$200 = 100e^{0.04t}$$

Dividir ambos lados entre 100 da

$$2 = e^{0.04t}$$

Con base en la tabla 1, vemos que

$$e^{0.69} \doteq 2$$

Para determinar cuánto tiempo tarda en duplicarse la población de 100 millones, debemos encontrar el valor de t que hace que

$$e^{0.04t} = 2$$

o

$$e^{0.04t} \doteq e^{0.69}$$

Estas expresiones serán iguales cuando sus exponentes sean iguales, o cuando

$$0.04t = 0.69$$

O bien

$$t = 17.25 \text{ años*}$$

❑

Ejercicio de práctica

¿Qué relación existiría entre V y V_0 si se triplica el valor? ¿Si se cuadruplica? ¿Si se incrementa un 50 por ciento? Determine cuánto tiempo tomará en ocurrir en el ejemplo anterior. *Respuesta*: $V/V_0 = 3$; $V/V_0 = 4$; $V/V_0 = 1.50$; (usando la tabla 1) 27.5 años, 35 años, 10.25 años.

---

* Puede ser más fácil despejar t si comprende los logaritmos. Un planteamiento alternativo y equivalente consistiría en encontrar los logaritmos naturales (sección 7.3) de ambos lados de la ecuación $e^{0.04t} = 2$ y balancearlos al despejar t. Pronto estudiaremos esto.

Ejemplo 10 **(Funciones de decaimiento exponencial)** Un ***proceso de decaimiento exponencial*** es caracterizado por una disminución del porcentaje constante del valor en el tiempo. Esos procesos se describen por la función general

$$V = f(t)$$

o

$$\boxed{V = V_0 e^{-kt}} \qquad \textbf{(7.10)}$$

donde *V es igual al valor de la función en el tiempo t,* V_0 *es igual al valor de la función en t = 0*, y *k es el índice porcentual de decaimiento* (a veces llamada la constante de decaimiento). Compare la ecuación (7.10) con la ecuación (7.9) y note las diferencias.

El valor de reventa V (expresado en dólares) de un cierto tipo de equipo industrial ha sido encontrado para comportarse de acuerdo a la función $V = f(t) = 100\,000e^{-0.1t}$, donde t = años desde la compra original.

a) ¿Cuál era el valor original de una pieza del equipo?

b) ¿Cuál es el valor de reventa esperado después de 5 años? ¿Después de 10 años?

SOLUCIÓN

a) El valor original es el valor de V cuando $t = 0$. En $t = 0$

$$\begin{aligned} V &= 100\,000e^{-0.1(0)} \\ &= 100\,000e^{0} \\ &= 100\,000 \end{aligned}$$

Por eso el valor original V_0 = \$100 000

b)
$$\begin{aligned} f(5) &= 100\,000e^{-0.1(5)} \\ &= 100\,000e^{-0.5} \\ &= 100\,000(0.6065) && \text{(de la tabla 1)} \\ &= \$60\,650 \\ f(10) &= 100\,000e^{-0.1(10)} \\ &= 100\,000e^{-1} \\ &= 100\,000(0.3679) && \text{(de la tabla 1)} \\ &= \$36\,790 \end{aligned}$$

La figura 7.9 presenta una gráfica de esta función de decaimiento.

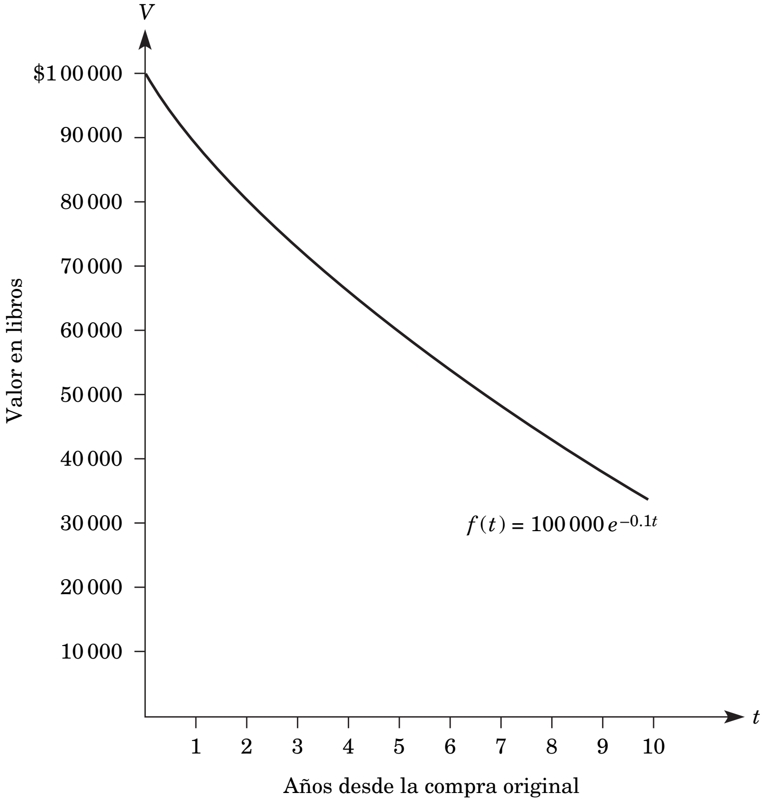


Figura 7.9 Función de depreciación.

Ejemplo 11 **(Cobranza de cuentas)** Una importante institución financiera ofrece una tarjeta de crédito que se puede utilizar a nivel internacional. Los ejecutivos se preguntan cuánto tiempo toma cobrar las cuentas por cobrar por el crédito otorgado en cualquier mes determinado. Los datos recopilados durante varios años han indicado que el porcentaje de cobranza del crédito emitido en cualquier mes determinado es una función exponencial del tiempo desde que se otorgó el crédito. Específicamente, la función que hace una aproximación de esta relación es

$$P = f(t)$$

o

$$P = 0.95(1 - e^{-0.7t}) \qquad t \geq 0$$

donde P *equivale al porcentaje de las cuentas por cobrar (en dólares) cobradas t meses después de que se otorgó el crédito.* En la tabla 7.3 se presentan algunos puntos de datos muestra. Los valores para $e^{-0.7t}$ se pueden encontrar en la tabla 1 en la contraportada frontal o usando una calculadora. En la figura 7.10 se traza la función. Observe las cifras de la tabla 7.3. Para $t = 0, f(t) = 0$, lo cual sugiere que en el momento en que se otorgó el crédito no se habrá cobrado ninguna cuenta.

Tabla 7.3

t	0	1	2	3	4
$e^{-0.7t}$	1	0.4996	0.2466	0.1225	0.0608
$1 - e^{-0.7t}$	0	0.5034	0.7534	0.8775	0.9392
$0.95(1 - e^{-0.7t})$	0	0.4782	0.7156	0.8336	0.8922

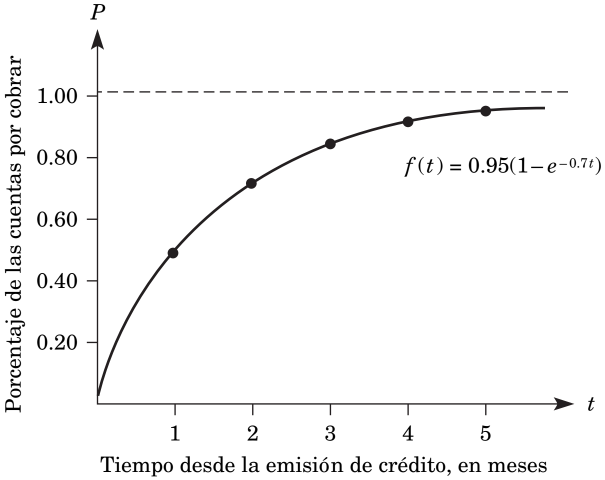


Figura 7.10 Función de respuesta a la cobranza.

Cuando $t = 1$, la función tiene un valor de 0.4782. Esto indica que después de 1 mes se habrán cobrado 47.82 por ciento de las cuentas por cobrar (en dólares). Después de 2 meses, se habrán cobrado 71.56 por ciento. ❑

PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR

¿A cuánto se aproxima el valor de P conforme t se incrementa sin límite? ¿Por qué el valor de P nunca será igual a 1? ¿Piensa que se aplicaría un dominio restringido en este tipo de aplicación?

Sección 7.2 Ejercicios de seguimiento

1. Se hace una inversión de \$200 000 que gana una tasa de interés de 8 por ciento por año. Si el interés se capitaliza continuamente:
   a) Determine la función exponencial que expresa el interés compuesto como una función de los años de la inversión t.
   b) ¿A cuánto ascenderán \$200 000 si se invierten durante 5 años? ¿10 años?

2. Se hace una inversión de \$500 000 que gana una tasa de interés de 7.5 por ciento por año. Si el interés se capitaliza continuamente:
   a) Determine la función exponencial que expresa cantidades de interés compuesto S como una función de los años de la inversión t.
   b) ¿A cuánto ascenderán \$500 000 si se invierten durante 10 años? ¿20 años?

3. En el ejercicio 1, determine el tiempo requerido para que se duplique el valor de la inversión. Para que se cuadruplique.

4. En el ejercicio 2, determine el tiempo requerido para que se duplique el valor de la inversión. Para que se triplique.

5. Se hace una inversión de \$1 millón que gana una tasa de interés de 8.5 por ciento por año. Si el interés se capitaliza continuamente, *a*) ¿a cuánto ascenderá la inversión si se invierte durante 10 años? *b*) ¿25 años? *c*) ¿Cuánto tiempo pasará para que la inversión aumente 50 por ciento?

6. Se hace una inversión de \$250 000 que gana una tasa de interés de 10 por ciento por año. Si el interés se capitaliza continuamente, *a*) ¿a cuánto ascenderá la inversión si se invierte durante 10 años? *b*) ¿20 años? *c*) ¿Cuánto tiempo pasará para que la inversión aumente 150 por ciento?

7. Crecimiento de la población La población P de un país de Sudáfrica ha comenzado a crecer en forma exponencial con un índice constante de 2.5 por ciento por año. El 1 de enero de 1985, la población era de 40 millones de habitantes.
   a) Formule la función de crecimiento exponencial general $P = f(t)$ para la población del país, donde t equivale al tiempo medido en años desde el 1 de enero de 1985.
   b) Si el índice y el patrón de crecimiento continúan, ¿cuál se espera que sea la población al principio de 1995? ¿Al principio del año 2010?

8. En el ejercicio 7, determine el año en que se espera que se duplique la población. ¿En qué año se espera que la población se incremente 50 por ciento?

9. Desperdicios sólidos En una importante ciudad de Estados Unidos, el tonelaje anual de desperdicios sólidos (basura) ha aumentado con un índice exponencial de 8 por ciento por año. Suponga que el actual tonelaje diario es de 2 500 toneladas y el índice y el patrón de crecimiento continúan.
   a) ¿Qué tonelaje diario se espera dentro de 10 años?
   b) La capacidad actual para manejar desperdicios sólidos es de 4 000 toneladas por día. ¿Cuándo dejará de ser suficiente esta capacidad?

10. Valor de recuperación Se ha encontrado que el valor de reventa V de un equipo industrial se comporta de acuerdo con la función

$$V = 250\,000e^{-0.06t}$$

donde t = años desde la compra original.
   a) ¿Cuál era el valor original del equipo?
   b) ¿Cuál es el valor de reventa después de 5 años?

11. En el ejercicio 10, ¿cuánto tiempo pasa para que el valor de reventa del activo llegue a 25 por ciento de su valor original?

12. Especies en peligro de extinción El Departamento del Interior de Estados Unidos estimó que el número de venados de una especie era 60 000 al principio de 1980. Los científicos estiman que la población de la especie disminuye exponencialmente con un índice de 4 por ciento por año.
   a) Formule la función de decremento $P = f(t)$, donde P equivale al número de venados y t es igual al tiempo (en años) medido desde 1980.

b) ¿De cuántos venados se espera que sea la población en el año 2000 si el índice de decaimiento permanece constante?

13. En el ejercicio 12, ¿cuándo se espera que la población sea de 30 000 venados?

14. Durante los pasados 3 años, los precios de los bienes raíces en un área del país han aumentado con un índice exponencial de 4 por ciento por año. Hace 3 años se compró una casa en $120 000.

a) ¿Cuál es su valor esperado actualmente?

b) Suponiendo que la apreciación sigue con el mismo índice, ¿cuál será su valor dentro de 5 años?

15. **Recaudación de fondos** Una organización de caridad nacional planea una campaña para reunir fondos. La experiencia pasada indica que el total de contribuciones recaudadas son una función del tiempo que dura una campaña. En una ciudad se ha determinado una función de respuesta que indica el porcentaje de la población R que hará un donativo como una función del número de días t de la campaña. La función es

$$R = 0.5(1 - e^{-0.05t})$$

a) ¿Qué porcentaje de la población hará un donativo después de 10 días? ¿Luego de 20 días?

b) ¿Cuál es el límite superior del valor de R?

16. **Cobranzas de tarjeta de crédito** Un banco importante ofrece una tarjeta de crédito que se puede usar nacional e internacionalmente. Los datos recopilados con el paso del tiempo indican que el porcentaje de cobranza para el crédito emitido en cualquier mes es una función exponencial del tiempo desde que se otorgó el crédito. Específicamente, la función que hace una aproximación de esta relación es

$$P = f(t) = 0.92(1 - e^{-0.10t}) \qquad t \geq 0$$

donde P equivale al porcentaje de cuentas por cobrar (en dólares) cobradas t meses después de que se otorgó el crédito.

a) ¿Qué porcentaje se espera que se cobre después de 1 mes?

b) ¿Qué porcentaje se espera luego de 3 meses?

c) ¿A qué valor se aproxima P conforme t aumenta sin límite?

17. **Respuesta a la publicidad** Una compañía grande de grabaciones vende cintas y discos compactos (CD) sólo por correo directo. Se hace publicidad por medio de una red de televisión. Mucha experiencia con este tipo de planteamiento de ventas ha permitido que los analistas determinen la respuesta esperada a un programa de publicidad. Específicamente, la función de respuesta para los CD y cintas de música clásica es $R = f(t) = 1 - e^{-0.05t}$, donde R es el porcentaje de clientes en el mercado objetivo que en realidad compran el CD o la cinta y t es el número de veces que aparece un anuncio en la televisión nacional.

a) ¿Qué porcentaje del mercado objetivo se espera que compre una oferta de música clásica si se transmite una vez la publicidad por televisión? ¿5 veces? ¿10 veces? ¿20 veces?

b) Trace la función de respuesta $R = f(t)$.

18. **Función de la demanda** La función de la demanda para una mercancía particular es

$$q = f(p) = 10\,000e^{-0.1p}$$

a) ¿Cuál se espera que sea la demanda con un precio de $5?

b) ¿Cuál se espera que sea la demanda con un precio de $20?

19. **Función exponencial del ingreso** Refiérase al ejercicio anterior. Usando la función de la demanda, cree la función del ingreso total $R = f(p)$. ¿Cuánto se espera que sea el ingreso con un precio de \$10? ¿Cuál se espera que sea la demanda con este precio?

***20.** **Función de Gompertz** Un modelo que se emplea en ocasiones para representar el crecimiento restringido es la función de Gompertz. Este modelo de crecimiento restringido tiene la forma general

$$y = f(t) = pe^{-ce^{-kt}}$$

donde p, c y k son constantes. Si $p = 500$, $c = 0.2$ y $k = 0.1$, determine *a*) $f(0)$ y *b*) $f(10)$.

***21.** Dada la función de Gompertz general del ejercicio 20, *a*) determine $f(0)$ y *b*) determine el valor al que se aproxima y conforme t se incrementa cada vez más.

7.3 Logaritmos y funciones logarítmicas

En esta sección estudiaremos los logaritmos, sus propiedades, su uso en la solución de ecuaciones exponenciales, funciones logarítmicas y aplicaciones selectas.

Logaritmos

Un **logaritmo** es la *potencia* a la que se debe elevar una *base* para dar como resultado un número determinado (es decir, un logaritmo es un exponente). Considere la ecuación

$$2^3 = 8$$

Se puede considerar el exponente 3 como el logaritmo, para la base 2, del número 8. Esto es, *3 es la potencia a la que se tiene que elevar 2 para dar como resultado el número 8.* Podemos expresar esta propiedad de los logaritmos como

$$3 = \log_2 8$$

En general,

$$\boxed{y = b^x \Leftrightarrow x = \log_b y \qquad \text{por} \qquad b > 0}$$

Nos interesaremos en situaciones en que la base b está limitada a valores positivos diferentes de 1.

Ejemplo 12 Los siguientes son enunciados de pares *equivalentes* de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

Ecuación logarítmica	Ecuación exponencial
$4 = \log_2 16$	$\Leftrightarrow 2^4 = 16$
$2 = \log_{10} 100$	$\Leftrightarrow 10^2 = 100$
$3 = \log_3 27$	$\Leftrightarrow 3^3 = 27$
$-1 = \log_{10} 0.1$	$\Leftrightarrow 10^{-1} = 0.1$

Ecuación logarítmica	Ecuación exponencial
$10^4 = 10\,000$	$\Leftrightarrow 4 = \log_{10} 10\,000$
$4^3 = 64$	$\Leftrightarrow 3 = \log_4 64$
$5^2 = 25$	$\Leftrightarrow 2 = \log_5 25$
$10^{-2} = 0.01$	$\Leftrightarrow -2 = \log_{10} 0.01$

Las dos bases que se emplean con mayor frecuencia para los logaritmos son la base 10 y la base e. Es probable que la mayoría de nosotros haya experimentado con *logaritmos de base 10* o ***logaritmos comunes.****[*] Los logaritmos que usan $e = 2.718\ldots$ como la base reciben el nombre de ***logaritmos naturales.***[†] Los logaritmos de esta forma surgen del uso de funciones exponenciales que utilizan e como la base.

Los logaritmos comunes se expresan como

$$x = \log_{10} y$$

Sin embargo, ya que la mayor parte de los cálculos logarítmicos (distintos de la base e) implican la base 10, una manera muy común de expresar tales logaritmos es

$$x = \log y$$

donde la base, aunque no se indica, es implícitamente 10. Los logaritmos de base e o naturales se pueden expresar como

$$x = \log_e y$$

pero por lo general se expresan por medio de

$$x = \ln y$$

Un logaritmo que tiene una base b diferente de 10 o e se expresaría como

$$x = \log_b y$$

---

[*] A veces estos logaritmos se conocen como logaritmos de *Briggs* (por H. Briggs, quien los usó primero).

[†] Los logaritmos naturales reciben el nombre de logaritmos *napierianos* en honor del escocés John Napier.

No se presentarán los procedimientos para determinar valores de logaritmos comunes. Los ejemplos de este libro sólo manejarán logaritmos naturales. La tabla 2 (en la contraportada final del libro) contiene valores de logaritmos naturales. Como una alternativa para las tablas, la mayor parte de las calculadoras de mano tienen una función de logaritmo natural para determinar estos valores. ❑

Propiedades de los logaritmos

El uso de logaritmos puede dar como resultado cierta eficiencia cuando se requieren cálculos de números muy grandes o muy pequeños. En parte, se puede atribuir esta eficiencia a ciertas propiedades de los logaritmos. Éstas son algunas de las propiedades más importantes.

$$\boxed{\text{Propiedad 1: } \log_b uv = \log_b u + \log_b v}$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \log_{10}[(100)(1\,000)] &= \log_{10} 100 + \log_{10} 1\,000 \\ &= 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln 8\,000 &= \ln[(40)(200)] \\ &= \ln 40 + \ln 200 \\ &= 3.6889 + 5.2983 \qquad \text{(de la tabla 2)} \\ &= 8.9872 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Propiedad 2: } \log_b \frac{u}{v} = \log_b u - \log_b v}$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \log_{10} \frac{10\,000}{100} &= \log_{10} 10\,000 - \log_{10} 100 \\ &= 4 - 2 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln 37.5 &= \ln \frac{75}{2} \\ &= \ln 75 - \ln 2 \\ &= 4.3175 - 0.6931 \qquad \text{(de la tabla 2)} \\ &= 3.6244 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Propiedad 3: } \log_b u^n = n \log_b u}$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \log_{10} 100^2 &= 2 \log_{10} 100 \\ &= 2(2) = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ln 10\,000 &= \ln(100)^2 \\ &= 2 \ln 100 \\ &= 2(4.6052) \qquad \text{(de la tabla 2)} \\ &= 9.2104 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Propiedad 4: } \log_b b = 1}$$

Ejemplos: $\log_{10} 10 = 1 \qquad (10^1 = 10)$

$\ln e = 1 \qquad (e^1 = e)$

$$\boxed{\text{Propiedad 5: } \log_b 1 = 0}$$

Ejemplos: $\log_{10} 1 = 0 \qquad (10^0 = 1)$

$\ln 1 = 0 \qquad (e^0 = 1)$

$$\boxed{\text{Propiedad 6: } b^{\log_b x} = x}$$

Ejemplo: $10^{\log_{10} 100} = 10^2 = 100$

$$\boxed{\text{Propiedad 7: } \log_b b^x = x}$$

Ejemplos: $\log_2 2^5 = 5$

$\ln e^3 = 3$

Solución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales

A lo largo del libro hemos tenido que despejar las raíces de ecuaciones. Por lo general, estas ecuaciones han sido de la forma polinomial (con mayor frecuencia lineales, cuadráticas o cúbicas). Los siguientes ejemplos ilustran la solución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales.

Ejemplo 13

Para resolver la ecuación logarítmica

$$\ln x^2 + \ln x = 9$$

Se aplica la propiedad 3, lo que da como resultado

$$\begin{aligned} 2\ln x + \ln x &= 9 \\ 3\ln x &= 9 \\ \ln x &= 3 \end{aligned}$$

Con base en la tabla 2, ln 20 = 2.9957. Por consiguiente, podemos decir que $x \doteq 20$ es la raíz de la ecuación que se da.

Se podría obtener una solución más precisa al expresar la ecuación exponencial que es equivalente a la ecuación ln $x = 3$. La ecuación equivalente es

$$e^3 = x$$

Con base en la tabla 1 o con una calculadora, la solución más precisa es $x = 20.086$. ❑

Ejemplo 14 Para resolver la ecuación logarítmica

$$\ln(x^2 + 2) - \ln x^2 = 2$$

Se aplica la propiedad 2 en el lado izquierdo de la ecuación, lo que da como resultado

$$\ln \frac{x^2 + 2}{x^2} = 2$$

Nuestra comprensión de las relaciones logarítmicas nos permite reformular esta ecuación en la fórmula exponencial equivalente

$$e^2 = \frac{x^2 + 2}{x^2}$$

o con base en la tabla 1,

$$7.3891 = \frac{x^2 + 2}{x^2}$$

$$7.3891\, x^2 = x^2 + 2$$

$$6.3891\, x^2 = 2$$

$$x^2 = \frac{2}{6.3891}$$

$$x^2 = 0.3130$$

y

$$x = \pm 0.5595$$

Ejemplo 15 Para resolver la ecuación exponencial

$$e^{2x} = 5$$

se toma el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación, lo que da como resultado

$$\ln e^{2x} = \ln 5$$

o bien

$$2x = \ln 5$$

Con base en la tabla 2 o con una calculadora, ln 5 es igual a 1.6094 y

$$2x = 1.6094$$

$$x = 0.8047$$

Ejemplo 16 **(El Supertazón: el increíble costo de la participación; Escenario de motivación)** El Supertazón es una extravagancia que se convierte en punto de atención para cientos de millones de fanáticos deportivos cada mes de enero. Para participar en el Supertazón XXV en 1991, el costo de un anuncio de 30 segundos era \$800 000. La figura 7.11 es una gráfica que muestra el costo de los anuncios de 30 segundos para cada uno de los primeros 25 Supertazones. ¿Por qué alguien gastaría tanto dinero por un anuncio de 30 segundos? Porque el Supertazón atrae un público por televisión increíblemente numeroso. Antes del Supertazón XXV, los Supertazones representaban 5 de los 10 públicos de televisión más grandes en la historia y 17 de los principales 50.

A partir de la gráfica, parece que el costo por anuncio de 30 segundos aumenta aproximadamente con una tasa exponencial con el paso del tiempo. Lo que se desea es determinar una función exponencial que se pueda utilizar para hacer una aproximación del costo de la publicidad con el paso del tiempo.

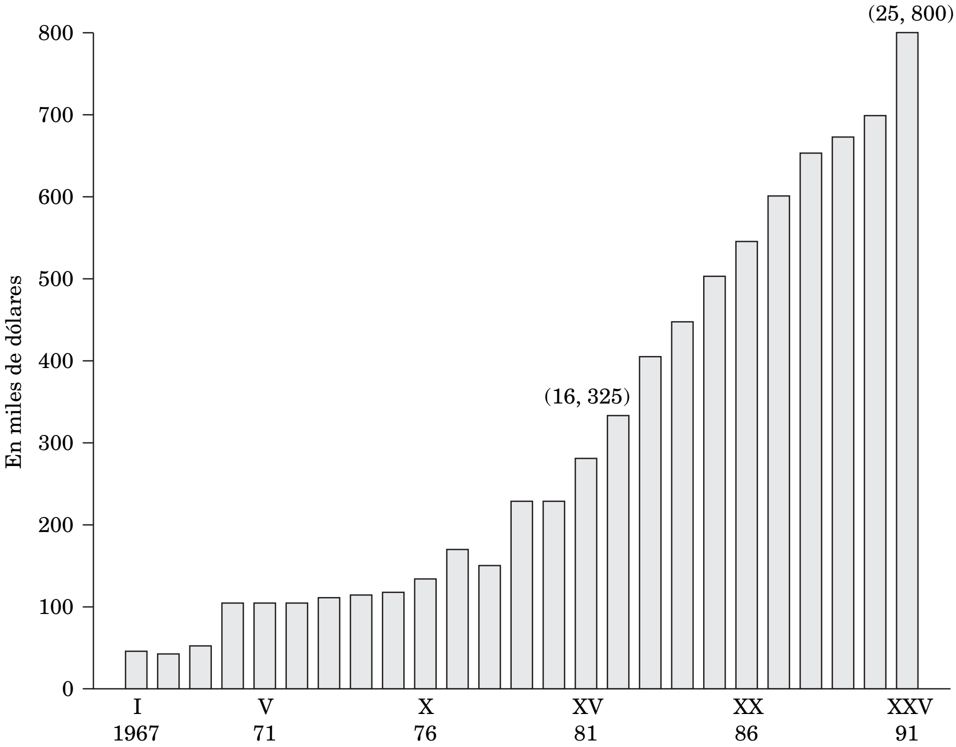


Figura 7.11 El costo de 30 segundos de publicidad durante el Supertazón. (Fuente: Nielsen Media Research)

SOLUCIÓN

Determinemos una función de estimación que suponga el crecimiento exponencial en el costo de los anuncios de 30 segundos. Es decir, determinemos una función que tenga la forma

$$C = f(t) = C_0 e^{it} \tag{7.11}$$

donde *C equivale al costo por anuncio de 30 segundos (en miles de dólares)* y *t es igual al número del Supertazón.* Esta función exponencial tiene dos parámetros que es necesario determinar, C_0 e *i.*

Necesitaremos por lo menos dos puntos de datos para determinar estos parámetros de la función de estimación. Seleccionemos los puntos de datos asociados con los Supertazones XVI y XXV. En el caso del Supertazón XVI, el costo por anuncio era de $325 000 y para el Súpertazón XXV, el costo era de $800 000. Por consiguiente, nuestros dos puntos de datos son (16 ,325) y (25 ,800).

Al sustituir estos puntos de datos en la ecuación (7.11), tenemos

$$325 = C_0 e^{16i}$$

$$800 = C_0 e^{25i}$$

Tomar el logaritmo natural de ambos lados de cada ecuación da

$$\ln(325) = \ln(C_0 e^{16i}) = \ln(C_0) + \ln(e^{16i}) \quad \text{o} \quad 5.7838 = \ln(C_0) + 16i \qquad \textbf{(7.12)}$$

$$\ln(800) = \ln(C_0 e^{25i}) = \ln(C_0) + \ln(e^{25i}) \quad \text{o} \quad 6.6846 = \ln(C_0) + 25i \qquad \textbf{(7.13)}$$

Necesitamos despejar las ecuaciones (7.12) y (7.13) para C_0 e i. Si se sustrae la ecuación (7.12) de la ecuación (7.13),

$$0.9008 = 9i$$

$$0.1001 = i$$

Sustituir este valor en la ecuación (7.13) da

$$6.6846 = \ln(C_0) + 25(0.1001)$$

$$6.6846 = \ln(C_0) + 2.5025$$

$$4.1821 = \ln(C_0)$$

Esta ecuación exponencial equivalente es

$$e^{4.1821} = C_0$$

Usando una calculadora que tiene una función e^x, se obtiene

$$65.5033 = C_0$$

Por tanto, nuestra función de estimación tiene la forma

$$C = f(t) = 65.5033e^{0.1001t}$$

❑

Ejercicio de práctica

Usando nuestra respuesta, estime los costos de la publicidad para los Supertazones XXVI y XXX. *Respuesta*: $884 215; $1 319 622.

Ejemplo 17 **(Crecimiento bacterial)** Se cree que muchos tipos de bacterias crecen exponencialmente de acuerdo con las funciones de la forma

$$\boxed{P = f(t) = P_0 e^{kt}} \qquad \textbf{(7.14)}$$

donde *P equivale a la población en el momento t*, P_0 *da la población en* $t = 0$ y *k es la constante de crecimiento (índice porcentual de crecimiento).* Las funciones de crecimiento exponencial se estudiaron en la sección 7.2. Determine el tiempo requerido para que una población inicial duplique su tamaño.

SOLUCIÓN

Si una población inicial se duplica,

$$\frac{P}{P_0} = 2$$

Si dividimos ambos lados de la ecuación (7.14) entre P_0,

$$\frac{P}{P_0} = e^{kt}$$

La población se duplicará cuando

$$e^{kt} = 2$$

Encontrar el logaritmo natural de ambos lados de esta ecuación da

$$kt = \ln 2$$

y el tiempo requerido para la duplicación es

$$\boxed{t = \frac{\ln 2}{k}} \tag{7.15}$$

Si en el caso de una bacteria dada la constante de crecimiento equivale a 0.4 y *t* se expresa en horas, el tiempo necesario para que se duplique la población es

$$\begin{aligned} t &= \frac{\ln 2}{0.4} \\ &= \frac{0.6932}{0.4} = 1.733 \text{ horas} \end{aligned}$$

❑

PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR

¿El tiempo de duplicación que se determinó por medio de la ecuación (7.15) es apropiado sólo para que la población inicial duplique su tamaño, o es generalizado, dada la población en *cualquier* momento?

Ejemplo 18 **(Vida media)** Una función de decaimiento exponencial tiene la forma general

$$\boxed{V = V_0 e^{-kt}} \tag{7.16}$$

donde *V equivale al valor de la función en el momento t*, V_0 *es el valor de la función en* $t = 0$ y *k es la constante de decaimiento (tasa porcentual de decaimiento).* Muchos procesos naturales se caracterizan por un comportamiento de decaimiento exponencial. Uno de tales procesos es el decaimiento de ciertas sustancias radiactivas. Una medida que se cita con frecuencia al analizar una sustancia radiactiva es su ***vida media***. Ésta es el tiempo requerido para que la cantidad de una sustancia se reduzca por un factor de $\frac{1}{2}$. Para las funciones de decaimiento exponencial con la forma de la ecuación (7.16), la vida media es una función del decaimiento constante.

Suponga que la cantidad de una sustancia radiactiva se determina por medio de la ecuación (7.16). La cantidad de la sustancia se reducirá a la mitad cuando

$$\frac{V}{V_0} = 0.5$$

o cuando

$$e^{-kt} = 0.5$$

Tomar el logaritmo natural de ambos lados de esta ecuación da

$$-kt = \ln 0.5$$

y

$$\boxed{t = \frac{\ln 0.5}{-k}} \tag{7.17}$$

La constante de decaimiento para el estroncio 90 es $k = 0.0244$, donde t se mide en años. Una cantidad de estroncio 90 disminuirá a la mitad de su tamaño cuando

$$\begin{aligned} t &= \frac{\ln 0.5}{-0.0244} \\ &= \frac{-0.6932}{-0.0244} \doteq 28.40 \text{ años} \end{aligned}$$

❑

Funciones logarítmicas

Cuando se expresa una variable dependiente como una función del logaritmo de otra variable, la función se denomina ***función logarítmica***.

> Una ***función logarítmica*** de base b tiene la forma
>
> $$y = f(x) = \log_b u(x) \tag{7.18}$$
>
> donde $u(x) > 0$, $b > 0$, pero $b \neq 1$.

Los siguientes son ejemplos de funciones logarítmicas:

$$f(x) = \log x$$

$$f(x) = \ln x$$

$$f(x) = \log(x - 1)$$

$$f(x) = \ln(x^2 - 2x + 1)$$

Ejemplo 19 Suponga que queremos trazar la gráfica de la función $y = \ln x$, donde $x > 0$. La función $y = \ln x$ se puede graficar usando dos procedimientos. Si se tienen disponibles valores de $\ln x$ (de tablas o una calculadora de mano), es posible graficar directamente la función. Usando la tabla 2 al final del libro, los valores muestra de $\ln x$ aparecen en la tabla 7.4. La forma general de esta función se indica en la figura 7.12.

Tabla 7.4

x	**0.1**	**0.5**	**1**	**10**	**100**	**200**	**300**
$\ln x$	−2.3026	−0.6932	0	2.3026	4.6052	5.2983	5.7038

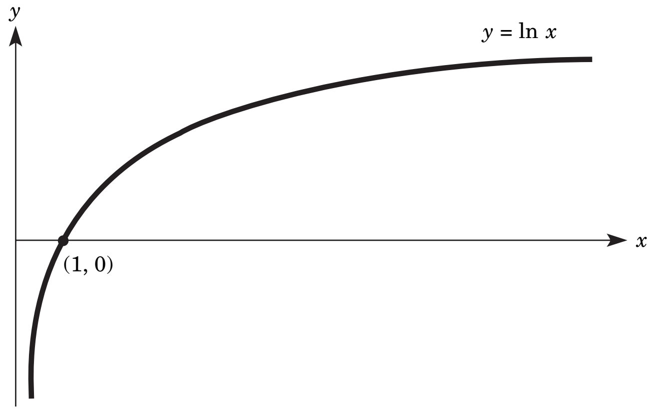


Figura 7.12

❑

Un procedimiento alternativo para graficar una función logarítmica consiste en reformular la función en su forma exponencial equivalente. La forma exponencial equivalente de $y = \ln x$ es

$$e^y = x$$

Tabla 7.5

y	**−1**	**−0.5**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$x = e^y$	0.3679	0.6065	1.000	2.7183	7.3891	20.086	54.598

Al *suponer valores para* y y calcular los valores correspondientes de x, se puede generar un conjunto de puntos de datos. Se han identificado puntos de datos muestra usando la tabla 1 o una calculadora y se presentan en la tabla 7.5. Si se grafican estos puntos (recuerde que x es la variable independiente en la función del interés, $y = \ln x$), el trazo será idéntico al de la figura 7.12.

Un análisis de la figura 7.12 indica que la función del logaritmo natural $y = \ln x$ es una función creciente; asimismo, $y > 0$ cuando $x > 1$, $y = 0$ cuando $x = 1$ y $y < 0$ cuando $0 < x < 1$.

Ejemplo 20 Para trazar la función logarítmica

$$y = 5 - 3 \ln(x + 1) \qquad x > -1$$

se determinan pares ordenados de valores (x, y). En la tabla 7.6 se presentan valores muestra. En la figura 7.13 aparece un bosquejo de la función. Nótese que la función es una función decreciente y que la curva tiene una asíntota vertical de $x = -1$.

Tabla 7.6

x	-0.5	0	1	2	5	10
$y = 5 - 3 \ln(x + 1)$	7.0796	5	2.9204	1.7042	-0.3754	-2.1937

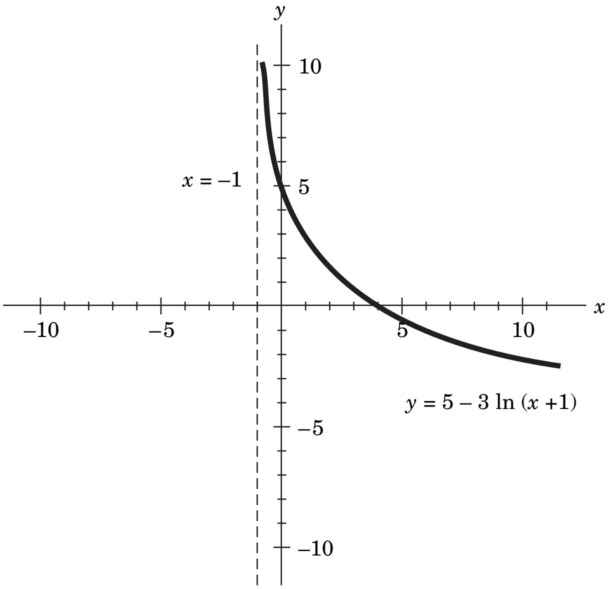


Figura 7.13

Ejemplo 21 **(Administración del bienestar)** Un organismo de bienestar estatal de reciente creación intenta determinar el número de analistas que se deben contratar para procesar solicitudes de bienestar. Los expertos en eficiencia estiman que el costo promedio C de procesar una solicitud es una función del número de analistas x. Específicamente, la función del costo es

$$C = f(x) = 0.001x^2 - 5 \ln x + 60$$

Dada esta función logarítmica:
a) Determine el costo promedio por solicitud si se usan 20 analistas.
b) Determine el costo promedio si se emplean 50 analistas.
c) Trace la función.

SOLUCIÓN

a)
$$\begin{aligned} f(20) &= 0.001(20)^2 - 5\ln(20) + 60 \\ &= 0.40 - 5(2.9957) + 60 \\ &= \$45.42 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} f(50) &= 0.001(50)^2 - 5\ln(50) + 60 \\ &= 2.50 - 5(3.9120) + 60 \\ &= \$42.94 \end{aligned}$$

c) La figura 7.14 presenta un bosquejo de esta función. Volveremos a revisar esta aplicación en el capítulo 17.

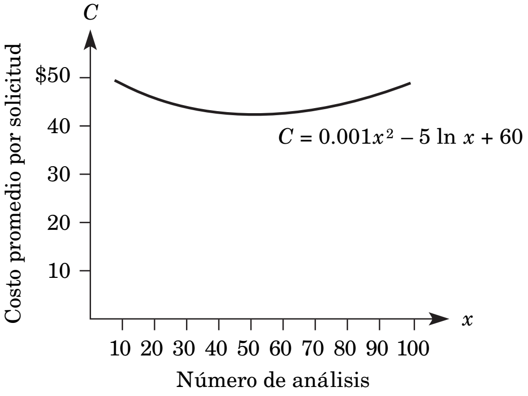


Figura 7.14

Ejemplo 22 **(Retención de la memoria)** Se efectuó un experimento para determinar los efectos del tiempo transcurrido sobre la memoria de una persona. Se pidió a los sujetos que vieran una fotografía que contenía muchos objetos diferentes. En distintos intervalos de tiempo después de esto, se les pedía que recordaran tantos objetos como pudieran. Con base en el experimento, se desarrolló la siguiente función

$$R = f(t) = 84 - 25\ln t \qquad t \geq 1$$

donde *R representa la memoria porcentual promedio* y *t es igual al tiempo desde el estudio de la fotografía (en horas).*
a) ¿Cuál es la memoria porcentual promedio 1 hora después de estudiar la fotografía?
b) ¿Cuál es el porcentaje luego de 10 horas?
c) Trace la función.

SOLUCIÓN

a) $f(1) = 84 - 25 \ln(1) = 84 - 25(0) = 84$ por ciento.

b) $f(10) = 84 - 25 \ln(10) = 84 - 25(2.3026) = 26.435$ por ciento.

c) La figura 7.15 presenta un bosquejo de la función.

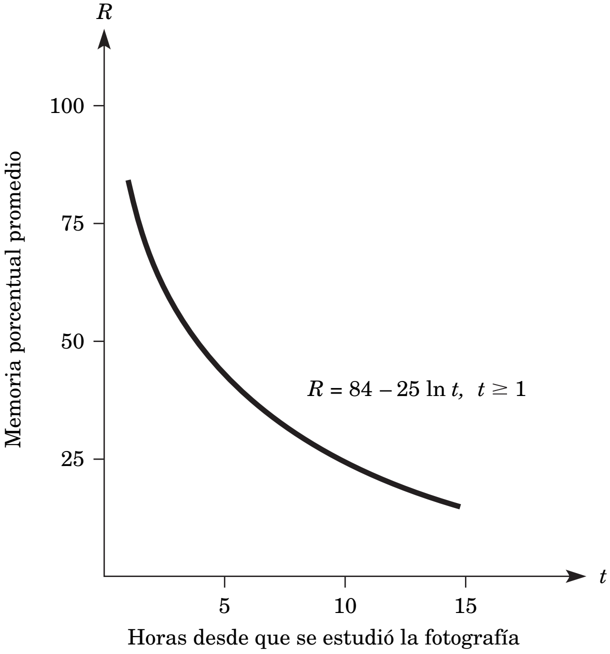


Figura 7.15 Horas desde que se estudió la fotografía.

❑

Sección 7.3 Ejercicios de seguimiento

Para cada una de las siguientes ecuaciones exponenciales, formule la ecuación logarítmica equivalente.

1. $5^2 = 25$
2. $2^5 = 32$
3. $4^3 = 64$
4. $6^4 = 1\,296$
5. $7^3 = 343$
6. $3^5 = 243$
7. $8^4 = 4\,096$
8. $5^4 = 625$
9. $4^6 = 4\,096$
10. $10^3 = 1\,000$
11. $5^{-2} = 0.04$
12. $2^{-3} = \frac{1}{8}$
13. $(0.2)^{-4} = 625$
14. $(0.5)^{-3} = 8$
15. $(0.4)^{-3} = 15.625$
16. $(0.1)^{-4} = 10\,000$
17. $2^{-4} = 0.0625$
18. $4^{-3} = 0.015625$
19. $(0.2)^{-3} = 125$
20. $(0.25)^{-2} = 16$

Para cada una de las siguientes ecuaciones logarítmicas, formule la ecuación exponencial equivalente.

21. $\log_2 128 = 7$
22. $\log_2 64 = 6$
23. $\log_4 64 = 3$
24. $\log_4 256 = 4$
25. $\log_3 729 = 6$
26. $\log_3 81 = 4$
27. $\log_2 0.0625 = -4$
28. $\log_2 0.25 = -2$
29. $\log_5 3\,125 = 5$
30. $\log_5 625 = 4$

31. $\log_{0.1} 10\,000 = -4$
32. $\log_{0.1} 1\,000 = -3$
33. $\log_{0.2} 25 = -2$
34. $\log_{0.2} 625 = -4$
35. $\log_{0.25} 64 = -3$
36. $\log_{0.25} 16 = -2$
37. $\ln 5 = 1.6094$
38. $\ln 3 = 1.0986$
39. $\ln 100 = 4.6052$
40. $\ln 20 = 2.9957$

Usando la tabla 2 o una calculadora, determine lo siguiente.

41. $\ln 600$
42. $\ln 40$
43. $\ln 80$
44. $\ln 200$
45. $\ln 0.1$
46. $\ln 17.5$
47. $\ln 0.75$
48. $\ln 0.5$
49. $\ln 0.01$
50. $\ln 160$
51. $\ln 10\,000$
52. $\ln 425$
53. $\ln 750$
54. $\ln 150$
55. $\ln 2\,400$
56. $\ln 1\,600$
57. $\ln 1\,000\,000$
58. $\ln 25\,000$
59. $\ln 675$
60. $\ln 1\,050$

Resuelva las ecuaciones siguientes.

61. $3 \ln 2x - 4 = 2 \ln 2x$
62. $\ln x^3 - \ln x = 2$
63. $x^2 \ln x - 4 \ln x = 0$
64. $x \ln x - \ln x = 0$
65. $\ln(x^2 + 3) - \ln x^2 = 1$
66. $\ln(x + 1) - \ln x = 0.5$
67. $e^{-2x} = 40$
68. $e^{3x} = 20$
69. $e^{-0.25x} = 16$
70. $5e^{x^2} = 400$
71. $e^{2.5x} = 40$
72. $3e^{2x} = 60$
73. $3e^{-2x} = 75$
74. $5e^{-1.5x} = 125$
75. $x^2 \ln x - 9 \ln x = 0$
76. $2 \ln x^4 - \ln x^2 = 12$
77. $\ln(x - 3) - \ln x = 1.5$
78. $x^4 \ln x - \ln x = 0$
79. $3e^{-0.5x} = 10$
80. $10e^{5x} = 25$

Trace las siguientes funciones logarítmicas.

81. $f(x) = \ln(x/4)$
82. $f(x) = \ln x^3$
83. $f(x) = -2 \ln(x + 8)$
84. $f(x) = 10 - 3 \ln x$
85. $f(x) = \ln(x^2 + 10)$
86. $f(x) = \ln(3x - 5)$
87. $f(x) = \ln(x^2 - 5) + 10$
88. $f(x) = \ln(10 - x) - 5$
89. $f(x) = \ln(x + 3)/2$
90. $f(x) = 10 - \ln x$

91. Revisión del Supertazón Dado el resultado del ejemplo 16, ¿en qué Supertazón se espera que los costos de la publicidad superen $1 millón por anuncio de 30 segundos?

92. Disminución de la defensa La figura 7.16 ilustra los gastos reales y proyectados para la compra, el desarrollo, la evaluación y el mantenimiento de armas. Los datos para los años fiscales de 1989 y 1990 son reales, en tanto que los datos para los años fiscales posteriores a 1990 son proyecciones de la Electronic Industries Association (Asociación de Industrias Electrónicas). Se podría hacer una aproximación de la disminución de los gastos por medio de una función de decremento exponencial $V = f(t) = V_0e^{-it}$, donde V expresa los gastos anuales (en miles de millones) y t representa el tiempo medido desde el año fiscal de 1989.

93. Tasas de natalidad La figura 7.17 ilustra datos sobre el número de infantes nacidos con vida de mujeres no casadas (de 20 a 24 años de edad) por 1 000 infantes nacidos con vida de mujeres

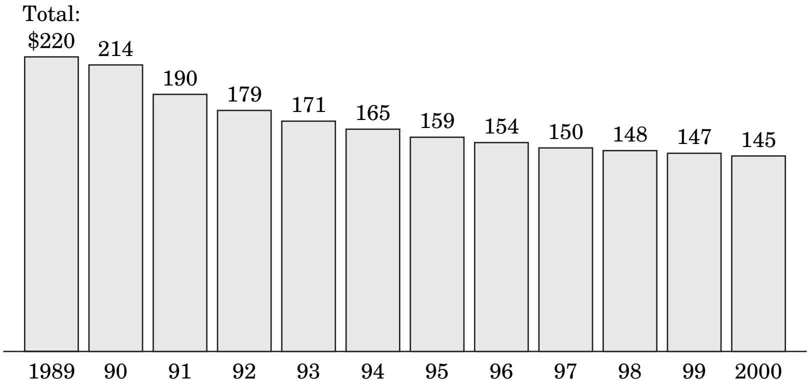


Figura 7.16 Total de gastos de procuración del Pentágono (en miles de millones de dólares). (Fuente: Electronic Industries Association)

de todas las edades entre mediados de la década de 1960 y mediados de la década de 1970. Es posible hacer una aproximación del incremento en las tasas de natalidad usando una función de crecimiento exponencial. Dado que las tasas de natalidad para estas mujeres por un total de 1 000 nacimientos fueron 71 y 92 durante 1966 y 1971, respectivamente, determine la función de crecimiento exponencial

$$R = f(t) = R_0 e^{it}$$

donde R equivale a la tasa de natalidad estimada y t es igual al tiempo medido en años desde 1966.

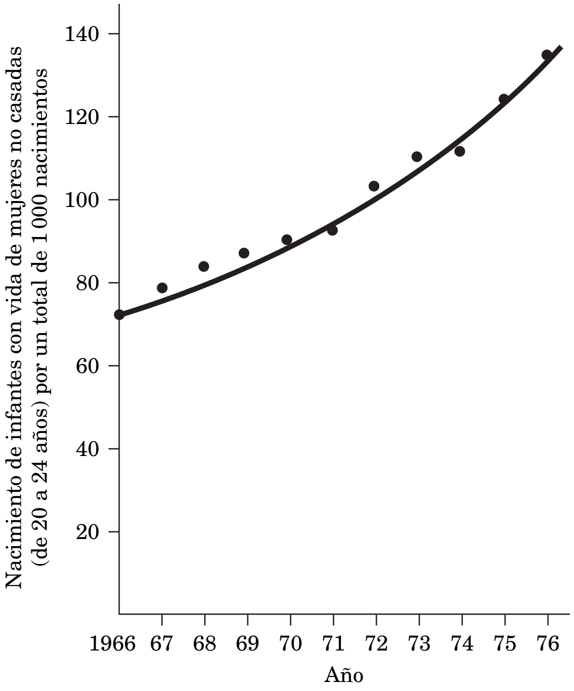


Figura 7.17 Nacimientos de infantes con vida de mujeres no casadas (de 20 a 24 años de edad) por 1 000 nacimientos de todas las mujeres. (Fuente: Division of Vital Statistics, National Center for Health Statistics)

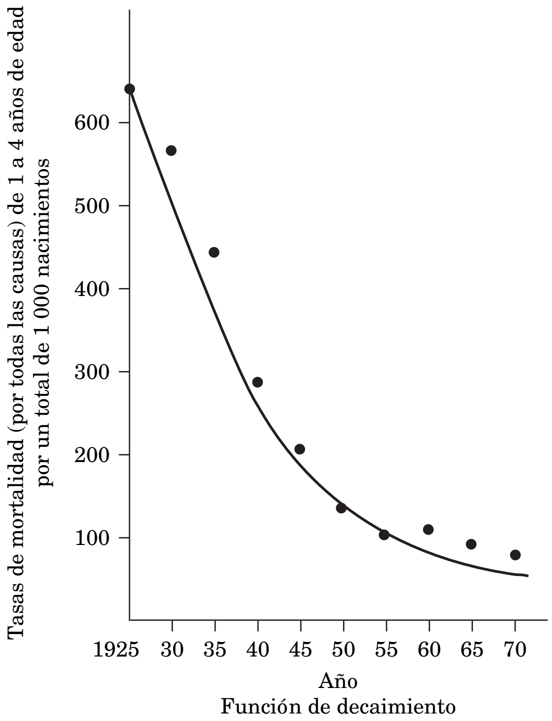


Figura 7.18 Tasas de mortalidad de infantes. (Fuente: Division of Vital Statistics, National Center for Health Statistics)

94. **Tasas de mortalidad de infantes** La figura 7.18 presenta datos sobre las tasas de mortalidad en Estados Unidos en niños de 1 a 4 años de edad. Las tasas de mortalidad son muertes por 100 000 niños en este grupo de edad. Durante este siglo ha habido un decremento constante en esta tasa, el cual se puede estimar mediante una función de decaimiento exponencial. Dado que las tasas de mortalidad por 100 000 niños fueron 202 y 94, respectivamente, en los años de 1945 y 1970, determine la función de estimación

$$R = f(t) = R_0 e^{-it}$$

donde R representa la tasa de mortalidad por 100 000 niños y t expresa el tiempo medido en años desde 1940.

***95.** Dada la función logarítmica general

$$y = a \ln(x + b) - c$$

donde a, b y c son constantes, determine la expresión para *a*) la intersección con el eje x y *b*) la intersección con el eje y.

***96.** Dada la función exponencial general

$$y = -e^{kx} + c$$

donde k y c son constantes, determine la expresión para *a*) la intersección con el eje x y *b*) la intersección con el eje y.

97. Una compañía contrata personal para trabajar en su planta. Para el trabajo que las personas realizarán, los expertos en eficiencia estiman que el costo promedio C de hacer la tarea es una función del número de personas contratadas x. Específicamente,

$$C = f(x) = 0.005x^2 - 0.49 \ln x + 5$$

a) ¿Cuál es el costo promedio esperado si se contrata a 10 personas? ¿20 personas?
b) Trace la función del costo promedio.

98. **Crecimiento bacterial** Un cultivo de la bacteria *E. coli* crece en un medio que consiste en sales inorgánicas y glucosa. La bacteria tiene una población inicial de 10^6 por mililitro y crece con una tasa exponencial de $k = 0.7$.
a) Determine la función del crecimiento exponencial $f(t)$, donde t se da en horas.
b) ¿En cuánto tiempo se duplica?
c) ¿En cuánto tiempo se triplica?

99. **Crecimiento bacterial** Una bacteria particular crece con una tasa exponencial con la constante de crecimiento $k = 0.6$. La bacteria tiene una población inicial de 10^5 por mililitro.
a) Determine la función del crecimiento exponencial $f(t)$, donde t se da en horas.
b) ¿En cuánto tiempo se duplica?
c) ¿En cuánto tiempo se triplica?

100. Un cultivo de levadura crece con una tasa exponencial. La población del cultivo se duplica después de 5 horas. Determine la constante de crecimiento k.

101. Una sustancia radiactiva tiene una constante de decaimiento $k = 0.350$. Si t se mide en horas, determine la vida media para la sustancia. ¿Cuál es el cuarto de vida (tiempo para reducir su cantidad $\frac{1}{4}$)?

102. Un isótopo radiactivo empleado para revisar la glándula tiroides tiene una constante de decremento $k = 0.150$. Si se administra un indicador radiactivo en el torrente sanguíneo:
a) Determine la función de decaimiento exponencial $f(t)$, donde t se expresa en días.
b) ¿Qué cantidad de radiactividad se espera que haya en la sangre después de 8 días?
c) ¿Cuál es la vida media del isótopo?

103. Una sustancia radiactiva tiene una vida media de 20 000 años. Determine la constante de decremento k.

104. Se puede describir la cantidad de un medicamento particular contenida en el torrente sanguíneo por medio de una función de decaimiento exponencial donde t se mide en horas. Si la vida media del medicamento es de 4 horas, ¿cuál es la constante de decaimiento k?

105. **Retención de la memoria** Un experimento similar al analizado en el ejemplo 22 dio como resultado una función de estimación

$$R = f(t) = 90 - 20 \ln t \qquad t \geq 1$$

donde R equivale a la memoria porcentual promedio y t es igual al tiempo medido en horas desde que se estudió la fotografía.
a) ¿Cuál es la memoria porcentual promedio después de 1 hora? ¿Luego de 5 horas? ¿Después de 10 horas?
b) Trace esta función.

❑ TÉRMINOS Y CONCEPTOS CLAVE

capitalización continua 279
conversión a funciones de base *e* 275
función exponencial 267
función exponencial modificada 274
funciones exponenciales de base *e* 272
logaritmo 288
logaritmo común 289
logaritmo natural 289

proceso de crecimiento exponencial 280
proceso de decaimiento exponencial 283
solución de ecuaciones logarítmicas y exponenciales 291

FÓRMULAS IMPORTANTES

$y = f(x) = 1 - e^{-mx}$	**Función exponencial modificada**	**(7.5)**
$S = P(1 + i)^n$	**Interés compuesto**	**(7.6)**
$S = Pe^{it}$	**Interés compuesto (capitalización continua)**	**(7.8)**
$V = V_0 e^{kt}$	**Proceso de crecimiento exponencial**	**(7.9)**
$V = V_0 e^{-kt}$	**Proceso de decaimiento exponencial**	**(7.10)**
$t = \dfrac{\ln 2}{k}$	**Tiempo de duplicación (crecimiento exponencial)**	**(7.15)**
$t = \dfrac{\ln 0.5}{-k}$	**Vida media (decaimiento exponencial)**	**(7.17)**
$y = f(x) = \log_b a(x)$	**Función logarítmica de base *b***	**(7.18)**

EJERCICIOS ADICIONALES

SECCIÓN 7.1

En los ejercicios 1 a 10, determine $f(-3)$, $f(0)$ y $f(2)$.

1. $f(x) = e^{x/3}$
2. $f(x) = e^{x^2/4}$
3. $f(x) = 5(1 - e^x)$
4. $f(x) = 4(1 - e^{2x})$
5. $f(x) = e^{-2x}$
6. $f(x) = e^{-0.5x}$
7. $f(x) = x^2 e^x$
8. $f(x) = x^3 e^{-x}$
9. $f(x) = 4 - 3^x$
10. $f(x) = x/e^x$

Convierta cada una de las siguientes funciones en funciones exponenciales de base *e*.

11. $f(x) = (4.8)^x$
12. $f(x) = 30(2.56)^{x^2}$
13. $f(x) = 5(0.4)^{x/2}$
14. $f(x) = -6(85)^{x/3}$
15. $f(x) = 10^x$
16. $f(x) = 5(200)^{x^2}$
17. $f(x) = 40/(5)^x$
18. $f(x) = 15/(40)^x$
19. $f(x) = 5/(1.31)^{2x}$
20. $f(x) = (31.5)^x$

SECCIÓN 7.2

21. **Valor presente: capitalización continua** Suponiendo una capitalización continua, el valor presente *P* de *S* dólares *t* años en el futuro se puede expresar mediante la función

$$P = f(t) = Se^{-it}$$

La pregunta que esta función implica es, "¿qué cantidad de dinero *P* se debe invertir hoy para que aumente a una cantidad de *S* en *t* años?" Se supone que el dinero recibirá una tasa de interés de 10 por ciento por año capitalizada continuamente, ¿qué cantidad se debe depositar hoy si se desea tener $100 000 dentro de 12 años?

22. **Valor presente: capitalización continua** Refiérase al ejercicio 21 para una descripción del concepto del valor presente. Suponiendo un interés de 8 por ciento por año capitalizado continuamente, ¿cuánto dinero se debe invertir hoy para acumular $50 000 en 6 años?

23. Se estima que la población de una especie de pez particular es de 500 millones. Los científicos estiman que la población crece exponencialmente con una tasa de 6 por ciento por año.

a) Determine la función de crecimiento exponencial $P = f(t)$, donde P equivale a la población del pez (en millones) y t es igual al tiempo medido en años desde hoy.

b) Si la tasa y el patrón de crecimiento continúan, ¿cuál se espera que sea la población del pez dentro de 25 años?

24. **Servicios públicos** El número de teléfonos nuevos instalados cada día en una ciudad particular actualmente es de 250. Funcionarios de la compañía de teléfonos creen que el número de instalaciones nuevas se incrementará en forma exponencial con una tasa de 5.5 por ciento por año.

a) Determine la función de estimación exponencial $N = f(t)$, donde N es el número de instalaciones por día y t es igual al tiempo medido en años.

b) Si persiste el patrón de crecimiento, ¿cuál es el índice diario de instalaciones que se espera dentro de 5 años desde hoy? ¿Dentro de 20 años desde hoy?

25. **Especies en peligro de extinción** La población de una clase particular de una especie salvaje en peligro de extinción disminuye exponencialmente con una tasa de 4 por ciento por año.

a) Si se estima que la población actual es de 180 000 ejemplares, determine la función de decaimiento exponencial $P = f(t)$, donde P es la población estimada de la especie y t representa el tiempo medido en años.

b) ¿Cuál se espera que sea la población en 4 años? ¿En 10 años?

26. **Funciones exponenciales de demanda/ingreso** La función de la demanda para un producto particular es

$$q = f(p) = 200\,000\,e^{-0.15p}$$

donde q es igual a la demanda (en unidades) y p equivale al precio (en dólares).

a) ¿Cuál se espera que sea la demanda con un precio de \$20?

b) Construya la función del ingreso total $R = f(p)$.

c) ¿Cuál se espera que sea el ingreso total con un precio de \$25? ¿Cuál es la demanda con este precio?

27. **Distribución de las patrullas policiacas** Un departamento de policía determinó que el índice de crímenes diarios promedio depende del número de oficiales asignados a cada turno. La función que describe esta relación es

$$\begin{aligned} N &= f(x) \\ &= 300 \quad\quad 8xe^{-0.03x} \end{aligned}$$

donde N equivale al índice de crímenes diarios y x es el número promedio de oficiales asignados a cada turno. ¿Cuál es el índice de crímenes diarios promedio si se asignan 20 oficiales? ¿Si se asignan 40 oficiales?

28. **Confiabilidad del producto** Un fabricante de baterías para radios portátiles, juguetes, linternas, etcétera, estima que el porcentaje P de las baterías fabricadas que tienen una vida útil de por lo menos t horas se describe por medio de la función

$$P = f(t) = e^{-0.25t}$$

¿Qué porcentaje de las baterías se espera que duren como mínimo 5 horas? ¿Por lo menos 10 horas?

29. **Curvas de aprendizaje** Es posible utilizar funciones exponenciales para describir el proceso de aprendizaje. Dicha función exponencial tiene la forma

$$y = f(x) = a - be^{-kx}$$

donde a, b y k son positivos. Para esta función de la *curva de aprendizaje* general, y representa alguna medida del grado de aprendizaje y x el número de refuerzos de aprendizaje.

Los ingenieros industriales han estudiado una posición específica en una línea de ensamblado. La función

$$y = f(x) = 120 - 80e^{-0.30x}$$

es la función de la curva de aprendizaje que describe el número de unidades terminadas por hora y para un empleado común como una función del número de horas de experiencia x que el empleado tiene con el puesto. *a*) ¿Cuál es la tasa por hora después de 5 horas de experiencia? *b*) ¿Después de 10 horas?

30. Dada la función de la curva de aprendizaje del ejercicio anterior, trace $f(x)$. ¿Hay un límite superior para el valor de y?

31. Una organización de investigación de mercados cree que si una compañía gasta x millones de dólares en publicidad por televisión, se estima la utilidad total mediante la función

$$P = f(x) = 50x^2e^{-0.5x}$$

¿Cuál es la utilidad esperada si se gastan \$5 millones en publicidad por televisión? ¿Si se gastan \$10 millones?

SECCIÓN 7.3

Resuelva las siguientes ecuaciones.

32. $\ln x^4 - \ln x^2 = 8$

33. $x^2 \ln x - 64 \ln x = 0$

34. $x \ln x - 6 \ln x = 0$

35. $e^{x^2} = 400$

36. $e^{-5x} = 80$

37. $5e^{-0.2x} = 20$

38. $x \ln x + 5 \ln x = 0$

39. $e^{3x^2} = 150$

40. **Disponibilidad de médicos** La figura 7.19 ilustra el crecimiento relativo en el número de médicos en Estados Unidos por una población de 100 000 habitantes. El número de médicos

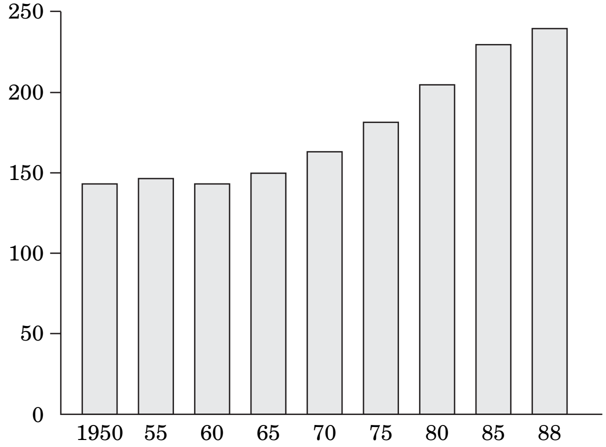


Figura 7.19 Número de médicos por una población de 100 000 habitantes. (Fuente: American Medical Association)

por una población de 100 000 habitantes se estima por medio de una función de crecimiento exponencial. Usando los datos de 1955 (144 médicos) y 1970 (162 médicos):

a) Determine la función de estimación exponencial $n = f(t)$, donde n es igual al número de médicos por 100 000 habitantes y t equivale a los años desde 1950.

b) De acuerdo con esta función, estime el número de médicos en el año 2000.

41. Medidas enérgicas del combate al narcotráfico La figura 7.20 ilustra una tendencia incremental al número de arrestos por drogas cada año en Estados Unidos. Se puede estimar que el número de arrestos crece con un índice exponencial. Si el número de arrestos era de 800 000 en 1985 y 1 340 000 en 1989:

a) Determine la función de estimación exponencial $A = f(t)$, donde A es el número de arrestos por año (en miles) y t es el tiempo medido en años desde 1985.

b) De acuerdo con la función de la parte *a*), estime el número de arrestos para 1995. Estime el número para el año 2000.

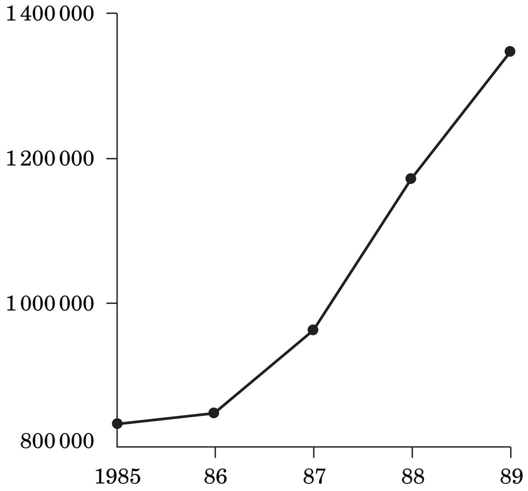


Figura 7.20 Número de arrestos por delitos de abuso de drogas. (Fuentes: FBI Uniform Crime Reports, DEA)

42. Problemas de ahorros y préstamo A finales de la década de 1980 y principios de la década de 1990, las instituciones financieras pasaron por dificultades asociadas con los préstamos incobrables. La figura 7.21 indica los montos anuales (en miles de millones de dólares) de bienes raíces recuperados por asociaciones de ahorros y préstamo en Estados Unidos. Como se puede apreciar, las cantidades recuperadas aumentan con un rápido índice. Se puede hacer una aproximación del incremento como un proceso de crecimiento exponencial. Utilizando los datos de 1982 ($2.6 mil millones) y 1989 ($33.0 mil millones):

a) Determine la función de estimación exponencial $R = f(t)$, donde R equivale a la cantidad de bienes raíces recuperados (en miles de millones de dólares) y t es igual al tiempo medido en años desde 1982.

b) Usando la función de la parte *a*), estime las cantidades recuperadas para 1984 y 1986. ¿Cómo se comparan estos valores con los datos de la figura 7.21?

43. Un cultivo bacterial crece con una tasa exponencial. La población del cultivo se duplica después de 6 horas. Determine la constante de crecimiento k.

44. Un isótopo radiactivo que se usa para revisar la glándula tiroides tiene una constante de decaimiento $k = 0.250$. Si se administra un indicador radiactivo de 30 unidades del isótopo en el torrente sanguíneo:

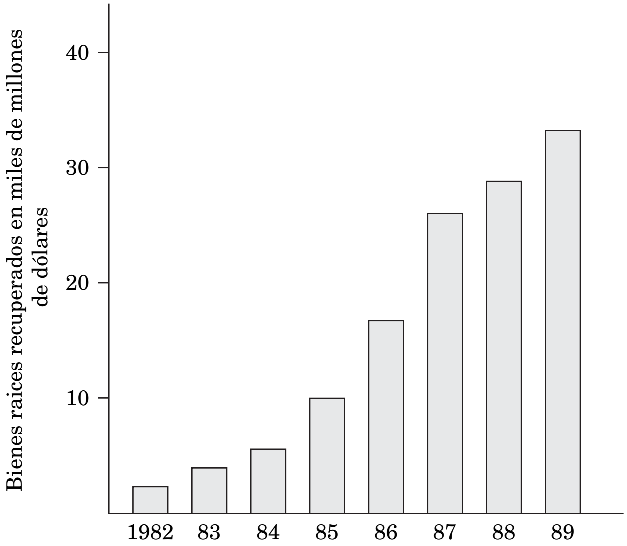


Figura 7.21 Bienes raíces recuperados por ahorros y préstamos. (Fuentes: FDIC y Office of Thrift Supervision)

a) Determine la función de decremento exponencial $f(t)$, donde t se expresa en días.
b) ¿Qué cantidad del isótopo se espera que se tenga en la sangre luego de 10 días?
c) ¿Cuál es la vida media del isótopo?

45. Una sustancia radiactiva tiene una vida media de 36,000 años. Determine la constante de decaimiento k.

46. **Retención de la memoria** Se efectuó un experimento para determinar los efectos del tiempo transcurrido sobre la memoria de una persona. Se pidió a los sujetos que vieran una fotografía que contenía muchos objetos diferentes. En distintos intervalos de tiempo después de esto, se les pedía que recordaran tantos objetos como pudieran. Con base en el experimento, se desarrolló la siguiente función.

$$R = f(t) = 94 - 22 \ln t \qquad t \geq 1$$

Para esta función, R representa la memoria porcentual promedio y t es igual al tiempo desde el estudio de la fotografía (medido en horas). *a*) ¿Cuál es la memoria porcentual promedio 1 hora después de estudiar la fotografía? *b*) ¿Luego de 10 horas? *c*) Trace f.

47. Un nuevo organismo de bienestar estatal quiere determinar cuántos analistas se deben contratar para procesar solicitudes de bienestar. Se estima que el costo promedio C de procesar una solicitud es una función del número de analistas x. Específicamente, la función del costo es

$$C = 0.005x^2 - 16 \ln x + 70$$

a) ¿Cuál es el costo promedio si se contratan 20 analistas? ¿30 analistas?
b) Trace la función del costo promedio.

48. Una empresa ha estimado que el costo de producción promedio por unidad $\overline{C}$ fluctúa con el número de unidades producidas x. La función del costo promedio es

$$\overline{C} = 0.002x^2 - 1\,000 \ln x + 7\,500$$

donde $\overline{C}$ se expresa en dólares por unidad y x en cientos de unidades.

a) Determine el costo promedio por unidad si se producen 100 unidades. Si se producen 500 unidades.

b) Trace la función del costo promedio.

❑ EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. Dada $f(x) = 1\,800e^{-2x}$, determine $f(5)$.

2. Una inversión de \$20 000 recibe un interés de 10.5 por ciento por año capitalizado continuamente. ¿Cuál es la cantidad capitalizada S si la inversión se hace por un periodo de 25 años? ¿Cuánto interés se ganará durante este periodo?

3. Dada

$$3^8 = 6\,561$$

escriba la función logarítmica equivalente.

4. Una organización de caridad nacional planea una campaña para reunir fondos en una importante ciudad. La población de la ciudad es de 2.5 millones. El porcentaje de la población que hará un donativo se describe por medio de la función

$$R = 1 - e^{-0.075x}$$

donde R equivale al porcentaje de la población y x es igual al número de días que se hace la campaña. La experiencia pasada indica que la contribución promedio por donante es de \$2. Se estima que la campaña cuesta \$6 000 por día. Formule la función $N = f(x)$ que exprese las utilidades netas N (total de contribuciones menos total de costos) como una función de x.

5. Resuelva la ecuación

$$\ln x^4 + \ln x = 24$$

6. El valor de un equipo decrece exponencialmente de acuerdo con una función de la forma $V = f(t) = V_0e^{-it}$, donde V equivale al valor del equipo (en dólares) y t es igual a la antigüedad del equipo en años. Cuando el equipo tenía 2 años de antigüedad, su valor era de \$200 000. Cuando tenía 5 años, su valor era de \$120 000.

a) Determine la función $f(t)$.

b) ¿Cuándo se espera que el valor sea igual a \$50 000?

MINICASO

¿HORA DEL FALLECIMIENTO?

Si se coloca un objeto en un entorno más frío, la temperatura del objeto disminuye hacia la temperatura del entorno. El modelo matemático que describe este proceso es

$$T = f(t) = ae^{-kt} + C \tag{7.18}$$

donde T equivale a la temperatura del objeto t tiempo después de que se coloca en el entorno más frío, que está a la temperatura C. La figura 7.22 es un bosquejo de la función.

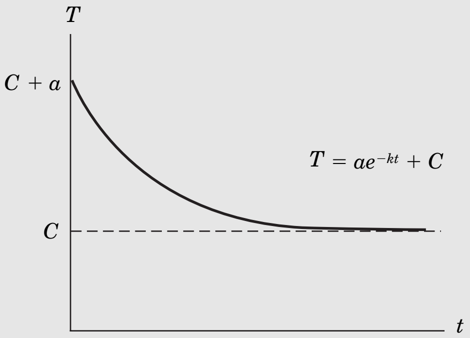
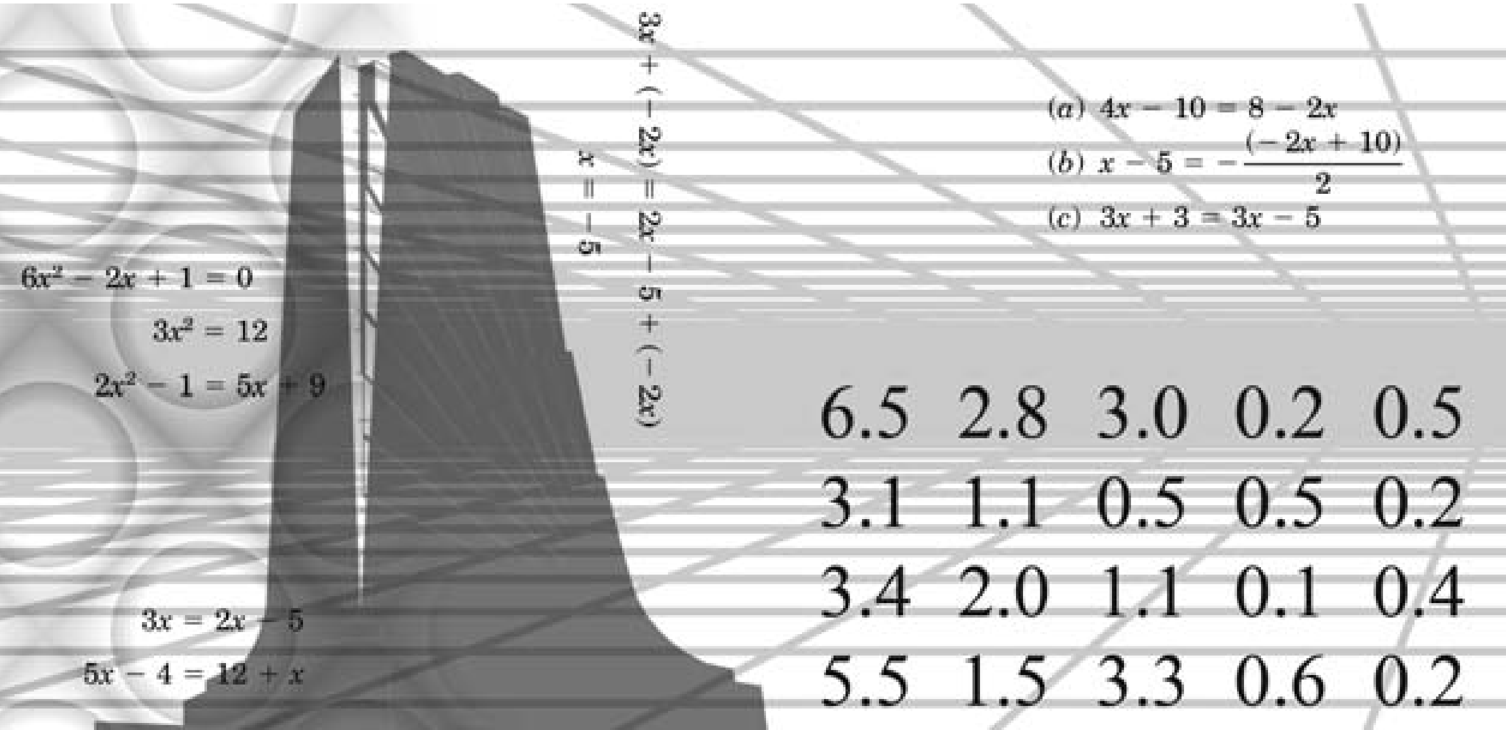


Figura 7.22

Las leyes de la física subyacentes en este proceso tienen muchas aplicaciones importantes. Una importante aplicación implica determinar la hora del fallecimiento de una persona, una función que realiza normalmente un forense. Suponga que se descubre el cuerpo de una persona en un departamento. El forense llega a las 3:00 p.m. y encuentra que la temperatura del cadáver es de 84.6ºF y la temperatura del departamento es de 68ºF. El forense espera una hora y después vuelve a tomar la temperatura del cuerpo, encontrando que está a 83.8ºF. Es necesario determinar la hora del fallecimiento. [*Sugerencia*: Primero, suponga que la temperatura del cuerpo en el momento de la muerte era de 98.6ºF y que en la ecuación (7.18) $t = 0$ corresponde a la hora del deceso. Esta información, junto con la temperatura de la habitación, permite determinar a y C en la ecuación (7.18). Segundo, sabemos que t horas después de la muerte la temperatura del cuerpo era 84.6ºF y $t + 1$ hora después de la muerte era de 83.8ºF.]

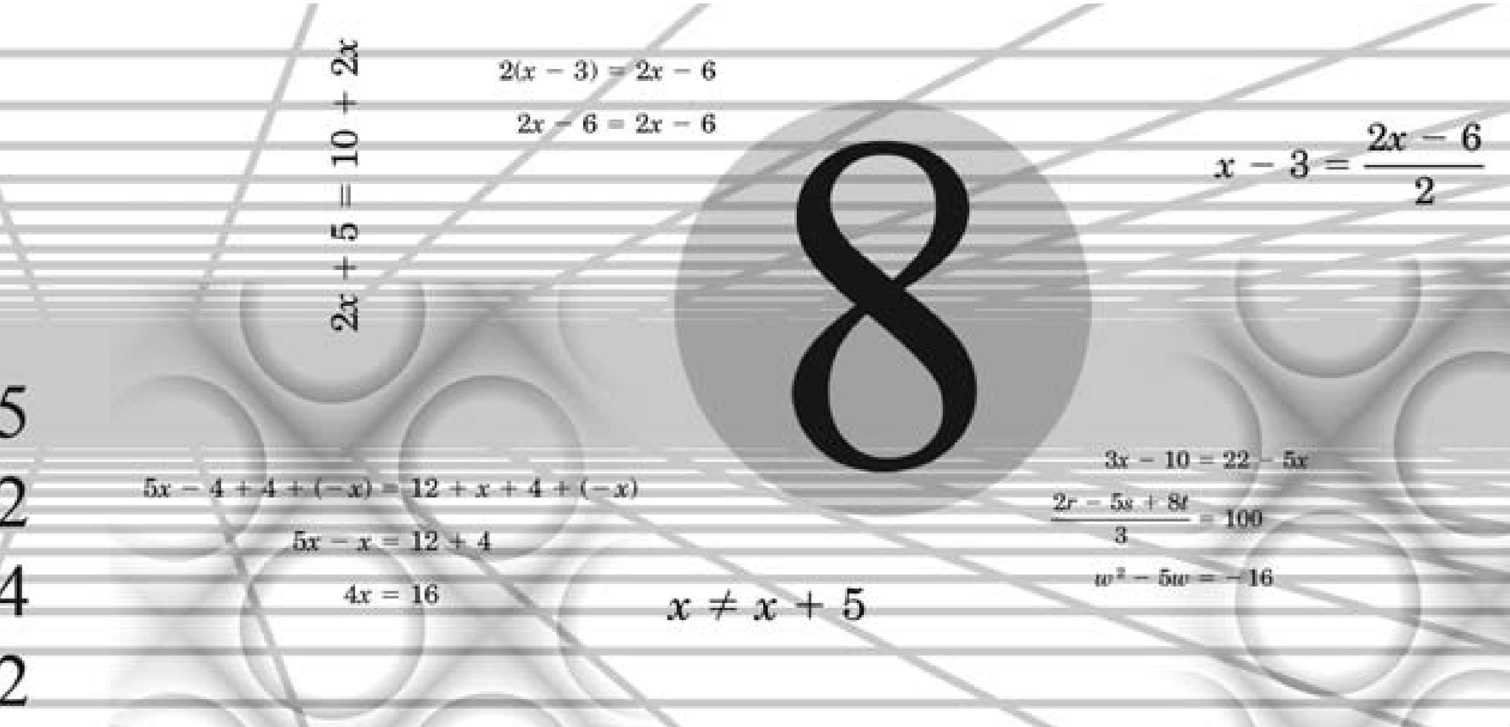
CAPÍTULO 8

Matemáticas de las finanzas



OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Ofrecer una comprensión del valor temporal del dinero.
- Proporcionar una comprensión de las matemáticas de los cálculos del interés para estructuras de pagos simples y de flujo de efectivo de anualidad.
- Entender la naturaleza de los préstamos hipotecarios y sus cálculos.
- Introducir el análisis costo-beneficio y las consideraciones relacionadas.



ESCENARIO DE MOTIVACIÓN: El poder del crecimiento capitalizado

El fenómeno de la "capitalización del interés" ocurre cuando el interés ganado sobre una inversión en un periodo se vuelve parte de la inversión base, y por lo tanto gana interés durante el periodo siguiente. El "crecimiento capitalizado" resultante en una inversión puede ser considerable. Dos observaciones relacionadas con el crecimiento capitalizado son: *(1) es posible aumentar significativamente el valor de una inversión si se reinvierte conforme se gana, y (2) se magnifican los efectos del interés compuesto conforme se incrementa la tasa de interés.*

En este capítulo se analizan las tasas de interés y sus efectos en el valor del dinero. Las tasas de interés tienen amplia influencia en las decisiones que tanto las empresas como nosotros tomamos en nuestra vida personal. Las corporaciones pagan millones de dólares de interés cada año por el uso del dinero que han solicitado en préstamo. Ganamos dinero de las sumas que invertimos en cuentas de ahorros, certificados de depósito y fondos del mercado de dinero. También pagamos por usar el dinero que solicitamos prestado para colegiaturas de escuelas, hipotecas o compras con tarjeta de crédito.

El concepto del interés también tiene aplicaciones que no se relacionan con el dinero. Se puede caracterizar el crecimiento de la población, por ejemplo, mediante una "tasa de interés" o tasa de crecimiento, según se analizó en el capítulo 7.

Primero se estudiará la naturaleza del interés y su cálculo. Después se analizarán diferentes situaciones de inversión y los cálculos relacionados con cada una. Luego, en una sección especial, se analizarán los cálculos asociados a las hipotecas. Para finalizar, en la última sección se estudiará el análisis costo-beneficio.

8.1 Interés y su cálculo

Interés simple

El ***interés*** es una cuota que se paga por usar dinero prestado o invertido. Pagamos interés sobre las hipotecas por utilizar el dinero del banco. Usamos el dinero del banco para pagar a un contratista o a una persona a quien compramos una casa. De modo similar, el banco nos paga interés sobre el dinero invertido en cuentas de ahorros o certificados de depósito (CDs; *certificates of deposit*) porque tiene acceso temporal a nuestro dinero. La cantidad de dinero que se presta o invierte recibe el nombre de ***capital***. Por lo general, se paga el interés en proporción al capital y el tiempo que se usa el dinero. La ***tasa de interés*** especifica la tasa con que se acumula el interés. Normalmente, la tasa de interés se expresa como un *porcentaje del capital* por periodo; por ejemplo, 18% por año o 1.5% por mes.

El interés que se paga sólo sobre la cantidad del capital se llama ***interés simple***. Por lo regular, se asocia el interés simple a préstamos o inversiones que se hacen a corto plazo. El cálculo del interés simple se basa en la fórmula siguiente:

$$\text{Interés simple} = \text{capital} \times \text{tasa de interés por periodo} \times \text{número de periodos}$$

o bien

$$\boxed{I = Pin} \tag{8.1}$$

donde: I = *interés simple, dólares*
P = *capital, dólares*
i = *tasa de interés por periodo*
n = *número de periodos del préstamo*

Es esencial que los periodos para i y n sean consistentes entre sí. Es decir, si se expresa i como un porcentaje por año, n debe expresarse en número de años. De manera similar, si i se expresa como un porcentaje por mes, n se debe expresar en número de meses.

Ejemplo 1

Una institución de crédito emitió un préstamo de $5 000 a tres años. Cobra interés con una tasa de 10% por año. Se debe pagar el capital más el interés al final del tercer año. Calcule el interés para el periodo de tres años. ¿Qué cantidad se pagará al final del tercer año?

SOLUCIÓN

Al usar las definiciones de las variables de la ecuación (8.1), se tiene $P = \$5\,000$, $i = 0.10$ por año y $n = 3$ años. Por consiguiente

$$\begin{aligned} I &= (\$5\,000)(0.10)(3) \\ &= \$1\,500 \end{aligned}$$

La cantidad que se debe pagar es el capital *más* el interés acumulado o

$$\begin{aligned} A &= P + I \\ &= \$5\,000 + \$1\,500 = \$6\,500 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Una persona “presta” $10 000 a una corporación al comprar un bono de la misma. Se calcula el interés simple trimestralmente con una tasa de 3% por trimestre y se manda por correo un cheque cada trimestre por el interés a todos los tenedores de bonos. Los bonos vencen al cabo de cinco años y el cheque final incluye el capital original más el interés ganado en el último trimestre. Calcule el interés que se gana cada trimestre y el interés total que se ganará durante la vida de cinco años de los bonos.

SOLUCIÓN

En este problema $P = \$10\,000$, $i = 0.03$ por trimestre y el periodo del préstamo es de cinco años. Ya que el periodo para i es un trimestre (de un año), deben considerarse cinco años como 20 trimestres. Y puesto que nos interesamos en la cantidad de interés ganada en un trimestre, debe suponerse que $n = 1$. Por consiguiente, el interés trimestral es igual a

$$\begin{aligned} I &= (\$10\,000)(0.03)(1) \\ &= \$300 \end{aligned}$$

Para calcular el interés total en el periodo de cinco años, se multiplica el interés trimestral de $300 por el número de trimestres, 20, para obtener

$$\text{Interés total} = \$300 \times 20 = \$6\,000$$ ❑

Interés compuesto

Un procedimiento común para calcular el interés consiste en *capitalizar el interés*. En este procedimiento se reinvierte el interés. Se suma al capital el interés ganado en cada periodo con el propósito de calcular el interés del periodo siguiente. La cantidad del interés calculado mediante este procedimiento se conoce como ***interés compuesto***.

Un ejemplo simple ilustrará este procedimiento. Suponga que se depositan $8 000 en una institución de crédito que paga un interés de 8% por año *capitalizado* trimestralmente. Suponga que se quiere determinar la cantidad de dinero que se tendrá depositada al final de un año si se deja todo el interés en la cuenta de ahorros. Al final del primer trimestre, el interés se calcula como

$$\begin{aligned} I_1 &= (\$8\,000)(0.08)(0.25) \\ &= \$160 \end{aligned}$$

Nótese que se definió *n* como 0.25 *años*. Con el interés aún en la cuenta, el capital sobre el que se gana interés en el segundo trimestre es el capital original más el interés de $160 ganado en el primer trimestre, o

$$P_2 = P_1 + I_1 = \$8\,160$$

El interés ganado durante el segundo trimestre es

$$\begin{aligned} I_2 &= (\$8\,160)(0.08)(0.25) \\ &= \$163.20 \end{aligned}$$

En la tabla 8.1 se resumen los cálculos para los cuatro trimestres. Observe que para cada trimestre, el capital acumulado más el interés se denomina ***monto compuesto***. Nótese que el interés total ganado durante los cuatro trimestres equivale a $659.46.

Tabla 8.1

Trimestre	(*P*) Capital	(*I*) Interés	(*S* = *P* + *I*) Monto compuesto
1	$8 000.00	$160 .00	$8 000 .00 + $160 .00 = $8 160 .00
2	8 160.00	163 .20	8 160 .00 + 163 .20 = 8 323 .20
3	8 323.20	166 .46	8 323 .20 + 166 .46 = 8 489 .66
4	8 489.66	169 .79	8 489 .66 + 169 .79 = 8 659 .46

En este ejemplo, el interés simple para el año habría sido igual a

$$\begin{aligned} I &= (\$8\,000)(0.08)(1) \\ &= \$640 \end{aligned}$$

La diferencia entre el interés simple y el interés compuesto es $659.46 − $640.00 = $19.46. En este ejemplo el interés compuesto excede el interés simple casi por $20 en el periodo de un año.

El poder del crecimiento capitalizado

Conforme se avance en este capítulo, se hará evidente el poder del crecimiento capitalizado. Como se observó en el último ejemplo, el *interés compuesto es mayor que el interés simple*. La figura 8.1 ilustra el crecimiento en una inversión de $10 000 que gana un interés de 10% por año en un periodo de 10 años. Nótese el aumento significativo en el valor de la inversión capitalizada en comparación con el interés simple.

La *frecuencia* de la capitalización del interés influye en el valor de una inversión. La frecuencia se refiere a qué tan seguido se calcula y gana el interés. Por lo general, la frecuencia de la capitalización varía de una capitalización "anual", en la que se calcula el interés y se suma a la inversión base una vez por año, a la capitalización "continua" (mencionada por primera vez en el capítulo 7). Puede considerarse intuitivamente que la capitalización sucede un número infinito de veces durante un año. La figura 8.1 ilustra que **el valor de una inversión se incrementa con mayor frecuencia de la capitalización**. Sin embargo, la figura 8.1 también ilustra que los efectos de la capitalización continua no son tan grandes como se podría esperar, comparados con otras frecuencias de capitalización.

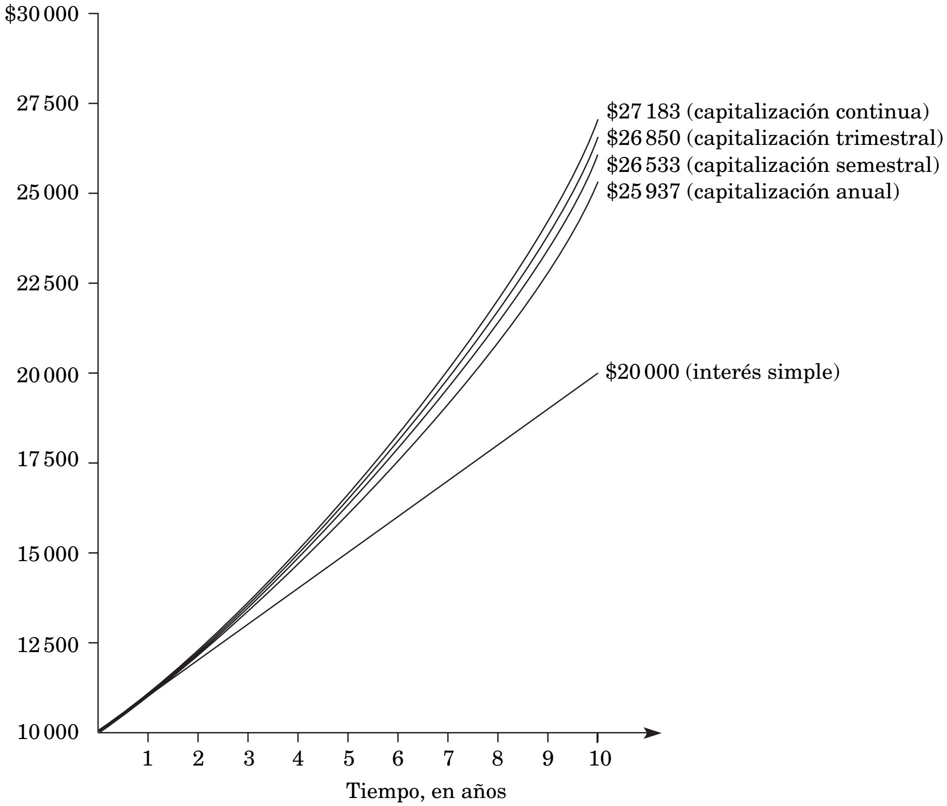


Figura 8.1 Valor de una inversión de $10 000: interés simple contra capitalización del interés, 10%.

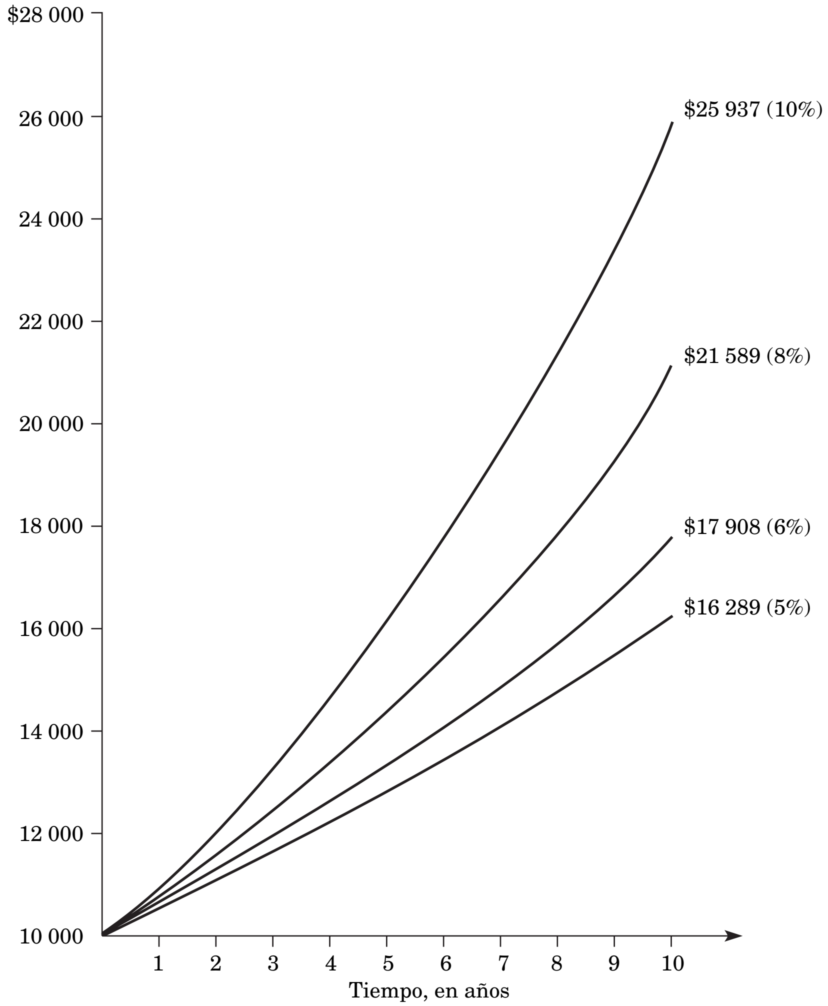


Figura 8.2 Valor de una inversión de $10 000 con interés capitalizado anualmente.

Una observación final en la figura 8.1 es que, comparados con los efectos del interés simple, **los efectos de la capitalización del interés cobran mayor importancia conforme se extiende el periodo de inversión**.

La figura 8.2 ilustra el valor de una inversión de $10 000 en un periodo de 10 años con tasas de interés distintas. Como se puede ver en esta figura, **cuanto mayor sea la tasa de interés, mayor será el interés ganado en cada periodo de capitalización y mayor será la tasa de crecimiento en la inversión**. Como en la figura 8.1, esta figura ilustra que cuanto más extenso sea el periodo de inversión, más considerables serán los efectos de mayores tasas de interés.

Sección 8.1 Ejercicios de seguimiento

1. Una compañía otorgó un préstamo de $90 000 a cinco años al nuevo vicepresidente para financiar un proyecto de mejora de vivienda. Los términos del préstamo son que se debe pagar en su totalidad al final de cinco años con un interés simple calculado con una tasa de 8% por año. Determine el interés que se debe pagar sobre el préstamo en el periodo de cinco años.

2. Un estudiante recibió de una tía adinerada un préstamo de $30 000 para financiar su programa de universidad de cuatro años. Los términos son que el estudiante pague a su tía por completo al final de 8 años con un interés simple calculado con una tasa de 4% por año. Determine el interés que se debe pagar sobre el préstamo a ocho años.

3. Una mujer compró $150 000 de bonos corporativos. Los bonos vencen en 20 años y el interés simple se calcula semestralmente con una tasa de 7% por periodo de seis meses. Los cheques de interés se envían a los tenedores de bonos cada seis meses. Determine el interés que la mujer puede esperar ganar cada seis meses. ¿Cuánto interés puede esperar en el periodo de 20 años?

4. Una aerolínea importante planea comprar aviones nuevos. Quiere solicitar $800 millones mediante la emisión de bonos. Los bonos tienen una vigencia de 10 años con un interés simple calculado trimestralmente con una tasa de 2% por trimestre. Se debe pagar el interés a los tenedores de bonos cada trimestre. ¿Cuánto debe pagar la aerolínea en interés trimestral? ¿Cuánto interés pagará en el periodo de 10 años?

5. Un certificado de depósito de $10 000 gana un interés de 8% por año, capitalizado semestralmente. Complete la tabla siguiente respecto de la capitalización semestral. ¿Cuál es el interés total para el periodo de dos años?

Periodo semestral	**(P) capital**	**(I) interés**	**($S = P + I$) monto compuesto**
1	$10 000	$400	$10 400.00
2			
3			
4			

6. Se hizo una inversión por la suma de $500 000 que gana interés con una tasa de 12% por año, capitalizado trimestralmente. Complete la tabla siguiente respecto de la capitalización trimestral. ¿Cuál es el interés total para el año?

Trimestre	**(P) capital**	**(I) interés**	**($S = P + I$) monto compuesto**
1	$500 000	$15 000	$515 000
2			
3			
4			

7. Refiérase al ejercicio 5.
  a) Determine el monto compuesto después de dos años si el interés se capitaliza por trimestre en vez de semestre.
  b) ¿En qué plan de capitalización, semestral o trimestral, es mayor el interés total? ¿Por cuánto?

8. Refiérase al ejercicio 6.
  a) Determine el monto compuesto después de un año si el interés se capitaliza por semestre en vez de trimestre.
  b) ¿En qué plan de capitalización es mayor el interés total? ¿Por cuánto?

8.2 Cálculos de pagos simples

En esta sección se estudia la relación entre una suma de dinero en el presente con su valor en algún momento futuro. La suposición en ésta y las otras secciones es que cualquier interés se calcula sobre una base capitalizada.

Monto compuesto

Suponga que se invierte una cantidad de dinero y que gana un interés capitalizado. Una pregunta relacionada con dicha inversión es, *¿cuál será el valor de la inversión en algún momento futuro?* El valor de la inversión es la inversión original (capital) más cualquier interés ganado. En nuestro ejemplo que ilustra los cálculos del interés compuesto en la sección 8.1 se le llama ***monto compuesto***. Dado cualquier capital invertido al inicio de un periodo, se calculó el monto compuesto al final del periodo como

$$\boxed{S = P + iP} \tag{8.2}$$

Defínanse de nuevo las variables y desarrolle después una fórmula generalizada que se pueda utilizar para calcular el monto compuesto. Suponga que

P = *capital, dólares*
i = *tasa de interés por periodo de capitalización*
n = *número de periodos de capitalización (número de periodos en que el capital ganó intereses)*
S = *monto compuesto*

Para los propósitos de estas definiciones, un ***periodo*** puede ser cualquier unidad de tiempo. Si se capitaliza el interés de manera anual, un año es el periodo apropiado. Si se capitaliza en forma mensual, un mes corresponde al periodo adecuado. Una vez más es importante enfatizar que *la definición de un periodo debe ser la misma tanto para i como para n.*

Suponga que hubo una inversión de P dólares que ganará interés con la tasa de $i\%$ por periodo de capitalización. A partir de la ecuación (8.2) se determina que el monto compuesto después de un periodo es

$$S = P + iP$$

Al factorizar P de los términos en el lado derecho de la ecuación, se puede reformular el monto compuesto como

$$S = P(1 + i) \tag{8.3}$$

Si se interesa en determinar el monto compuesto después de dos periodos, se puede calcular usando la ecuación

$$\begin{array}{c}\text{Monto compuesto}\\ \text{después de dos periodos}\end{array} = \begin{array}{c}\text{monto compuesto}\\ \text{después de un periodo}\end{array} + \begin{array}{c}\text{interés ganado durante}\\ \text{el segundo periodo}\end{array}$$

o bien

$$S = P(1 + i) + i[P(1 + i)]$$

Al factorizar P y $1 + i$ de ambos términos del lado derecho de la ecuación se obtiene

$$S = P(1 + i)[1 + i]$$

o bien

$$S = P(1 + i)^2 \tag{8.4}$$

De manera similar, si se desea determinar el monto compuesto después de tres periodos, se puede calcular usando la ecuación

$$\begin{array}{c}\text{Monto compuesto}\\ \text{después de tres periodos}\end{array} = \begin{array}{c}\text{monto compuesto}\\ \text{después de dos periodos}\end{array} + \begin{array}{c}\text{interés ganado durante}\\ \text{el tercer periodo}\end{array}$$

o bien

$$S = P(1 + i)^2 + i[P(1 + i)^2]$$

Al factorizar P y $(1 + i)^2$ de los términos del lado derecho de la ecuación, se tiene

$$S = P(1 + i)^2[1 + i]$$

o

$$S = P(1 + i)^3 \tag{8.5}$$

A continuación se resumen las fórmulas del monto compuesto desarrolladas hasta ahora.

Fórmulas del monto compuesto

Monto compuesto después de un periodo = $P(1 + i)$.
Monto compuesto después de dos periodos = $P(1 + i)^2$.
Monto compuesto después de tres periodos = $P(1 + i)^3$.

Y el patrón continúa, de modo que es posible la definición siguiente.

Definición: Monto compuesto

Si una cantidad de dinero P gana interés compuesto con una tasa de $i\%$ por periodo, se incrementará después de n periodos al monto compuesto S, donde

$$S = P(1 + i)^n \tag{8.6}$$

A menudo se refiere a la ecuación (8.6) como la ***fórmula del monto compuesto***. Esta relación se puede mostrar gráficamente como en la figura 8.3. Nótese en la ecuación (8.6) que dado el capital P y la tasa de interés por periodo de capitalización i, el monto compuesto S es una función exponencial del número de periodos de capitalización n, o bien

$$S = f(n)$$

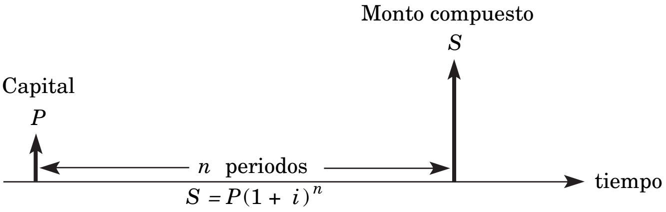


Figura 8.3

Ejemplo 3 Suponga que se invierten \$1 000 en un banco de ahorros que gana interés con una tasa de 8% por año capitalizado anualmente. Si se deja todo el interés en la cuenta, ¿cuál será el saldo de la cuenta después de 10 años?

SOLUCIÓN

En cada uno de estos ejemplos se supondrá que la inversión se realiza al inicio de un periodo de capitalización. Al usar la ecuación (8.6), el monto compuesto después de 10 años (periodos) es

$$S = \$1\,000(1 + 0.08)^{10}$$

Ahora la pregunta es: ¿cómo se evalúa $(1 + 0.08)^{10}$? Éstas son algunas alternativas posibles:

1. *Siéntese cerca de un sacapuntas, tenga papel y utilice un planteamiento de fuerza bruta de cálculo a mano.*
2. *Utilice una calculadora electrónica.*
3. *Reformule la ecuación aplicando el logaritmo en ambos lados y despejando el logaritmo de S.*
4. *Use una calculadora electrónica con funciones financieras.*

Estos tipos de cálculos son muy comunes, en especial para las instituciones bancarias y financieras. Para quienes no cuentan con una calculadora electrónica con funciones financieras, hay conjuntos de tablas disponibles que proporcionan valores de $(1 + i)^n$ para valores dados de i y n. La tabla I en la página T-2 da valores de $(1 + i)^n$. La expresión $(1 + i)^n$ recibe el nombre de ***factor del monto compuesto***.

Para nuestro problema, simplemente encuentre la columna asociada a una tasa de interés por periodo de capitalización de 8% y la fila correspondiente a 10 periodos de capitalización. La figura 8.4 es un extracto de estas tablas. El valor de $(1 + 0.08)^{10}$ es 2.15892. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} S &= (\$1\,000)(2.15892) \\ &= \$2\,158.92 \end{aligned}$$

La inversión de \$1 000 aumentará a \$2 158.92, lo que significa que se ganará un interés de \$1 158 .92.

n	i .08
1	1.08000
2	1.16640
3	1.25971
4	1.36049
5	1.46933
6	1.58687
7	1.71382
8	1.85093
9	1.99900
10	2.15892
11	2.33164
12	2.51817
13	2.71962
14	2.93719

Figura 8.4 Extracto de la tabla II.

Ejemplo 4 Una compañía pequeña realiza una inversión a largo plazo de \$250 000. La tasa de interés es 12% por año y el interés se capitaliza trimestralmente. Si se reinvierte todo el interés con la misma *tasa* de interés, ¿cuál será el valor de la inversión después de ocho años?

NOTA En casi todos los casos, se expresará la tasa de interés de un problema como una tasa de interés anual o como la tasa de interés por periodo de capitalización. Cuando ocurre el primer caso, la tasa de interés por periodo de capitalización se calcula mediante la fórmula

$$i = \frac{\text{tasa de interés por año}}{\text{número de periodos de capitalización por año}}$$

SOLUCIÓN

En la fórmula del monto compuesto, ecuación (8.6), se define *i* como la tasa de interés por periodo de capitalización y *n* como el número de periodos de capitalización. En este problema la capitalización ocurre cada trimestre de un año. La tasa de interés por trimestre es igual a la tasa de interés anual dividida entre el número de periodos de capitalización por año, o

$$i = \frac{0.12}{4} = 0.03$$

El número de periodos de capitalización en un periodo de ocho años es $8 \times 4 = 32$. La aplicación de la ecuación (8.6) da

$$S = \$250\,000(1 + 0.03)^{32}$$

De la tabla I, $(1 + 0.03)^{32} = 2.57508$, y

$$S = \$250\,000(2.57508) = \$643\,770$$

En un periodo de ocho años se espera ganar un interés de $643 770 − $250 000 o bien $393 770.

❑

Ejercicio de práctica

Una inversión de $100 000 gana un interés de 6% por año capitalizado semestralmente. Si se reinvierte todo el interés, ¿cuál será el valor de la inversión después de cinco años? *Respuesta*: $134 392.

Valor presente

La fórmula del monto compuesto

$$S = P(1 + i)^n$$

es una ecuación que implica cuatro variables (*S*, *P*, *i* y *n*). Dados los valores de tres de estas cuatro variables, se puede despejar la variable restante en la ecuación. Para ilustrar este punto, suponga que una persona puede invertir dinero en una cuenta de ahorros con una tasa de 10% por año capitalizado trimestralmente. Suponga que la persona desea depositar una suma total al principio del año y que la suma se incrementa a $20 000 en los próximos 10 años. La pregunta es: ¿cuánto dinero se debe depositar? Ya que se nos dan valores para *S*, *i* y *n*, necesitamos despejar *P* en la ecuación. Al hacer esto, se tiene

$$\boxed{P = \frac{S}{(1 + i)^n}} \tag{8.7}$$

Para la situación mencionada, $S = \$20\,000$, $n = 40$ (10×4 periodos de capitalización en los 10 años) e $i = 0.10/4 = 0.025$. Se ilustra el problema en la figura 8.5.

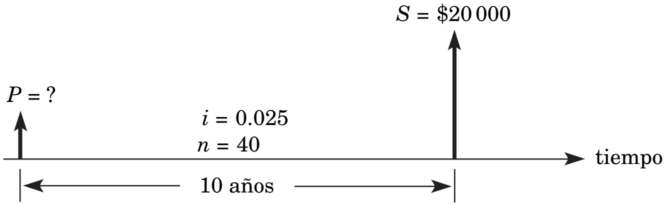


Figura 8.5 Problema de valor presente.

A partir de la tabla I, se tiene $(1 + 0.025)^{40} = 2.68506$, y

$$\begin{aligned} P &= \frac{\$20\,000}{2.68506} \\ &= \$7\,448.62 \end{aligned}$$

Con el fin de acumular $20 000 después de 10 años, se deberán depositar $7 448.62.

Aunque es posible aplicar la ecuación (8.7) utilizando el factor del monto compuesto, se puede volver a escribir en la forma de la ecuación (8.7*a*)

$$\boxed{P = S\left[\frac{1}{(1 + i)^n}\right]} \qquad \textbf{(8.7}\boldsymbol{a}\textbf{)}$$

El factor entre corchetes, $1/(1 + i)^n$ o $(1 + i)^{-n}$, se conoce como el ***factor del valor presente***. La tabla II (en la página T-4) presenta valores seleccionados para este factor. Los valores de esta tabla son simplemente valores recíprocos de los de la tabla I.

Para resolver el mismo problema usando la tabla II, se encuentra el valor apropiado con $i = 0025$ y $n = 40$. A partir de la tabla II, $(1 + 0.025)^{-40} = 0.37243$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P &= (\$20\,000)(0.37243) \\ &= \$7\,448.60 \end{aligned}$$

Nótese que esta respuesta no es *exactamente* la misma que la calculada mediante la ecuación (8.7) y la tabla I; tienen una diferencia de $0.02. Esto es consecuencia de las diferencias de redondeo para los valores de las dos tablas.

Ejemplo 5

Un joven recibió recientemente una herencia de $200 000. Quiere tomar una porción de su inversión e invertirla para sus últimos años. Su objetivo es acumular $300 000 en 15 años. ¿Cuánto se debe invertir de la herencia si el dinero ganará 12% por año capitalizado semestralmente? ¿Cuánto interés se ganará en los 15 años?

SOLUCIÓN

Para este problema, $S = \$300\,000$, $n = 30$ e $i = 0.12/2 = 0.06$. Al usar la ecuación (8.7*a*) y el valor adecuado de la tabla II, se tiene

$$\begin{aligned} P &= (\$300\,000)(0.17411) \\ &= \$52\,233 \end{aligned}$$

En el periodo de 15 años se ganará un interés de $300 000 − $52 233 o bien $247 767. ❑

En estas aplicaciones se puede considerar que P es el *valor presente* de S. Es decir, se puede considerar que P y S son *equivalentes* si se toma en cuenta el interés que se puede ganar sobre P durante n periodos de capitalización. En el ejemplo 5 se consideran los $52 233 en el momento de la herencia como el valor presente de $300 000 15 años después. Se considera el valor presente, porque si se invierten los $52 233 en ese momento y ganan un interés de 12% por año capitalizado semestralmente, aumentarán a un valor de $300 000 en 15 años.

El concepto del valor presente implica que un dólar de hoy no es equivalente a un dólar en algún momento futuro. Con base en los análisis anteriores, puede entenderse esto en un *contexto de inversión*. Como consumidores, también podemos apreciar esta idea al observar los efectos de la inflación en los precios con el paso del tiempo. Las empresas a menudo deben evaluar proyectos propuestos que generarán flujos de efectivo en diferentes periodos. Hoy, $20 000 de ingreso no son equivalentes a $20 000 de ingreso dentro de 10 años. Por lo tanto, las empresas con frecuencia usan el concepto del valor presente para traducir todos los flujos de efectivo asociados a un proyecto en dólares equivalentes en un punto común en el tiempo. Esto se estudiará con mayor detalle en la sección 8.5.

Ejercicio de práctica

¿Qué suma de dinero se debería invertir hoy con una tasa de 8% por año capitalizada trimestralmente si el objetivo es tener una cantidad capitalizada de $50 000 después de cinco años? *Respuesta*: $33 648 .50.

Otras aplicaciones de la fórmula del monto compuesto

Los ejemplos siguientes ilustran otras aplicaciones de la fórmula del monto compuesto. Aclaran problemas en los que se desconocen los parámetros i y n.

Ejemplo 6

Cuando se invierte una suma de dinero, tal vez se desee saber cuánto tardará el capital en aumentar un porcentaje determinado. Suponga que se quiere saber cuánto tomará una inversión P para duplicarse, dado que recibe un interés compuesto de $i\%$ por periodo de capitalización. Si una inversión se duplica, la razón del monto compuesto S respecto del capital P es 2, o bien

$$\frac{S}{P} = 2$$

Dada la fórmula del monto compuesto

$$S = P(1 + i)^n$$

si se dividen ambos lados entre P, se obtiene

$$\frac{S}{P} = (1 + i)^n$$

Ya que la razón de S/P equivale al factor del monto compuesto, la inversión se duplicará cuando

$$(1 + i)^n = 2$$

Dada la tasa de interés por periodo de capitalización para la inversión, el número de periodos de capitalización requeridos se encontraría al seleccionar la columna apropiada de la tabla I y determinar el valor de n para el que $(1 + i)^n = 2$.

Ejemplo 7 Se invierte una suma total de dinero con una tasa de interés de 10% por año capitalizada trimestralmente. *a*) ¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse la inversión? *b*) ¿En triplicarse? *c*) ¿En *aumentar* 50%?

SOLUCIÓN

a) Para esta inversión, la tasa de interés por periodo de capitalización es 0.10/4 = 0.025. Al referirse a la columna de la tabla I que corresponde a $i = 2.5\%$, se lee hacia abajo en busca de un factor del monto compuesto igual a 2. No hay valor de n para el que $(1 + 0.025)^n$ equivalga exactamente a 2. No obstante, para $n = 28$ el factor del monto compuesto es igual a 1.99650 y para $n = 29$ el factor del monto compuesto equivale a 2.04641. Esto sugiere que después de 28 trimestres (o siete años) la suma casi habrá duplicado su valor. Después de 29 trimestres ($7\frac{1}{4}$ años) la suma inicial habrá aumentado a un poco más del doble de su valor original.

b) La suma se triplicará cuando $S/P = 3$ o cuando $(1 + 0.025)^n = 3$. Al examinar la misma columna en la tabla I, se encuentra que después de 11 años la inversión tendrá un valor un poco menor que el triple [para $n = 44$, $(1 + 0.025)^{44} = 2.96381$] y ligeramente mayor que el triple después de 11.25 años [para $n = 45$, $(1 + 0.025)^{45} = 3.03790$].

c) Para que una inversión *se incremente* 50%

$$S = P + 0.5P$$

o bien

$$S = 1.5P$$

y

$$\frac{S}{P} = 1.5$$

Refiérase de nuevo a la tabla I del apéndice. Una inversión aumentará ligeramente menos de 50% después de cuatro años [$(1 + 0.025)^{16} = 1.48451$] y un poco más de 50% después de $4\frac{1}{4}$ años [$(1 + 0.025)^{17} = 1.52162$]. ❑

Ejercicio de práctica

Se invierte una suma de dinero con una tasa de 7% por año capitalizada anualmente. ¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse la inversión? *Respuesta*: entre 10 y 11 años.

Ejemplo 8

(Inscripciones en la universidad) El consejo de rectores de un estado del sur planea las necesidades futuras del nivel universitario del estado. Observaron que el número de estudiantes que asisten a las escuelas estatales (bachillerato, escuelas de cuatro años y la universidad estatal) ha aumentado con una tasa de 7% por año. Actualmente hay 80 000 estudiantes inscritos en varias escuelas. Si se supone un crecimiento continuo con la misma tasa, ¿cuánto tiempo tomarán las inscripciones en llegar a los 200 000 estudiantes?

SOLUCIÓN

Al definir las inscripciones actuales como $P = 80\,000$ y las inscripciones futuras como $S = 200\,000$ se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{S}{P} &= \frac{200\,000}{80\,000} \\ &= 2.5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, de la tabla I con $i = 7\%$,

$$(1 + 0.07)^{13} = 2.40985 \qquad \text{en} \qquad n = 13$$

$$(1 + 0.07)^{14} = 2.57853 \qquad \text{en} \qquad n = 14$$

Las inscripciones habrán excedido el nivel de 200 000 después de 14 años.

Ejemplo 9

Una persona desea invertir $10 000 y quiere que la inversión aumente a $20 000 en los próximos 10 años. ¿Con qué tasa de interés anual deberían invertirse los $10 000 para que ocurra este crecimiento, suponiendo una capitalización anual?

SOLUCIÓN

En este problema se especifican S, P y n, y la incógnita es la tasa de interés i. Al sustituir los parámetros conocidos en la fórmula del monto compuesto se obtiene

$$20\,000 = 10\,000(1 + i)^{10}$$

o bien

$$\frac{20\,000}{10\,000} = (1 + i)^{10}$$

$$2 = (1 + i)^{10}$$

Para determinar la tasa de interés, regrese a la tabla I y enfóquese en la fila de valores asociados a $n = 10$. Lea a lo largo de la fila hasta que encuentre el valor 2 en la tabla. No hay factor del monto compuesto que sea igual a 2; sin embargo,

$$(1 + 0.07)^{10} = 1.96715 \qquad \text{cuando} \qquad i = 7\%$$

$$(1 + 0.08)^{10} = 2.15892 \qquad \text{cuando} \qquad i = 8\%$$

La inversión original se incrementará a $20000 en los 10 años si se invierte con una tasa de interés entre 7 y 8%. Se puede utilizar un proceso llamado *interpolación* para aproximar la tasa de interés exacta requerida. Aunque no se le dedique tiempo a este tema, se analiza en el Minicaso al final del capítulo. ❑

Tasas efectivas de interés

Por lo general, las tasas de interés se expresan como porcentajes anuales. Normalmente se hace referencia a la tasa anual estipulada como ***tasa nominal***. Se ha visto que cuando el interés se capitaliza semestral, trimestral y mensualmente, el interés ganado durante un año es mayor que si se capitaliza de manera anual. Cuando la capitalización se realiza con mayor frecuencia que la anual, se puede determinar una ***tasa efectiva de interés anual***. Ésta es la tasa de interés capitalizado anualmente equivalente a la tasa nominal capitalizada más de una vez por año. Las dos tasas se considerarían equivalentes si ambas dieran como resultado el mismo monto compuesto.

Suponga que r es igual a la tasa efectiva de interés anual, i a la tasa nominal de interés anual y m al número de periodos de capitalización por año. La equivalencia entre las dos tasas sugiere que si se invierte un capital P por n años, los dos montos compuestos serían los mismos, o bien

$$P(1+r)^n = P\left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm}$$

Al dividir ambos lados de la ecuación entre P se obtiene como resultado

$$(1+r)^n = \left(1+\frac{i}{m}\right)^{nm}$$

Al tomar la n-ésima raíz en ambos lados el resultado es

$$1+r = \left(1+\frac{i}{m}\right)^{m}$$

y al reordenar, se puede calcular la tasa efectiva de interés anual como

$$\boxed{r = \left(1+\frac{i}{m}\right)^{m} - 1} \tag{8.8}$$

En el ejemplo 4 se realizó la inversión con una tasa nominal de interés de 12% por año capitalizada trimestralmente. Para esta inversión $i = 0.12$ y $m = 4$. La tasa efectiva de interés anual es

$$\begin{aligned} r &= \left(1+\frac{0.12}{4}\right)^{4} - 1 \\ &= (1+0.03)^4 - 1 \end{aligned}$$

A partir de la tabla I puede determinarse que $(1+0.03)^4 = 1.12551$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} r &= 1.12551 - 1 \\ &= 0.12551 \end{aligned}$$

La tasa efectiva anual es 12.551%.

Ejercicio de práctica

La tasa nominal de interés sobre una inversión es 7% por año. ¿Cuál será la tasa efectiva de interés anual si el interés se capitaliza semestralmente? *Respuesta*: 7.122 por ciento.

Sección 8.2 Ejercicios de seguimiento

1. Se invierte una suma de \$8 000 en una cuenta de ahorros que paga interés con una tasa de 9% por año capitalizada anualmente. Si se conserva la cantidad en depósito por seis años, ¿cuál será el monto compuesto? ¿Cuánto interés se ganará durante los seis años?

2. Se invierte una suma de \$20 000 en una cuenta de ahorros que paga interés con una tasa de 8% por año capitalizada anualmente. Si se conserva la cantidad en depósito por 10 años, ¿cuál será el monto compuesto? ¿Cuánto interés se ganará durante los 10 años?

3. Se invierte una suma de \$25 000 en una cuenta de ahorros que paga interés con una tasa de 8% por año capitalizada anualmente. Si se conserva la cantidad en depósito por 15 años, ¿cuál será el monto compuesto? ¿Cuánto interés se ganará durante los 15 años?

4. Se invierte una suma de \$50 000 en una institución de crédito que paga interés con una tasa de 10% por año capitalizada anualmente. Si se conserva la cantidad en depósito por cinco años, ¿cuál será el monto compuesto? ¿Cuánto interés se ganará durante los cinco años?

5. Una compañía invierte \$500 000 en un fondo del mercado de dinero que se espera genere interés con una tasa de 10% por año capitalizada trimestralmente. Si las proyecciones de la tasa de interés son válidas, ¿a qué cantidad deberían aumentar los \$500 000 en los próximos 10 años? ¿Cuánto interés se ganará durante este periodo?

6. Un fondo de dotación universitaria invirtió \$4 millones en certificados de depósito del gobierno de Estados Unidos. Se ganará un interés de 8% por año, capitalizado semestralmente por 10 años. ¿A qué cantidad aumentará la inversión durante este periodo? ¿Cuánto interés se ganará?

7. Un individuo invierte \$25 000 en un fondo del mercado de dinero que se espera produzca interés con una tasa de 12% por año capitalizada trimestralmente. Si el interés permanece estable, ¿a qué cantidad deberían aumentar los \$25 000 en los próximos cinco años? ¿Cuánto interés se ganará durante este periodo?

8. Una organización invierte \$500 000 en una inversión que se espera genere interés con una tasa de 9% por año capitalizada semestralmente. Si se invierte el dinero por 10 años, ¿a qué cantidad se debería incrementar? ¿Cuánto interés se ganará durante este periodo?

9. El factor del monto compuesto $(1 + i)^n$ es la cantidad a la que ascendería \$1 después de n periodos si gana un interés compuesto de i% por periodo. Determine el monto compuesto y el interés ganado si se invierte \$1 por ocho años con una tasa de 12% por año: *a*) capitalizada por semestre, *b*) capitalizada por trimestre y *c*) capitalizada por bimestre.

10. Calcule el monto compuesto y el interés si se invierte \$1 millón con las diferentes condiciones mencionadas en el ejercicio 9.

11. Actualmente, el número de estudiantes en una universidad local es de 15 000. Las inscripciones han aumentado con una tasa de 3.5% por año. Si las inscripciones continúan con la misma tasa, ¿cuál es la población estudiantil esperada dentro de 10 años?

12. Una representante de ventas de la división universitaria de una editorial importante tuvo ventas de 20 000 libros el año pasado. Sus ventas han aumentado con la tasa de 10% por año. Si las ventas siguen creciendo con esta tasa, ¿cuántos libros debería esperar vender dentro de cinco años?

13. Los precios al consumidor se han incrementado con una tasa promedio de 6% por año capitalizada trimestralmente. El precio base de un modelo particular Chevrolet es de $14 500. Si los precios de este modelo aumentan con la misma tasa que otros precios al consumidor, ¿cuál será el precio base esperado de este mismo modelo dentro de cinco años?

14. Si los precios al consumidor aumentan con la tasa de 6% por año capitalizada semestralmente, ¿cuánto costará dentro de 10 años un artículo que hoy cuesta $25?

15. Si una cuenta de ahorros da un interés de 6% por año capitalizado trimestralmente, ¿qué cantidad se debe depositar hoy para acumular $20 000 después de cinco años? ¿Cuánto interés se ganará durante estos cinco años?

16. Si una institución de crédito da un interés de 7% por año capitalizado semestralmente, ¿qué cantidad se debe depositar hoy para acumular $40 000 después de 10 años? ¿Cuánto interés se ganará durante estos 10 años?

17. ¿Qué suma se debe depositar hoy con una tasa de 10% por año capitalizada trimestralmente si el objetivo es tener un monto compuesto de $50 000 en seis años a partir de ahora? ¿Cuánto interés se ganará durante este periodo?

18. ¿Qué suma se debe depositar hoy con una tasa de 8% por año capitalizada anualmente si el objetivo es tener un monto compuesto de $200 000 en 12 años a partir de ahora? ¿Cuánto interés se ganará durante este periodo?

19. ¿Qué suma se debe depositar hoy con una tasa de 18% por año capitalizada mensualmente si el objetivo es tener un monto compuesto de $200 000 en cinco años a partir de ahora? ¿Cuánto interés se ganará durante este periodo?

20. ¿Qué suma se debe depositar hoy con una tasa de 9% por año capitalizada semestralmente si el objetivo dentro de ocho años es tener un monto compuesto de $100 000? ¿Cuánto interés se ganará durante este periodo?

21. Una suma de $80 000 gana interés con una tasa de 8% por año capitalizado semestralmente. ¿Cuánto tardará la inversión en aumentar a $150 000?

22. Una suma de $25 000 gana interés con una tasa de 7% por año capitalizada anualmente. ¿Cuánto tiempo tomará la inversión para incrementarse a $60 000?

23. Una suma de $40 000 gana interés con una tasa de 10% por año capitalizada trimestralmente. ¿Cuánto tiempo tardará la inversión para aumentar a $100 000?

24. Una suma de $250 000 gana interés con una tasa de 12% por año capitalizada trimestralmente. ¿Cuánto le llevará a la inversión incrementarse a $400 000?

25. La tasa nominal de interés sobre una inversión es de 16% por año. Determine la tasa efectiva de interés anual: *a*) si el interés se capitaliza semestralmente y *b*) si el interés se capitaliza trimestralmente.

26. La tasa nominal de interés sobre una inversión es de 14% por año. Determine la tasa efectiva de interés anual: *a*) si el interés se capitaliza semestralmente y *b*) si el interés se capitaliza trimestralmente.

27. La tasa nominal de interés sobre una inversión es de 6% por año. Determine la tasa efectiva de interés anual: *a*) si el interés se capitaliza semestralmente y *b*) si el interés se capitaliza trimestralmente.

28. Si $400 000 deben aumentar a $750 000 en un periodo de 10 años, ¿con qué tasa de interés anual se debe invertir, dado que el interés se capitaliza semestralmente?

29. Si $2 000 se deben incrementar a $5 000 en un periodo de 12 años, ¿con qué tasa de interés anual se debe invertir, dado que el interés se capitaliza anualmente?

30. Si $500 000 deben aumentar a $700 000 en un periodo de cinco años, ¿con qué tasa de interés anual se debe invertir, dado que el interés se capitaliza trimestralmente?

31. Si \$60 000 se deben incrementar a \$180 000 en un periodo de 10 años, ¿con qué tasa de interés anual se debe invertir, dado que el interés se capitaliza semestralmente?

32. Si \$250 000 deben aumentar a \$700 000 en un periodo de ocho años, ¿con qué tasa de interés anual se debe invertir, dado que el interés se capitaliza trimestralmente?

8.3 Anualidades y su valor futuro

Una ***anualidad*** es una serie de pagos periódicos. Como ejemplos de anualidades se tienen los depósitos regulares en una cuenta de ahorros, la mensualidad del automóvil, la hipoteca o los pagos de seguros, y pagos periódicos a una persona de un fondo de retiro. Aunque una anualidad puede variar en el importe en dólares, *supóngase que una anualidad implica una serie de pagos iguales. También supóngase que todos los pagos se realizan al final de un periodo de capitalización.* Ciertamente es posible sostener que el final de un periodo coincide con el inicio del periodo siguiente. El punto importante es que el pago no califica para el interés en el periodo previo, pero ganará el interés completo en el periodo siguiente. La figura 8.6 ilustra una serie de pagos R, cada uno de los cuales es igual a \$1 000. Éstos podrían representar depósitos al final del año en una cuenta de ahorros o bien pagos tributarios trimestrales al ISR de una persona que trabaja en forma independiente.

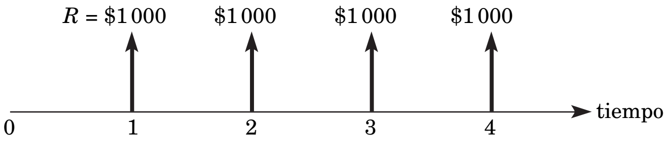


Figura 8.6 Anualidad.

La suma de una anualidad

Del mismo modo en que se interesaba en determinar el valor futuro de una inversión de suma total en la sección 8.2, con frecuencia hay algún beneficio en determinar el valor futuro o suma de una anualidad. El ejemplo 10 ilustra un problema de este tipo.

Ejemplo 10 Una persona planea depositar \$1 000 en un plan de ahorros exento de impuestos al final de este año y una suma igual al final del año siguiente. Si se espera ganar interés con una tasa de 6% por año capitalizada anualmente, ¿a cuánto aumentará la inversión en el momento del cuarto depósito?

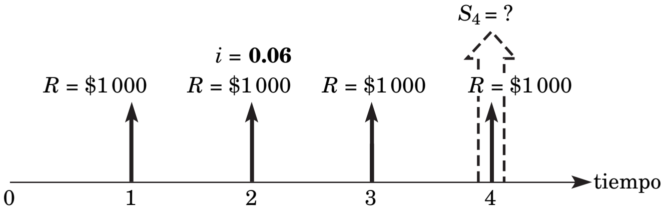


Figura 8.7 Anualidad y su valor futuro.

SOLUCIÓN

La figura 8.7 ilustra la anualidad y la programación de los depósitos. Suponga que S_n es igual a la suma a que ascenderán los depósitos *en el momento del n-ésimo depósito*. Puede determinarse el valor de S_n al aplicar la fórmula del monto compuesto a *cada* depósito y determinar su valor en el momento del n-ésimo depósito. Se pueden sumar estos montos compuestos de los cuatro depósitos para determinar S_4. La figura 8.8 resume estos cálculos.

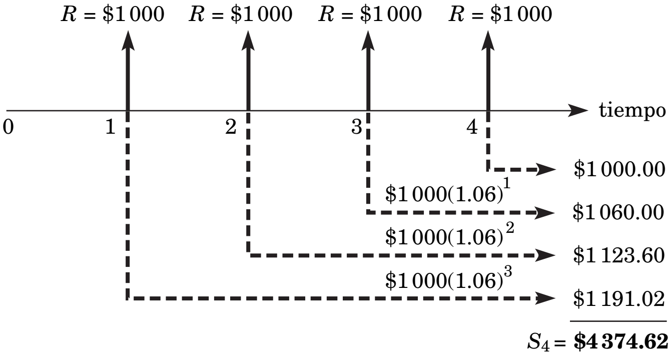


Figura 8.8 Cálculo del valor futuro de cada pago *R*.

Nótese que el primer depósito gana interés por tres años, aunque el cuarto depósito no gana interés. El interés que se ganó de los $4 374.62 en los primeros tres depósitos es $374.62. ❑

Aunque es posible manejar el procedimiento utilizado para determinar *S* en el ejemplo 10, es poco práctico cuando el número de pagos aumenta. Veamos si se puede desarrollar un planteamiento más sencillo para determinar S_n. Observe en el ejemplo 10 que se determinó S_4 por la suma

$$\begin{aligned} S_4 = {} & 1000 + 1000(1 + 0.06) + 1000(1 + 0.06)^2 \\ & + 1000(1 + 0.06)^3 \end{aligned} \tag{8.9}$$

Sea

R = *monto de una anualidad*
i = *tasa de interés por periodo*
n = *número de pagos de anualidades* (*también el número de periodos de capitalización*)
S_n = *suma (valor futuro) de la anualidad después de n periodos (pagos)*

Si se desea determinar la suma S_n a que aumentará una serie de depósitos *R* (hechos al final de cada periodo) después de *n* periodos, se analiza primero la ecuación (8.9) para el caso de cuatro periodos. La expresión comparable para el caso de *n* periodos es

$$S_n = R + R(1 + i) + R(1 + i)^2 + \cdots + R(1 + i)^{n-1}$$

Factorizar R en los términos del lado derecho da

$$S_n = R[1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \cdots + (1 + i)^{n-1}] \tag{8.10}$$

Multiplicar ambos lados de la ecuación por $(1 + i)$ produce

$$(1 + i)S_n = (1 + i)R[1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \cdots + (1 + i)^{n-1}]$$

lo que se simplifica como

$$S_n + iS_n = R[(1 + i) + (1 + i)^2 + (1 + i)^3 + \cdots + (1 + i)^n] \tag{8.11}$$

Al sustraer la ecuación (8.10) de la (8.11) se tiene como resultado

$$iS_n = R(1 + i)^n - R$$

o

$$iS_n = R[(1 + i)^n - 1]$$

Al despejar S_n, se tiene

$$S_n = R\left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i}\right] \tag{8.12}$$

El símbolo especial $s_{\overline{n}|i}$ que se puede expresar verbalmente como "*s* subíndice *n* ángulo *i*", se utiliza con frecuencia para abreviar el **factor del monto compuesto de una anualidad**. Por lo tanto, es posible reformular la ecuación (8.12) de manera más simple como

$$\boxed{S_n = Rs_{\overline{n}|i}} \tag{8.13}$$

La tabla III (en la página T-8) contiene valores seleccionados para este factor. Normalmente hay valores para $s_{\overline{n}|i}$ disponibles en calculadoras que tienen funciones financieras.

Ejemplo 11 Vuelva a resolver el ejemplo 10 usando la ecuación (8.13).

SOLUCIÓN

Ya que $i = 0.06$ y $n = 4$, la entrada apropiada en la tabla III es 4.37462. Sustituir este valor y $R = \$1\,000$ en la ecuación (8.13) da

$$\begin{aligned} S_4 &= (\$1\,000)\, s_{\overline{4}|0.06} \\ &= (\$1\,000)(4.37462) \\ &= \$4\,374.62 \end{aligned}$$

que es la misma respuesta que antes. ❑

NOTA En esta sección se supone que el interés se calcula en el momento de cada pago. Los pagos anuales ganan interés capitalizado anualmente, los pagos trimestrales generan un interés capitalizado por trimestre y así de modo sucesivo. Se pueden manejar las diferencias entre el tiempo de los pagos y el cálculo del interés (por ejemplo, los depósitos anuales en una cuenta que gana interés capitalizado por trimestre) por otros medios distintos de los que se analizan en este capítulo.

Ejemplo 12 Una adolescente planea depositar $50 en una cuenta de ahorros al final de cada trimestre durante los próximos seis años. Se gana interés con una tasa de 8% por año capitalizada trimestralmente. ¿Cuál debería ser el saldo de su cuenta dentro de seis años? ¿Cuánto interés ganará?

SOLUCIÓN

En este problema $R = \$50$, $i = 0.08/4 = 0.02$ y $n = (6 \text{ años})(4 \text{ trimestres por año}) = 24$ periodos de capitalización. Al usar la tabla III,

$$\begin{aligned} S_4 &= (\$50)s_{\overline{24|}\,0.02} \\ &= \$50(30.42186) \\ &= \$1\,521.09 \end{aligned}$$

En el periodo de seis años hará 24 depósitos de $50 para un total de $1 200. El interés para el periodo será $1 521.09 − $1 200.00 = $321.09. ❑

Ejercicio de práctica

Una inversión gana un interés de 7% por año, capitalizado anualmente. Si se invierten $5 000 al final de cada año, ¿a qué suma habrá aumentado la inversión en el momento del décimo depósito? *Respuesta*: $69 082.25.

Determinación del importe de una anualidad

Igual que con la fórmula del monto compuesto, se puede despejar cualquiera de los cuatro parámetros de la ecuación (8.13), dados los valores de los otros tres. Por ejemplo, podría tenerse el objetivo de acumular una suma particular de dinero en algún momento futuro. Si se conoce la tasa de interés que se puede ganar, la pregunta es: *¿qué cantidad se debería depositar en cada periodo con el fin de lograr el objetivo*?

Para resolver dicho problema, se puede despejar R en la ecuación (8.13), o

$$R = \frac{S_n}{s_{\overline{n|}\,i}}$$

Esto se puede volver a escribir como

$$\boxed{R = S_n \left[\frac{1}{s_{\overline{n}|i}}\right]} \tag{8.14}$$

donde la expresión entre corchetes es el recíproco del factor del monto compuesto de una anualidad. Este factor a menudo recibe el nombre de ***factor del fondo de amortización***. Esto sucede porque en general la serie de depósitos usados para acumular alguna suma de dinero futura se llama ***fondo de amortización***. En la tabla IV (en la página T-12) se encuentran valores para el factor del fondo de amortización $[1/s_{\overline{n}|i}]$.

Ejemplo 13 Una corporación desea establecer un fondo de amortización que comience al final de este año. Se harán depósitos anuales al final de este año y en los nueve años siguientes. Si los depósitos ganan interés con una tasa de 8% por año capitalizada anualmente, ¿cuánto dinero se debe depositar cada año con el fin de tener $12 millones al momento del décimo depósito? ¿Cuánto interés se ganará?

SOLUCIÓN

La figura 8.9 indica el flujo de efectivo para este problema, en el cual S_{10} = $12 millones, $i = 0.08$ y $n = 10$. Al utilizar la ecuación (8.14) y la tabla IV,

$$\begin{aligned} R &= \$12\,000\,000[1/s_{\overline{10}|0.08}] \\ &= \$12\,000\,000(0.06903) \\ &= \$828\,360 \end{aligned}$$

Ya que se harán 10 depósitos de $828 360 durante este periodo, el total de los depósitos será igual a $8 283 600. Puesto que estos depósitos más el interés acumulado serán $12 millones, se ganará un interés de $12 000 000 − $8 283 600 = $3 716 400.

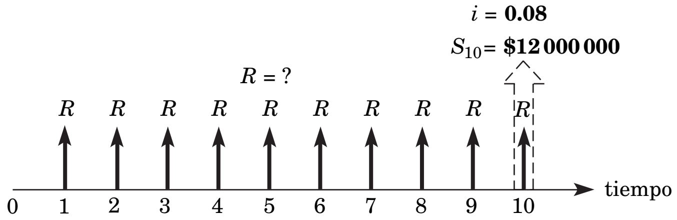


Figura 8.9 Determinación del monto de una anualidad.

Ejemplo 14 Suponga que en el último ejemplo la corporación realizará depósitos trimestrales y que se gana interés con una tasa de 8% por año capitalizada por trimestre. ¿Cuánto dinero se debe depositar cada trimestre? ¿Cuánto menos deberá depositar la compañía en el periodo de 10 años en comparación con los depósitos anuales y la capitalización anual?

SOLUCIÓN

Para este problema S_{40} = \$12 millones, $i = 0.08/4 = 0.02$ y $n = 40$. Al usar la tabla IV y sustituir en la ecuación (8.14) da

$$\begin{aligned} R &= \$12\,000\,000(0.01656) \\ &= \$198\,720 \end{aligned}$$

Puesto que se realizarán 40 depósitos de \$198 720, el total de depósitos en el periodo de 10 años será de \$7 948 800. Comparado con los depósitos anuales y la capitalización anual del ejemplo 13, el total de depósitos requerido para acumular los \$12 millones será de \$8 283 600 − \$7 948 800 = \$334 800 menos que con el plan trimestral. ❑

Ejercicio de práctica

¿Cuánto dinero se debe depositar al final de cada trimestre para acumular \$25 000 después de cuatro años? Suponga un interés de 8% por año capitalizado trimestralmente. *Respuesta*: \$1 341.25

Sección 8.3 Ejercicios de seguimiento

1. Una persona desea depositar \$5 000 por año en una cuenta de ahorros que genera un interés de 8% por año capitalizado anualmente. Suponga que se hace el primer depósito al final de este año en curso y depósitos adicionales al final de cada año siguiente.
   a) ¿A qué suma ascenderá la inversión en el momento del décimo depósito?
   b) ¿Cuánto interés se ganará?

2. Una compañía quiere depositar \$500 000 por año en una inversión que produce un interés de 10% por año capitalizado anualmente. Suponga que se efectúa el primer depósito al final del año en curso y depósitos adicionales al final de cada año siguiente.
   a) ¿A qué suma se incrementará la inversión en el momento del décimo depósito?
   b) ¿Cuánto interés se ganará?

3. Una madre desea abrir una cuenta de ahorros para la educación de su hijo. Planea invertir \$750 cuando su hijo tenga seis meses de edad y cada seis meses en lo subsecuente. La cuenta genera un interés de 8% por año, capitalizado semestralmente.
   a) ¿A cuánto ascenderá la cuenta en el momento del decimoctavo aniversario de su hijo?
   b) ¿Cuánto interés se ganará durante este periodo?

4. Una universidad local planea invertir \$500 000 cada tres meses en una inversión que gana interés con una tasa de 12% por año capitalizada trimestralmente. La primera inversión se realizará al final del trimestre en curso.
   a) ¿A qué suma se incrementará la inversión al cabo de cinco años?
   b) ¿Cuánto interés se ganará durante este periodo?

5. Una persona quiere depositar \$10 000 por año durante seis años. Si se gana interés con una tasa de 10% por año, calcule la cantidad a que aumentarán los depósitos al final de los seis años si:
   a) Se efectúan depósitos de \$10 000 al final de cada año con interés capitalizado anualmente.
   b) Se realizan depósitos de \$5 000 al final de cada periodo de seis meses con interés capitalizado semestralmente.
   c) Se hacen depósitos de \$2 500 al final de cada periodo de tres meses con interés capitalizado trimestralmente.

6. Una corporación quiere invertir $10 millones por año durante cinco años. Si se gana interés con una tasa de 14% por año, calcule el monto al que ascenderán los depósitos si:
  a) Se realizan depósitos de $10 millones al final de cada año con interés capitalizado anualmente.
  b) Se hacen depósitos de $5 millones al final de cada periodo de seis meses con interés capitalizado semestralmente.
  c) Se presentan depósitos de $2.5 millones al final de cada periodo de tres meses con interés capitalizado trimestralmente.

7. ¿Cuánto dinero se debe depositar al final de cada año si el objetivo es acumular $100 000 en el momento del quinto depósito? Suponga que se gana interés con la tasa de 15% por año capitalizada anualmente. ¿Cuánto interés se ganará sobre los depósitos?

8. ¿Cuánto dinero se debe depositar al final de cada año si el objetivo es acumular $250 000 después de 10 años? Suponga que se gana interés con una tasa de 10% por año capitalizada anualmente. ¿Cuánto interés se ganará?

9. ¿Cuánto dinero se debe depositar al final de cada trimestre si el objetivo es acumular $1 500 000 después de 10 años? Suponga que se gana interés con una tasa de 8% por año capitalizada trimestralmente. ¿Cuánto interés se ganará?

10. ¿Cuánto dinero se tiene que depositar al final de cada trimestre si el objetivo es acumular $600 000 después de ocho años? Suponga que se gana interés con una tasa de 10% por año capitalizada trimestralmente. ¿Cuánto interés se ganará?

11. Una familia quiere comenzar a ahorrar para un viaje a Europa. Se planea el viaje en tres años a partir de ahora y la familia quiere reunir $10 000 para el viaje. Si se hacen 12 depósitos trimestrales en una cuenta que genera interés con la tasa de 8% por año capitalizada trimestralmente, ¿de cuánto debe ser cada depósito? ¿Cuánto interés se ganará sobre sus depósitos?

12. Una ciudad importante quiere establecer un fondo de amortización para saldar deudas de $75 millones que debe pagar en ocho años. La ciudad puede ganar interés con la tasa de 10% por año capitalizada semestralmente. Si se efectúa el primer depósito dentro de seis meses, ¿cuál es el depósito semestral requerido para reunir los $75 millones? ¿Cuánto interés se ganará sobre estos depósitos?

8.4 Anualidades y su valor presente

Así como hay problemas que relacionan las anualidades con su valor futuro, hay aplicaciones que relacionan una anualidad con su valor presente equivalente. Por ejemplo, nos podríamos interesar en determinar el importe de un depósito que generará una serie de pagos (una anualidad) para la universidad, años de retiro y demás. O, dado que se realizó un préstamo, se podría interesar en determinar la serie de pagos (anualidad) necesarios para pagar el préstamo con intereses. Esta sección analiza problemas de este tipo.

El valor presente de una anualidad

El ***valor presente de una anualidad*** es la cantidad de dinero actual que es equivalente a una serie de pagos iguales en el futuro. Suponga que ganó la lotería y los funcionarios de la lotería le dan a elegir entre recibir un pago de suma total hoy o una serie de pagos al final de cada uno de los cinco años siguientes. Las dos alternativas se considerarían equivalentes (en el sentido monetario) si al invertir hoy la suma total pudiera generar (con interés acumulado) retiros anuales iguales a los cinco pagos parciales ofrecidos por los funcionarios de la lotería. *Se supone que el depósito final agotará la inversión por completo.* Considere el ejemplo siguiente.

Ejemplo 15 **(Lotería)** Una persona ganó hace poco una lotería estatal. Los términos de la lotería son que el ganador recibirá pagos anuales de \$20 000 al final de este año y cada uno de los tres años siguientes. Si el ganador pudiera invertir hoy el dinero con una tasa de 8% por año capitalizada anualmente, ¿cuál es el valor presente de los cuatro pagos?

SOLUCIÓN

La figura 8.10 ilustra la situación. *Si se define A como el valor presente de la anualidad*, podría determinarse el valor de *A* al calcular el valor presente de cada pago de \$20 000. Al aplicar la ecuación (8.7*a*) y usar los valores de la tabla II, se encuentra que la suma de los cuatro valores presentes es \$66 242.60. Puede concluirse que un depósito de \$66 242.60 hecho el día de hoy que gana interés con una tasa de 8% por año capitalizada anualmente podría generar una serie de cuatro retiros de \$20 000 al final de cada uno de los cuatro años siguientes.

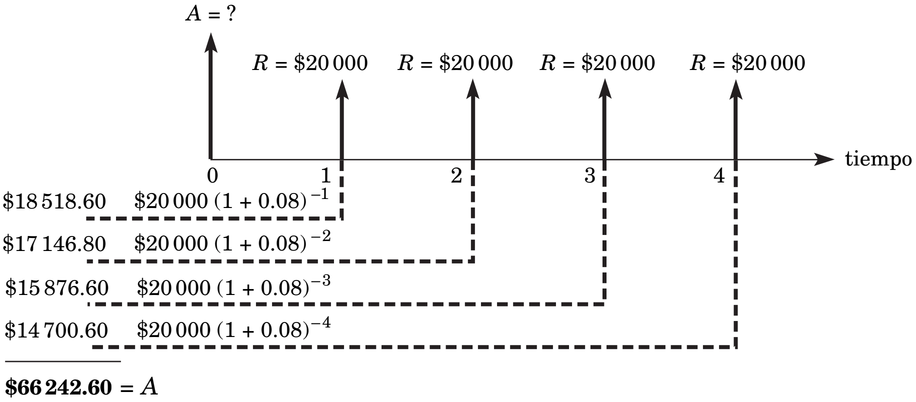


Figura 8.10 Cálculo del valor presente de cada pago *R*.

❑

Como con el valor futuro de una anualidad, se puede hacer una aproximación de la suma de los valores presentes de cada pago, pero esto no es práctico. Por ello a continuación se sigue un método más general y eficiente para determinar el valor presente de una anualidad.

R = *monto de una anualidad*
i = *tasa de interés por periodo de capitalización*
n = *número de pagos de la anualidad (también el número de periodos de capitalización)*
A = *valor presente de la anualidad*

La ecuación (8.12), que determina el valor o suma futuros de una anualidad, se vuelve a expresar en la siguiente forma:

$$S_n = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i} \qquad \textbf{(8.15)}$$

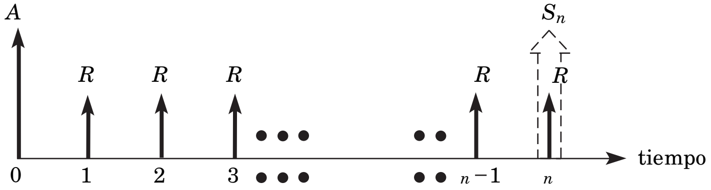


Figura 8.11

Al observar la figura 8.11 puede pensarse que S_n es el valor futuro de la anualidad. Si se conoce el valor de S_n, el valor presente de A de la anualidad debería ser simplemente el valor presente de S_n, o sea

$$A = S_n(1+i)^{-n}$$

Al sustituir la expresión S_n de la ecuación (8.15) se produce

$$A = R\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}(1+i)^{-n} \tag{8.16}$$

o bien
$$A = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] \tag{8.17}$$

Se puede utilizar la ecuación (8.17) para calcular el valor presente A de una anualidad que consiste en n pagos iguales R, cada uno realizado al final de n periodos. La expresión entre corchetes se conoce como ***factor del valor presente de una anualidad***. El símbolo especial $a_{\overline{n}|i}$ (que se expresa verbalmente como "a subíndice n ángulo i") se utiliza con frecuencia para abreviar los factores del valor presente de una anualidad. Por lo tanto, se puede volver a escribir la ecuación (8.17) de manera más simple como

$$\boxed{A = Ra_{\overline{n}|i}} \tag{8.18}$$

En la tabla V (página T-16) se encuentran algunos valores para $a_{\overline{n}|i}$.

Ejemplo 16 Vuelva a trabajar el ejemplo 15 utilizando la ecuación (8.18).

SOLUCIÓN

Ya que $i = 0.08$ y $n = 4$, se encuentra el valor presente de los cuatro pagos al aplicar la ecuación (8.18) y usar la tabla V.

$$\begin{aligned} A &= \$20\,000(3.31213) \\ &= \$66\,242.60 \end{aligned}$$

Ejemplo 17 Los padres de una adolescente quieren depositar una suma de dinero que ganará interés con la tasa de 9% por año capitalizada semestralmente. Se utilizará el depósito para generar una serie de ocho pagos semestrales de $2 500 comenzando seis meses después del depósito. Estos pagos se usarán para ayudar a financiar la educación universitaria de su hija. ¿Qué cantidad se debe depositar para lograr el objetivo? ¿Cuánto interés se ganará en este depósito?

SOLUCIÓN

Para este problema, $R = \$2\,500$, $i = 0.09/2 = 0.045$ y $n = 8$. Al usar la tabla V y sustituir en la ecuación (8.18) da

$$\begin{aligned} A &= (\$2\,500)(6.59589) \\ &= \$16\,489.73 \end{aligned}$$

Ya que los \$16 489.73 generarán ocho pagos por un total de \$20 000, se ganará un interés de \$20 000 − \$16 489.73 o \$3 510.27. ❏

Ejercicio de práctica

Determine el valor presente de una serie de ocho pagos anuales de \$30 000 cada uno, el primero de los cuales comienza en un año a partir de hoy. Suponga un interés de 6% por año capitalizado anualmente. *Respuesta*: \$186 293.70.

Determinación del importe de una anualidad

Hay problemas en los que se puede dar el valor presente de una anualidad y se necesita determinar el importe de la anualidad correspondiente. Por ejemplo, dado un préstamo de \$10 000 que se recibe hoy, ¿qué pagos trimestrales se deben realizar para pagar el préstamo en cinco años si se cobra interés con una tasa de 10% por año capitalizada trimestralmente? Se refiere como ***amortización de un préstamo*** al proceso de pagar un préstamo en parcialidades.

Para el ejemplo del préstamo, se pueden calcular los pagos trimestrales al despejar R en la ecuación (8.18). Al despejar R se obtiene

$$R = \frac{A}{a_{\overline{n}|i}}$$

o bien

$$\boxed{R = A\left[\frac{1}{a_{\overline{n}|i}}\right]} \qquad \textbf{(8.19)}$$

En ocasiones, la expresión entre corchetes se conoce como ***factor de recuperación de capital***. La tabla VI (en la página T-20) contiene algunos valores para este factor.

Ejemplo 18

Determine el pago trimestral necesario para pagar el préstamo de \$10 000 antes mencionado. ¿Cuánto interés se pagará sobre el préstamo?

SOLUCIÓN

Para este problema, $A = \$10\,000$, $i = 0.10/4 = 0.025$ y $n = 20$. Utilizando la tabla VI y sustituyendo en la ecuación (8.19) da

$$\begin{aligned} R &= \$10\,000(0.06415) \\ &= \$641.50 \end{aligned}$$

Habrá 20 pagos por un total de \$12 830; por lo tanto, el interés sobre el préstamo es igual a \$2 830.

Ejemplo 19 **(Plan de retiro)** Una empleada contribuyó con su patrón en un plan de retiro. En la fecha de su retiro, el total de beneficios del retiro es de \$250 000. El programa de retiro ofrece la inversión de esta suma con una tasa de interés de 12% por año capitalizada semestralmente. Se harán desembolsos semestrales durante 30 años para la empleada o, en caso de muerte, para sus herederos. ¿Qué pago semestral se debería generar? ¿Cuánto interés se ganará sobre los \$250 000 durante los 30 años?

SOLUCIÓN

Para este problema, $A = \$250\,000$, $i = 0.12/2 = 0.06$ y $n = 60$. Al usar la tabla VI y sustituir en la ecuación (8.19) se obtiene

$$\begin{aligned} R &= \$250\,000(0.06188) \\ &= \$15\,470 \end{aligned}$$

El total de pagos durante los 30 años será de $60 \times \$15\,470$ o \$928 200. Por consiguiente, se ganará un interés de $\$928\,200 - \$250\,000$ o \$678 200 durante los 30 años. ❑

Ejercicio de práctica

Dado \$1 millón hoy, determine la serie equivalente de 10 pagos anuales que comienza en el año 1. Suponga un interés de 6% por año, capitalizado anualmente. *Respuesta*: \$135 870.

Hipotecas

Tarde o temprano, muchos de nosotros sucumbimos ante el “sueño” de ser dueños de una casa. No obstante, las tasas de interés, igual que los precios elevados de los bienes raíces en algunas áreas, hacen que éste sea un sueño costoso. Además de los numerosos placeres de poseer una casa, *por lo menos* una vez durante cada mes se sufren los efectos de ser dueños de una casa. Es cuando firmamos un cheque por el pago mensual de la hipoteca. Y nos demos cuenta o no, gastamos una cantidad increíble de dinero para hacer realidad nuestro sueño.

Dado un préstamo hipotecario, muchos propietarios de casas no se dan cuenta de cómo se calcula su pago hipotecario. Se calcula del mismo modo que los pagos de préstamos en la última sección. Es decir, se calculan mediante la ecuación (8.19). Por lo regular, el interés se capitaliza mensualmente y la tasa de interés por periodo de capitalización puede ser igual a fracciones o respuestas decimales poco comunes. Si la tasa de interés anual es 8.5%, el valor de i es 0.085/12 = 17/24 de un porcentaje, o sea 0.0070833. Es evidente que no se puede utilizar la tabla VI para estas tasas de interés.

La tabla VII (en la página T-24) es una extensión de la tabla VI diseñada específicamente para determinar pagos de hipoteca. Nótese que las tasas de interés se expresan como porcentajes anuales.

Ejemplo 20 Una persona paga $100 000 por una casa nueva. Un enganche de $30 000 deja una hipoteca de $70 000 con interés calculado en 10.5% por año capitalizado mensualmente. Determine el pago hipotecario mensual si se debe pagar el préstamo en: *a*) 20 años, *b*) 25 años y *c*) 30 años. *d*) Calcule el interés total en los tres periodos de préstamo diferentes.

SOLUCIÓN

a) Con base en la tabla VII, el *pago mensual por dólar de hipoteca* es 0.00998380 (correspondiente a $n = 20 \times 12 = 240$ pagos). Por lo tanto,

$$\begin{aligned} R &= \$70\,000(0.00998380) \\ &= \$698.87 \end{aligned}$$

b) Para 25 años (o 300 pagos mensuales),

$$\begin{aligned} R &= \$70\,000(0.00944182) \\ &= \$659.27 \end{aligned}$$

c) Para 30 años (o 360 pagos mensuales)

$$\begin{aligned} R &= \$70\,000(0.00914739) \\ &= \$640.32 \end{aligned}$$

d) El total de pagos es

$$\begin{aligned} (240)(\$698.87) &= \$167\,728.80 && \text{por 20 años} \\ (300)(\$659.27) &= \$197\,781.00 && \text{por 25 años} \\ (360)(\$640.32) &= \$230\,515.20 && \text{por 30 años} \end{aligned}$$

Ya que todos estos pagos cubren un préstamo de $70 000, el interés sobre el préstamo es

$$\begin{aligned} \$167\,728.80 - \$70\,000 &= \$97\,728.80 && \text{por 20 años} \\ \$197\,781.00 - \$70\,000 &= \$127\,781.00 && \text{por 25 años} \\ \$230\,515.20 - \$70\,000 &= \$160\,515.20 && \text{por 30 años} \end{aligned}$$

Ejemplo 21 En el problema anterior, determine los efectos de una disminución de la tasa de interés a 10%: *a*) sobre los pagos mensuales para la hipoteca a 25 años y *b*) sobre el interés total para la hipoteca a 25 años.

SOLUCIÓN

a) Para $i = 10.00$ y 25 años,

$$\begin{aligned} R &= (70\,000)(0.00908700) \\ &= \$636.09 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los pagos mensuales son menores por una cantidad de

$$\$659.27 - \$636.09 = \$23.18$$

b) El total de pagos en los 25 años será igual a

$$300(636.09) = \$190\,827.00$$

El interés total es de $120 827, que es $6 954 menor que con la hipoteca de 10.5%.

Ejemplo 22 **(Préstamo máximo que se puede pagar)** Una pareja estima que puede pagar una hipoteca mensual de $750. Las actuales tasas de interés hipotecarias son de 10.25%. Si se puede obtener una hipoteca a 30 años, ¿cuál es el préstamo hipotecario máximo que puede pagar la pareja?

SOLUCIÓN

La fórmula para calcular el pago hipotecario mensual es:

$$\text{Pago mensual} = \begin{pmatrix}\text{monto de dólares}\\ \text{del préstamo}\\ \text{hipotecario}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{pago mensual por dólar}\\ \text{del préstamo hipotecario,}\\ \text{tabla VII}\end{pmatrix}$$

o

$$\boxed{R = A\begin{pmatrix}\text{Factor de}\\ \text{la tabla VII}\end{pmatrix}} \qquad \textbf{(8.20)}$$

En este problema, la incógnita es A. Si se reordena la ecuación (8.20),

$$\begin{aligned} A &= \frac{R}{\text{Factor de la tabla VII}} \\ &= \frac{750}{0.00896101} = \$83\,695.92 \end{aligned}$$

❑

La ventaja del pago quincenal de la hipoteca

Las variaciones en el modo en que se pagan las hipotecas pueden llevar a algunos resultados interesantes y francamente notables. Ya se había hecho alusión a los efectos de reducir la vida de la hipoteca de las tradicionales hipotecas a 25 o 30 años. Considere una hipoteca de \$100 000 con interés de 10%. Una hipoteca a 30 años requeriría un pago mensual de \$877.57, un total de pagos de \$315 925.92 y un total de pagos de interés de \$215 925.92. Una hipoteca a 15 años requeriría pagos mensuales de \$1 074.61, un total de pagos de \$193 428.90 e interés total de \$93 428.90. Por lo tanto, al sumar \$197.04 a los pagos mensuales del préstamo a 30 años, se puede pagar el préstamo en la mitad del tiempo. Los \$197.04 adicionales por mes dan un total de \$35 467.20 durante los 15 años. Sin embargo, el resultado es una reducción del total de pagos (y el interés total) de \$315 925.92 − \$193 428.90, o sea \$122 497.02.

Un concepto igualmente intrigante es el del pago quincenal de la hipoteca. Al pagar la mitad del pago mensual cada dos semanas, un propietario haría 26 pagos durante un año calendario. Un efecto de esto es el pago del equivalente de un mes adicional en pagos de hipoteca durante el año calendario. El otro efecto notable es que la combinación de pagos menores y más frecuentes y el equivalente de un pago mensual adicional da como resultado una aceleración considerable en el pago del préstamo. La tabla 8.2 presenta datos pertenecientes a una hipoteca de \$100 000 otorgada con una tasa de interés de 10% a 30 años. Se ilustran cifras que muestran la reducción del capital del préstamo con el paso del tiempo.

Tabla 8.2

Suposición: Hipoteca de \$100 000 (30 años, 10%)

Años de la hipoteca	Capital restante (hipoteca mensual)	Capital restante (hipoteca quincenal)
3	\$98 152	\$95 035
5	96 575	90 770
10	90 939	75 533
15	81 665	50 223
20	66 407	8 847

Sección 8.4 Ejercicios de seguimiento

1. Determine el valor presente de una serie de 10 pagos anuales de \$25 000; cada uno comienza dentro de un año a partir de hoy. Suponga un interés de 9% por año capitalizado anualmente.
2. Determine el valor presente de una serie de 20 pagos anuales de \$8 000; cada uno empieza en un año a partir de ahora. Suponga un interés de 7% por año capitalizado anualmente.
3. Determine el valor presente de una serie de 25 pagos semestrales de \$10 000; cada uno inicia en seis meses. Suponga un interés de 10% por año capitalizado semestralmente.
4. Determine el valor presente de una serie de 15 pagos de \$5 000; cada uno comienza en seis meses a partir de hoy. Suponga un interés de 9% por año capitalizado semestralmente.
5. Determine el valor presente de una serie de 30 pagos trimestrales de \$500; cada uno empieza dentro de tres meses a partir de ahora. Suponga un interés de 10% por año capitalizado trimestralmente.

6. Determine el valor presente de una serie de 20 pagos trimestrales de $2 500; cada uno comienza en tres meses a partir de hoy. Suponga un interés de 8% por año capitalizado trimestralmente.

7. Determine el valor presente de una serie de 60 pagos mensuales de $2 500; cada uno empieza dentro de un mes a parir de ahora. Suponga un interés de 12% por año capitalizado mensualmente.

8. Determine el valor presente de una serie de 36 pagos mensuales de $5 000; cada uno inicia en un mes a partir de ahora. Suponga un interés de 18% por año capitalizado mensualmente.

9. Una persona quiere comprar una póliza de seguro de vida que produciría una suma de dinero lo suficientemente grande para proporcionar 20 pagos anuales de $50 000 a los miembros sobrevivientes de su familia. Los pagos comenzarían un año después de la fecha del fallecimiento. Se supone que se podría ganar interés sobre la suma recibida de la póliza con una tasa de 8% por año capitalizada anualmente.

a) ¿Qué cantidad del seguro se debería tomar para garantizar la anualidad deseada?
b) ¿Cuánto interés se ganará sobre los beneficios de la póliza en el periodo de 20 años?

10. Suponga en el ejercicio 9 que se desean pagos semestrales de $25 000 en el periodo de 20 años y el interés se capitaliza semestralmente.

a) ¿Qué cantidad del seguro se debe adquirir?
b) ¿Cómo se compara esta cantidad con la encontrada en el ejercicio 9?
c) ¿Cuánto interés se ganará sobre los beneficios de la póliza?
d) ¿Cómo se compara esta cantidad con la del ejercicio 9?

11. Dados $250 000 hoy, determine la serie equivalente de 10 pagos anuales que se podría generar comenzando en un año. Suponga un interés de 12% capitalizado anualmente.

12. Dados $5 millones hoy, determine la serie equivalente de 20 pagos anuales que se podría generar empezando en un año. Suponga un interés de 10% capitalizado anualmente.

13. Dados $7 500 000 hoy, determine la serie equivalente de 20 pagos trimestrales que se podría generar iniciando en tres meses. Suponga un interés de 10% por año capitalizado trimestralmente.

14. Dados $20 millones hoy, determine la serie equivalente de 20 pagos semestrales que se podría generar comenzando en seis meses. Suponga un interés de 9% por año capitalizado semestralmente.

15. Dados $4 millones hoy, determine la serie equivalente de 24 pagos trimestrales que se podría generar empezando en tres meses. Suponga un interés de 12% por año capitalizado trimestralmente.

16. Dados $250 000 hoy, determine la serie equivalente de 24 pagos semestrales que se podría generar comenzando dentro de seis meses a partir de hoy. Suponga un interés de 9% por año capitalizado semestralmente.

17. *a*) Determine el pago anual necesario para cubrir un préstamo de $350 000 si se calcula el interés con una tasa de 9% por año capitalizada anualmente. Suponga que el periodo del préstamo es de seis años.
b) ¿Cuánto interés se pagará en el periodo de seis años?

18. *a*) Determine el pago mensual necesario para cubrir el financiamiento de un auto si se calcula el interés con una tasa de 12% por año capitalizada mensualmente. Suponga que el periodo del préstamo es de cuatro años.
b) ¿Cuánto interés se pagará en el periodo de cuatro años?

19. *a*) Determine el pago mensual del automóvil para pagar un autofinanciamiento de $15 000 si se calcula el interés con una tasa de 12% por año capitalizada mensualmente. Suponga que el periodo del préstamo es de tres años.
b) ¿Cuánto interés se pagará en el periodo de tres años?

20. *a*) Determine el pago trimestral necesario para pagar un préstamo de $25 000 si se calcula el interés con la tasa de 14% por año capitalizada trimestralmente. Suponga que se paga el préstamo en 10 años.
b) ¿Cuánto interés se pagará en el periodo de 10 años?

Para los ejercicios 21 a 28 calcule el pago mensual de la hipoteca, el total de pagos y el interés total.

21. Préstamo hipotecario de $80 000 con tasa de 10% anual por 20 años.
22. Préstamo hipotecario de $100 000 con tasa de 11.25% anual por 30 años.
23. Préstamo hipotecario de $90 000 con tasa de 9.5% anual por 25 años.
24. Préstamo hipotecario de $200 000 con tasa de 10.75% anual por 30 años.
25. Préstamo hipotecario de $90 000 con tasa de 10% anual por 25 años.
26. Préstamo hipotecario de $150 000 con tasa de 9.75% anual por 30 años.
27. Préstamo hipotecario de $120 000 con tasa de 10.5% anual por 20 años.
28. Préstamo hipotecario de $160 000 con tasa de 12% anual por 25 años.
29. a 36. Vuelva a trabajar los ejercicios 21 a 28, calculando la diferencia entre la cantidad del pago mensual de la hipoteca y el interés *total* pagado si la tasa de interés aumenta 1%.
37. Una pareja estima que puede pagar una hipoteca de $750 por mes. Pueden obtener una hipoteca a 25 años con una tasa de interés de 10.5%. ¿Cuál es el mayor pago de hipoteca que pueden cubrir?
38. Una pareja estima que puede hacer un pago de hipoteca de $1 000 por mes. Pueden conseguir una hipoteca a 30 años con una tasa de interés de 10.25%. ¿Cuál es el mayor pago de hipoteca que pueden hacer?
39. Una mujer estima que puede pagar una hipoteca de $1 500 por mes. Puede obtener una hipoteca a 25 años con una tasa de interés de 11.5%. ¿Cuál es el mayor pago de hipoteca que puede realizar?
40. Una persona estima que puede pagar una hipoteca de $1 200 por mes. Puede conseguir una hipoteca a 30 años con una tasa de interés de 11.25%. ¿Cuál es el mayor pago de hipoteca que puede cubrir?

8.5 Análisis costo-beneficio

Cuando las organizaciones evalúan la viabilidad financiera de las decisiones de inversión, el valor temporal del dinero es una consideración esencial. Esto es particularmente cierto cuando un proyecto incluye patrones del flujo de efectivo que se extienden varios años. Esta sección analizará un modo en que se pueden evaluar tales inversiones por periodos múltiples.

Flujo de efectivo descontado

Considere una decisión de inversión que se caracteriza por el patrón del flujo de efectivo que se muestra en la figura 8.12. Se espera que una inversión inicial de $50 000 genere un rendimiento neto (después de gastos) de $15 000 al final de un año y un rendimiento igual al final de los tres años siguientes. Por lo tanto, se espera que una inversión de $50 000 dé un rendimiento de $60 000 en un periodo de cuatro años. Ya que los flujos de ingreso de efectivo ocurren en un periodo de cuatro años, no se puede considerar equivalente el dinero durante los distintos periodos. Para evaluar este proyecto de manera apropiada, se debe tomar en cuenta el valor temporal de los diferentes flujos de efectivo.

Un planteamiento para evaluar un proyecto como éste es traducir todos los flujos de efectivo a cantidades monetarias equivalentes en un periodo base común. Esto se llama ***método del flujo de efectivo descontado***. Por ejemplo, se podría evaluar este proyecto al volver a expresar todos los flujos de efectivo en términos de sus valores equivalentes en $t = 0$, el momento de la inversión. Se expresan los $50 000 originales en términos de dólares en $t = 0$. No obstante, se debe volver a expresar cada uno de los flujos de ingreso de efectivo de $15 000 en términos de su valor equivalente en $t = 0$.

Con el fin de descontar todos los flujos de efectivo en un periodo base común, debe suponerse una tasa de interés para el periodo intermedio. Con frecuencia, esta tasa de interés es una tasa de rendimiento mínima deseada supuesta sobre las inversiones. Por ejemplo, la gerencia podría indicar que una tasa de rendimiento mínima deseada sobre todas las inversiones sea de 10% por año. Cómo obtiene la gerencia esta cifra es otro tema *per se.*

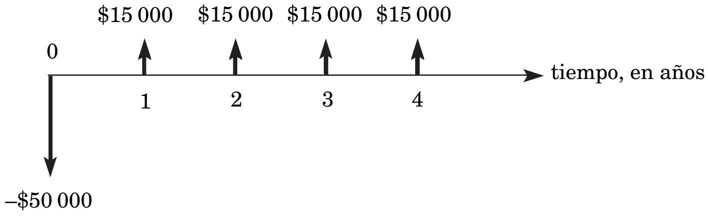


Figura 8.12 Flujos de efectivo netos.

Algunas veces es un reflejo de la tasa de rendimiento que se puede ganar sobre inversiones alternativas (por ejemplo, bonos o fondos del mercado de dinero).

Supongamos que la tasa de rendimiento mínima deseada para el proyecto de la figura 8.12 es de 8% por año. Nuestro análisis del flujo de efectivo descontado calculará el ***valor presente neto*** (NPV; *net present value*) de todos los flujos de efectivo asociados a un proyecto. El valor presente neto es la suma algebraica del valor presente de todos los flujos de efectivo asociados a un proyecto; se tratan los *flujos de ingreso* de efectivo como flujos de efectivo positivos y los *flujos de egreso* de efectivo como flujos de efectivo negativos. *Si el valor presente neto de todos los flujos de efectivo es* ***positivo*** *con la tasa de rendimiento mínima deseada supuesta, la tasa de rendimiento real del proyecto excede la tasa de rendimiento mínima deseada. Si el valor presente neto de todos los flujos de efectivo es* ***negativo****, la tasa de rendimiento real del proyecto es menor que la tasa de rendimiento mínima deseada.*

En nuestro ejemplo, se descuentan las cuatro cifras de $15 000 con una tasa de 8%. Al calcular el valor presente de estas cifras, en efecto se determina la cantidad de dinero que se debería invertir hoy ($t = 0$) con una tasa de 8% con el fin de generar esos cuatro flujos de efectivo. Dado que los valores del rendimiento neto de efectivo son iguales, puede tratarse esto como el cálculo del valor presente de una anualidad. Usando la tabla V y la ecuación (8.17), con $n = 4$ e $i = 0.08$,

$$\begin{aligned} A &= 15\,000(3.31213) \\ &= \$49\,681.95 \end{aligned}$$

Este valor sugiere que una inversión de \$49 681.95 generaría un pago anual de 15 000 al final de cada uno de los cuatro años siguientes. En este ejemplo, se requiere una inversión de \$50 000.

El valor presente neto para este proyecto combina los valores presentes de todos los flujos de efectivo en $t = 0$, o bien

$$\boxed{\text{NPV} = \begin{matrix}\text{valor presente de los}\\ \text{flujos de ingreso}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{valor presente de}\\ \text{los flujos de egreso}\end{matrix}} \qquad \textbf{(8.21)}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\text{NPV} &= \$49\,681.80 - \$50\,000\\ &= -\$318.20\end{aligned}$$

Este valor negativo indica que el proyecto dará como resultado una tasa de rendimiento menor que el rendimiento mínimo deseado de 8% por año, capitalizado anualmente.

Ejemplo 23

(Patrones irregulares de flujo de efectivo) El ejemplo previo dio como resultado flujos de ingreso de efectivo netos que eran iguales en cuatro años. Los patrones de flujo de efectivo para la mayor parte de las inversiones tienden a ser irregulares, tanto en relación con la cantidad de dinero como con la programación de los flujos de efectivo. Considere el patrón de flujo de efectivo que se ilustra en la figura 8.13. Para este proyecto de inversión, una inversión de \$1 millón no produce flujo de efectivo durante el primer año. No obstante, al final de cada uno de los cinco años siguientes la inversión genera una sucesión de rendimientos netos positivos. Estos rendimientos no son iguales entre sí, aumentan hasta un máximo de \$450 000 al final del cuarto año y por último disminuyen a \$100 000 al final del sexto año.

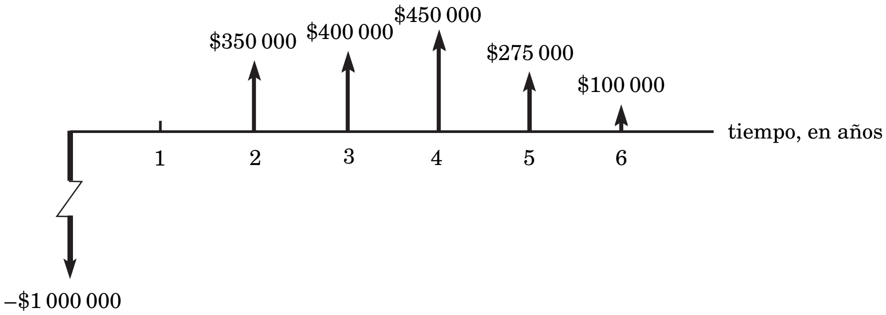


Figura 8.13 Flujos de efectivo netos.

Suponga que el rendimiento deseado mínimo sobre las inversiones es de 12%. Con el fin de evaluar cuán deseable es este proyecto, deben descontarse todos los flujos de efectivo a sus valores equivalentes en $t = 0$. En contraste con el ejercicio anterior, cada cifra de rendimiento neto se debe descontar por separado. Se calcula el valor presente de cada una como se ilustra en la tabla 8.3.

Tabla 8.3

n	Rendimiento neto	Factor del valor presente $(1 + 0.12)^{-n}$	Valor presente
2	$350 000	0.79719	$279 016.50
3	400 000	0.71178	284 712.00
4	450 000	0.63552	285 984.00
5	275 000	0.56743	156 043.25
6	100 000	0.50663	50 663.00
			$1 056 418.75

El valor presente neto de todos los flujos de efectivo es:

$$\text{NPV} = \$1\,056\,418.75 - \$1\,000\,000 = \$50\,418.75$$

Puesto que el valor presente neto es positivo, dará como resultado una tasa de rendimiento que excede la tasa de rendimiento mínima deseada de 12% por año, capitalizada anualmente. Otra forma de ver esto es que $1 056 418.75 invertidos con una tasa de 12% por año, generarán los rendimientos netos indicados; esta inversión sólo requiere $1 000 000. ☐

Extensiones del análisis del flujo de efectivo descontado

El planteamiento del valor presente neto es sólo uno de una variedad de métodos disponibles para evaluar decisiones de inversión a largo plazo. Aunque este análisis permite determinar si un proyecto satisface el criterio de la tasa de rendimiento mínima deseada, no proporciona una medida de la tasa de rendimiento exacta. Lo deseable es conocer la tasa de rendimiento real, en especial si hay un conjunto de oportunidades de inversión que compitan y que difieran respecto de la cantidad de la inversión y el horizonte de tiempo de la inversión. Los métodos para calcular la tasa de rendimiento real son simples extensiones de la técnica del valor presente neto. La tasa de rendimiento real de un proyecto es una tasa que genera un valor presente neto de 0. Es posible encontrar esto usando un planteamiento de prueba y error. El valor presente neto de un proyecto se calcula mediante diferentes tasas de interés hasta que el NPV sea igual a 0 (aproximadamente).

Otra consideración al evaluar dichos proyectos es el impacto de los impuestos. Aunque algunas organizaciones evalúan los proyectos sobre una base *antes de impuestos*, la mayor parte encuentran que el mejor análisis se hace sobre una base *después de impuestos*. En general es más adecuado un análisis después de impuestos al considerar los créditos de inversión, así como una variedad de métodos de depreciación posibles.

Sección 8.5 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 6, determine si el proyecto de inversión representado por el diagrama del flujo de efectivo satisface el criterio de la tasa de rendimiento mínima deseada. ¿Cuál es el NPV con la tasa de interés indicada?

1. Flujo de efectivo representado en la figura 8.14, tasa mínima de rendimiento de 10% anual.
2. Flujo de efectivo ilustrado en la figura 8.15, tasa mínima de rendimiento de 8% anual.
3. Flujo de efectivo representado en la figura 8.16, tasa mínima de rendimiento de 12% anual.
4. Flujo de efectivo ilustrado en la figura 8.17, tasa mínima de rendimiento de 9% anual.
5. Flujo de efectivo representado en la figura 8.18, tasa mínima de rendimiento de 10% anual.
6. Flujo de efectivo ilustrado en la figura 8.19, tasa mínima de rendimiento de 14% anual.
***7.** Estime la tasa de rendimiento real generada por el proyecto que se representa en la figura 8.14.
***8.** Estime la tasa de rendimiento real generada por el proyecto que se ilustra en la figura 8.15.

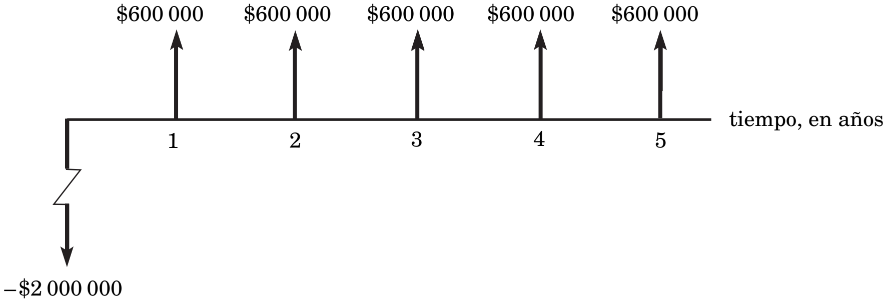


Figura 8.14

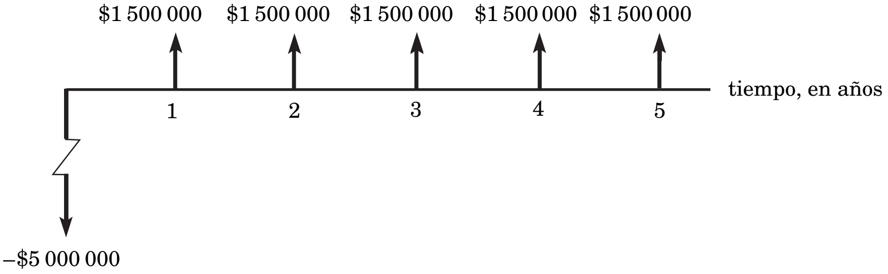


Figura 8.15

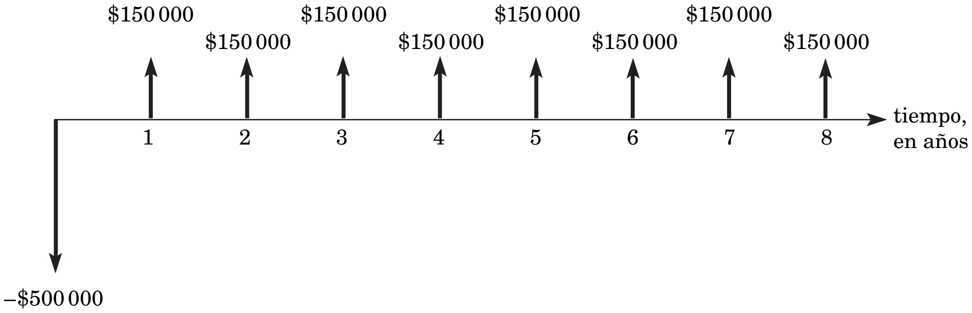


Figura 8.16

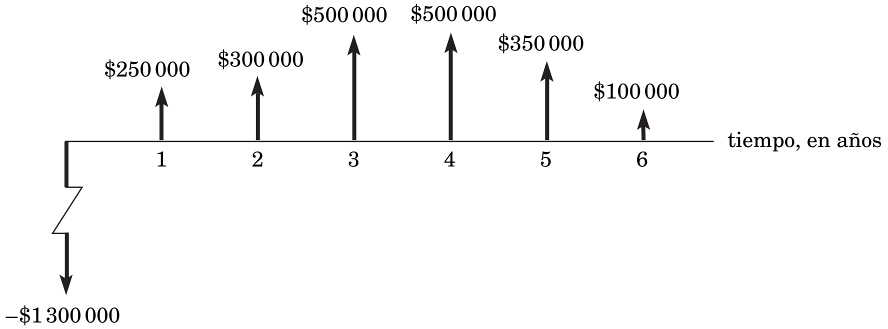


Figura 8.17

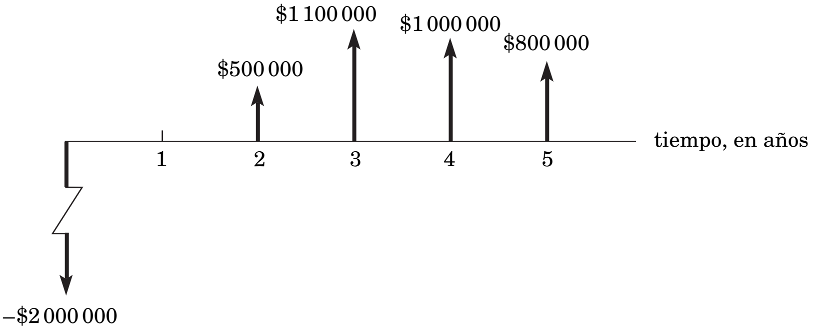


Figura 8.18

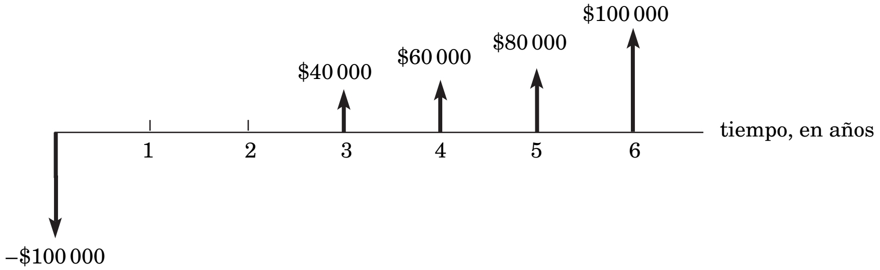
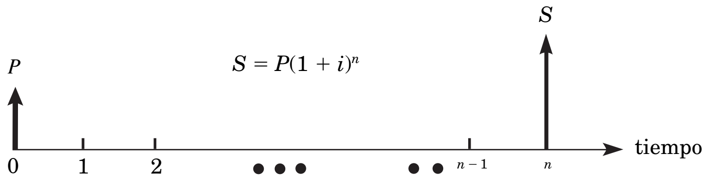


Figura 8.19

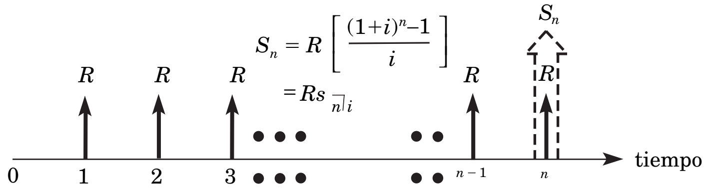
❑ TÉRMINOS Y CONCEPTOS CLAVE

análisis costo-beneficio 347
anualidad 332
capital 314
factor de recuperación de capital 341
factor del fondo de amortización 336
factor del monto compuesto de una anualidad 334
factor del valor presente 325
factor del valor presente de una anualidad 340
flujo de efectivo descontado (método) 347
fondo de amortización 336
fórmulas del monto compuesto 321
interés compuesto 316
interés simple 314
monto compuesto 316
préstamo máximo que se puede pagar 344
suma de una anualidad 332

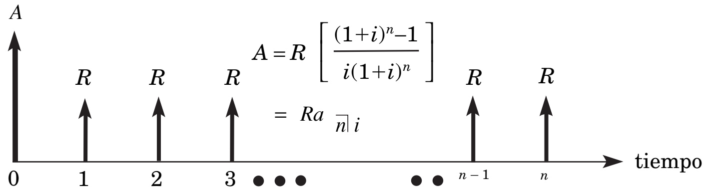
tasa de interés 314
tasa efectiva de interés anual 329
valor presente 324
valor presente de una anualidad 338
valor presente neto 348



a) Pago simple



b) Anualidad y su valor futuro



c) Anualidad y su valor presente

Figura 8.20 Resumen de situaciones de pagos simples y flujo de efectivo por concepto de anualidades.

❑ FÓRMULAS IMPORTANTES

$I = Pin$ **Interés simple** **(8.1)**

$S = P(1 + i)^n$ **Monto compuesto** **(8.6)**

$P = S\left[\frac{1}{(1 + i)^n}\right]$ **Valor presente** **(8.7*a*)**

$r = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m - 1$ **Tasa efectiva de interés anual** **(8.8)**

$S_n = Rs_{\overline{n}|i}$ **Suma de una anualidad** **(8.13)**

$$R = S_n\left[\frac{1}{s_{\overline{n|}i}}\right] \qquad \textbf{Anualidad para generar una suma deseada} \qquad (8.14)$$

$$A = Ra_{\overline{n|}i} \qquad \textbf{Valor presente de una anualidad} \qquad (8.18)$$

$$R = A\left[\frac{1}{a_{\overline{n|}i}}\right] \qquad \textbf{Anualidad equivalente a una suma presente} \qquad (8.19)$$

❑ EJERCICIOS ADICIONALES

SECCIÓN 8.2

1. Se invierten $25 000 en una cuenta de ahorros que paga interés con una tasa de 7% por año capitalizada anualmente. Si se mantiene la cantidad en depósito durante 15 años, ¿cuál será el monto compuesto? ¿Cuánto interés se generará durante los 15 años?
2. Se invierten $40 000 con una tasa de 12% por año capitalizada anualmente. Si la inversión se hace por un periodo de cinco años, ¿cuál será el monto compuesto? ¿Cuánto interés se ganará durante los cinco años?
3. Se invierten $20 000 en una cooperativa de crédito que paga un interés con una tasa de 6% por año capitalizada trimestralmente. Si se invierte la cantidad por un periodo de 10 años, ¿cuál será el monto compuesto? ¿Cuánto interés se ganará durante los 10 años?
4. **Computadoras personales** Se estimó que las ventas de computadoras personales que cuestan menos de $1 000 equivalían a $500 millones en 1990. Un análisis estima que las ventas crecerán con una tasa de 20% por año durante los próximos cinco años. Pronostique las ventas anuales para el año 1995.
5. **Protección contra incendios** El número de incendios reportados cada año en una ciudad importante de Estados Unidos ha aumentado con una tasa de 7% por año. El número de incendios informados en el año 1990 fue de 5 000. Si el número de incendios se sigue incrementando con la misma tasa, ¿cuántos se esperarán en 1996?
6. Se invirtieron $2 millones con una tasa de interés de 12% por año. Si se realiza la inversión por un periodo de 10 años, determine el monto compuesto si el interés se capitaliza: *a*) anual, *b*) semestral, *c*) trimestral y *d*) bimestral.
7. Los precios de una mercancía particular han aumentado con una tasa anual de 6% capitalizada anualmente. El precio actual de la mercancía es $75. ¿Cuál era el precio de la misma mercancía hace cinco años?
8. Hoy se depositará una suma de dinero con una tasa de 9% por año. El objetivo es que esta suma se incremente a $75 000 en cinco años. ¿Qué suma se debe depositar si el interés se capitaliza: *a*) anualmente y *b*) por semestre?
9. **Bienes raíces** Los precios de los bienes raíces en un estado han aumentado con una tasa promedio de 8% por año. ¿Cuánto le tomará a los precios aumentar 100% si los precios se siguen elevando con la misma tasa?
10. **Alcoholismo** Un organismo de salud estatal recopiló datos del número de alcohólicos conocidos en el estado. El número actual es de 150 000. Los datos indican que este número se ha incrementado con una tasa de 4.5% por año y se espera que aumente con la misma tasa en el

futuro. ¿Cuánto tardará el número de alcohólicos en el estado en alcanzar un nivel de 240 000?

11. Si una cuenta de ahorros ofrece un interés de 6% por año capitalizado trimestralmente, ¿qué cantidad se debe depositar hoy para acumular $25 000 después de ocho años? ¿Cuánto interés se ganará?

12. Si una cooperativa de crédito ofrece un interés de 7% por año capitalizado semestralmente, ¿qué cantidad se debe depositar hoy para acumular $10 000 después de cinco años? ¿Cuánto interés se ganará?

13. ¿Qué suma se debe depositar hoy con una tasa de 10% por año capitalizada trimestralmente si el objetivo es tener un monto compuesto de $50 000 dentro de seis años? ¿Cuánto interés se generará durante este periodo?

14. ¿Qué suma se debe depositar hoy con una tasa de 12% por año capitalizada trimestralmente si el objetivo es tener un monto compuesto de $3 millones dentro de 10 años? ¿Cuánto interés se generará durante este periodo?

15. **Servicios públicos** Una importante empresa pública de servicio de agua estima que el consumo diario promedio de agua en cierta ciudad es de 30 millones de galones. Proyectó que el consumo diario promedio será de 40 millones de galones en cinco años. ¿Qué tasa de crecimiento anual utilizó la empresa de servicio público para su estimación del consumo futuro?

16. Si la capitalización se realiza anualmente, ¿con qué tasa de interés se debe invertir una suma si debe duplicar su valor en los próximos seis años?

17. La tasa nominal de interés sobre una inversión es de 14% por año. Determine la tasa efectiva de interés anual si el interés se capitaliza: *a*) por semestre y *b*) por trimestre.

18. La tasa nominal de interés sobre una inversión es de 10% por año. Determine la tasa efectiva de interés anual si el interés se capitaliza: *a*) por semestre y *b*) por trimestre.

SECCIÓN 8.3

19. Se deben realizar depósitos trimestrales de $3 500 en una cuenta que gana interés con una tasa de 8% por año, capitalizada trimestralmente. ¿A cuánto ascenderá la inversión en el momento del depósito 20? ¿Cuánto interés se ganará durante este periodo?

20. Una persona desea depositar $3 000 por año durante 10 años. Si se gana interés con una tasa de 12% por año, calcule la cantidad en que aumentarán los depósitos al final de 10 años:

a) Si se hacen depósitos de $3 000 al final de cada año con interés capitalizado anualmente.

b) Si se realizan depósitos de $1 500 al final de cada periodo de seis meses con interés capitalizado semestralmente.

c) Si se realizan depósitos de $750 al final de cada trimestre con interés capitalizado trimestralmente.

21. Una persona quiere depositar $7 500 por año en una cuenta de ahorros que genera interés de 8% por año capitalizado anualmente. Suponga que se hace el primer depósito al final del año en curso y depósitos adicionales al final de cada año siguiente.

a) ¿A qué cantidad se incrementará la inversión en el momento del décimo depósito?

b) ¿Cuánto interés se ganará?

22. Una corporación planea invertir $2 millones cada tres meses en una inversión que gana interés con una tasa de 10% por año capitalizada trimestralmente. La primera inversión se realiza al final del trimestre en curso.

a) ¿A cuánto ascenderá la inversión al cabo de cinco años?

b) ¿Cuánto interés se ganará durante este periodo?

23. ¿Cuánto dinero se debe depositar al final de cada periodo de seis meses si el objetivo es acumular \$80 000 en el momento del décimo depósito? Suponga que se gana interés con una tasa de 9% por año capitalizada semestralmente. ¿Cuánto interés se ganará sobre estos depósitos?

24. Una comunidad pequeña quiere establecer un fondo de amortización para pagar deudas de \$20 millones asociadas a la construcción de una planta de tratamiento de aguas negras. La comunidad puede ganar interés con la tasa de 8% por año capitalizada trimestralmente. La deuda se debe cubrir en siete años. Si el primer depósito se hace dentro de tres meses, ¿qué depósito trimestral se requerirá para acumular los \$20 millones? ¿Cuánto interés se ganará sobre estos depósitos?

25. Se puede ganar interés en una cuenta de ahorros con una tasa de 7% por año capitalizada anualmente. Una persona desea hacer depósitos de \$2 000 al final de cada año. ¿Cuánto tiempo tardarán los depósitos y el interés acumulado en aumentar a una suma que exceda \$20 000?

26. Se puede ganar interés sobre una inversión con la tasa de 12% por año capitalizada trimestralmente. Si se hacen depósitos de \$10 000 al final de cada trimestre, ¿cuánto les llevará a los depósitos y el interés acumulado para incrementarse a una suma que exceda \$300 000?

27. ¿Cuánto dinero se debe invertir al final de cada trimestre si el objetivo es acumular \$250 000 después de ocho años? Suponga un interés generado con una tasa de 10% por año capitalizada trimestralmente. ¿Cuánto interés se ganará?

28. ¿Cuánto dinero se debe invertir al final de cada periodo de seis meses si el objetivo es acumular \$1.2 millones después de ocho años? Suponga que se gana interés con la tasa de 18% por año capitalizada semestralmente. ¿Cuánto interés se ganará?

SECCIÓN 8.4

29. Determine el valor presente de una serie de 20 pagos anuales de \$50 000 cada uno; se comienza dentro de un año a partir de ahora. Suponga un interés de 9% por año capitalizado anualmente.

30. Determine el valor presente de una serie de 10 pagos anuales de \$2 500 cada uno; se empieza en un año a partir de hoy. Suponga un interés de 8% por año capitalizado anualmente.

31. Determine el valor presente de una serie de 24 pagos trimestrales de \$2 500 cada uno; se inicia en tres meses. Suponga un interés de 10% por año capitalizado trimestralmente.

32. Una persona ganó recientemente la lotería. Los términos de la lotería son que el ganador recibirá pagos anuales de \$50 000 al final de este año y cada uno de los 19 años siguientes. Si se puede invertir dinero hoy con una tasa de 11% por año capitalizada anualmente, ¿cuál es el valor presente de los 20 pagos de la lotería?

33. Dados \$400 000 hoy, determine la serie equivalente de 24 pagos semestrales que se podría generar comenzando en seis meses. Suponga que se puede ganar interés con una tasa de 7% por año capitalizada semestralmente.

34. *a*) Determine el pago mensual del automóvil necesario para cubrir un autofinanciamiento de \$16 000 si el interés se calcula con una tasa de 12% por año capitalizada mensualmente. Suponga que el periodo del préstamo es de cuatro años.

b) ¿Cuánto interés se pagará en el periodo de cuatro años?

35. Se invierte una suma total de \$400 000 con la tasa de 11% por año capitalizada anualmente. ¿Cuántos retiros anuales de \$50 000 se pueden hacer? (Suponga que el primer retiro ocurre en un año.)

36. Una familia heredó \$300 000. Si deciden invertir los \$300 000 con una tasa de 12% por año capitalizada trimestralmente, ¿cuántos retiros trimestrales de \$25 000 se pueden hacer? (Suponga que el primer retiro se hace tres meses después de realizar la inversión.)

En los ejercicios 37 a 44, determine: *a*) el pago mensual de la hipoteca; *b*) los pagos totales, y *c*) el interés total en la vida del préstamo.

37. Préstamo de \$140 000, a un interés de 10.5%, 25 años

38. Préstamo de \$80 000, a un interés de 9.5%, 20 años

39. Préstamo de \$160 000, a un interés de 8.5%, 15 años

40. Préstamo de \$150 000, a un interés de 10.5%, 30 años

41. Préstamo de \$95 000, a un interés de 10.75%, 25 años

42. Préstamo de \$100 000, a un interés de 12.5%, 20 años

43. Préstamo de \$100 000, a un interés de 11.75%, 30 años

44. Préstamo de \$125 000, a un interés de 12.0%, 20 años

En los ejercicios 45 a 50, determine el préstamo máximo que se puede pagar.

45. Pago hipotecario de \$800, a un interés de 10%, 25 años

46. Pago hipotecario de \$1 200, a un interés de 9.75%, 25 años

47. Pago hipotecario de \$1 250, a un interés de 9.75%, 20 años

48. Pago hipotecario de \$1 500, a un interés de 10.5%, 25 años

49. Pago hipotecario de \$1 350, a un interés de 11.5%, 20 años

50. Pago hipotecario de \$2 000, a un interés de 10.5%, 25 años

SECCIÓN 8.5

51. Determine si el proyecto de inversión que se ilustra en la figura 8.21 tiene una tasa de rendimiento $\leq 12\%$ por año. ¿Cuál es el NPV con esta tasa de interés?

52. Determine si el proyecto de inversión representado en la figura 8.22 tiene una tasa de rendimiento $\leq 14\%$ por año. ¿Cuál es el NPV en esta tasa de interés?

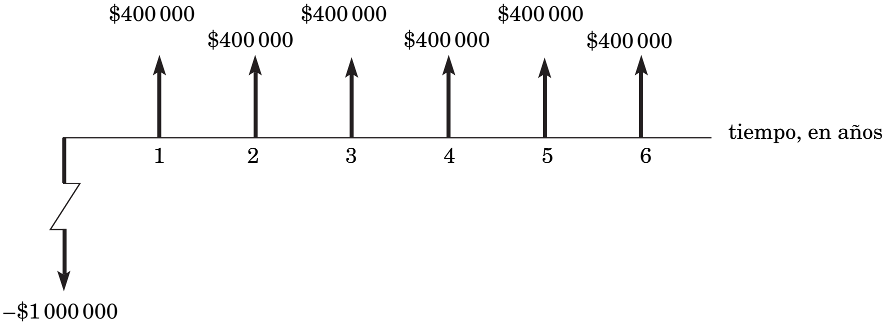


Figura 8.21

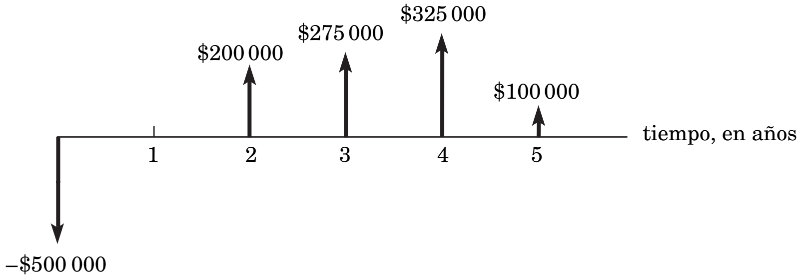


Figura 8.22

***53.** Estime la tasa efectiva de rendimiento generada por el proyecto que se representa en la figura 8.23.

***54.** Estime la tasa efectiva de rendimiento generada por el proyecto ilustrado en la figura 8.24.

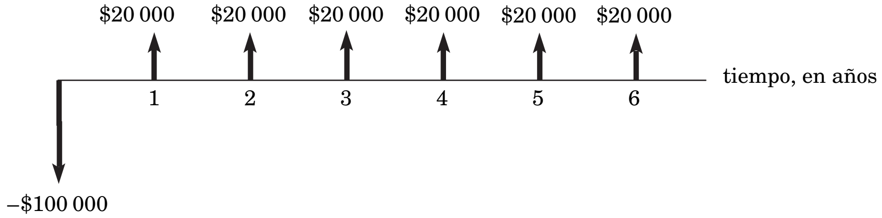


Figura 8.23

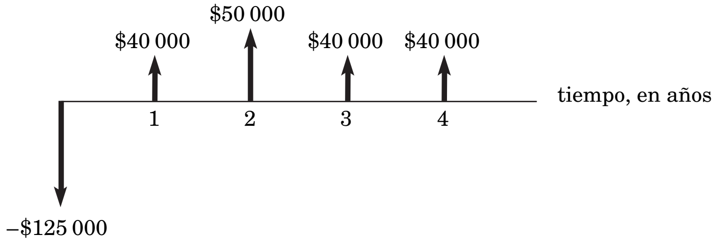


Figura 8.24

❑ EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. Se invirtió un capital de $50 000 con una tasa de interés de 9% por año capitalizada semestralmente. Si se invierte el capital por ocho años, determine el monto compuesto al final de este periodo.

2. Los precios de los bienes raíces en una localidad han aumentado con una tasa de 7% por año capitalizada anualmente. ¿En qué precio se habría vendido hace tres años una casa que hoy se vende en $100 000?

3. Se deben realizar depósitos trimestrales de $5 000 en una cuenta que gana interés con una tasa de 12% por año capitalizada trimestralmente.

a) ¿A qué suma habrá aumentado la inversión en el momento del vigésimo depósito?

b) ¿Cuánto interés se ganará durante este periodo?

4. Se debe establecer un fondo de amortización para pagar deudas por un total de \$80 000. Las deudas se deben pagar en cinco años. Si se puede ganar interés con la tasa de 10% por año capitalizada semestralmente, ¿qué depósito semestral se requerirá para acumular los \$80 000? (Suponga que el primer depósito se realiza en seis meses.) ¿Cuánto interés se ganará sobre estos depósitos?
5. Dados \$125 000 hoy, determine la serie equivalente de 10 pagos anuales que se podría generar comenzando en un año. Suponga un interés de 11% por año capitalizado anualmente.
6. La tasa nominal de interés sobre una inversión es de 12% por año. Determine la tasa efectiva de interés anual si el interés se capitaliza trimestralmente.
7. Se tiene disponible un préstamo hipotecario de \$150 000 con una tasa de interés anual de 10.5%. ¿Cuál es la diferencia entre los pagos de hipoteca mensuales si el préstamo es por 20 años en comparación con 30 años?
8. ¿El proyecto de inversión representado en la figura 8.25 tiene una tasa de rendimiento $\leq$ 10%? ¿Cuál es el NPV con esta tasa de interés?

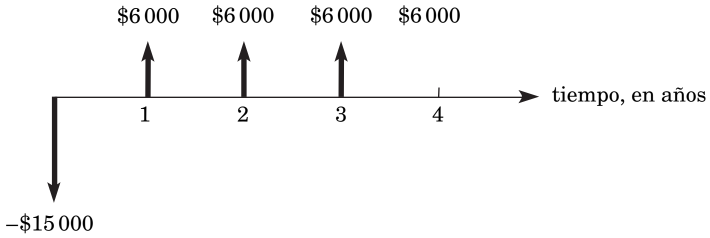


Figura 8.25

MINICASO

CORPORACIÓN XYZ

La corporación XYZ considera tres alternativas de inversión caracterizadas por los datos que se muestran en la tabla siguiente. Observe que las tres inversiones tienen gastos iniciales iguales, duraciones iguales y rendimientos en dólares iguales. Nótese que los patrones de los rendimientos en dólares son diferentes para las tres inversiones.

	Alternativa		
	1	**2**	**3**
Flujos de ingreso de efectivo de la inversión inicial*	$380 000	$380 000	$380 000
Año 1	$180 000	$220 000	$140 000
Año 2	180 000	180 000	180 000
Año 3	180 000	140 000	220 000
Total de flujos de ingreso de efectivo	$540 000	$540 000	$540 000

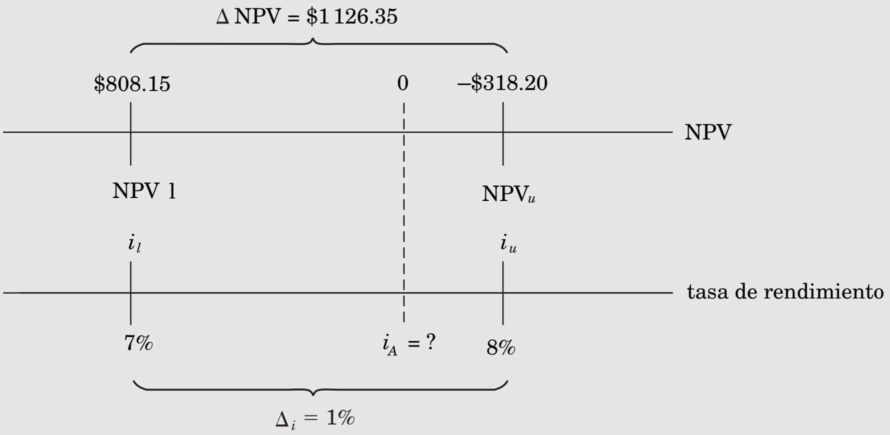
* Suponga que los flujos de ingreso de efectivo ocurren al final de cada año.

Se requiere que:

a) La corporación XYZ tenga una tasa de rendimiento mínima deseada sobre las inversiones de 15%. Determine el NPV de cada una de estas inversiones y determine cuál cumple con el criterio de la tasa de rendimiento.

b) Utilice la interpolación lineal para estimar las tasas reales de rendimiento para las tres alternativas de inversión. La interpolación lineal es un método de prueba y error para estimar tasas reales de rendimiento cuando dichas tasas son diferentes de las que se tienen disponibles en las tablas (o calculadoras). Para ilustrarlo, se usa el método de flujo de efectivo descontado para concluir que la inversión que se muestra en la figura 8.12 dio como resultado una tasa de rendimiento de menos de 8% anual. La base para esta conclusión fue que el NPV para la inversión con una tasa de 8% fue −$318.20.

Recuerde: la tasa real de rendimiento sobre una inversión es una tasa que da como resultado un NPV de 0. Para la inversión en la figura 8.12, la menor tasa de interés siguiente disponible en las tablas es 7%. Si se calcula el NPV con una tasa de 7%, se encontrará que equivale a +$808.15. Puede concluirse de esto que la tasa real de rendimiento es entre 7 y 8% por año. La interpolación lineal supone que las tasas de interés son proporcionales a los dólares de NPV. Para este ejemplo, la tasa real de interés cae en algún lugar entre 7 y 8%, en proporción con la localización de un NPV de 0 (localizado entre el NPV de $808.15 con una tasa de 7% y el NPV de −$318.20 con una tasa de 8%).



Dada la menor tasa de interés i_l y la mayor tasa de interés i_u que limitan la tasa real de rendimiento, y sus respectivos valores presentes netos NPV$_l$ y NPV$_u$, un método para estimar la tasa real de rendimiento i_A es

$$i_A = i_l + \frac{\text{NPV}_l}{\Delta\text{NPV}}\,\Delta i$$

Para este ejemplo, la tasa real de rendimiento estimada es

$$\begin{aligned} i_A = 0.07 + \frac{808.15}{1\,126.35}\,0.01 &= 0.07 + 0.717(0.01) \\ &= 0.07 + 0.00717 \\ &= 0.07717 \end{aligned}$$

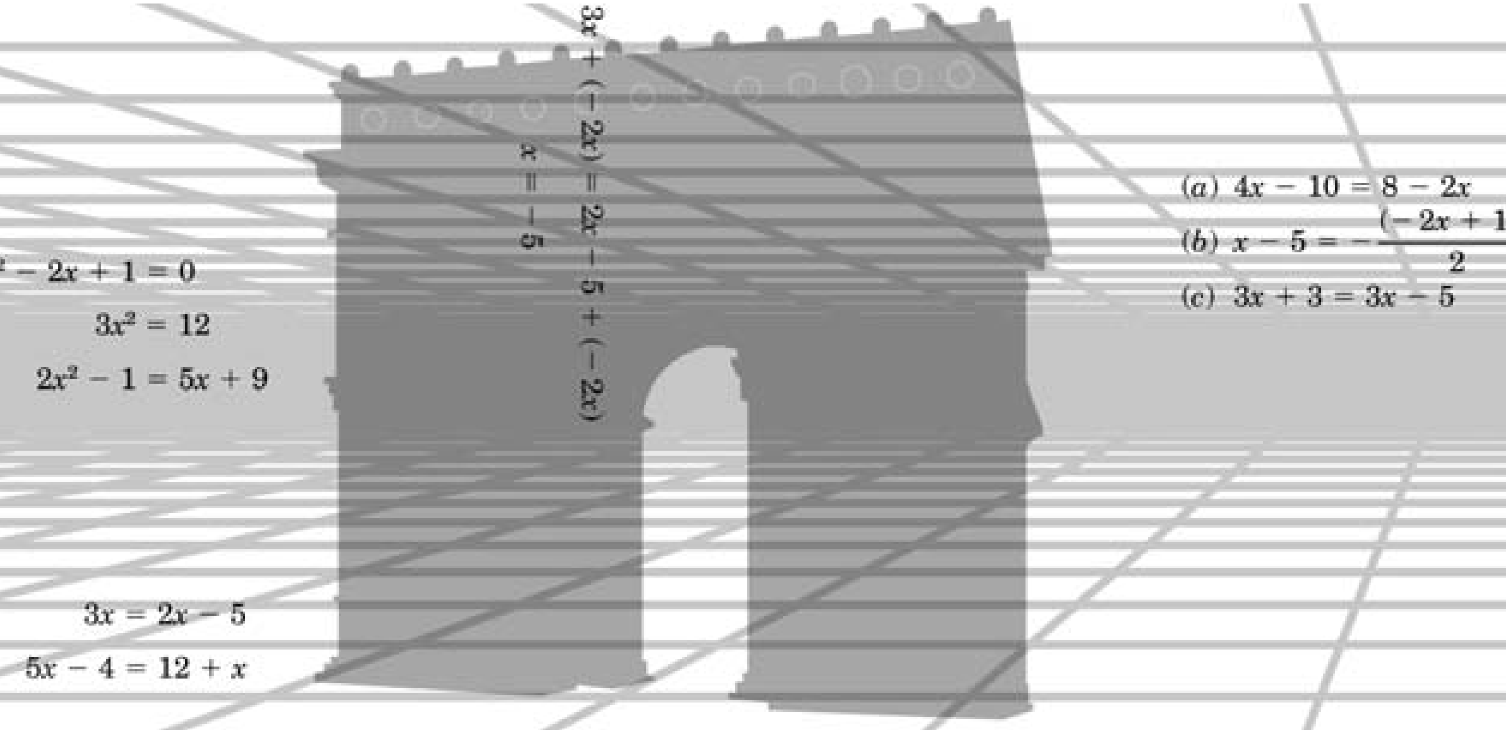
La tasa real de interés es aproximadamente de 7.717 por ciento.

CAPÍTULO 9

Álgebra matricial

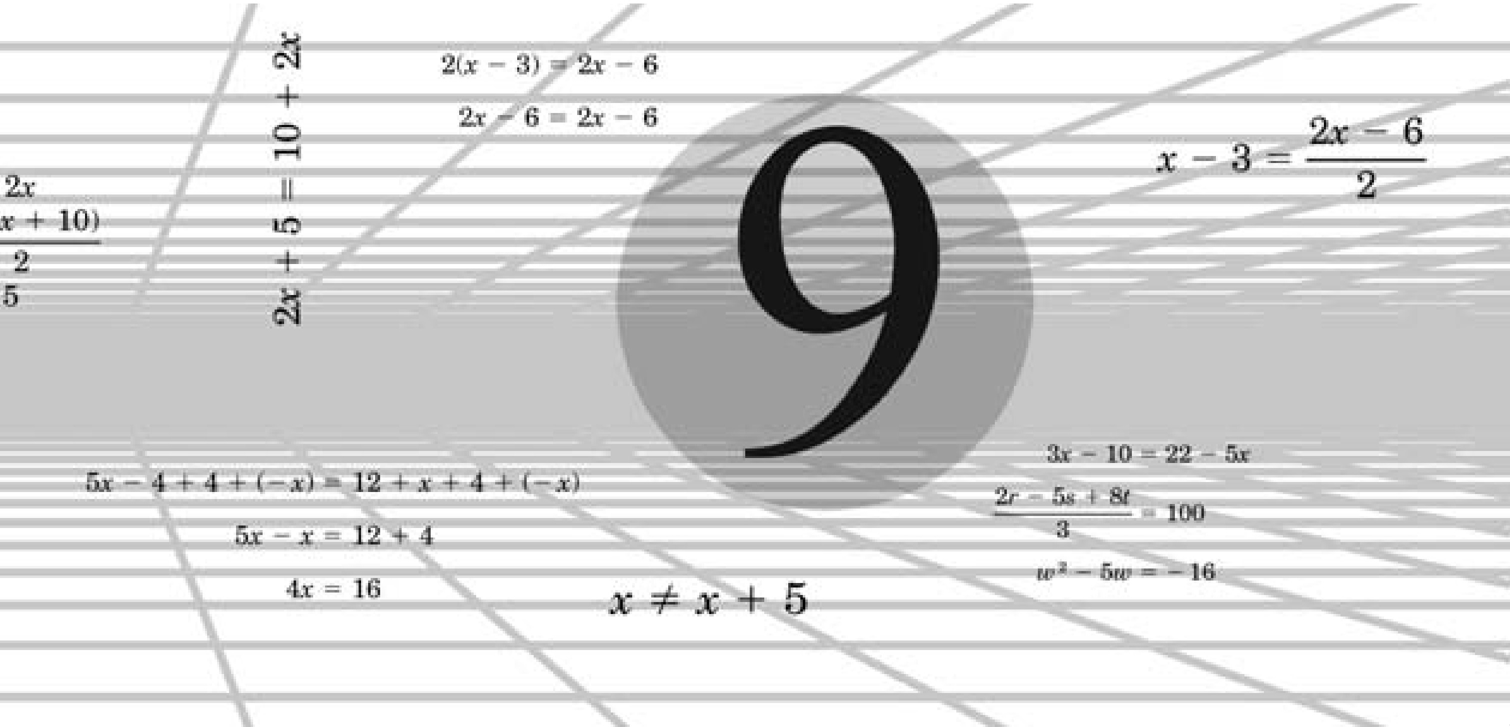
9.1 INTRODUCCIÓN A LAS MATRICES
9.2 TIPOS ESPECIALES DE MATRICES
9.3 OPERACIONES MATRICIALES
9.4 EL DETERMINANTE
9.5 LA INVERSA DE UNA MATRIZ
9.6 APLICACIONES SELECTAS

Términos y conceptos clave
Ejercicios adicionales
Evaluación del capítulo
Ejercicios por computadora
Minicaso: Planeación de recursos humanos



OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Proporcionar comprensión de la naturaleza de una matriz y la representación matricial de los datos.
- Proporcionar entendimiento del álgebra matricial.
- Presentar una variedad de aplicaciones de las matrices y el álgebra matricial.



ESCENARIO DE MOTIVACIÓN: Análisis del cambio de marca

El análisis del cambio de marca se ocupa del comportamiento de compra de los consumidores que compran un producto o contratan un servicio en repetidas ocasiones. Como ejemplos de tales productos se pueden citar la gasolina, los detergentes, los refrescos y las comidas rápidas. El análisis del cambio de marca se enfoca en la lealtad a la marca y el grado en que los consumidores están dispuestos a cambiar a productos competidores. Las empresas a menudo tratan de proyectar los efectos que tendrán las campañas de promoción, como rebajas y programas publicitarios, sobre las ventas de sus productos. *Si se tiene información disponible en relación con las tasas de las ganancias y pérdidas por todos los competidores, una empresa puede: a) pronosticar su participación en el mercado en algún momento futuro; b) pronosticar la tasa con que la empresa aumentará o disminuirá su participación en el mercado en el futuro, y c) determinar si la participación en el mercado alguna vez llegará a niveles de equilibrio en que cada empresa o marca retiene una participación constante del mercado.*

En este capítulo se analiza el álgebra matricial y sus aplicaciones. Se presenta la naturaleza de las matrices y luego se analizan los diferentes tipos de matrices, el álgebra de matrices y algunos conceptos especializados de la matriz. La última sección del capítulo presenta varias aplicaciones del álgebra matricial.

9.1 Introducción a las matrices

¿Qué es una matriz?

Siempre que se manejan datos, se debe interesar en organizarlos de manera tal que sean significativos y se puedan identificar con facilidad. Resumir los datos en forma tabular puede ayudar en esta función. Una *matriz* es una forma común para resumir y presentar números o datos.

Definición: Matriz

Una ***matriz*** es un arreglo rectangular de elementos.

Los elementos de una matriz por lo general son números reales, pero no siempre. Considere las calificaciones de prueba de cinco estudiantes en tres exámenes. Éstas se presentan en la siguiente matriz.

$$\begin{array}{cc} & \text{Prueba} \\ & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \text{Estudiante} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 75 & 82 & 86 \\ 91 & 95 & 100 \\ 65 & 70 & 68 \\ 59 & 80 & 99 \\ 75 & 76 & 74 \end{pmatrix} \end{array}$$

La matriz contiene el conjunto de calificaciones de prueba encerradas entre los paréntesis grandes. El arreglo tiene forma rectangular con cinco filas (una por cada estudiante) y tres columnas (una por cada prueba). Cada fila contiene las tres calificaciones de prueba para un estudiante particular. Cada columna contiene las cinco calificaciones en una prueba particular.

Forma generalizada de una matriz

Una matriz A que contiene elementos a_{ij} tiene la forma general

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Esta matriz generalizada se representa con m filas y n columnas. Los subíndices en un elemento a_{ij} indican la ubicación del elemento en una matriz. El elemento a_{ij} se localiza en la intersección de la fila i y la columna j de la matriz. Por ejemplo, a_{21} se localiza en la intersección de la fila 2 y la columna 1. El elemento a_{35} se ubicaría en la fila 3 y la columna 5 de la matriz.

Ejercicio de práctica

Si la matriz de calificación de prueba de los estudiantes recibe el nombre de **S** y los elementos se expresan como s_{ij}, ¿cuáles son los elementos s_{12}, s_{32}, s_{43} y s_{16}? *Respuesta*: 82, 70, 99, no hay elemento s_{16}.

Los **nombres** de la matriz generalmente se representan con letras mayúsculas y los elementos de una matriz con letras minúsculas con subíndices. Una matriz se caracteriza también por su ***dimensión***. La dimensión o el ***orden*** indican el número de filas y el número de columnas contenidos en una matriz. Si una matriz tiene m filas y n columnas, se dice que tiene una dimensión $\boldsymbol{m \times n}$, que se lee "***m* por *n***". La matriz de calificación de prueba de los estudiantes tiene una dimensión (5×3), o se dice que es una matriz de "5 por 3".

Propósito del estudio del álgebra matricial

Las matrices ofrecen un medio conveniente para almacenar, presentar y manipular datos. Los datos de las calificaciones obtenidas en una prueba se almacenan convenientemente en la matriz anterior y ésta ofrece un método claro y compacto para presentar estos datos. La mayor parte de los datos almacenados en computadoras se almacenan en un formato de matriz. En el lenguaje FORTRAN se reserva espacio de almacenamiento para arreglos en la memoria de la computadora para utilizar el enunciado DIMENSION. El enunciado

"DIMENSION $A(20, 30)$" reserva espacio para una matriz **A** que tiene una dimensión (20×30). En el lenguaje BASIC, el enunciado "DIM A (20, 30)" cumple la misma función.

Cuando se almacenan datos en matrices, a menudo es necesario desplegarlos. Si los datos se almacenan en una matriz con algún patrón lógico, puede ser relativamente fácil recuperar elementos individuales o grupos de elementos. Con frecuencia es necesario manipular datos que se almacenan en una matriz. Por ejemplo, una profesora tal vez quiera determinar el promedio de una clase en una prueba dada o el promedio de un estudiante en las tres pruebas utilizando los datos de la calificación en la prueba de la matriz antes definida. El álgebra matricial permite manipular los datos y efectuar cálculos a la vez que mantiene los datos en forma de matriz. Esto es conveniente en especial en las aplicaciones computarizadas.

Ejemplo 1

(Consumo de energía en Estados Unidos) La matriz **E** siguiente presenta el consumo de energía diario promedio de cuatro regiones diferentes del país durante 1987. Las cifras se dan en millones de barriles por día y representan la cantidad de petróleo que generaría la energía equivalente. Se han redondeado a los 100 000 barriles más cercanos. **E** es una matriz (4×5).

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \text{Petróleo y gas estadounidense} & \text{Carbón} & \text{Petróleo y gas importados} & \text{Hidroeléctrica, solar, geotérmica y combustibles sintéticos} & \text{Nuclear} & \\
 & 6.5 & 2.8 & 3.0 & 0.2 & 0.5 & \text{Noreste} \\
\mathbf{E} = & 3.2 & 1.1 & 0.5 & 0.5 & 0.2 & \text{Sur} \\
 & 3.4 & 2.0 & 1.1 & 0.1 & 0.4 & \text{Oeste medio} \\
 & 5.5 & 1.5 & 3.3 & 0.6 & 0.2 & \text{Oeste}
\end{array}$$

❑

Las siguientes secciones analizan diferentes tipos de matrices y su manipulación.

9.2 Tipos especiales de matrices

Vectores

Hay una clase especial de matrices que se denomina ***vector***. Un vector es una matriz que sólo tiene una fila o una columna.

Definición: Vector fila

Un ***vector fila*** (o *vector renglón*) es una matriz que sólo tiene una fila. Un vector fila **R** con n elementos r_{ij} tiene una dimensión $(1 \times n)$ y la forma general

$$\mathbf{R} = (r_{11} \quad r_{12} \quad r_{13} \quad \cdots \quad r_{1n})$$

Nótese que es posible expresar los elementos generalizados de un vector fila $(1 \times n)$ mediante r_{1j}, donde $j = 1, \ldots, n$.

Las tres calificaciones obtenidas por el estudiante 1 en la prueba se podrían guardar en el vector fila **A** (1 × 3) como

$$\mathbf{A} = (75 \quad 82 \quad 86)$$

El siguiente vector fila (1 × 5) es una submatriz del ejemplo 1 que resume el equivalente promedio del consumo diario de energía para el noreste durante 1987.

$$\mathbf{B} = (6.5 \quad 2.8 \quad 3.0 \quad 0.2 \quad 0.5)$$

Definición: Vector columna

Un ***vector columna*** es una matriz que sólo tiene una columna. Un vector columna **C** con m elementos c_{ij} tiene una dimensión $m \times 1$ y la forma general

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix}$$

En el caso de la matriz de las calificaciones obtenidas por los estudiantes en la prueba anterior, se podrían representar las calificaciones de los cinco estudiantes en el primer examen mediante el vector columna (5 × 1)

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 75 \\ 91 \\ 65 \\ 59 \\ 75 \end{pmatrix}$$

Matrices cuadradas

Definición: Matriz cuadrada

Una ***matriz cuadrada*** es una matriz que tiene el mismo número de filas y columnas.

Si la dimensión de una matriz es $(m \times n)$, una matriz cuadrada es tal que $m = n$. Las siguientes matrices son cuadradas.

$$\mathbf{A} = (3) \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & -4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Si una matriz **A** es cuadrada, a veces nos interesamos en un subconjunto de elementos a_{ij} que cae a lo largo de la ***diagonal principal*** de la matriz. Estos elementos se localizan en posiciones en que $i = j$, por ejemplo, $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, \ldots, a_{nn}$. Los elementos en la diagonal principal de la matriz **B** son $b_{11} = 1$ y $b_{22} = 4$. Los elementos en la diagonal principal de la matriz **C** son $c_{11} = 2$, $c_{22} = -4$ y $c_{33} = 6$.

Definición: Matriz identidad

Una ***matriz identidad*** **I**, en ocasiones llamada ***matriz unidad***, es una matriz cuadrada para la cual todos los elementos a lo largo de la diagonal principal son iguales a 1 y todos los otros elementos son iguales a 0.

Si e_{ij} representa un elemento generalizado en una matriz identidad, entonces

$$e_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Las matrices

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

son matrices identidad (2×2) y (3×3).

Aunque se verán distintas aplicaciones de la matriz identidad, una propiedad importante incluye la multiplicación de una matriz identidad por otra matriz. La multiplicación de matrices es una operación algebraica legítima en ciertas circunstancias. Dada una matriz **A** y una matriz identidad **I**, *si el producto* ***AI*** *está definido,* ***AI*** *=* ***A.*** De modo similar, *si el producto de* ***IA*** *está definido, entonces* ***IA*** *=* ***A.*** La matriz identidad **I** es para la multiplicación matricial, lo que el número 1 es para la multiplicación en el sistema de los números reales; esto es, $(a)(1) = (1)(a) = a$.

Transpuesta de una matriz

Hay veces en que es necesario reordenar los elementos de datos en un matriz. La reordenación simplemente puede tener el objetivo de ver el arreglo de números desde una perspectiva diferente o manipular los datos en una última etapa. Una clase de reordenación consiste en la ***transpuesta*** de una matriz.

Definición: Transpuesta

Dada la matriz A $(m \times n)$ con elementos a_{ij}, la ***transpuesta*** de **A**, expresada como $\mathbf{A}^T$, es una matriz $(n \times m)$ que contiene elementos a_{ij}^t donde $a_{ij}^t = a_{ji}$.

Ejemplo 2 Para encontrar la transpuesta de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

primero se determina la dimensión de $\mathbf{A}^T$. Dado que $\mathbf{A}$ es una matriz (3×2), $\mathbf{A}^T$ será una matriz (2×3) con la forma

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11}^t & a_{12}^t & a_{13}^t \\ a_{21}^t & a_{22}^t & a_{23}^t \end{pmatrix}$$

Usando la definición anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} a_{11}^t &= a_{11} = 3 & \qquad a_{21}^t &= a_{12} = 2 \\ a_{12}^t &= a_{21} = 4 & \qquad a_{22}^t &= a_{22} = 0 \\ a_{13}^t &= a_{31} = 1 & \qquad a_{23}^t &= a_{32} = -2 \end{aligned}$$

o bien

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

❑

Estudie las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^T$ del ejemplo 2. ¿Encuentra algún patrón? Lo que debe observar es que *las filas de* $\mathbf{A}$ *se convierten en las columnas de* $\mathbf{A}^T$. De igual modo, *las columnas de* $\mathbf{A}$ *se convierten en las filas de* $\mathbf{A}^T$. Estas relaciones serán verdaderas para cualquier matriz y su transpuesta, y ofrecen un método sencillo para determinar la transpuesta.

Ejemplo 3 Aplíquese esta lógica para encontrar la transpuesta de

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Para formar la transpuesta de $\mathbf{B}$, las filas 1, 2 y 3 se convierten en las columnas 1, 2 y 3 de $\mathbf{B}^T$, o

$$\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

De igual manera, se puede considerar que las columnas 1, 2 y 3 de $\mathbf{B}$ se convierten en las filas 1, 2 y 3 de $\mathbf{B}^T$. Ambas perspectivas son válidas. ❑

Sección 9.2 Ejercicios de seguimiento

Determine la dimensión de cada una de las siguientes matrices y encuentre la transpuesta.

1. $(8 \quad -8 \quad 5 \quad 3)$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \\ -6 & 8 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 2 & 10 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} -6 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

11. Encuentre una matriz **A** (2×4) para la cual

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

12. Encuentre una matriz **B** (5×3) para la cual

$$b_{ij} = \begin{cases} i - j & \text{si} \quad i = j \\ 2i + j & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

9.3 Operaciones matriciales

En esta sección se analizarán algunas de las operaciones del álgebra matricial.

Adición y sustracción de matrices

Propiedad de la adición (sustracción) de matrices

Se pueden sumar o sustraer dos matrices si y sólo si tienen la misma dimensión.

Si **A** y **B** son matrices ($m \times n$) sumadas para formar una nueva matriz **C**, **C** tendrá la misma dimensión que **A** y **B**. Los elementos de **C** se encuentran al sumar los elementos correspondientes de **A** y **B**. Es decir,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \text{para toda } i \text{ y } j$$

Si se sustrae una matriz **B** de una matriz **A** para formar una nueva matriz **C**, los elementos de **C** se encuentran al sustraer los elementos correspondientes de **B** de **A**, o bien

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \qquad \text{para toda} \quad i \text{ y } j$$

Ejemplo 4 Dadas

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + (-3) & 3 + 2 \\ 4 + 0 & -2 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 5 Usando las mismas matrices,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} - \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3 - (1) & 2 - (3) \\ 0 - (4) & 4 - (-2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 6 El Departamento de Energía ha proyectado cifras de consumo de energía para el año 2000. La matriz **P** muestra el promedio de consumo diario por fuente de energía para las mismas regiones de Estados Unidos que se indicaron en el ejemplo 1. Como antes, estas cifras se dan en millones de barriles de petróleo por día que darían la energía equivalente.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{ccccc|l} \text{Petróleo y gas estadounidense} & \text{Carbón} & \text{Petróleo y gas importados} & \text{Hidroeléctrica, solar, geotérmica y combustibles sintéticos} & \text{Nuclear} & \\ \hline 5.9 & 4.8 & 2.0 & 0.7 & 1.2 & \text{Noreste} \\ 2.9 & 1.9 & 0.2 & 0.9 & 0.5 & \text{Sur} \\ 2.3 & 2.4 & 0.5 & 0.5 & 0.9 & \text{Oeste medio} \\ 6.0 & 1.9 & 2.9 & 1.0 & 0.6 & \text{Oeste} \end{array}$$

El cálculo de la matriz $\mathbf{P} - \mathbf{E}$ refleja el cambio estimado en el promedio del consumo diario por fuente de energía entre 1987 y 2000.

$$\mathbf{P} - \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 5.9 & 4.8 & 2.0 & 0.7 & 1.2 \\ 2.9 & 1.9 & 0.2 & 0.9 & 0.5 \\ 2.3 & 2.4 & 0.5 & 0.5 & 0.9 \\ 6.0 & 1.9 & 2.9 & 1.0 & 0.6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6.5 & 2.8 & 3.0 & 0.2 & 0.5 \\ 3.2 & 1.1 & 0.5 & 0.5 & 0.2 \\ 3.4 & 2.0 & 1.1 & 0.1 & 0.4 \\ 5.5 & 1.5 & 3.3 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.6 & 2.0 & -1.0 & 0.5 & 0.7 \\ -0.3 & 0.8 & -0.3 & 0.4 & 0.3 \\ -1.1 & 0.4 & -0.6 & 0.4 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & -0.4 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$ ❑

Ejercicio de práctica

Interprete el significado de los valores en la matriz de diferencia $\mathbf{P} \times \mathbf{E}$.

Multiplicación escalar

Un ***escalar*** es un número real. La ***multiplicación escalar*** de una matriz es la multiplicación de una matriz escalar. Se encuentra el producto multiplicando cada elemento de la matriz escalar. Por ejemplo, si k es un escalar y $\mathbf{A}$ la siguiente matriz (3×2), entonces

$$k\mathbf{A} = k \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5k & 3k \\ -2k & k \\ 0 & 4k \end{pmatrix}$$

Ejemplo 7

(Pronósticos de energía) Una fundación de investigación de política privada proyecta que el consumo de energía aumentará 20% en cada región y por cada fuente de energía entre 1987 y 1992. Si el consumo se incrementa 20% en cada región y por cada fuente de energía, el consumo en 1992 será igual a 120% del consumo de 1987. Por consiguiente, se puede determinar el consumo proyectado en 1992 mediante la multiplicación escalar $1.2\mathbf{E}$, o bien

$$\mathbf{R} = 1.2 \begin{pmatrix} 6.5 & 2.8 & 3.0 & 0.2 & 0.5 \\ 3.2 & 1.1 & 0.5 & 0.5 & 0.2 \\ 3.4 & 2.0 & 1.1 & 0.1 & 0.4 \\ 5.5 & 1.5 & 3.3 & 0.6 & 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.80 & 3.36 & 3.60 & 0.24 & 0.60 \\ 3.84 & 1.32 & 0.60 & 0.60 & 0.24 \\ 4.08 & 2.40 & 1.32 & 0.12 & 0.48 \\ 6.50 & 1.80 & 3.96 & 0.72 & 0.24 \end{pmatrix}$$ ❑

Ejercicio de práctica

En el ejemplo 7, ¿qué multiplicación escalar pronosticaría una reducción de 10% en el consumo de energía en general? *Respuesta*: $\mathbf{R} = 0.9\mathbf{E}$.

El producto interno

Definición: Producto interno

Suponga que $\mathbf{A} = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$; entonces el ***producto interno***, expresado como $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, es

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

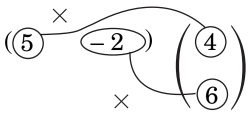
Con base en esta definición, cabe destacar tres puntos:

1. *El producto interno se define sólo si los vectores fila y columna contienen el mismo número de elementos.*
2. *El producto interno resulta cuando se multiplica un vector fila por un vector columna y el producto resultante es una cantidad escalar.*
3. *Se calcula el producto interno al multiplicar los elementos correspondientes en los dos vectores y sumar algebraicamente.*

Considere la multiplicación de los siguientes vectores:

$$\mathbf{AB} = (5 \quad -2)\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Para encontrar el producto interno se multiplica el primer elemento del vector fila por el primer elemento del vector columna; se suma el producto resultante al producto del elemento 2 del vector fila y el elemento 2 del vector columna. Para los vectores indicados, se calcula el producto interno así: $a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}$, o bien:



$$= (5)(4) + (-2)(6) = 8$$

Ejemplo 8 Dados los vectores fila y columna

$$\mathbf{M} = (5 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 3) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 10 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$$

se calcula el producto interno así

$$\mathbf{M}\cdot\mathbf{N} = (5 \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 3)\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 10 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= (5)(-2) + (-2)(-4) + (0)(10) + (1)(20) + (3)(6) = 36$$ ❑

Ejercicio de práctica

Dados $\mathbf{S} = (-5 \quad 3 \quad 0 \quad 2)$ y $\mathbf{V} = (3 \quad -1 \quad 4 \quad 2)$, encuentre el producto interno $\mathbf{SV}^{\mathrm{T}}$.

Respuesta: −14.

Multiplicación de matrices

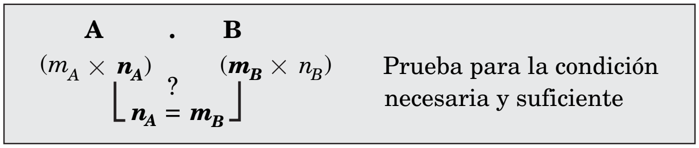
Suponga que una matriz **A** que tiene una dimensión $m_A \times n_A$ se tiene que multiplicar por una matriz **B** que tiene una dimensión $m_B \times n_B$.

Propiedades de multiplicación de matrices

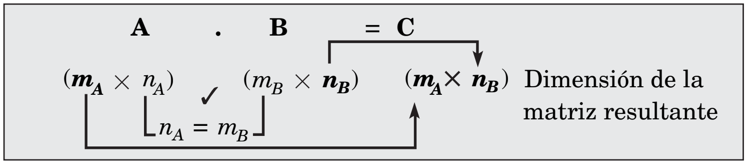
I *El producto matricial* ***AB*** *está definido si y sólo si el número de columnas de A equivale al número de filas de* ***B****, o si* $n_A = m_B$.

II *Si se puede realizar la multiplicación (es decir,* $n_A = m_B$*), el producto resultante será una matriz que tiene una dimensión* $m_A \times n_B$.

La primera propiedad de la multiplicación establece la *condición necesaria y suficiente* para la multiplicación de matrices. Si $n_A \neq m_B$, las matrices no pueden ser multiplicadas.



La propiedad II define la dimensión de la matriz que resulta de un producto de matrices.



Para determinar los elementos de la matriz que resulta en un producto de matrices, se puede utilizar la siguiente regla de cálculo.

Regla de cálculo

Si $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$, un elemento c_{ij} de la matriz que resulta del producto es igual al *producto interno* de la fila i de la matriz $\mathbf{A}$ y la columna j de la matriz $\mathbf{B}$. (Véase la figura 9.1.)

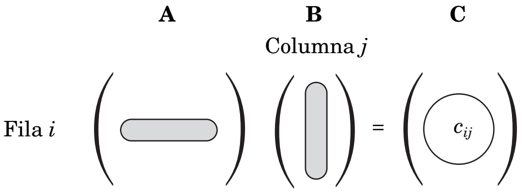


Figura 9.1 Multiplicación de matrices: cálculo de c_{ij} usando el producto interno.

Ejemplo 9

Para encontrar el producto matricial **AB**, donde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

primero se revisa para determinar si la multiplicación es posible. **A** es una matriz (2 × 2) y **B** es una matriz (2 × 1).

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} \quad\cdot & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ (2 \times \underbrace{\mathbf{2}) & (\mathbf{2}}_{=} \times 1) = & (2 \times 1) \end{array}$$

Así, el producto está definido porque el número de columnas de **A** equivale al número de filas de **B**. La matriz que resulta del producto tendrá una dimensión (2 × 1) y tendrá la forma general

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$$

Para encontrar c_{11}, se calcula el producto interno de la fila 1 de **A** y la columna 1 de **B**, o bien:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \end{pmatrix}$$

De igual forma, c_{21} se encuentra calculando el producto interno entre la fila 2 de **A** y la columna 1 de **B**, o

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix}$$

❑

NOTA Como primer intento para calcular el producto de matrices, el lector puede encontrar útil escribir la forma general de la matriz que resulta del producto de matrices. Se hizo esto al establecer primero la forma general de **C** como $\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$. Con los elementos identificados de esta manera, los subíndices de cada elemento indican cómo se puede calcular cada elemento.

Ejemplo 10 Determine el producto matricial **BA** para las matrices del ejemplo 9.

SOLUCIÓN

El producto **BA** implica multiplicar una matriz (2 × 1) por una matriz (2 × 2), o bien:

$$\begin{array}{cc} \mathbf{B} \quad . & \mathbf{A} \\ (2 \times 1) & (2 \times 2) \\ \quad\; | & | \quad\; \\ \quad\; 1 \neq & 2 \quad\; \end{array}$$

Puesto que el número de columnas de **B** no es igual que el número de filas de **A**, el producto **BA** no está definido. ❑

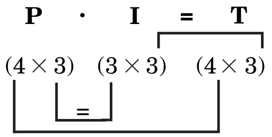
NOTA Este ejemplo ilustra que la propiedad conmutativa que se aplica en la multiplicación de números reales *no es necesariamente válida* en el caso de la multiplicación de matrices. *No se puede* establecer automáticamente que **AB** = **BA** para dos matrices cualesquiera **A** y **B** .

Ejemplo 11 Encuentre, si es posible, el producto **PI** = **T**, donde

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 10 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN

P es una matriz (4 × 3) e **I** es una matriz identidad (3 × 3). Ya que el número de columnas de **P** equivale al número de filas de **I**, se puede realizar la multiplicación y la matriz de producto **T** tendrá una dimensión 4 × 3. Por lo tanto,



T tendrá la forma general

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} \end{pmatrix}$$

Algunos elementos muestra se calculan en las siguientes operaciones:

$$t_{11} = (1 \quad 0 \quad -1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (1)(1) + (0)(0) + (-1)(0) = 1$$

$$t_{12} = (1 \quad 0 \quad -1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1)(0) + (0)(1) + (-1)(0) = 0$$

$$t_{13} = (1 \quad 0 \quad -1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1)(0) + (0)(0) + (-1)(1) = -1$$

Verifique que la matriz **T** que resulta del producto de matrices es:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 10 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

❑

NOTA Este ejemplo ilustra la propiedad antes mencionada con respecto de las matrices identidad. Esto es, si se multiplica una matriz identidad por otra matriz, el producto será la otra matriz. En este ejemplo, **PI** = **T**. Pero **P** = **T**; por ello, **PI** = **P**.

Ejercicio de práctica

Dadas $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$, encuentre el producto **AB**. *Respuesta*: $\begin{pmatrix} -19 & -6 \\ 39 & 32 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 12 **(Calificaciones promedio en el curso)** La profesora que aplicó las tres pruebas a cinco estudiantes está preparando los promedios del curso. Ha decidido ponderar las dos primeras pruebas en 30% cada una y la tercera en 40%. La profesora quiere calcular los promedios finales para los cinco estudiantes usando la multiplicación de matrices. La matriz de calificaciones es

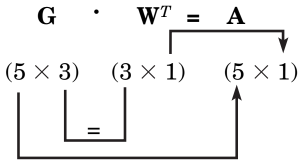
$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 75 & 82 & 86 \\ 91 & 95 & 100 \\ 65 & 70 & 68 \\ 59 & 80 & 99 \\ 75 & 76 & 74 \end{pmatrix}$$

y los valores ponderados del examen se ponen en el vector fila

$$\mathbf{W} = (0.30 \quad 0.30 \quad 0.40)$$

La profesora necesita multiplicar estas matrices de forma tal que la primera calificación conseguida por *cada* estudiante se multiplique por 0.30, la segunda calificación obtenida por 0.30 y la última calificación por 0.40. El lector debe verificar que los productos **GW** y **WG** no estén definidos. No obstante, si se hubiera establecido **W** como un vector columna, el producto matricial **GW** llevaría al resultado deseado.

Se puede transformar **W** en un vector columna con sólo obtener su transpuesta. El producto $\mathbf{GW}^T$ está definido, conduce a una matriz resultante de orden (5 × 1), y de modo más importante, realiza los cálculos deseados.



Los promedios finales se calculan así:

$$\begin{pmatrix} 75 & 82 & 86 \\ 91 & 95 & 100 \\ 65 & 70 & 68 \\ 59 & 80 & 99 \\ 75 & 76 & 74 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.30 \\ 0.30 \\ 0.40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75(0.3) + 82(0.3) + 86(0.4) \\ 91(0.3) + 95(0.3) + 100(0.4) \\ 65(0.3) + 70(0.3) + 68(0.4) \\ 59(0.3) + 80(0.3) + 99(0.4) \\ 75(0.3) + 76(0.3) + 74(0.4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81.5 \\ 95.8 \\ 67.7 \\ 81.3 \\ 74.9 \end{pmatrix}$$

Los promedios son 81.5, 95.8, 67.7, 81.3 y 74.9, respectivamente, para los cinco estudiantes. ❑

Ejercicio de práctica

Calcule el producto $\mathbf{WG}^T$. ¿No da esto el mismo resultado que $\mathbf{GW}^T$?

Representación de una ecuación

Una ecuación se puede representar usando el producto interno. La expresión

$$3x_1 + 5x_2 - 4x_3$$

se puede representar por medio del producto interno

$$(3 \quad 5 \quad -4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

donde el vector fila contiene los coeficientes de cada variable en la expresión y el vector columna contiene las variables. Multiplique los dos vectores para verificar que el producto interno dé como resultado la expresión original.

Para representar la *ecuación*

$$3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 25$$

se puede igualar el producto interno con una matriz (1 × 1) que contiene la constante del lado derecho, o sea

$$(3 \quad 5 \quad -4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (25)$$

Recuerde que para que dos matrices sean iguales, deben tener la misma dimensión. El producto interno siempre da como resultado una matriz (1 × 1), que en este caso contiene un elemento: la expresión $3x_1 + 5x_2 - 4x_3$.

Una ecuación lineal de la forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$ se puede representar en forma matricial como sigue:

$$(a_1 \quad a_2 \quad a_3 \cdots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b \qquad \textbf{(9.1)}$$

Representación de sistemas de ecuaciones

Aunque sea posible representar las ecuaciones individuales usando el producto interno, se puede representar un sistema de ecuaciones utilizando una multiplicación de matrices. El sistema:

$$5x_1 + 3x_2 = 15$$

$$4x_1 - 2x_2 = 12$$

puede representarse así:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Si realizamos la multiplicación de matrices en el lado izquierdo de la ecuación matricial, el resultado es

$$\begin{pmatrix} 5x_1 + 3x_2 \\ 4x_1 - 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Para que estas dos matrices (2×1) sean iguales, los elementos correspondientes deben ser iguales (esto es, $5x_1 + 3x_2 = 15$ y $4x_1 - 2x_2 = 12$, *la información comunicada por el par original de ecuaciones*).

Un sistema de ecuaciones $(m \times n)$ que tiene la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

puede representarse mediante la ecuación matricial

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

donde **A** es una matriz $(m \times n)$ que contiene los coeficientes de las variables en el lado izquierdo del conjunto de ecuaciones, **X** es un vector columna con n componentes que contiene las n variables y **B** es un vector columna con m componentes que contiene las constantes del lado derecho para las m ecuaciones. Esta representación tiene este aspecto:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{pmatrix} \tag{9.2}$$

Ejemplo 13 Se puede representar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 \qquad\quad + 3x_4 + x_5 &= 100 \\ x_1 \qquad\quad - 3x_3 + x_4 \qquad\; &= 60 \\ 4x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 &= 125 \end{aligned}$$

en la forma matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ mostrada a continuación

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 125 \end{pmatrix}$$

Verifique siempre que esta representación sea válida y que se deben incluir ceros en la matriz **A** cuando una variable no aparece en una ecuación particular.

Ejemplo 14 La representación matricial de ecuaciones no se limita a las ecuaciones lineales. La ecuación cuadrática

$$10x^2 - 4x + 50 = 0$$

se puede representar por medio de la ecuación matricial equivalente

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 & 50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = (0)$$

❑

Sección 9.3 Ejercicios de seguimiento

Realice las siguientes operaciones matriciales siempre y cuando sea posible.

1. $-\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 & 5 \\ 21 & -8 \end{pmatrix}$

3. $-3\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 12 & 10 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

4. $3k\begin{pmatrix} -a & b \\ -b & 2a \end{pmatrix} - 2k\begin{pmatrix} a & b \\ b & 2a \end{pmatrix}$

5. $5\begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 8 & 15 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 20 & -25 \\ -10 & 15 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} 18 & -4 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

13. $(-4 \quad 2 \quad -8 \quad 4)\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$

14. $(1 \quad -8 \quad 6 \quad -5 \quad -2)\begin{pmatrix}6\\-2\\4\\8\\4\end{pmatrix}$

15. $(a \quad b \quad c \quad d)\begin{pmatrix}e\\f\\g\\h\end{pmatrix}$

16. $(1 \quad 0 \quad -5 \quad 0 \quad 8)\begin{pmatrix}0\\-2\\0\\6\\0\end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix}4 & 0\\-2 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 6\\-7 & 8\end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix}8 & -3\\-2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\-8\end{pmatrix}$

19. $(20 \quad -8)\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix}12 & 10\\-1 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix}10 & -5\\0 & 13\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix}12 & 0\\4 & 0\\-2 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 12\\8 & -4\end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix}4 & 4\\-2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & -2\\4 & 20\\8 & 4\end{pmatrix}$

24. $(1 \quad 8 \quad -2)\begin{pmatrix}0 & -2 & 7\\3 & -4 & 10\\1 & 2 & -3\end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix}2 & -1 & 6\\1 & 0 & -4\\3 & -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 10\\0 & -3 & 0\\1 & 4 & 1\end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 8\\3 & 12 & 4\end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix}2 & -7 & 3\\0 & 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & -1\\2 & 0\\4 & 8\\2 & 6\end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix}5 & -3\\2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\3 & 4\\5 & -6\end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix}-2 & 2\\3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -4 & 0\\5 & -2 & 3\end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}(1 \quad -2 \quad 3)$

33. $\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & 2\\0 & -4\\3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 5 & 8\\6 & 2 & 0 & -2 & 0\end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e & f\\g & h\\i & j\end{pmatrix}$

35. $\begin{pmatrix}2 & 5 & -7\\1 & 0 & -2\\4 & 8 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & 2 & 5 & 0\\1 & -2 & 3 & -4\\-3 & 4 & -2 & 1\end{pmatrix}$

36. $\begin{pmatrix}2 & 8 & -1\\0 & 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\4 & 0 & -1\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Represente los siguientes sistemas de ecuaciones en forma matricial:

37.
$$\begin{aligned} x - 3y &= 15\\ 2x + 3y &= -10 \end{aligned}$$

38.
$$\begin{aligned} 2x &= 4\\ 3x + 4y &= 15 \end{aligned}$$

39.
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 12\\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= 15 \end{aligned}$$

40.
$$\begin{aligned} 5x_1 - 8x_2 &= 48\\ 2x_1 - 4x_3 &= 25 \end{aligned}$$

41.
$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= c\\ dx_1 + ex_2 &= f\\ gx_1 + hx_2 &= i \end{aligned}$$

42.
$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + ex_5 &= f\\ gx_1 \qquad - hx_3 \qquad + ix_5 &= j \end{aligned}$$

43.
$$\begin{aligned} a_1x^2 + a_2x + a_3 &= b_1\\ a_4x^2 + a_5x + a_6 &= b_2 \end{aligned}$$

44.
$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{12}x + a_{13} &= b_1\\ a_{21}x^2 + a_{22}x + a_{23} &= b_2\\ a_{31}x^2 + a_{32}x + a_{33} &= b_3 \end{aligned}$$

45.
$$\begin{aligned} 5x^3 - 2x^2 + x &= 100\\ 3x^3 \qquad\qquad &= -18\\ 5x^2 \qquad &= 125 \end{aligned}$$

46.
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2\\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3\\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 &= b_4 \end{aligned}$$

47. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1\\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0\\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, verifique que *a*) $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ y *b*) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$.

9.4 El determinante

Un concepto importante en el álgebra matricial es el del ***determinante***. *Si una matriz es cuadrada, los elementos de la matriz se pueden combinar para calcular un número de valor real llamado determinante.* El concepto del determinante es de particular utilidad al resolver ecuaciones simultáneas.

El determinante de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5\\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

se puede denotar mediante el símbolo $\mathbf{\Delta}$ o poniendo líneas verticales en torno a los elementos de la matriz. El determinante de **A** se puede expresar como

$$\mathbf{\Delta} \qquad \text{o} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 5\\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

De igual modo, se puede representar el determinante escribiendo líneas verticales alrededor del nombre de la matriz. Por lo tanto, es posible representar el determinante de **A** como

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 5\\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

Hay diferentes maneras de encontrar el valor de un determinante. Primero se analizarán técnicas específicas para manejar matrices (1 × 1), (2 × 2) y (3 × 3), y luego se seguirá con el ***procedimiento de cofactores*** más general.

El determinante de una matriz de orden (1 × 1)

El determinante de una matriz de orden (1 × 1) simplemente es el valor del único elemento contenido en la matriz. Si $\mathbf{A} = (5)$, $\boldsymbol{\Delta} = 5$. Si $\mathbf{M} = (-10)$, $\boldsymbol{\Delta} = -10$.

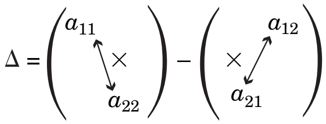
El determinante de una matriz de orden (2 × 2)

Dada una matriz (2 × 2) que tiene la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}a_{12}} \qquad \textbf{(9.3)}$$

El cálculo implica una multiplicación cruzada de los elementos en las dos diagonales, como se indica a continuación:



Ejemplo 15 Si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Delta} &= (1)(4) - (3)(-2) \\ &= 4 + 6 = 10 \end{aligned}$$

❑

Ejercicio de práctica

Encuentre el determinante de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$. *Respuesta*: $\Delta = 0$.

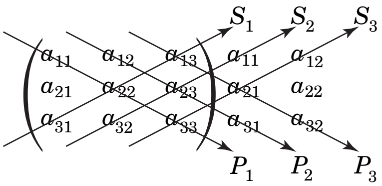
El determinante de una matriz de orden (3 × 3)

Dada la matriz (3 × 3)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

se puede encontrar el determinante mediante el siguiente proceso:

1. *Agregue las dos primeras columnas de la matriz al lado derecho de la matriz original.*
2. *Localice los elementos en las tres diagonales primarias (P_1, P_2, P_3) y los de las tres diagonales secundarias (S_1, S_2, S_3).*



3. *Multiplique los elementos de cada diagonal primaria y de cada diagonal secundaria.*
4. *El determinante equivale a la suma de los productos de las tres diagonales primarias menos la suma de los productos de las tres diagonales secundarias.*

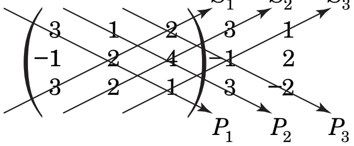
Algebraicamente, el determinante se calcula así:

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{\Delta} = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} \\ & - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}\end{aligned}} \qquad \textbf{(9.4)}$$

Ejemplo 16 Para encontrar el determinante de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

se añaden las dos primeras columnas a la derecha de la matriz original (3 × 3):



Se identifican las tres diagonales principales y secundarias y el determinante se calcula así:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Delta} &= [(3)(2)(1) + (1)(4)(3) + (2)(-1)(-2)] - [(3)(2)(2) + (-2)(4)(3) \\ &\quad + (1)(-1)(1)] \\ &= (6 + 12 + 4) - (12 - 24 - 1) = 22 - (-13) = 35\end{aligned}$$

❑

Ejercicio de práctica

Encuentre el determinante de $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \\ -6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$. *Respuesta*: $\Delta = 0$.

NOTA Los métodos examinados para las matrices (1×1), (2×2) y (3×3) se aplican sólo en matrices con esas dimensiones. No se puede extender el procedimiento de matrices (3×3) para manejar matrices (4×4), (5×5) o cuadradas de un orden superior. La siguiente sección opcional analiza un procedimiento más general.

El método de cofactores

En esta sección se analiza un procedimiento de cálculo más generalizado y alternativo que se puede aplicar en todas las matrices cuadradas de tamaño (2×2) o de un orden superior. Para cualquier matriz cuadrada **A** se puede encontrar una ***matriz de cofactores*** que se expresará como $\mathbf{A}_c$. La matriz de cofactores tendrá la misma dimensión que **A** y consistirá en los elementos a'_{ij} que reciben el nombre de ***cofactores***. Para cada elemento a_{ij} contenido en **A** habrá un cofactor correspondiente a'_{ij}.

El cofactor asociado a un elemento a_{ij} *se determina de la siguiente manera.*

Procedimiento para encontrar el cofactor asociado al elemento a_{ij}

1. *Marque, ya sea mentalmente o con un lápiz, la fila i y la columna j en la matriz original. Olvídese de los elementos marcados y considere sólo los elementos restantes en la matriz. Los elementos restantes forman una* ***submatriz*** *de la matriz original.*
2. *Encuentre el determinante de la submatriz restante. Este determinante se conoce como el* ***menor*** *del elemento* a_{ij}.
3. *Se encuentra el cofactor* a'_{ij} *al multiplicar el menor, ya sea por +1 o −1, dependiendo de la posición del elemento* a_{ij}. *Una fórmula para calcular el cofactor es*

$$a'_{ij} = (-1)^{i+j}(\text{el menor})$$

(La esencia de esta fórmula es que si i + j es un número par, se multiplica el menor por +1, conservando su signo; si i + j es impar, se multiplica el menor por −1, cambiando su signo.)

Ejemplo 17 Para encontrar la matriz de cofactores para la matriz (2×2)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

se comenzará con la determinación del cofactor correspondiente al elemento a_{11}. Al marcar y no considerar la fila 1 y la columna 1 queda la submatriz (1×1) igual a (-2). El determinante de esta submatriz

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \underset{\text{Submatriz}}{(-2)} \longrightarrow \underset{\text{Menor}}{\Delta = -2}$$

es igual a -2 y por consiguiente éste es el *menor*. El cofactor se calcula como se indica a continuación:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= (-1)^{1+1}(-2) = (-1)^2(-2) \\ &= (1)(-2) = -2 \end{aligned}$$

De igual modo (o más sencillo), se podría razonar que el cofactor a'_{11} es igual al valor del menor, ya sea conservando o cambiando el signo. Una vez más, la posición del cofactor es la clave para la asignación del signo adecuado. *Si la suma de los subíndices es par, se mantiene el signo; si es non, se cambia el signo.* Para el cofactor a'_{11}, la suma de los subíndices es $1 + 1 = 2$, que es par. Por lo tanto, se mantiene el signo del menor $a'_{11} = -2$.

El cálculo de los cofactores para los elementos restantes es el siguiente:

Para encontrar	**Submatriz**	**Por la fórmula**
a'_{12}	$\begin{pmatrix} \cancel{5} & \cancel{-4} \\ 2 & \cancel{-2} \end{pmatrix}$	$a'_{12} = (-1)^{1+2}(2)$ $= (-1)(2) \quad = -2$
a'_{21}	$\begin{pmatrix} \cancel{5} & -4 \\ \cancel{2} & \cancel{-2} \end{pmatrix}$	$a'_{21} = (-1)^{2+1}(-4)$ $= (-1)(-4) \quad = 4$
a'_{22}	$\begin{pmatrix} 5 & \cancel{-4} \\ \cancel{2} & \cancel{-2} \end{pmatrix}$	$a'_{22} = (-1)^{2+2}(5)$ $= (1)(5) \quad = 5$

o bien, en forma equivalente:

Para encontrar	**Menor**	**Posición**	**Signo del menor**	**Cofactor**
a'_{12}	2	impar	se cambia	-2
a'_{21}	-4	impar	se cambia	4
a'_{22}	5	par	se conserva	5

La matriz de cofactores es

$$\mathbf{A}_c = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 18 Para encontrar la matriz de cofactores para la matriz (3 × 3) del ejemplo 16, se inicia con el elemento a_{11}. Al marcar y no considerar la fila 1 y la columna 1, se queda con una submatriz (2 × 2):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{-1} & 2 & 4 \\ \cancel{3} & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \underset{\text{Submatriz}}{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Mediante la fórmula, el cofactor se calcula así:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^2[(2)(1) - (-2)(4)] = 1(10) = 10 \end{aligned}$$

En forma equivalente,

Menor: $\Delta = (2)(1) - (-2)(4) = 10$

Posición: (1, 1) → par → se conserva el signo

Cofactor: $a'_{11} = 10$

Para el elemento a_{12}, se marcan y no se consideran la fila 1 y la columna 2, dando como resultado

$$\begin{pmatrix} \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ -1 & \cancel{2} & 4 \\ 3 & \cancel{-2} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \underset{\text{Submatriz}}{\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}$$

Por la fórmula, el cofactor a'_{12} se calcula así:

$$\begin{aligned} a'_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^3[(-1)(1) - (3)(4)] = -1(-13) = 13 \end{aligned}$$

En forma equivalente,

Menor: $\Delta = (-1)(1) - (3)(4) = -13$

Posición: (1, 2) → impar → se cambia el signo

Cofactor: $a'_{12} = 13$

¡Ahora es su turno! Verifique que la matriz de cofactores sea

$$\mathbf{A}_c = \begin{pmatrix} 10 & 13 & -4 \\ -5 & -3 & 9 \\ 0 & -14 & 7 \end{pmatrix}$$

❑

El determinante y los cofactores Esta sección se comienza con objeto de encontrar un procedimiento generalizado para calcular el determinante. El ***método del desarrollo por los cofactores*** permite calcular el determinante de una matriz como sigue.

Método del desarrollo por los cofactores

1. *Seleccione cualquier fila o columna de la matriz.*
2. *Multiplique cada elemento de la fila (columna) por su cofactor correspondiente y sume estos productos para encontrar el determinante.*

Para la matriz **A** ($m \times m$), se puede encontrar el determinante al desarrollar a lo largo cualquier *fila i* de acuerdo con la ecuación

$$\boxed{\mathbf{\Delta} = a_{i1}a'_{i1} + a_{i2}a'_{i2} + \cdots + a_{im}a'_{im}} \tag{9.5}$$

De modo similar, se puede encontrar el determinante al desarrollar cualquier columna j de acuerdo con la ecuación

$$\boxed{\mathbf{\Delta} = a_{1j}a'_{1j} + a_{2j}a'_{2j} + \cdots + a_{mj}a'_{mj}} \tag{9.6}$$

¡El valor del determinante es el mismo, no obstante la fila o columna seleccionada para el desarrollo por los cofactores!

NOTA ¡Si su objetivo es encontrar el determinante, no es necesario calcular la matriz de cofactores entera! Necesita determinar sólo los cofactores para la fila o columna seleccionada para el desarrollo.

Ejemplo 19 A continuación se presentan la matriz **A** y su matriz de cofactores $\mathbf{A}_c$, del ejemplo 17.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_c = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Puede encontrarse el determinante de **A** al desarrollar a lo largo la fila 1, así:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Delta} &= a_{11}a'_{11} + a_{12}a'_{12} \\ &= (5)(-2) + (-4)(-2) = -2 \end{aligned}$$

De modo similar, es posible encontrar el determinante desarrollando hacia abajo la columna 2, o bien:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Delta} &= a_{12}a'_{12} + a_{22}a'_{22} \\ &= (-4)(-2) + (-2)(5) = -2 \end{aligned}$$

Ejemplo 20 Las matrices **A** y $\mathbf{A}_c$ del ejemplo 18 son:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_c = \begin{pmatrix} 10 & 13 & -4 \\ -5 & -3 & 9 \\ 0 & -14 & 7 \end{pmatrix}$$

Se calcula el determinante de **A** desarrollando la columna 3 hacia abajo, así:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Delta} &= (2)(-4) + (4)(9) + (1)(7) \\ &= -8 + 36 + 7 = 35 \end{aligned}$$

❑

Ejercicio de práctica

Verifique que el valor del determinante sea el mismo si desarrolla hacia abajo las otras dos columnas o a lo largo de cualquiera de las filas.

Ejemplo 21 **(Selección de fila o columna: ¡estructura aprovechada!)** La selección de una fila o columna para desarrollarla por los cofactores no siempre debe ser arbitraria. A menudo puede aprovechar el contenido o forma de una matriz. Por ejemplo, encontrar el determinante de la matriz (4 × 4)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & -5 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Esto podría parecer una tarea abrumadora. Sin embargo, ¡téngame paciencia! Si se decide desarrollar la columna 2, se tendrá que encontrar sólo un cofactor: el correspondiente a a_{22}. Es decir, desarrollando hacia abajo la columna 2

$$\begin{aligned} \mathbf{\Delta} &= (0)a'_{12} + (-2)a'_{22} + (0)a'_{32} + (0)(a'_{42}) \\ &= (-2)a'_{22} \end{aligned}$$

¿Entiende por qué no representa ninguna diferencia a cuánto equivalgan a'_{12}, a'_{32} y a'_{42}? Sin que tengan importancia sus valores, se multiplicarán por cero.

Para encontrar a'_{22} se marca y se elimina la fila 2 y la columna 2 y queda la submatriz (3 × 3)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Compare esta matriz con la del último ejemplo. Dado que es probable que haya llegado a su límite, este problema se ha "resuelto". Ya se ha calculado el determinante de esta submatriz como igual a 35 en el ejemplo 20. Por consiguiente, puesto que el "menor" es igual a 35 y a'_{22} se considera que está en una posición "par", el cofactor

$$a'_{22} = 35$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{\Delta} &= (-2)a'_{22} \\ &= (-2)(35) = -70 \end{aligned}$$

❑

Propiedades de los determinantes

Hay ciertas propiedades que se aplican a las matrices y sus determinantes. ***Dada la matriz cuadrada A:***

Propiedad 1: Si todos los elementos de cualquier fila o columna son iguales a cero, entonces $\boldsymbol{\Delta} = 0$.

Ejercicio de práctica

Verifique para la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$ que $\boldsymbol{\Delta} = 0$.

Propiedad 2: Si se intercambian dos filas (o columnas) cualesquiera, el signo del determinante también cambia.

Ejercicio de práctica

Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -6 & 15 \end{pmatrix}$, intercambie las columnas 1 y 2 para formar la matriz **B**. Calcule los determinantes de **A** y **B** y compárelos.

Propiedad 3: Ya que el determinante de A equivale a $\boldsymbol{\Delta}$, si todos los elementos de cualquier fila o columna se multiplican por una constante *k*, el determinante de la matriz resultante es igual a $k\boldsymbol{\Delta}$.

Ejercicio de práctica

Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$, multiplique cada elemento de la columna 2 por -5 para formar la matriz **B**. Calcule $\boldsymbol{\Delta}_A$ y $\boldsymbol{\Delta}_B$ y compárelos.

Propiedad 4: Si se suma cualquier múltiplo de una fila (columna) a otra fila (columna), el valor del determinante permanece sin cambios.

Ejercicio de práctica

Dada la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, multiplique la fila 2 por -3 y sume el resultado a la fila 1, formando una nueva matriz **B**. Calcule $\boldsymbol{\Delta}_A$ y $\boldsymbol{\Delta}_B$ y compárelos.

Propiedad 5: Si cualquier fila (columna) es un múltiplo de otra fila (columna), el determinante equivale a cero.*

Ejercicio de práctica

En la matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 1 \\ -9 & 6 & -12 \end{pmatrix}$, nótese que la fila 3 equivale a (-3) veces la fila 1. Calcule $\mathbf{\Delta}$.

Estas propiedades pueden ser de utilidad al calcular el valor del determinante. Por ejemplo, la magnitud de los números que se manipulan se puede reducir si todos los elementos de una fila o columna tienen un factor común. También se puede hacer esto sumando (sustrayendo) múltiplos de una fila (columna) a otra. Es posible introducir importantes aspectos de eficiencia si, antes de usar el método de cofactores, se combinan múltiplos de las filas (columnas) para crear una fila (columna) que contenga en su mayor parte ceros (como ocurrió en el ejemplo 21). Para ilustrar esto, considere el ejemplo siguiente.

Ejemplo 22 Suponga que desea encontrar el determinante de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 6 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Si se quiere utilizar el método de cofactores, el desarrollo de cualquier fila o columna requiere la evaluación de tres cofactores. Sin embargo, al usar la propiedad 4, puede multiplicarse la columna 3 por -2 y sumar este múltiplo a la columna 1, dando como resultado la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

De acuerdo con la propiedad 4, el determinante de esta matriz es el mismo que para la matriz original **A**. Desarrollando hacia abajo la columna 1 por cofactores, sólo se necesita determinar el cofactor para el elemento (2, 1). Por lo tanto, el determinante de **A** es igual al determinante de **B**, o bien

$$\begin{aligned} \mathbf{\Delta} &= (0)b'_{11} + (1)b'_{21} + (0)b'_{31} \\ &= (1)(-23) \\ &= -23 \end{aligned}$$

❑

---

* Ocurre un caso especial de esta propiedad cuando las dos filas (columnas) son iguales entre sí.

Ejercicio de práctica

Encuentre el determinante de **A** usando la matriz original y confirme que las respuestas sean las mismas.

Regla de Cramer

Dado un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

donde **A** es una matriz cuadrada de orden ($n \times n$) que contiene los coeficientes de las variables, la regla de Cramer ofrece un método para resolver el sistema usando determinantes. Según se ha venido haciendo, exprese con $\mathbf{\Delta}$ el determinante de la matriz **A**. Para despejar el valor de la j-ésima variable, forme la matriz $\mathbf{A}_j$ al reemplazar la j-ésima columna de **A** con el vector columna **B**. Si se expresa el determinante de $\mathbf{A}_j$ mediante $\mathbf{\Delta}_j$, el valor de la j-ésima variable se determina así:

$$x_j = \frac{\mathbf{\Delta}_j}{\mathbf{\Delta}} \tag{9.7}$$

Si $\mathbf{\Delta} \neq 0$, el sistema de ecuaciones dado tiene una solución única. Si $\mathbf{\Delta} = 0$, el cálculo de la ecuación (9.7) es indefinido. Si $\mathbf{\Delta} = 0$ y $\mathbf{\Delta}_1 = \mathbf{\Delta}_2 = \cdots = \mathbf{\Delta}_n = 0$, el sistema tiene una infinidad de soluciones. Si $\mathbf{\Delta} = 0$ y cualquier $\mathbf{\Delta}_j \neq 0$, entonces el sistema no tiene solución.

Ejemplo 23 Es posible reformular el siguiente sistema de ecuaciones

$$3x_1 + 2x_2 = 80$$

$$2x_1 + 4x_2 = 80$$

en la forma matricial **AX** = **B**, así:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 80 \end{pmatrix}$$

Aplicando la ecuación (9.7) resulta:

$$x_1 = \frac{\mathbf{\Delta}_1}{\mathbf{\Delta}} = \frac{\begin{vmatrix} 80 & 2 \\ 80 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{(80)(4) - (80)(2)}{(3)(4) - (2)(2)} = \frac{160}{8} = 20$$

$$x_2 = \frac{\mathbf{\Delta}_2}{\mathbf{\Delta}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 80 \\ 2 & 80 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{(3)(80) - (2)(80)}{(3)(4) - (2)(2)} = \frac{80}{8} = 10$$

Ejemplo 24 Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \phantom{{}-x_3} &= 5 \\ x_1 \phantom{{}+2x_2} - x_3 &= -15 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 40 \end{aligned}$$

se puede determinar el valor de x_1 usando la regla de Cramer así:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 \\ -15 & 0 & -1 \\ 40 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}$$

Encuentre el determinante de las dos matrices para verificar que

$$x_1 = \frac{-5}{1} = -5$$ ❑

Ejercicio de práctica

Aplique la regla de Cramer para verificar que $x_2 = 5$ y $x_3 = 10$ para este sistema de ecuaciones.

Sección 9.4 Ejercicios de seguimiento

Encuentre el determinante de cada una de las siguientes matrices.

1. $\mathbf{A} = (-5)$

2. $\mathbf{A} = (b)$

3. $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

4. $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$

5. $\mathbf{N} = (28)$

6. $\mathbf{T} = (-a)$

7. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$

9. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 10 \\ 4 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

10. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 10 \\ -2 & 0 & -1 \\ 7 & 12 & 8 \end{pmatrix}$

11. $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ -2 & 10 & -5 \\ 4 & -8 & 12 \end{pmatrix}$

12. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 3 \\ 2 & -6 & -6 \\ 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$

13. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

14. $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

15. $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 3 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

16. $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 \\ 5 & 0 & 10 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Encuentre la matriz de cofactores para cada una de las matrices siguientes.

17. $\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 2 & 10 & -4 \\ 0 & 8 & 10 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$

26. $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$

27. $\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

28. $\begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}$

29. $\begin{pmatrix} 4 & 10 & -2 \\ 8 & -3 & -5 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

30. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

31. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 20 \\ -5 & 8 & 0 \\ 10 & -5 & -10 \end{pmatrix}$

32. $\begin{pmatrix} 10 & -4 & 2 \\ 0 & 7 & -3 \\ -6 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

33. $\begin{pmatrix} 10 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 7 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

34. $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

35. a 52. Usando la matriz de cofactores encontrada en los ejercicios 17 a 34, respectivamente, encuentre el determinante de la matriz original.

53. Encuentre el determinante de

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 6 & 9 \\ 6 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

54. Encuentre el determinante de

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

55. Encuentre el determinante de

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & -1 & -5 \\ 3 & 4 & -3 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

56. Encuentre el determinante de

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 9 \\ 2 & 6 & -2 & 0 & -6 \\ 3 & -3 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 12 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

En los siguientes ejercicios, resuelva el sistema de ecuaciones utilizando la regla de Cramer.

57. $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= -13 \\ 4x_1 + 6x_2 &= 0 \end{aligned}$

58. $\begin{aligned} 5x_1 - 4x_2 &= -8 \\ 3x_1 + 5x_2 &= 47 \end{aligned}$

59. $\begin{aligned} x_1 - 5x_2 &= -85 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 40 \end{aligned}$

60. $\begin{aligned} 4x_1 - 8x_2 &= -4 \\ 5x_1 + 3x_2 &= 34 \end{aligned}$

61. $\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &= -4 \\ 4x_1 - 8x_2 &= 18 \end{aligned}$

62. $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &= 5 \\ -9x_1 + 6x_2 &= 15 \end{aligned}$

63. $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 17 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 &= -16 \\ 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 21 \end{aligned}$

64. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= -5 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$

65. $\begin{aligned} 3x_1 \phantom{{}+4x_2} + 5x_3 &= 14 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= -10 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$

66. $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 11 \\ 5x_1 \phantom{{}+2x_2} - 3x_3 &= 19 \\ 4x_2 + 6x_3 &= 0 \end{aligned}$

67. $\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 24 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 &= 12 \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 &= 16 \end{aligned}$

68. $\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 16 \\ 8x_1 - 12x_2 + 4x_3 &= -10 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 14 \end{aligned}$

9.5 La inversa de una matriz

Para *algunas* matrices se puede identificar otra matriz denominada ***matriz inversa multiplicativa***, o más simplemente, la ***inversa***. La relación entre una matriz **A** y su inversa (representada por $\mathbf{A}^{-1}$) es que el producto de **A** y $\mathbf{A}^{-1}$, en cualquier orden, da como resultado la matriz identidad, es decir:

$$\boxed{\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}} \tag{9.8}$$

La inversa es similar al *recíproco* en el álgebra de los números reales. Multiplicar una cantidad b por su recíproco $1/b$ da como resultado un producto igual a 1. En el álgebra matricial, multiplicar una matriz por su inversa da como resultado la matriz identidad.

Observaciones importantes acerca de la inversa

I *Para que una matriz A tenga una inversa, ésta debe ser cuadrada.*

II *La inversa de A también será cuadrada y tendrá la misma dimensión que A.*

III *No todas las matrices cuadradas tienen una inversa.*

Una matriz cuadrada tendrá una inversa siempre y cuando todas las filas o columnas sean ***linealmente independientes***; es decir, ninguna fila (o columna) es una combinación lineal (múltiplo) de las filas (o columnas) restantes. Si cualquiera de las filas (o columnas) es linealmente dependiente [son combinaciones lineales (múltiplos) de otras filas (columnas)], la matriz no tendrá una inversa. Si una matriz tiene una inversa, se dice que es una ***matriz no singular***. Si una matriz no tiene una inversa, se dice que es una ***matriz singular.***

Ejemplo 25 Puede verificarse que la matriz **B**, que se presenta a continuación, es la inversa de la matriz **A** al calcular los productos **AB** y **BA**.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ya que ambos productos dan como resultado una matriz identidad (2×2), puede decirse que la *matriz **B** es la inversa de **A***, o sea:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$$

De modo similar, puede afirmarse el equivalente de que ***A** es la inversa de **B***, es decir:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^{-1}$$ ❑

Determinación de la inversa

Hay varios métodos para determinar la inversa de una matriz. Un método se basa en el procedimiento de eliminación gaussiana estudiado en la sección 3.3. Desarrolle el procedimiento general usando un ejemplo. Si le confunde el procedimiento de Gauss, es aconsejable que vuelva a leer la sección 3.3.

Ejemplo 26 Regresemos a la matriz **A** del último ejemplo. Si hay otra matriz **B** que sea la inversa de **A**, ésta tendrá un orden de (2 × 2). Establézcanse los elementos de **B** como sigue.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Si $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$,

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I} \qquad \text{o bien} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si se multiplica en el lado izquierdo de la ecuación, el resultado es

$$\begin{pmatrix} 3b_{11} + 7b_{21} & 3b_{12} + 7b_{22} \\ 2b_{11} + 5b_{21} & 2b_{12} + 5b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que estas dos matrices sean iguales, sus respectivos elementos deben ser iguales entre sí; esto es,

$$3b_{11} + 7b_{21} = 1 \tag{9.9}$$

$$2b_{11} + 5b_{21} = 0 \tag{9.10}$$

$$3b_{12} + 7b_{22} = 0 \tag{9.11}$$

$$2b_{12} + 5b_{22} = 1 \tag{9.12}$$

Para determinar los valores de b_{11} y b_{21} se necesitan resolver las ecuaciones (9.9) y (9.10) simultáneamente. De igual manera, para determinar b_{12} y b_{22} se deben resolver las ecuaciones (9.11) y (9.12).

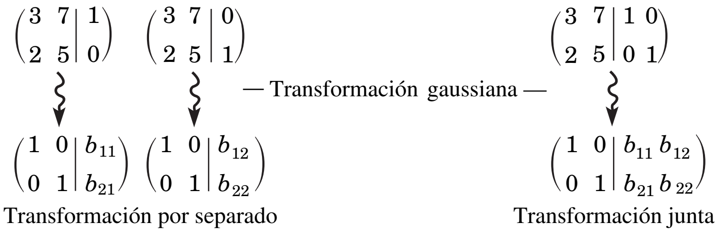


Figura 9.2 Transformación gaussiana.

Si se debieran resolver estos sistemas en forma individual por el método de eliminación de Gauss, las transformaciones procederían como se ilustra en la figura 9.2. Para cada sistema se realizarían operaciones de fila para transformar el arreglo de coeficientes $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ en una matriz identidad (2 × 2). Dado que *ambos* sistemas tienen la misma matriz de coeficientes en el lado izquierdo, *las mismas ope-*

raciones de fila se usarán para resolver ambos sistemas. Se puede mejorar el proceso aumentando las constantes del lado derecho para el primer sistema con las del segundo sistema de ecuaciones, como se muestra a continuación:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Al hacer esto, las operaciones de fila necesitan ser realizadas sólo una vez.

Después de transformar la matriz de los coeficientes en el lado izquierdo en una matriz identidad (2 × 2), la primera columna de valores en el lado derecho contendría la solución para el primer sistema de ecuaciones (b_{11} y b_{21}) y la segunda columna la solución para el segundo sistema de ecuaciones (b_{12} y b_{22}). Las matrices transformadas tendrían esta apariencia

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 1 & b_{21} & b_{22} \end{array}\right)$$

y la matriz (2 × 2) a la derecha de la línea vertical es la matriz **B**, o la inversa de **A**. ❑

Procedimiento de reducción de Gauss

Para determinar la inversa de una matriz **A** ($m \times m$):

I *Aumente la matriz* **A** *con una matriz identidad ($m \times m$), dando como resultado*

$$(\mathbf{A} \mid \mathbf{I})$$

II *Realice operaciones de fila en toda la matriz aumentada para transformar* **A** *en una matriz identidad ($m \times m$). La matriz resultante tendrá la forma*

$$(\mathbf{I} \mid \mathbf{A}^{-1})$$

donde $\mathbf{A}^{-1}$ *se puede leer a la derecha de la línea vertical.*

Ejemplo 27 Continuando con el último ejemplo, puede encontrarse $\mathbf{A}^{-1}$ mediante los pasos siguientes:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 7 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} ① & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{(multiplique la fila 1 por } \tfrac{1}{3}\text{)}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \textcircled{0} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{array}\right) \qquad \text{(multiplique la fila 1 por } -2 \text{ y súmelo a la fila 2)}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -2 & 3 \end{array}\right) \qquad \text{(multiplique la fila 2 por 3)}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \textcircled{0} & 5 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right) \qquad \text{(multiplique la fila 2 por } \tfrac{7}{3} \text{ y súmelo a la fila 1)}$$

La inversa de **A** es:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

como se indicó en el ejemplo 25. ❑

NOTA Si la matriz es singular (no tiene inversa), no será posible transformar **A** en una matriz identidad.

Ejemplo 28 Considere la matriz

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 6 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Nótese la dependencia lineal entre las filas 1 y 3. La fila 1 es un múltiplo (2) de la fila 3. Con base en el análisis anterior, puede anticiparse que **B** no tendrá una inversa. Pruebe esta hipótesis al aplicar el procedimiento de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & -2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{(multiplique la fila 1 por } \tfrac{1}{2}\text{)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \textcircled{0} & 13 & -13 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{(multiplique la fila 1 por } -6 \text{ y súmelo a la fila 2)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -13 & -3 & 1 & 0 \\ \textcircled{0} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{(multiplique la fila 1 por } -1 \text{ y súmelo a la fila 3)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & -\frac{3}{13} & \frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{(multiplique la fila 2 por } \tfrac{1}{13}\text{)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \textcircled{0} & 1 & \frac{1}{26} & \frac{2}{13} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{3}{13} & \frac{1}{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l}\text{(multiplique la fila 2 por 2} \\ \text{y súmelo a la fila 1)}\end{array}$$

En este punto se hace imposible generar un 1 en la tercera columna de la fila 3. Se podría poner un 1 en esta posición al sumar un múltiplo de la fila 1 o 2 a la fila 3. Con todo, esto daría como resultado valores no cero en las columnas 1 o 2 de la fila 3. Inténtelo si necesita convencerse. Nuestra conclusión es que **B** no tiene inversa. ❑

Obtención de la inversa usando cofactores (opcional)

Otro método para determinar la inversa de una matriz consiste en utilizar la matriz de cofactores.

El método de cofactores

El procedimiento de cofactores para encontrar la inversa de una matriz cuadrada **A** es el siguiente:

I *Determine la matriz de cofactores* $\mathbf{A}_c$ *para la matriz* **A**.

II *Determine la matriz adjunta* $\mathbf{A}_j$ *que es la transpuesta de* $\mathbf{A}_c$:

$$\mathbf{A}_j = \mathbf{A}_c^T$$

III *La inversa de* **A** *se encuentra al multiplicar la matriz adjunta por el recíproco del determinante de* **A**, *o sea*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\boldsymbol{\Delta}}\mathbf{A}_j \tag{9.13}$$

Nótese en la ecuación (9.13) que cuando el determinante de **A**, **Δ**, es igual a cero, el cálculo de la inversa no está definido. Por lo tanto, si $\boldsymbol{\Delta} = 0$, **la matriz no tiene inversa**.

Ejemplo 29 Determínese la inversa de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz de cofactores $\mathbf{A}_c$ es

$$\mathbf{A}_c = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta correspondiente es

$$\mathbf{A}_j = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

El determinante de **A** es

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Delta} &= (4)(-1) - (-2)(3) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 30 Para determinar la inversa de la matriz (3 × 3)

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

la matriz de cofactores $\mathbf{B}_c$ es

$$\mathbf{B}_c = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz adjunta $\mathbf{B}_j$ es la transpuesta de $\mathbf{B}_c$, es decir:

$$\mathbf{B}_{jc} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Verifique que el determinante de **B** es igual a 1.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{-1} &= \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

❑

NOTA **(¡Un elemento potencial para ahorrar tiempo!)**

En el paso 1 del método de cofactores, haga una pausa después de identificar una fila o columna de cofactores y calcucule Δ. Si Δ = 0, ¡ya acabó! La inversa no existe. Si Δ ≠ 0, proceda para encontrar los cofactores restantes.

La inversa y los sistemas de ecuaciones

En la sección 9.3 se estudia la representación matricial de los sistemas de ecuaciones. Se puede utilizar la inversa de una matriz para determinar el conjunto solución para un sistema de ecuaciones. Dado un sistema de ecuaciones de la forma $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, donde $\mathbf{A}$ es una matriz *cuadrada* que contiene los coeficientes de las variables, ambos lados de la ecuación matricial se pueden multiplicar por $\mathbf{A}^{-1}$, dando como resultado

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \tag{9.14}$$

Ya que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$, puede reformularse la ecuación (9.14) como

$$\mathbf{IX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

o bien

$$\boxed{\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}} \tag{9.15}$$

Es decir, el vector solución para el sistema de ecuaciones se puede encontrar al multiplicar la inversa de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ *por el vector de las constantes del lado derecho* $\mathbf{B}$. *Si* $\mathbf{A}^{-1}$ *no existe, las ecuaciones (más específicamente, la matriz de coeficientes) son linealmente dependientes y* ***no hay ninguna solución o hay una infinidad de soluciones***.

Ejemplo 31 Considere el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &= 4 \\ -2x_1 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones se puede escribir en forma matricial así:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

o

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para resolver este sistema de ecuaciones por el método de la inversa, debe determinarse $\mathbf{A}^{-1}$. En forma conveniente, $\mathbf{A}$ es la matriz que se analiza en el ejemplo 29 y $\mathbf{A}^{-1}$ se ha calculado. Por lo tanto, el vector solución $\mathbf{X}$ se calcula así:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La solución para el sistema de ecuaciones es $x_1 = -2$ y $x_2 = 4$.

Ejemplo 32 Considere el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ x_1 - x_3 &= -15 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 40 \end{aligned}$$

La matriz de coeficientes es:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

y una vez más ya se ha estudiado convenientemente este ejemplo (véase el ejemplo 30). Se calcula el vector solución como

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

o $$x_1 = -5, x_2 = 5 \text{ y } x_3 = 10.$$ ❑

El procedimiento de la inversa para resolver sistemas de ecuaciones, cuando se compara con los métodos analizados en el capítulo 3 (método de eliminación-sustitución y método de eliminación de Gauss), es menos discriminante. Los procedimientos del capítulo 3 dan señales claras y directas para cada tipo de conjunto solución (única, infinidad, ninguna solución). El procedimiento de la inversa no distingue entre ningún conjunto solución y un conjunto solución infinito. Si el determinante de **A** no es igual a cero, hay una solución única. Si $\boldsymbol{\Delta} = 0$, sólo se puede establecer que *ya sea* que no hay solución o que hay un número infinito de soluciones.

Sección 9.5 Ejercicios de seguimiento

Determine la inversa de las siguientes matrices, si es que existe, usando el procedimiento gaussiano.

1. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 40 & 8 \\ 30 & 6 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

10. $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 10 & -2 & 6 \\ 1 & -5 & 3 \\ -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Determine la inversa de las siguientes matrices utilizando el método de la matriz de cofactores.

13. $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 3 & -15 \\ 5 & 25 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -9 & -15 & -6 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} -5 & 6 & -7 \\ 10 & -11 & 13 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

Utilizando los resultados de los ejercicios 1 a 22, determine la solución para los sistemas de ecuaciones de los ejercicios 23 a 44, respectivamente (si existe alguna).

23. $\begin{aligned} x_1 - x_2 &= -1 \\ 2x_1 - 3x_2 &= -5 \end{aligned}$

24. $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 1 \\ 4x_1 + 7x_2 &= 3 \end{aligned}$

25. $\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &= 24 \\ -2x_1 - x_2 &= 10 \end{aligned}$

26. $\begin{aligned} 40x_1 + 8x_2 &= 80 \\ 30x_1 + 6x_2 &= 60 \end{aligned}$

27. $\begin{aligned} x_1 - x_2 &= -11 \\ x_1 + x_2 &= 59 \end{aligned}$

28. $\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &= 5 \\ 2x_1 - 4x_2 &= 0 \end{aligned}$

29. $\begin{aligned} 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 7 \end{aligned}$

30. $\begin{aligned} x_1 - x_3 &= -10 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= -40 \\ -x_1 + 2x_3 &= 40 \end{aligned}$

31. $\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &= 17 \\ 5x_1 + 4x_2 &= 22 \end{aligned}$

32. $\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &= 10 \\ 6x_1 - 9x_2 &= 20 \end{aligned}$

33. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned}$

34. $\begin{aligned} 10x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 10 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 &= 20 \\ -5x_1 + x_2 - 3x_3 &= 15 \end{aligned}$

35. $\begin{aligned} 3x_1 + 7x_2 &= -3 \\ 2x_1 + 5x_2 &= -3 \end{aligned}$

36. $\begin{aligned} 3x_1 - 15x_2 &= 25 \\ 5x_1 + 25x_2 &= 40 \end{aligned}$

37. $\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 20 \\ 4x_1 + x_2 &= 40 \\ -9x_1 - 15x_2 - 6x_3 &= 30 \end{aligned}$

38. $\begin{aligned} -5x_1 + 6x_2 - 7x_3 &= 25 \\ 10x_1 - 11x_2 + 13x_3 &= -45 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \end{aligned}$

39.
$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 &= 22\\ 4x_1 + 2x_2 &= 12 \end{aligned}$$

40.
$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 &= -14\\ 3x_1 + x_2 &= -9 \end{aligned}$$

41.
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 10\\ -4x_1 + 4x_2 &= 12 \end{aligned}$$

42.
$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 &= 20\\ 15x_1 - 5x_2 &= 12 \end{aligned}$$

43.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -2\\ 3x_1 \phantom{{}+x_2} - 4x_3 &= 22\\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -18 \end{aligned}$$

44.
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1\\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 &= -6\\ 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 11 \end{aligned}$$

45. La solución para un sistema de ecuaciones que tiene la forma **AX** = **B** se puede encontrar mediante la multiplicación de matrices

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & -3\\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 17\\ 10 \end{pmatrix}$$

¿Cuál era el sistema de ecuaciones original? ¿Cuál es el conjunto solución?

46. Se puede encontrar la solución para un sistema de ecuaciones que tiene la forma **AX** = **B** mediante la multiplicación matricial

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -0.5 & -1.5\\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8\\ -6 \end{pmatrix}$$

¿Cuál era el sistema de ecuaciones original? ¿Cuál es el conjunto solución?

47. La solución para un sistema de ecuaciones que tiene la forma **AX** = **B** se puede encontrar mediante la multiplicación de matrices

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3\\ 2\\ 4 \end{pmatrix}$$

¿Cuál era el sistema de ecuaciones original? ¿Cuál es el conjunto solución?

48. La solución para un sistema de ecuaciones que tiene la forma **AX** = **B** se puede encontrar mediante la multiplicación de matrices

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -2\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2\\ 5\\ -18 \end{pmatrix}$$

¿Cuál era el sistema de ecuaciones original? ¿Cuál es el conjunto solución?

9.6 Aplicaciones selectas

Esta sección proporciona algunas ilustraciones de aplicaciones del álgebra matricial. A diferencia de muchas otras aplicaciones de matemáticas, no hay fórmulas o planteamientos establecidos para resolver todas las aplicaciones de las matrices. Cada aplicación es de alguna manera única. Encontrará que se puede requerir cierto nivel de ensayo y error al trabajar con la lógica subyacente en una aplicación. Aunque se pueden utilizar muchas aplicaciones, el autor recomienda que considere las sugerencias siguientes cuando trabaje con una aplicación.

Sugerencias para la solución de aplicaciones matriciales

1. *Determine la información de salida deseada que quiere generar usando cálculos matriciales.*
2. *Examine los datos matriciales que tiene disponibles y evalúe si contienen la información necesaria del componente para generar las salidas deseadas. Quizá tenga que extraer datos relevantes de las matrices que se le proporcionan y ponerlos en nuevas matrices definidas.*
3. *Es probable que haga algunos cálculos de la información de salida que necesita en una* forma no matricial. *Esto le puede ayudar a comprender la lógica subyacente en los cálculos.*
4. *Si no ve inmediatamente cómo se pueden combinar las matrices para producir la información deseada, pruebe con diferentes combinaciones matriciales para* tener la compatibilidad entre el cálculo y la salida *(por ejemplo, si cree que se deben multiplicar las matrices componentes, trate de identificar productos matriciales diferentes que estén bien definidos. Analice nuevos arreglos de las matrices, como la matriz transpuesta. En el caso de los productos que se definan, examine la dimensión de la matriz resultante de producto. ¿La matriz resultante del producto contiene el número de datos de la información de salida que desea? Si es así, analice a continuación el cálculo real para ver si la operación matricial procesa los datos en la manera lógica necesaria para generar la información de salida deseada).*

Ejemplo 33 **(Pronóstico electoral)** Un encuestador político observa una postulación muy competida para la alcaldía en una ciudad particular. Encuestas recientes indican las preferencias de los votantes en los seis distritos electorales de la ciudad. La matriz **P** muestra estas preferencias.

$$\begin{array}{c} \text{Distrito} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \end{array}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.40 & 0.35 & 0.30 & 0.50 & 0.30 & 0.36 \\ 0.42 & 0.40 & 0.25 & 0.30 & 0.30 & 0.32 \\ 0.18 & 0.25 & 0.45 & 0.20 & 0.40 & 0.32 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Demócrata} \\ \text{Republicano} \\ \text{Independiente} \end{array}$$

Cada columna indica los porcentajes de votantes en cada distrito que se espera que voten por los diferentes candidatos a la alcaldía. Por ejemplo, la columna 3 indica que en el distrito 3 se espera que 30% de los votantes elija al candidato demócrata, 25% al candidato republicano y 45% al candidato independiente.

Dadas estas preferencias electorales, es posible pronosticar el resultado de la elección si se conoce el número de ciudadanos que se espera que voten en cada distrito. El vector **V** contiene estimaciones actuales de estos números.

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 30\,000 \\ 60\,000 \\ 70\,000 \\ 45\,000 \\ 55\,000 \\ 40\,000 \end{pmatrix}$$

El resultado de la elección se puede pronosticar mediante la multiplicación de matrices **PV**, o

$$\begin{pmatrix} 0.40 & 0.35 & 0.30 & 0.50 & 0.30 & 0.36 \\ 0.42 & 0.40 & 0.25 & 0.30 & 0.30 & 0.32 \\ 0.18 & 0.25 & 0.45 & 0.20 & 0.40 & 0.32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30\,000 \\ 60\,000 \\ 70\,000 \\ 45\,000 \\ 55\,000 \\ 40\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 107\,400 \\ 96\,900 \\ 95\,700 \end{pmatrix}$$

Estos resultados sugieren que el candidato republicano tiene una ventaja de más de 10 000 votos sobre los otros dos candidatos. ❑

Ejercicio de práctica

El encuestador cree que las preferencias electorales relativas en cada distrito no cambiarán de manera significativa en el momento de la elección. Por tanto, los cambios en el resultado proyectado se verán influidos principalmente por la concurrencia de electores en cada distrito. El director de campaña del candidato independiente cree que se puede aumentar de modo considerable el número de electores en los distritos 3 y 5 con una campaña intensa que enfatice la importancia de votar. Ya que los distritos 3 y 5 tienen una preferencia decidida para el candidato independiente, se espera que se puedan cambiar los resultados de la elección. Una empresa dedicada a las encuestas estima que es probable que la campaña de "conciencia electoral" propuesta incremente los números a los niveles de 35 000, 66 000, 82 000, 48 000, 70 000 y 45 000 electores, respectivamente, en cada distrito. Haga un pronóstico del resultado de la elección en estas circunstancias. *Respuesta*: demócrata (122 900); republicano (111 400); independiente (117 700).

Ejemplo 34 **(Planeación de la producción)** Una compañía fabrica cinco productos. La compañía dividió su fuerza de ventas en tres distritos de ventas. La siguiente matriz **S** resume las ventas esperadas para cada uno de los cinco productos en cada región de ventas para el mes próximo.

$$\begin{array}{c} \text{Región} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \end{array}$$

$$\mathbf{S} = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{pmatrix} 500 & 200 & 350 \\ 400 & 300 & 100 \\ 250 & 425 & 50 \\ 100 & 150 & 350 \\ 200 & 175 & 225 \end{pmatrix} \begin{array}{cl} 1 & \\ 2 & \\ 3 & \text{Producto} \\ 4 & \\ 5 & \end{array}$$

Cada producto se fabrica usando combinaciones de cuatro componentes estándar. La matriz **R** indica el número de unidades de cada componente utilizado para fabricar cada producto.

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\text{Componente}} \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \; \text{Producto}$$

Para fabricar cada componente se requiere usar ciertos recursos. La matriz **P** indica las cantidades de cada una de las tres partes estándar y el número de horas laborales de producción y horas laborales de ensamble utilizadas para producir una unidad de cada componente.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \multicolumn{5}{c}{\text{Recurso}} \\ \text{Parte} & \text{Parte} & \text{Parte} & \text{Trab. de} & \text{Trab. de} \\ 1 & 2 & 3 & \text{produc.} & \text{ensamble} \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc} 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \; \text{Componente}$$

La matriz **C** contiene el costo de cinco recursos de la matriz **P**. La parte 1 cuesta \$25; la parte 2, \$15; la parte 3, \$30; cada hora laboral utilizada en el departamento de producción cuesta \$10 y cada hora laboral en el departamento de ensamble cuesta \$8.

$$\mathbf{C} = (\$25 \quad \$15 \quad \$30 \quad \$10 \quad \$8)$$

La gerencia de la compañía quiere manipular los datos de estas matrices para calcular: a) la demanda total esperada para cada producto final; b) las cantidades necesarias de cada uno de los cuatro componentes; c) los requerimientos de recursos para producir los cuatro componentes, y d) el costo total de producir las cantidades necesarias de los cinco productos para el mes. La figura 9.3 proporciona un diagrama esquemático de este proceso de planeación de la producción.

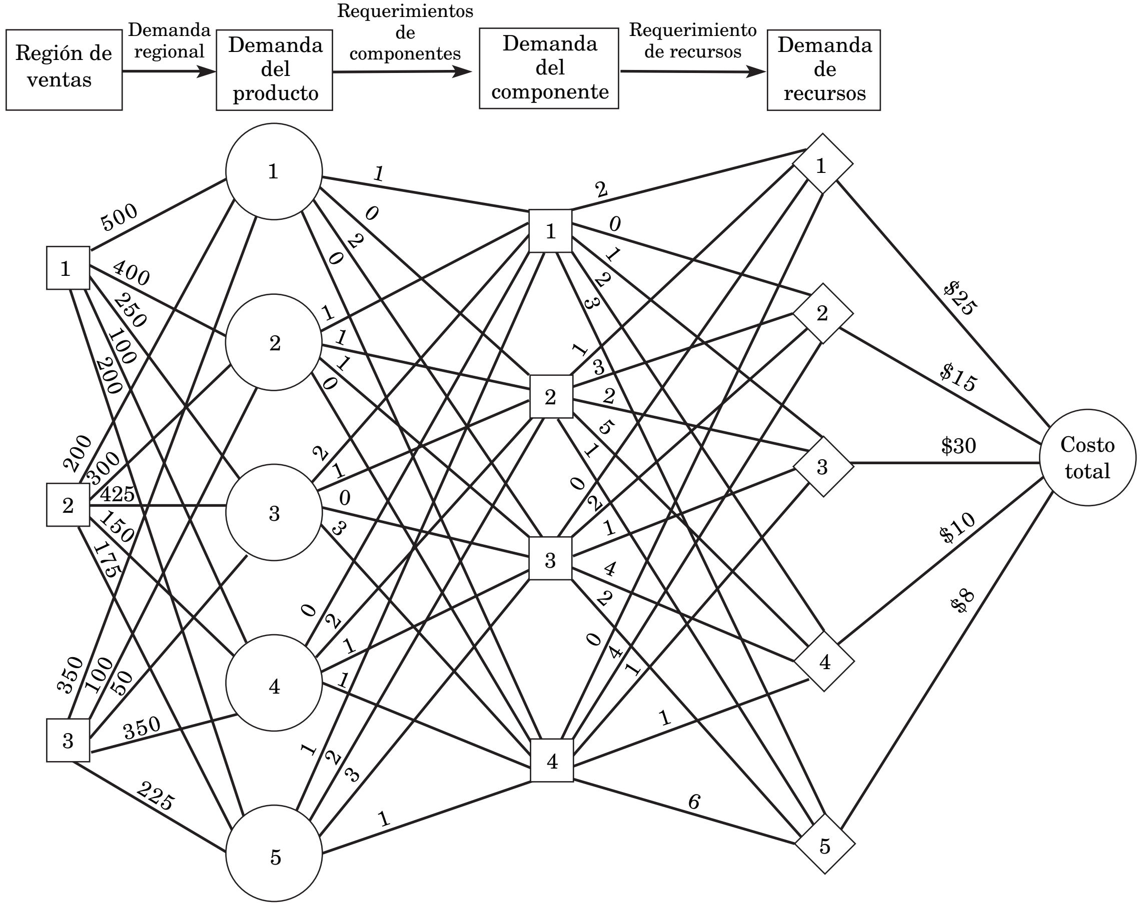


Figura 9.3 Proceso de planeación de la producción.

SOLUCIÓN

a) Aunque podría determinarse la demanda esperada para cada producto al sumar los elementos de cada fila de **S**, el propósito es generar esta información usando operaciones matriciales. Multiplicar **S** por un vector columna (3 × 1) en que todos los elementos son iguales a 1 producirá las demandas esperadas para los cinco productos.

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}500 & 200 & 350\\400 & 300 & 100\\250 & 425 & 50\\100 & 150 & 350\\200 & 175 & 225\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\,050 \\ 800 \\ 725 \\ 600 \\ 600 \end{pmatrix}$$

b) Dado que se utilizan 4 componentes en los procesos de producción, se necesita generar 4 elementos de datos que representen las cantidades necesarias de cada componente. Se pueden encontrar los requerimientos de los componentes de la matriz $\mathbf{C}_r$ al multiplicar $\mathbf{D}^T$ por la matriz **R**, es decir:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_r &= \mathbf{D}^T\mathbf{R} \\ &= (1\,050 \quad 800 \quad 725 \quad 600 \quad 600)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (3\,900 \quad 3\,925 \quad 5\,300 \quad 3\,375) \end{aligned}$$

que indica que se requerirán 3 900 unidades del componente 1, 3 925 del componente 2, 5 300 del componente 3 y 3 375 del componente 4.

c) Al calcular los requerimientos de recursos totales, se buscan las necesidades totales de las tres partes utilizadas en la fabricación de los cuatro componentes, igual que las horas laborales de producción y ensamble requeridas. Estos cinco artículos se pueden calcular multiplicando la matriz $\mathbf{C}_r$ de requerimientos de componentes por la matriz **P**, es decir:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_r &= \mathbf{C}_r\mathbf{P} \\ &= (3\,900 \quad 3\,925 \quad 5\,300 \quad 3\,375)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \\ &= (11\,725 \quad 35\,875 \quad 20\,425 \quad 52\,000 \quad 46\,475) \end{aligned}$$

Este cálculo indica que se requerirán 11 725 unidades de la parte 1, 35 875 unidades de la parte 2, 20 425 unidades de la parte 3, 52 000 horas laborales de producción y 46 475 horas laborales de ensamble.

d) El costo de producción total se puede calcular al multiplicar $\mathbf{R}_r$ por la transpuesta de la matriz **C** de costo, o sea:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{R}_r\mathbf{C}^T \\ &= (11\,725 \quad 35\,875 \quad 20\,425 \quad 52\,000 \quad 46\,475)\begin{pmatrix} 25 \\ 15 \\ 30 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= \$2\,335\,800 \end{aligned}$$

Ejemplo 35 **(Análisis del cambio de marca; escenario de motivación)** El análisis del cambio de marca se ocupa del comportamiento de compra de los consumidores que compran un producto o contratan un servicio en repetidas ocasiones. Como ejemplos de tales productos se pueden citar la gasolina, los detergentes, los refrescos y las comidas rápidas. El análisis del cambio de marca se enfoca en la lealtad a la marca y el grado en que los consumidores están dispuestos a cambiar a productos competidores. Las empresas a menudo tratan de proyectar los efectos que tendrán las campañas de promoción, como rebajas y programas publicitarios, sobre las ventas de sus productos. Si se tiene información disponible en relación con las tasas de las ganancias y pérdidas por todos los competidores, una empresa puede: *a*) pronosticar su participación en el mercado en algún momento futuro; *b*) pronosticar la tasa con que la empresa aumentará o disminuirá su participación en el mercado en el futuro, y *c*) determinar si la participación en el mercado alguna vez llegará a niveles de equilibrio en que cada empresa o marca retiene una participación constante del mercado.

Al utilizar encuestas del consumidor, es posible determinar una ***matriz de probabilidades de transición*** (o ***matriz de transición)*** que refleja la probabilidad de que una compañía conserve sus consumidores, la probabilidad de que una compañía gane consumidores de las otras compañías y la probabilidad de que pierda consumidores por las compañías competidoras. Considere la siguiente matriz de probabilidades de transición para dos marcas competidoras:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$$

Suponga que p_{ij} *es igual al porcentaje de consumidores de la marca i que comprarán la marca j durante el periodo siguiente.* Esta definición implica que un consumidor compra la marca i durante un periodo y luego compra la marca j durante el periodo siguiente. Se puede definir un periodo como un intervalo de tiempo apropiado, como una semana o mes. (De hecho, la matriz de transición puede reflejar las elecciones del consumidor durante el próximo ciclo de compras.) Cuando $i = j$, p_{ij} representa el porcentaje de consumidores de la marca i que permanecen fieles a la marca i y la vuelven a comprar. Por consiguiente, p_{11} y p_{22} representan el porcentaje de clientes originales retenidos en el periodo siguiente por las marcas 1 y 2, respectivamente, p_{12} representa el porcentaje de clientes que compraron la marca 1 en el periodo previo y que compran la marca 2 en el periodo siguiente, y p_{21} representa el porcentaje de clientes que compran la marca 2 en el periodo pasado y la marca 1 en el periodo siguiente.

Para ilustrarlo, la matriz de transición **T** siguiente indica que la marca 1 retiene 80% de sus consumidores, pero pierde 20% por la marca 2. La marca 2 retiene 90% de sus consumidores y pierde 10% de sus consumidores por la marca 1.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0.80 & 0.20 \\ 0.10 & 0.90 \end{pmatrix}$$

Si se conoce la participación en el mercado de las dos marcas, es posible usar la matriz de transición para proyectar la participación en el mercado en el periodo siguiente. Suponga que éstas son las dos únicas marcas en el mercado y que en el periodo pasado la marca 1 tenía 40% del mercado y la marca 2 tenía 60% del mercado. Si se representan estas participaciones del mercado en el vector de participación **S** (1×2), se pueden calcular las participaciones en el mercado esperadas para el periodo siguiente por el producto **ST**, o

$$(0.40 \quad 0.60)\begin{pmatrix}0.80 & 0.20\\0.10 & 0.90\end{pmatrix} = [0.40(0.80) + 0.60(0.10) \quad 0.40(0.20) + 0.60(0.90)]$$
$$= (0.38 \quad 0.62)$$

Observe con cuidado cómo se calculan las nuevas participaciones en el mercado. El 38% de la marca 1 da como resultado que la marca 1 retiene 80% de la participación previa y gana 10% de la participación previa de los consumidores de la marca 2.

Si el comportamiento de cambio es constante por varios periodos, la matriz de probabilidades de transición sigue siendo la misma. En estas condiciones se puede calcular el vector de participaciones en el mercado $\mathbf{S}_n$ después de n periodos, como

$$\mathbf{S}_n = \mathbf{S}\overbrace{\mathbf{TTT}\ \cdots\ \mathbf{T}}^{n}$$

o

$$= \mathbf{S} \cdot \mathbf{T}^n$$

Dadas las participaciones en el mercado más recientes **S** y la matriz de probabilidades de transición **T** para tres marcas competidoras, pueden determinarse las participaciones en el mercado al final de cada uno de los dos periodos siguientes, como sigue:

$$\mathbf{S} = (0.30 \quad 0.40 \quad 0.30) \qquad \mathbf{T} = \begin{pmatrix}0.90 & 0.05 & 0.05\\0.05 & 0.85 & 0.10\\0.05 & 0.15 & 0.80\end{pmatrix}$$

Para el periodo siguiente,

$$\mathbf{S}_1 = (0.30 \quad 0.40 \quad 0.30)\begin{pmatrix}0.90 & 0.05 & 0.05\\0.05 & 0.85 & 0.10\\0.05 & 0.15 & 0.80\end{pmatrix}$$
$$\begin{aligned}= [&0.30(0.90) + 0.40(0.05) + 0.30(0.05)\\ &0.30(0.05) + 0.40(0.85) + 0.30(0.15)\\ &0.30(0.05) + 0.40(0.10) + 0.30(0.80)]\end{aligned}$$
$$= (0.305 \quad 0.400 \quad 0.295)$$

Para el segundo periodo,

$$\mathbf{S}_2 = (0.305 \quad 0.400 \quad 0.295)\begin{pmatrix}0.90 & 0.05 & 0.05\\0.05 & 0.85 & 0.10\\0.05 & 0.15 & 0.80\end{pmatrix}$$
$$= (0.30925 \quad 0.39950 \quad 0.29125)$$

Después de dos periodos, las marcas 2 y 3 experimentarán bajas ligeras en sus participaciones en el mercado, en tanto que la marca 1 aumentará su participación.

Ejemplo 36 **(Condiciones de equilibrio de la migración de la población)** Otra aplicación del álgebra matricial se ocupa de la migración de la población, donde la población puede consistir en personas, vida silvestre, etc. Los patrones de migración pueden representarse por medio de una ***matriz de transición*** similar a la que caracteriza el comportamiento del cambio de marca. Dada dicha matriz de transición junto con un ***vector de la población*** que describe los totales de población para cada región relevante, se hace posible proyectar la dinámica de los cambios de la población con el paso del tiempo. Si los

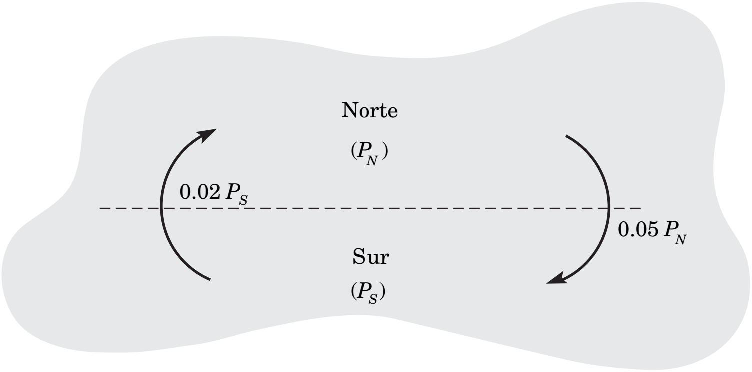


Figura 9.4 Cambios en la población.

patrones de migración son estables con el paso del tiempo (la matriz de transición no cambia), la condición de equilibrio puede ocurrir finalmente cuando la población de cada región se vuelve estable. En equilibrio, los aumentos en la población de cada región se compensan con las disminuciones durante cada periodo. El siguiente ejemplo simplificado ilustra esta condición.

Como consecuencia del incremento en el costo de la energía, la población en un país europeo parece cambiar de norte a sur, como se muestra en la figura 9.4. La matriz de transición **S** describe el comportamiento de migración observado entre estas dos regiones.

$$\mathbf{S} = \begin{array}{cc} \text{Para el norte} & \text{Para el sur} \\ \left(\begin{array}{cc} 0.95 & 0.05 \\ 0.02 & 0.98 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \text{Del norte} \\ \text{Del sur} \end{array} \end{array}$$

El valor de 0.95 en **S** indica que 95% de quienes viven en el norte durante un año seguirán viviendo en el norte el próximo año. El 0.05 representa el 5% restante que se cambia del norte al sur. El 0.98 indica que 98% de quienes viven en el sur durante un año seguirán viviendo en el sur el año siguiente. El 0.02 indica la migración anual al norte de 2% de la población que vive en el sur.

NOTA Para simplificar el análisis, supondremos que la población del país es constante o que los parámetros 0.95 y 0.98 reflejan efectos netos que indican nacimientos, muertes, inmigración y emigración durante el año.

Si P_N representa la población de la región norte del país y P_S la población de la región sur en cualquier año dado, la población proyectada para cada región en el año siguiente se encuentra por medio de la multiplicación matricial

$$\mathbf{PS} = \mathbf{P}' \qquad \textbf{(9.16)}$$

o

$$(P_N \;\; P_S)\begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.02 & 0.98 \end{pmatrix} = (P'_N \;\; P'_S) \qquad \textbf{(9.17)}$$

El equilibrio ocurre cuando $P_N = P'_N$ y $P_S = P'_S$. Si se desarrolla la ecuación (9.17), el equilibrio ocurrirá cuando

$$0.95P_N + 0.02P_S = P_N \tag{9.18}$$

y

$$0.05P_N + 0.98P_S = P_S \tag{9.19}$$

Aún se tienen que especificar todas las cifras de población para este país. Con el fin de determinar la condición de equilibrio, sólo se necesita la población total. Suponga que la población del país es de 70 millones de personas, o bien:

$$P_N + P_S = 70 \tag{9.20}$$

Por consiguiente, se debe incluir la ecuación (9.20) con las ecuaciones (9.18) y (9.19). Para resolver este sistema (3 × 2), se puede mostrar que sólo se necesitan dos de las tres ecuaciones: las ecuaciones (9.20) y (9.18) o (9.19). Por lo tanto, la solución del sistema

$$\begin{aligned} 0.95P_N + 0.02P_S &= P_N && \textbf{(9.18)} \\ P_N + \quad P_S &= 70 && \textbf{(9.20)} \end{aligned}$$

dará las poblaciones de equilibrio. Resuelva el sistema (por métodos matriciales o no matriciales) y verifique que $P_N = 20$ y $P_S = 50$.

Para demostrar que en estos valores hay equilibrio, se puede proyectar la población para el año siguiente usando la ecuación (9.16), es decir:

$$(20 \quad 50)\begin{pmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.02 & 0.98 \end{pmatrix} = (19 + 1 \quad 1 + 49) = (20 \quad 50)$$ ❑

PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR

Recuerde que no se especificaron las distribuciones de la población iniciales para el país. Resulta que los *valores* de equilibrio son independientes de estas condiciones iniciales. No obstante, dadas las cifras iniciales, una pregunta interesante es cuánto tiempo se requiere para alcanzar el equilibrio. Éste es un tema que no se estudiará. Sin embargo, se especulará que cuanto más cercana sea la distribución de la población a la distribución de equilibrio, menor será el *tiempo para el equilibrio.*

Analice las suposiciones de este modelo. ¿Sobre qué suposiciones tiene reservas? ¿Parece tener algún valor el uso de un modelo como éste?

Ejemplo 37 **(Análisis de insumos-producción)** Un ganador del premio Nobel, Wassily Leontief, es más conocido por su modelo de insumos-producción de una economía. Una suposición del modelo es que se consumirá cualquier cosa que se produzca. La demanda de la producción de una industria puede venir de dos fuentes: 1) demanda de industrias diferentes y 2) demanda de fuentes distintas a las industrias. Para ilustrar esto, considere el sector de energía. Las compañías de electricidad generan energía que: 1) es necesaria para operar sus propias plantas; 2) es necesaria para abastecer a otras industrias sus necesidades eléctricas, y 3) es necesaria para otros consumidores, como nosotros.

Los dos primeros de éstos son ejemplos de ***demanda interindustrial*** y la última es ***demanda no industrial***. Normalmente, el objetivo del análisis de insumos-producción es determinar cuánto se debe producir para que ambos tipos de demanda se satisfagan con exactitud. Es decir, ¿cuánto se debe producir para equilibrar la oferta y la demanda?

(Lea este párrafo con mucho cuidado.) La demanda interindustrial se resume con frecuencia como una **matriz de insumos-producción** o **tecnológica**. Un ejemplo es la siguiente matriz **A** (3 × 3).

$$\begin{array}{cc} & \text{Usuario} \\ & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \text{Proveedor} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \end{array}$$

Suponga que la producción (salida) de una industria se mide en dólares. Si a_{ij} es el elemento general en la matriz de insumos-producción, *a_{ij} representa la cantidad de producción de la industria i requerida para producir un dólar de salida en la industria j*. Esta matriz representa una situación de tres industrias. El elemento $a_{11} = 0.3$ sugiere que por cada dólar de producción *de* la industria 1, 30% de este valor es aportado por la industria 1. El elemento a_{12} sugiere que por cada dólar de producción *de* la industria 2, la industria 1 contribuye con 30%. El elemento a_{13} indica que todo dólar de producción *de* la industria 3 requiere 20% de la producción de la industria 1. El elemento $a_{21} = 0.1$ indica que por cada dólar de producción *de* la industria 1, la industria 2 contribuye con 10%. El elemento $a_{31} = 0.2$ indica que por cada dólar de producción *de* la industria 1, 20% es proporcionado por la industria 3. Trate de interpretar los elementos restantes.

Suponga que x_j es igual a la producción de la industria j (en dólares) y que d_j es la demanda no industrial (en dólares) para la producción de la industria j. Se puede formular un conjunto de ecuaciones simultáneas que al resolverse determinarían los niveles de producción x_j en que la oferta total y la demanda estarían en equilibrio. Las ecuaciones de este sistema tendrían la forma general

$$\boxed{\text{Producción de la industria} = \text{demanda interindustrial} + \text{demanda no industrial}}$$

Para el ejemplo de tres industrias el sistema sería

$$\begin{aligned} x_1 &= \overbrace{0.3x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3}^{\substack{\text{Demanda} \\ \text{interindustrial}}} + \overbrace{d_1}^{\substack{\text{Demanda no} \\ \text{industrial}}} \\ x_2 &= 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.3x_3 + d_2 \\ x_3 &= 0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.4x_3 + d_3 \end{aligned} \qquad \textbf{(9.21)}$$

Al volver a ordenar estas ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned} 0.7x_1 - 0.3x_2 - 0.2x_3 &= d_1 \\ -0.1x_1 + 0.8x_2 - 0.3x_3 &= d_2 \\ -0.2x_1 - 0.1x_2 + 0.6x_3 &= d_3 \end{aligned}$$

Dado un conjunto de valores de demanda no industrial d_j, es posible resolver estas ecuaciones para determinar los niveles de equilibrio de la salida.

Observe por un momento la estructura de la ecuación (9.21). Si **X** es un vector de columna que contiene los elementos x_1, x_2 y x_3, y **D** es un vector de columna que contiene los elementos d_1, d_2 y d_3, la ecuación (9.21) tiene la forma

$$\mathbf{X} = \mathbf{AX} + \mathbf{D}$$

La ecuación matricial se puede simplificar como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} - \mathbf{AX} &= \mathbf{D} \\ \mathbf{IX} - \mathbf{AX} &= \mathbf{D} \\ (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} &= \mathbf{D} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{D}} \qquad \textbf{(9.22)}$$

Es decir, al suponer una matriz cuadrada **A** de insumos-producción, se pueden encontrar los niveles de equilibrio de la producción: 1) al formar la matriz (**I** – **A**); 2) al encontrar $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ si existe, y 3) al multiplicar $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ por el vector de la demanda no industrial **D**.

Se debe verificar que para el ejemplo de tres industrias, el determinante de (**I** – **A**) es igual a 0.245 y

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 1.837 & 0.816 & 1.020 \\ 0.490 & 1.551 & 0.939 \\ 0.694 & 0.531 & 2.163 \end{pmatrix}$$

Dada la matriz de insumos-producción para el ejemplo de tres industrias, suponga que los niveles para demandas no industriales son

$$\begin{aligned} d_1 &= \$50\,000\,000 \\ d_2 &= \$30\,000\,000 \\ d_3 &= \$60\,000\,000 \end{aligned}$$

Se pueden determinar los niveles de equilibrio como

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \begin{pmatrix} 1.837 & 0.816 & 1.020 \\ 0.490 & 1.551 & 0.939 \\ 0.694 & 0.531 & 2.163 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50\,000\,000 \\ 30\,000\,000 \\ 60\,000\,000 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 177\,530\,000 \\ 127\,370\,000 \\ 180\,410\,000 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La industria 1 debería producir \$177 530 000 de salida; la industria 2, \$127 370 000; y la industria 3, \$180 410 000.

Al utilizar los coeficientes de la matriz de insumos-producción original, se puede calcular la demanda interindustrial (en millones de dólares) como

		Usuario		
		1	2	3
Proveedor	1	53.259	38.211	36.082
	2	17.753	25.474	54.123
	3	35.506	12.737	72.164

Si suma la demanda interindustrial más la demanda no industrial, encontrará que los totales son ligeramente diferentes de los valores de equilibrio calculados. Estas diferencias se pueden atribuir a errores de redondeo al calcular $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$.

Ejemplo 38 **(Aplicaciones de red)** Una ***red*** consiste en un conjunto de ***nodos*** y un conjunto de ***arcos*** que conectan nodos. Los nodos pueden representar ciudades, intersecciones de autopistas, computadoras, contenedores de agua o artículos menos tangibles como piedras angulares de un proyecto. Por lo general, los nodos representan puntos donde algún tipo de flujo se origina, se transmite o termina. Los arcos en una red pueden representar caminos, rutas aéreas, líneas de energía, tuberías y demás. La figura 9.5 ilustra representaciones diferentes de nodos y arcos. En la figura 9.5*a* no se indica orientación alguna de flujo específica. El arco en este caso se conoce como ***arco no dirigido***. En la figura 9.5*b* el arco se llama ***arco dirigido*** porque el flujo se da en una dirección. En la figura 9.5*c* el arco es ***bidireccional***, ya que los flujos pueden ser en ambas direcciones.

a) *b*) *c*)

Figura 9.5 Representación de nodo-arco.

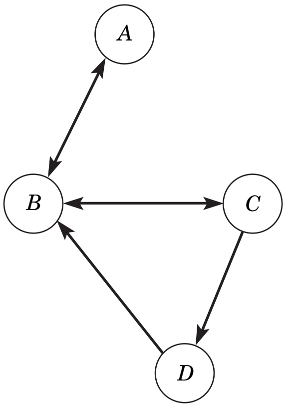


Figura 9.6 Rutas de aerolínea por conmutador.

La figura 9.6 es un diagrama de red que ilustra la estructura de rutas para una pequeña aerolínea regional que conecta cuatro ciudades. Los nodos representan las ciudades diferentes y los arcos representan las rutas que conectan las ciudades. El arco con dos direcciones que conecta los nodos A y B indica que la aerolínea vuela de A a B y de B a A.

La esencia de estas relaciones de nodo-arco se puede resumir en lo que se llama una ***matriz de adyacencia***. La matriz de adyacencia tiene una fila y una columna para cada nodo. Los elementos de la matriz consisten en ceros y unos, dependiendo de si hay un arco dirigido de un nodo a otro. En este ejemplo, se asigna un valor de 1 a un elemento en la posición (i, j) si hay servicio de la ciudad i a la ciudad j; de otra manera, se asigna un valor de 0. Compare la matriz de adyacencia con la figura 9.6. La matriz de adyacencia resume el *servicio directo* entre ciudades en las rutas de la aerolínea.

$$\text{De}\quad \begin{array}{cc} & \text{A} \\ & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \text{Matriz adyacente}$$

Ahora, si se multiplica la matriz de adyacencia por sí misma, ocurre un resultado interesante.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{De}\quad \begin{array}{cc} & \text{A} \\ & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

La matriz de producto resume el *servicio con una escala* entre todas las ciudades. Por ejemplo, la matriz de producto indica que hay una ruta con una escala de la ciudad C a la A. Una revisión de la figura 9.6 confirma que el servicio está disponible de C a A con una escala en la ciudad B.

Veamos si esto tiene sentido. Si se examina el producto interno que da como resultado el elemento (3, 1) de la matriz de producto, la fila 3 de la primera matriz indica la presencia (ausencia) de vuelos directos *de* la ciudad C a otras ciudades. La columna 1 de la segunda matriz indica la presencia (ausencia) de vuelos *a* la ciudad A de otras ciudades. La multiplicación busca coincidencias de pares de vuelos.

$$\begin{array}{cc} & \text{A} \\ & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ & & & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{A} \\ \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \text{A} \\ & \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array} & \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ \textcircled{1} & & & \\ & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

En este caso se buscan coincidencias entre vuelos *de* la ciudad C a otra ciudad con vuelos *de* la ciudad de destino *a* la ciudad A. Quizá se pueda ilustrar esto al expandir el cálculo del producto interno como se muestra en la figura 9.7. Observe en esta figura que los únicos pares de vuelos que coinciden son C a B y B a A. Estudie el procedimiento de multiplicación hasta que entienda cómo (y por qué) se calcula cada elemento.

Componentes del producto interno	(0) **(0)**	+	**(1)** **(1)**	+	(0) **(0)**	+	**(1)** **(0)**	= 1
Pares de vuelos correspondientes	$C \to A$ $A \to A$		$C \to B$ $B \to A$		$C \to C$ $C \to A$		$C \to D$ $D \to A$	

Figura 9.7 Cálculo del producto interno para la fila 3 y la columna 1.

Aunque no es particularmente significativa, la matriz indica dos rutas con una escala de la ciudad B a la ciudad B. Éstas reflejan las rutas redondas a las ciudades A y C.

Al elevar al cubo la matriz se obtiene como resultado una matriz de producto que resume el número de rutas "con dos escalas" entre todas las ciudades. Por ejemplo, nuestros resultados hasta ahora no indicaron algún servicio directo o con una escala de A a D. Esta matriz de producto sugiere que hay una ruta con dos escalas ($A \to B \to C \to D$).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \overset{\text{A}}{\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}}$$

En este ejemplo particular, las rutas con dos escalas no siempre son significativas. Para ilustrarlo, las dos rutas con dos escalas indicadas de la ciudad A a la ciudad B son $A \to B \to A \to B$ y $A \to B \to C \to B$. Otro ejemplo es que una ruta con dos escalas puede ocurrir cuando se vuela de la ciudad C a la ciudad A. La ruta es de $C \to D \to B \to A$. No obstante, una ruta más directa es $C \to B \to A$.

Este ejemplo es muy simple, no justifica realmente los métodos matriciales. Sin embargo, se simplifica con fines ilustrativos. Estos métodos, en especial cuando se ejecutan en una computadora, aportan eficiencias considerables para problemas de mayor escala, como podría ocurrir en el caso de aerolíneas importantes como United, American, Northwest y Delta. ❑

Sección 9.6 Ejercicios de seguimiento

1. En relación con la elección analizada en el ejemplo 33, el candidato independiente hizo una aparición particularmente fuerte en un debate televisivo reciente de los tres candidatos. Las encuestas políticas observaron un cambio en las preferencias electorales, como se indica en la matriz siguiente.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \text{Distrito} \\ \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.35 & 0.33 & 0.30 & 0.44 & 0.25 & 0.30 \\ 0.40 & 0.38 & 0.27 & 0.35 & 0.28 & 0.35 \\ 0.25 & 0.29 & 0.43 & 0.21 & 0.47 & 0.35 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{Demócrata} \\ \text{Republicana} \\ \text{Independiente} \end{array}$$

Suponiendo las estimaciones originales del número de electores en los seis distritos, haga un pronóstico del resultado de la elección. ¿Al parecer el debate tuvo algún efecto en el resultado?

2. La matriz siguiente es una matriz de probabilidades de transición relacionadas con un mercado dominado por dos empresas.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0.70 & 0.30 \\ 0.25 & 0.75 \end{pmatrix}$$

Suponga que la marca 1 tiene actualmente 70% del mercado y la marca 2 tiene el 30% restante.

a) Pronostique las participaciones en el mercado en el periodo siguiente.

b) Pronostique las participaciones en el mercado después de cuatro periodos.

**c*) Suponiendo que la matriz de transición permanece estable, ¿se alcanzará el equilibrio del mercado? Si es así, ¿cuáles son las participaciones de equilibrio esperadas? (*Sugerencia*: Si p_1 y p_2 representan las participaciones en el mercado para las marcas 1 y 2, $p_1 + p_2 = 1$.)

3. Examine las matrices de transición siguientes para dos situaciones de mercado diferentes. Para cada matriz, se supone que hay tres marcas que dominan el mercado. Por observación, vea si puede pronosticar (sin cálculos formales) cuáles serán las condiciones de equilibrio

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} 0.80 & 0.15 & 0.05 \\ 0.20 & 0.70 & 0.10 \\ 0 & 0 & 1.00 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 0.80 & 0.10 & 0.10 \\ 0 & 0.50 & 0.50 \\ 0 & 0.50 & 0.50 \end{pmatrix}$$

4. La matriz siguiente ilustra las probabilidades de transición asociadas a un mercado dominado por las tres marcas.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Suponga que actualmente la marca 1 tiene 40% del mercado, la marca 2 tiene 40% y la marca 3 tiene 20%.

a) Pronostique las participaciones en el mercado después del periodo siguiente.

**b*) Suponiendo que la matriz de transición permanece estable, ¿se alcanzará el equilibrio del mercado? Si es así, ¿cuáles son las participaciones de equilibrio esperadas?

5. En el ejemplo 36, suponga que la matriz de transición que describe el comportamiento de migración es

$$\mathbf{S} = \begin{array}{cc} \text{Al norte} & \text{Al sur} \\ \left(\begin{array}{c} 0.90 \\ 0.05 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} 0.10 \\ 0.95 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Del norte} \\ \text{Del sur} \end{array}$$

Determine si las poblaciones alcanzarán una condición de equilibrio, y si es así, las poblaciones de las dos regiones.

6. Refiérase al ejemplo 37 y suponga que las demandas no industriales son \$100 millones, \$60 millones y \$80 millones, respectivamente. Determine los niveles de equilibrio de producción para las tres industrias. También determine las demandas interindustriales para las tres industrias.

7. La figura 9.8 es un diagrama de red que ilustra la estructura de las rutas para una pequeña aerolínea regional que da servicio a cuatro ciudades. Utilizando esta figura, construya una matriz de adyacencia. Eleve al cuadrado la matriz de adyacencia y resuma verbalmente el servicio con una escala que existe entre todas las ciudades.

8. La figura 9.9 es un diagrama de red que ilustra la estructura de las rutas para una aerolínea regional pequeña que da servicio a cuatro ciudades. Usando esta figura, construya una matriz adyacente. Eleve al cuadrado la matriz adyacente y resuma verbalmente el servicio con una escala que existe entre todas las ciudades.

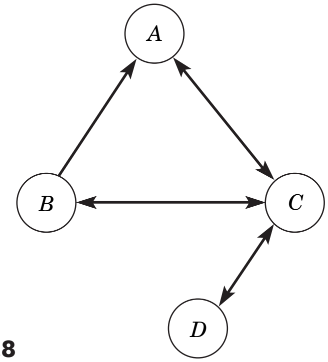


Figura 9.8

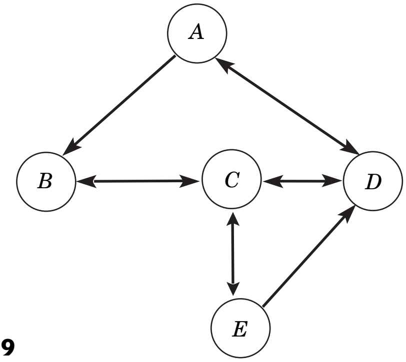


Figura 9.9

9. La matriz de insumos-producción para una economía de tres industrias es

$$\begin{array}{cc} & \text{Usuario} \\ & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \text{Proveedor} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.25 & 0.30 & 0.20 \\ 0.20 & 0.30 & 0.20 \\ 0.40 & 0.10 & 0.25 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \end{array}$$

Si las demandas no industriales son, respectivamente, \$100 000 000, \$60 000 000 y \$150 000 000: *a*) Determine los niveles de equilibrio de producción para las tres industrias y *b*) determine las demandas interindustriales para las tres industrias.

10. La matriz de transición siguiente indica los cambios anuales en la población en tres regiones de un país.

$$\begin{array}{cc} & \text{A} \\ & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \text{De} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.90 & 0.06 & 0.04 \\ 0.08 & 0.86 & 0.06 \\ 0.03 & 0.02 & 0.95 \end{pmatrix} \end{array}$$

Determine si las poblaciones alcanzarán una condición de equilibrio y las participaciones de población relativas de las tres regiones.

11. Suponga que la oficina nacional de una corporación de renta de autos planea su programa de mantenimiento para el año siguiente. Los ejecutivos se interesan en determinar las necesidades de la compañía de algunas refacciones y los costos esperados para estas categorías de refacciones. La compañía renta autos medianos, compactos y subcompactos. La matriz **N** indica el número de cada tamaño de auto disponible para rentar en cuatro regiones del país.

$$\mathbf{N} = \begin{array}{cl} \begin{matrix} \text{Mediano} & \text{Compacto} & \text{Subcompacto} \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 16\,000 & 40\,000 & 50\,000 \\ 15\,000 & 30\,000 & 20\,000 \\ 10\,000 & 10\,000 & 15\,000 \\ 12\,000 & 40\,000 & 30\,000 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \text{Este} \\ \text{Medio Oeste} \\ \text{Sur} \\ \text{Oeste} \end{matrix} \end{array}$$

Cuatro refacciones de interés particular, debido al costo y la frecuencia de reemplazo, son las bandas de los ventiladores, bujías, baterías y llantas. Con base en estudios de los registros de mantenimiento en partes diferentes del país, los analistas determinaron el número promedio de refacciones necesarias por automóvil durante un año. Esto se resume en la matriz **R**:

$$\mathbf{R} = \begin{array}{cl} \begin{matrix} \text{Mediano} & \text{Compacto} & \text{Subcompacto} \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1.7 & 1.6 & 1.5 \\ 12.0 & 8.0 & 5.0 \\ 0.9 & 0.75 & 0.5 \\ 4.0 & 6.5 & 6.0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \text{Bandas de ventilador} \\ \text{Bujías} \\ \text{Baterías} \\ \text{Llantas} \end{matrix} \end{array}$$

a) Realice un cálculo matricial que determine la demanda total para cada tamaño de automóvil.

b) Haga un cálculo matricial para obtener el número total de cada refacción requerido para la flotilla.

c) Si la matriz **C** contiene el costo por unidad de las bandas de ventilador, bujías, baterías y llantas, realice un cálculo matricial para determinar los costos combinados totales de todas las refacciones.

$$\mathbf{C} = (\$1.25 \quad \$0.80 \quad \$30.00 \quad \$35.00)$$

d) Haga un cálculo matricial para obtener los costos totales para cada categoría de refacción. (*Sugerencia*: Esto requerirá la formulación de una matriz nueva que contenga los resultados de la parte *b*.)

TÉRMINOS Y CONCEPTOS CLAVE

adición (sustracción) de matrices 370
análisis de insumos-producción 416
análisis del cambio de marca 412
arco bidireccional 418
arco dirigido 418
arco no dirigido 418
cofactor 386
determinante 384
diagonal principal 368
dimensión 365
inversa 396
matriz 364
matriz cuadrada 367
matriz de adyacencia 419
matriz de probabilidades de transición 412
matriz identidad (unidad) 368
matriz no singular 397

matriz singular 397
método de cofactores (para determinar la inversa) 401
método del desarrollo por los cofactores (para el cálculo de determinantes) 389
multiplicación de matrices 374
multiplicación escalar 372
nodo 418
procedimiento de reducción de Gauss 399
producto interno 373
red 418
regla de Cramer 393
transpuesta 368
vector columna 367
vector fila 366

❑ EJERCICIOS ADICIONALES

SECCIÓN 9.3

1. Las matrices $\mathbf{S}_1$ y $\mathbf{S}_2$ representan las ventas anuales de tres productos por región de una empresa, expresadas en millones de dólares. $\mathbf{S}_1$ representa las ventas para el primer año de operación de la empresa y $\mathbf{S}_2$ las ventas para el segundo año de operación.

$$\begin{array}{c} \text{Región} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 2.6 & 4.8 & 1.8 & 0.9 \\ 3.2 & 4.4 & 2.5 & 2.8 \\ 2.4 & 3.6 & 3.8 & 2.5 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{Región} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 3.6 & 2.5 & 3.0 & 2.5 \\ 4.5 & 5.0 & 3.5 & 3.8 \\ 2.9 & 3.0 & 4.6 & 4.0 \end{pmatrix} \end{array}$$

a) Calcule $\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1$ e interprete el significado de la matriz resultante.
b) Calcule $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ e interprete el significado de la matriz resultante.
c) La gerencia proyectó un aumento de 30% en las ventas de todos los productos en todas las regiones para el segundo año de operación. Empleando operaciones matriciales, calcule la diferencia entre los niveles de ventas proyectados y los niveles reales para el segundo año, e interprete los resultados. Identifique las regiones y los productos que estuvieron por debajo de las expectativas de la gerencia.

Dadas las matrices siguientes,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 8 \\ 3 & 10 & -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ 7 & 10 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

realice los cálculos matriciales siguientes (si es posible).

2. $2\mathbf{A} + \mathbf{E}$
3. $4\mathbf{E} - \mathbf{A}$
4. $\mathbf{B} + \mathbf{D} - \mathbf{F} + \mathbf{H}$
5. $3\mathbf{B} - 2\mathbf{F} + \mathbf{D}$
6. $\mathbf{AB}$
7. $\mathbf{BA}$
8. $\mathbf{CD}$
9. $\mathbf{DC}^T\mathbf{B}$
10. $\mathbf{BF}$
11. $\mathbf{DH}$
12. $\mathbf{CH}$
13. $\mathbf{GC}$

14. $\mathbf{CG}$

15. $\mathbf{C}^T\mathbf{G}$

16. $\mathbf{DF}$

17. $\mathbf{ACBD}$

18. $\mathbf{DBCA}$

19. $\mathbf{C}^T\mathbf{BD}$

20. $\mathbf{GE}$

21. $\mathbf{EG}$

Dadas las matrices siguientes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \\ -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

realice los cálculos matriciales siguientes (si es posible).

22. $5\mathbf{C}^T - 2\mathbf{D}$

23. $3\mathbf{C} - 4\mathbf{D}^T$

24. $\mathbf{AE}$

25. $\mathbf{EA}$

26. $\mathbf{CA}$

27. $\mathbf{AC}^T$

28. $\mathbf{DC}$

29. $\mathbf{CD}$

30. $\mathbf{FA}$

31. $\mathbf{E}^T\mathbf{F}$

32. $\mathbf{BF}^T$

33. $\mathbf{E}^T\mathbf{AF}$

34. $\mathbf{BC}$

35. $\mathbf{BF}$

36. $\mathbf{FB}$

37. $\mathbf{CAD}$

38. $\mathbf{F}^T\mathbf{AE}$

39. $\mathbf{D}^T\mathbf{C}$

40. $\mathbf{C}^T\mathbf{D}^T\mathbf{AE}$

41. $\mathbf{BF}^T\mathbf{AE}$

42. Exprese la ecuación matricial siguiente en forma algebraica.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 24 \end{pmatrix}$$

43. Exprese la ecuación matricial siguiente en forma algebraica.

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -2 & 0 & -4 \\ 2 & 10 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 175 \end{pmatrix}$$

44. Exprese la ecuación matricial siguiente en forma algebraica.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 10 & -2 \\ 8 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 12 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 100 \\ 55 \\ 75 \\ 250 \\ 15 \end{pmatrix}$$

SECCIÓN 9.4

Encuentre la matriz de cofactores para cada una de las matrices siguientes.

45. $\begin{pmatrix} 25 & -10 \\ -5 & 20 \end{pmatrix}$

46. $\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}$

47. $\begin{pmatrix} 8 & -2 & 9 \\ 2 & 18 & 2 \\ 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

48. $\begin{pmatrix} 4 & 12 & -7 \\ 6 & 10 & 0 \\ 3 & -7 & -8 \end{pmatrix}$

49. $\begin{pmatrix} 16 & -8 \\ -2 & 20 \end{pmatrix}$

50. $\begin{pmatrix} 40 & -80 \\ -20 & 26 \end{pmatrix}$

51. $\begin{pmatrix} 7 & 4 & -2 \\ 0 & -8 & 3 \\ 2 & -6 & -4 \end{pmatrix}$

52. $\begin{pmatrix} 20 & 15 & -10 \\ 0 & -20 & 0 \\ -5 & 30 & -6 \end{pmatrix}$

Encuentre el determinante para cada una de las matrices siguientes.

53. $\begin{pmatrix} -6 & 25 \\ -10 & -20 \end{pmatrix}$

54. $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -6 & -8 \end{pmatrix}$

55. $\begin{pmatrix} -10 & 16 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$

56. $\begin{pmatrix} x+1 & x+2 \\ x-3 & x-1 \end{pmatrix}$

57. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

58. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

59. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \\ -10 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

60. $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

61. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

62. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Resuelva los sistemas de ecuaciones siguientes por medio de la regla de Cramer.

63. $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -1 \\ 2x_1 - x_2 &= 7 \end{aligned}$

64. $\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &= 24 \\ 3x_1 - 6x_2 &= 10 \end{aligned}$

65. $\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 \qquad - 4x_3 &= 17 \end{aligned}$

66. $\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 10 \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 &= -1 \end{aligned}$

SECCIÓN 9.5

Para las matrices siguientes, encuentre la inversa (si existe).

67. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

68. $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$

69. $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 7 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

70. $\begin{pmatrix} 4 & -4 & 3 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

71. $\begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}$

72. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 9 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

73. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

74. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 10 & -5 & 10 \end{pmatrix}$

75. $\begin{pmatrix} -12 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

76. $\begin{pmatrix} 10 & 4 & 2 \\ -5 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Usando los resultados de los ejercicios 67 a 76, determine la solución de los sistemas de ecuaciones siguientes.

77. $\begin{aligned} x_2 &= 4 \\ 8x_1 + 3x_2 &= 12 \end{aligned}$

78. $\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 &= 12 \\ 7x_1 + 2x_2 &= 9 \end{aligned}$

79. $\begin{aligned} x_1 + 8x_2 + 7x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4 \\ 7x_1 + 4x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$

80. $\begin{aligned} 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 7 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -7 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$

81. $\begin{aligned} 8x_1 + 10x_2 &= 4 \\ 11x_1 + 13x_2 &= 4 \end{aligned}$

82. $\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 2 \\ 9x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 20 \\ -x_1 + 5x_3 &= -10 \end{aligned}$

83. $\begin{aligned} 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 &= -13 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned}$

84. $\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 20 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 &= 15 \\ 10x_1 - 5x_2 + 10x_3 &= 10 \end{aligned}$

85. $\begin{aligned} -12x_1 + 3x_2 - 6x_3 &= 18 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 10 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 &= 14 \end{aligned}$

86. $\begin{aligned} 10x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 46 \\ -5x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 9 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 10 \end{aligned}$

SECCIÓN 9.6

87. Admisiones a la universidad La oficina de admisiones de una universidad grande planea admitir a 9 000 estudiantes el próximo año. El vector de columna **M** indica el desglose esperado de estudiantes nuevos en las categorías de varones del estado (ISM; *in-state males*), mujeres del estado (ISF; *in-state females*), varones de fuera del estado (OSM; *out-of-state males*) y mujeres de fuera del estado (OSF; *out-of-state females*).

$$\mathbf{M} = \begin{array}{cl} \left(\begin{array}{c} 3\,600 \\ 3\,150 \\ 1\,000 \\ 1\,250 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \text{ISM} \\ \text{ISF} \\ \text{OSM} \\ \text{OSF} \end{array} \end{array}$$

El personal de admisiones espera que los estudiantes escojan sus carreras en las universidades de negocios (B; *business*), ingeniería (E; *engineering*) y artes y ciencias (A&S; *arts and sciences*) de acuerdo con los porcentajes dados en la matriz **P**:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{cccccc} & \text{ISM} & \text{ISF} & \text{OSM} & \text{OSF} & \\ \left(\right. & 0.30 & 0.30 & 0.30 & 0.24 & \left.\right) \text{B} \\ & 0.20 & 0.10 & 0.30 & 0.06 & \text{E} \\ & 0.50 & 0.60 & 0.40 & 0.70 & \text{A\&S} \end{array}$$

Mediante operaciones matriciales, calcule el número de estudiantes que se espera que ingresen a la universidad.

88. Refiérase al ejercicio 87. La oficina de hospedaje estima que los estudiantes seleccionarán alternativas de hospedaje de acuerdo con los porcentajes en **H**:

$$\mathbf{H} = \begin{array}{cccc} \text{Dorm} & \text{Fraternidad de señoritas} & \text{Fuera del campus} & \\ 0.40 & 0.20 & 0.40 & \text{IS} \\ 0.70 & 0.20 & 0.10 & \text{OS} \end{array}$$

Realice una multiplicación matricial para calcular el número de estudiantes nuevos que se espera que escojan las diferentes opciones de hospedaje.

89. Una compañía fabrica tres productos, cada uno requiere ciertas cantidades de tres materias primas al igual que de trabajo. La matriz **R** resume los requerimientos por unidad de cada producto.

$$\mathbf{R} = \begin{array}{ccccc} \multicolumn{3}{c}{\text{Materia prima}} & & \\ 1 & 2 & 3 & \text{Trabajo} & \\ 2 & 3 & 2 & 6 & \text{Producto } A \\ 3 & 2 & 8 & 8 & \text{Producto } B \\ 4 & 2 & 5 & 4 & \text{Producto } C \end{array}$$

Los requerimientos de materia prima se expresan en libras por unidad y los requerimientos de trabajo en horas por unidad. Las tres materias primas cuestan \$2, \$8 y \$2.50 por libra, respectivamente. Los costos de trabajo son de \$8 por hora. Suponga que se producen 800, 2 000 y 600 unidades de los productos *A*, *B* y *C*.

a) Efectúe una multiplicación matricial para calcular las cantidades totales de los cuatro recursos requeridos para producir las cantidades deseadas de los productos *A*, *B*, *C*.

b) Utilizando su respuesta de la parte *a*), realice una multiplicación matricial para obtener el costo total combinado de la producción.

90. **Administración de hospitales** Un hospital local reunió datos relacionados con las personas admitidas para servicios de pacientes internados. El vector **P** indica los porcentajes de todos los pacientes admitidos en unidades hospitalarias diferentes. El vector **S** indica la duración promedio de la permanencia del paciente (en días) para cada unidad del hospital.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{cl} \left(\begin{matrix} 0.18 \\ 0.10 \\ 0.24 \\ 0.48 \end{matrix}\right) & \begin{matrix} \text{Obstetricia} \\ \text{Cardiología} \\ \text{Pediatría} \\ \text{Otra} \end{matrix} \end{array} \qquad \mathbf{S} = (3 \quad 16 \quad 2 \quad 4)$$

El vector **C** resume el costo diario actual por paciente para las diferentes unidades del hospital:

$$\mathbf{C} = (\$680 \quad \$1\,400 \quad \$540 \quad \$360)$$

Si se admiten 300 pacientes nuevos, realice una multiplicación matricial para calcular:

a) Los números de pacientes admitidos en cada unidad del hospital.
b) El número total de días por paciente esperado.
c) El costo total por día para los 300 pacientes.

91. **Interacción social** Un grupo de ejecutivos realizó encuestas relacionadas con las personas que tienen influencia directa sobre su toma de decisiones. La matriz siguiente resume sus respuestas.

$$\begin{array}{c|cccccc} & \multicolumn{6}{c}{\text{Persona cuya opinión se busca}} \\ & A & B & C & D & E & F \\ A & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ B & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ C & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ D & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ E & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ F & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Una entrada de 1 indica que la persona representada por la columna correspondiente tiene alguna influencia directa sobre la toma de decisiones de la persona representada en la fila. Una entrada de 0 indica que no hay influencia directa. Como en el ejemplo 38, la matriz es similar a la matriz de adyacencia. El cuadrado de la matriz indicaría influencias indirectas en la toma de decisiones al implicar a un intermediario. Eleve al cuadrado la matriz y resuma de manera verbal las influencias indirectas.

92. La matriz tecnológica para un modelo de insumos-producción de tres industrias es

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 & 0.12 \\ 1 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

Si la demanda no industrial para la producción de estas industrias es $d_1 = \$5$ millones, $d_2 = \$3$ millones y $d_3 = \$4$ millones, determine los niveles de producción de equilibrio para las tres industrias.

93. **Migración de la vida silvestre** Los científicos han estudiado los hábitos migratorios de una especie particular de vida silvestre. Se conduce un censo anual en tres regiones habitadas por la especie. Se ha observado un patrón estable de cambios en sus movimientos. Esto se refleja en la siguiente matriz de transición.

$$\begin{array}{ccccc} & & \multicolumn{3}{c}{\text{A la región}} \\ & & 1 & 2 & 3 \\ & 1 & 0.90 & 0.05 & 0.05 \\ \text{De la región} & 2 & 0.10 & 0.80 & 0.10 \\ & 3 & 0.05 & 0.10 & 0.85 \end{array}$$

Suponga que las poblaciones de las tres regiones fueron 40 000, 20 000 y 30 000 durante el censo pasado. Pronostique las poblaciones de cada región en el momento del censo siguiente y dentro de dos años.

94. La figura 9.10 es un diagrama de red que ilustra la estructura de las rutas de una compañía de autobuses comerciales que da servicio en ocho ciudades. Utilizando esta figura, construya una matriz de adyacencia. Eleve al cuadrado la matriz de adyacencia y resuma de manera verbal el servicio que existe entre todas las ciudades.

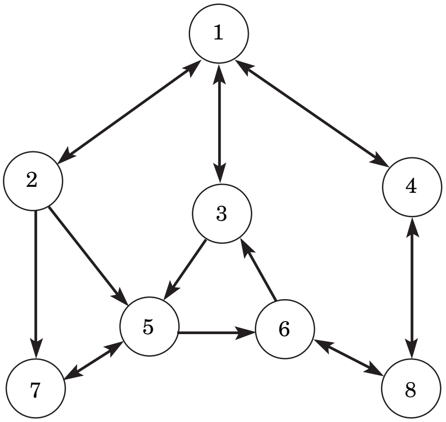


Figura 9.10 Rutas de autobús.

❑ EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. Encuentre la matriz transpuesta de **A** si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -6 & 8 \\ 0 & -3 & 10 & 5 \\ 6 & -2 & -4 & 19 \end{pmatrix}$$

2. Encuentre el producto interno:

$$(a \quad b \quad c \quad d)\begin{pmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

3. Dadas las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 14 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 10 \\ 9 & -8 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

determine, si es posible: *a*) **AB**, *b*) **BA**, *c*) **BC** y *d*) **CA**.

4. Escriba el sistema de ecuaciones siguientes como un producto matricial:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad - x_4 &= 20 \\ x_2 + x_3 \qquad &= 15 \\ x_3 + x_4 &= 18 \\ x_4 &= 9 \end{aligned}$$

5. Encuentre el determinante para la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 10 & -2 \\ 6 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & -10 \end{pmatrix}$$

6. Encuentre $\mathbf{A}^{-1}$ si

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 20 & -8 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Se puede encontrar la solución de un sistema de ecuaciones que tiene la forma $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ mediante la multiplicación matricial

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 11 \end{pmatrix}$$

¿Cuál era el sistema de ecuaciones original?

❑ EJERCICIOS POR COMPUTADORA

Usando un paquete apropiado de software, resuelva los ejercicios siguientes.

1. Dadas las matrices siguientes

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & -1 & 5 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 10 & 0 & 2 & 4 & -5 & 3 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & 3 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 5 & 1 & -2 & 0 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 6 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

calcule:

a) $\mathbf{AB}$

b) $\mathbf{AC}$

c) $\mathbf{B}^T\mathbf{C}$

d) $\mathbf{C}^T\mathbf{A}^T$

e) $\mathbf{A}^2$

f) $\mathbf{A}^3$

2. Dadas las matrices siguientes:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 & 8 & -5 & 4 \\ 0 & 10 & -4 & -3 & 6 & -5 \\ -15 & 8 & -8 & 20 & 25 & 3 \\ 6 & 14 & 15 & -9 & 10 & 9 \\ 0 & 24 & -8 & -5 & 30 & 18 \\ 28 & -7 & 16 & 0 & 10 & 12 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} -8 & 35 & 25 \\ 15 & -15 & -20 \\ 0 & 12 & 24 \\ 18 & -6 & 10 \\ 24 & 16 & -9 \\ 15 & 20 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 & 35 & 20 & -15 & -18 & -12 & 0 & 0 \\ -8 & 10 & -8 & 10 & 12 & 28 & 0 & 16 & 14 & 18 \\ 25 & 10 & 35 & 26 & -6 & -14 & -15 & 20 & 12 & 10 \\ 0 & 15 & 25 & 10 & 5 & 16 & 8 & -5 & -8 & -2 \\ 4 & 3 & 5 & -8 & 10 & 12 & -5 & 20 & 15 & 0 \\ 10 & 12 & -6 & 20 & 0 & 6 & 2 & 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}$$

calcule:

a) $\mathbf{EF}$
b) $\mathbf{EG}$
c) $\mathbf{G}^T\mathbf{F}$
d) $\mathbf{EE}^T$
e) $\mathbf{E}^2$
f) $\mathbf{E}^3$
g) $\mathbf{G}^T\mathbf{E}$

3. Dado el siguiente sistema de ecuaciones que tiene la forma matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} &= 8 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 4x_5 + 2x_6 - x_8 &= -8 \\ 3x_2 - x_4 + 5x_5 - 2x_7 + 3x_9 &= 6 \\ x_1 + x_5 - 3x_8 + 4x_{10} &= -9 \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 3x_6 - 5x_7 + 2x_8 - x_9 + x_{10} &= 5 \\ 5x_3 - 2x_4 + 6x_5 - 4x_6 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 5x_5 &= -9 \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 - x_6 + 2x_7 - 5x_8 - x_9 + x_{10} &= 7 \\ x_2 - x_4 + x_6 - 2x_8 + x_{10} &= -5 \end{aligned}$$

a) Encuentre $\mathbf{A}^{-1}$.
b) Realice el cálculo de $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ para determinar la solución del sistema.

4. Dado el siguiente sistema de ecuaciones que tiene la forma matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &= 11 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 &= 11 \\ x_5 + x_6 + x_7 + x_8 &= 5 \\ x_1 + x_3 + x_5 + x_7 &= 8 \\ x_2 + x_4 + x_6 + x_8 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 &= 10 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &= 5 \\ 5x_2 + 2x_3 - x_5 + 6x_7 - 5x_8 &= 31 \end{aligned}$$

a) Encuentre $\mathbf{A}^{-1}$.
b) Realice el cálculo de $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ para determinar la solución del sistema.

5. La matriz de adyacencia siguiente indica las conexiones directas que una aerolínea tiene entre 10 ciudades diferentes.

$$\begin{array}{ccc}
 & & \text{A} \\
 & & \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\
\text{De} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} & \begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

a) Eleve la matriz al cuadrado y resuma de manera verbal el servicio *con una escala* entre todas las ciudades.

b) Eleve al cubo la matriz y resuma verbalmente el servicio *con dos escalas* entre todas las ciudades.

6. Una compañía trata de decidir cuántos de cada 10 productos debe producir durante el siguiente trimestre (3 meses). No es necesario que se produzcan los 10 productos. No obstante, se tienen las siguientes restricciones. Primero, la producción total de los 10 productos debe ser igual a 10 000 unidades durante el trimestre. El número de unidades producidas del producto 1 debe ser el doble del producto 2. La producción combinada de los productos 4, 5 y 8 debe equivaler a 4 000 unidades y el número de unidades producidas del producto 10 tiene que ser igual a la producción combinada de los productos 1 y 2. Además, se desea que los seis departamentos de la compañía se utilicen a toda su capacidad durante el trimestre. La siguiente tabla resume el número de horas requeridas para producir los diferentes productos en los seis departamentos, así como el número de horas disponibles en cada departamento.

	Producto										**Horas**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**disponibles**
Departamento 1	4	2	3	1	0	0	0	0	0	0	10 000
Departamento 2	1	1	1	1	2	1	0	0	0	1	9 000
Departamento 3	0	0	4	2	2	0	1	2	0	1	11 000
Departamento 4	0	1	3	2	2	5	0	1	1	0.5	8 000
Departamento 5	0.5	2	2	1	2	1	3	0	0	0	6 000
Departamento 6	0	0	4	2	1	1	2	1	0	0	4 000

a) Formule el sistema de ecuaciones, que al resolverlo, determinará el número de unidades de los 10 productos que se debe producir.

b) Use el método de la inversa de una matriz para resolver el sistema.

c) Resuma los resultados verbalmente.

7. La matriz de insumos-producción para una economía de seis industrias se ilustra en la siguiente matriz.

$$\begin{array}{cc} & \text{Usuario} \\ & \begin{array}{cccccc} \quad 1 & \quad 2 & \quad 3 & \quad 4 & \quad 5 & \quad 6 \end{array} \\ \text{Proveedor} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.180 & 0.005 & 0.000 & 0.003 & 0.000 & 0.010 \\ 0.005 & 0.290 & 0.020 & 0.002 & 0.004 & 0.015 \\ 0.030 & 0.170 & 0.450 & 0.008 & 0.010 & 0.006 \\ 0.035 & 0.040 & 0.020 & 0.040 & 0.010 & 0.050 \\ 0.010 & 0.001 & 0.040 & 0.250 & 0.360 & 0.250 \\ 0.120 & 0.080 & 0.100 & 0.120 & 0.180 & 0.230 \end{pmatrix} \end{array}$$

Si las demandas no industriales son, respectivamente, \$20 mil millones, \$10 mil millones, \$30 mil millones, \$5 mil millones, \$12 mil millones y \$30 mil millones: *a*) determine los niveles de equilibrio de producción para las seis industrias y *b*) determine las demandas interindustriales para las seis industrias.

MINICASO

PLANEACIÓN DE RECURSOS HUMANOS

Una compañía nacional minorista de descuento ha recopilado datos acerca del movimiento de sus empleados en su organización. La tabla siguiente refleja los patrones de movimiento anual (transiciones) para un subconjunto de posición en la compañía. En la tabla, las columnas indican la posición que se mantiene durante un año y las filas indican las posiciones que se tienen inmediatamente al año siguiente. Los elementos de la tabla reflejan las probabilidades de transición de un año al siguiente. Por ejemplo, el primer elemento de la tabla indica que 95% de todas las personas que son gerentes de tienda en un año ocuparán puestos de gerente de tienda al año siguiente. El otro elemento en la primera columna indica que de todas las personas que son gerentes de tienda en un año, 5% abandonará la compañía el año próximo.

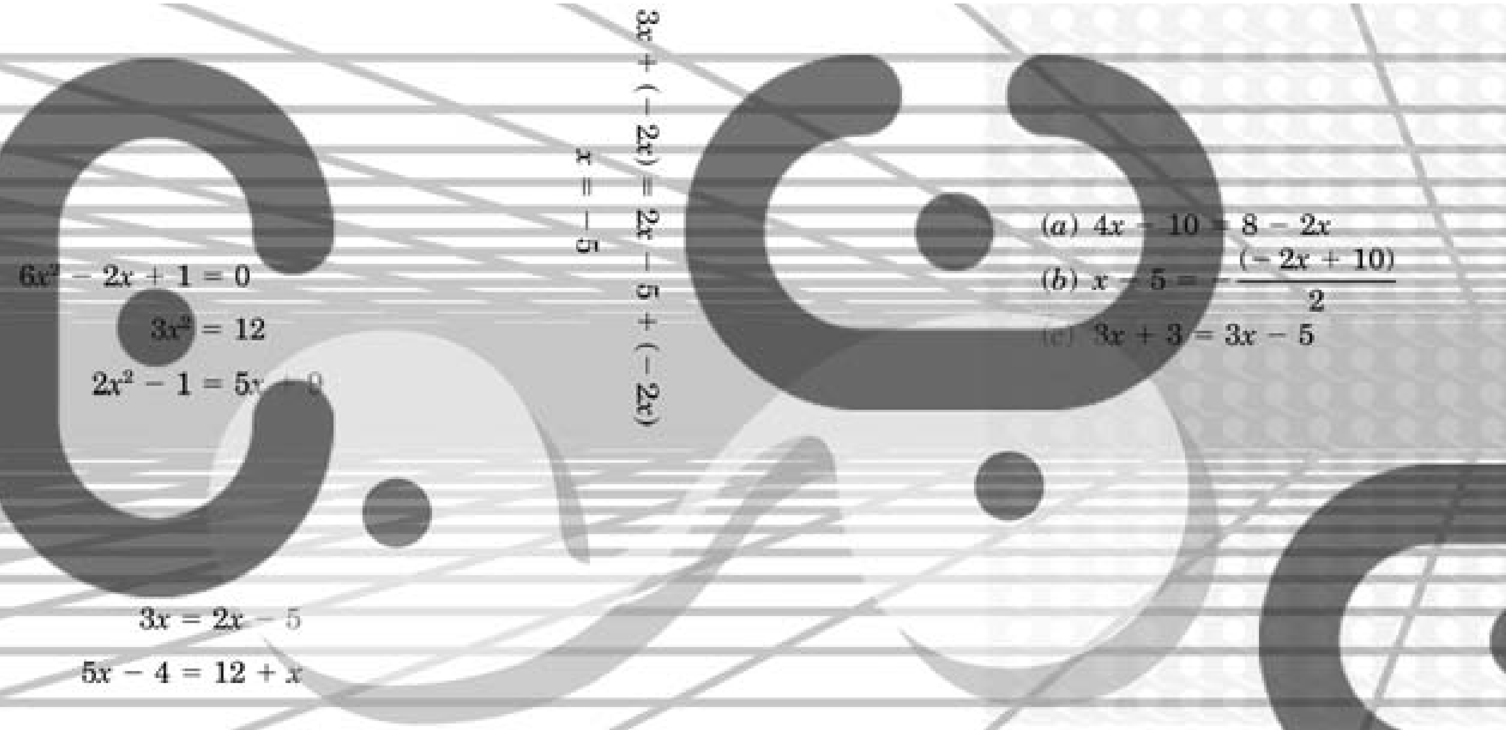
En 1992 había 500 gerentes de tienda, 850 asistentes de gerente de tienda, 3 600 gerentes de departamento, 14 500 vendedores, 8 600 cajeros, 1 600 compradores, 3 000 compradores asistentes y 6 000 empleados generales.

1. Analice el significado de los elementos que equivalen a cero (celdas vacías) en la tabla.
2. Interprete el significado de cada uno de los elementos en la primera fila de la tabla.
3. De las personas que forman parte de la fuerza laboral en 1992, pronostique los números que habrá en cada categoría de trabajo en 1993, 1994 y 1995.
4. Dadas las proyecciones para 1995, ¿qué categorías de trabajo reflejan mayores ofertas desde dentro de la organización, en comparación con 1992? ¿Qué categorías reflejan decrementos?
5. Si las necesidades proyectadas para 1995 son 550 gerentes de tienda, 920 asistentes de gerente de tienda, 3 900 gerentes de departamento, 15 200 vendedores, 9 200 cajeros, 1 700 compradores, 3 200 compradores asistentes y 6 800 empleados generales, ¿qué nivel de contratación externa se anticipa para satisfacer las necesidades de 1995?

	Empleo desempeñado en este año							
Empleo desempeñado el año siguiente	**Gte. de tienda**	**Asist. de gte. de tienda**	**Gte. de depto.**	**Vendedor**	**Cajero**	**Comp.**	**Comp. asist.**	**Empleado general**
Gerente de tienda	0.95	0.20				0.05		
Asistente de gerente de tienda		0.70	0.20			0.10	0.10	
Gerente de departamento			0.65	0.10				
Vendedor				0.80	0.30			
Cajero					0.45			0.20
Comprador						0.75	0.20	
Comprador asistente			0.10		0.10		0.65	
Empleado general								0.70
Abandonan la empresa	0.05	0.10	0.05	0.10	0.15	0.10	0.05	0.10

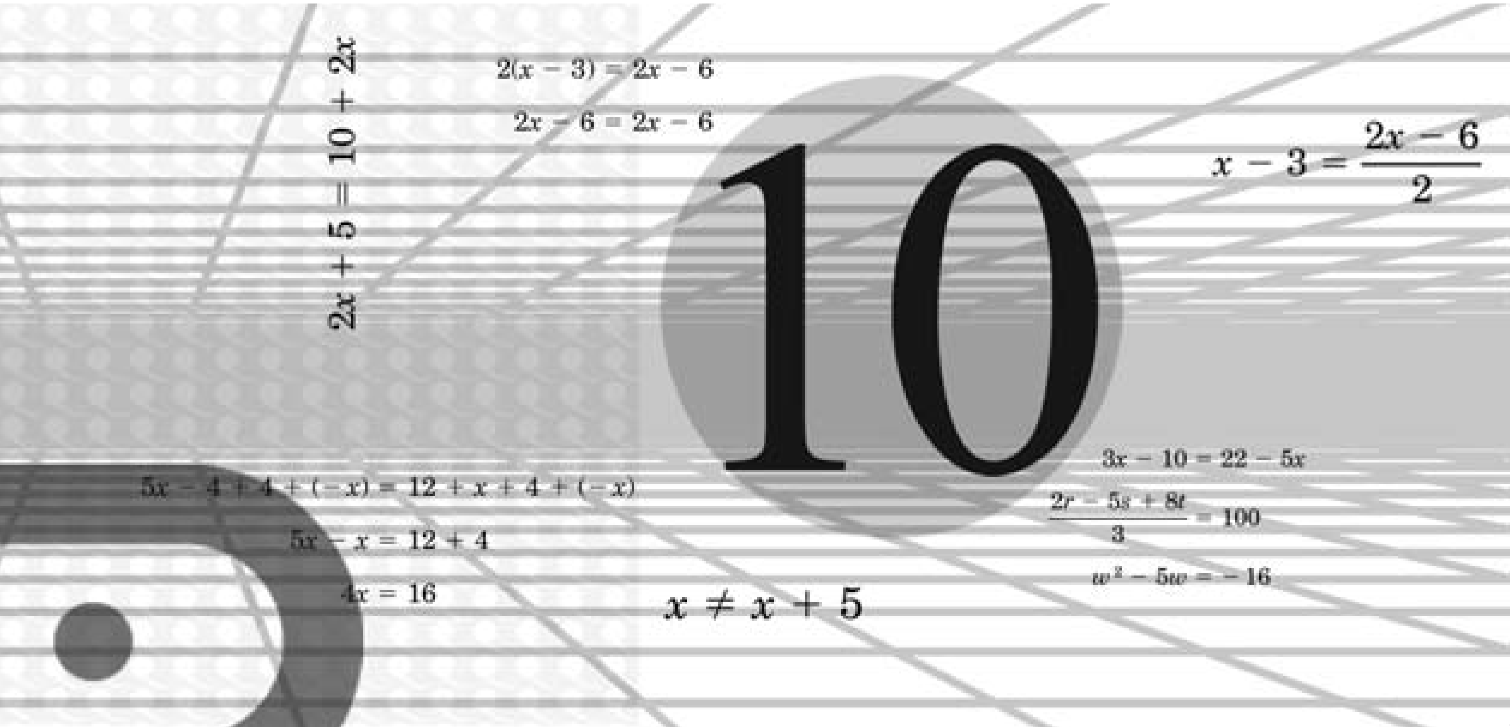
CAPÍTULO 10

Programación lineal: introducción



OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Proporcionar una comprensión de la estructura y las suposiciones subyacentes en los modelos de programación lineal.
- Ilustrar la representación gráfica de las desigualdades lineales.
- Proporcionar comprensión de los procedimientos de solución gráfica para los problemas de programación lineal.
- Ilustrar la naturaleza e importancia de fenómenos especiales que pueden surgir con los modelos de programación lineal.
- Dar ejemplos de aplicaciones de los modelos de programación lineal.



ESCENARIO DE MOTIVACIÓN: Mezcla de petróleo

Una refinería pequeña está por combinar cuatro productos del petróleo en tres mezclas finales de gasolina. Aunque las fórmulas de mezclado no son precisas, hay algunas restricciones en cuanto a la composición de las tres mezclas finales. Otras consideraciones incluyen el hecho de que hay disponibilidad limitada de dos de los cuatro productos componentes y se requiere producir un total de 5 millones de litros de las tres mezclas finales, 2 millones de los cuales deben ser la mezcla final 1. **El problema es determinar el número de litros de cada componente que se debe utilizar en cada mezcla final con el fin de incrementar al máximo la contribución a la utilidad total a partir de la operación de producción** (ejemplo 11).

En este capítulo se presenta el tema de la ***programación lineal***, un tema que integra gran parte del material que se ha estudiado en los capítulos anteriores. La programación lineal es una poderosa técnica de modelación matemática aplicada ampliamente. Asimismo, la técnica ofrece una importante estructura que es relevante para el área más generalizada de las técnicas de modelación llamada ***programación matemática***. En este capítulo se estudiará la naturaleza y la estructura de los problemas de programación lineal. Se ilustrarán los procedimientos de solución gráfica para resolver problemas sencillos. Por último, se verá una variedad de aplicaciones de los modelos de programación lineal.

10.1 Programación lineal

Introducción

La ***programación lineal*** es una técnica de optimización matemática. Por técnica de "optimización" se entiende un método que intenta maximizar o minimizar algún objetivo; por ejemplo, aumentar al máximo las utilidades o reducir al mínimo los costos. La programación lineal es un subconjunto de un área mayor de procedimientos de optimización matemática denominada ***programación matemática***. La programación lineal es una técnica poderosa que se aplica en forma generalizada. Ha habido aplicaciones extensivas de la programación lineal en la industria militar y en la petrolera. Aunque estos sectores quizá son los que han empleado en mayor medida la programación lineal, el sector de servicios y el sector público de la economía también han aplicado los métodos en forma extensiva.

En cualquier problema de programación lineal es preciso tomar ciertas decisiones. Estas decisiones se representan mediante ***variables de decisión*** $\boldsymbol{x_j}$ utilizadas en el modelo de programación lineal. La estructura básica de un problema de programación lineal consiste en maximizar o bien minimizar una ***función objetivo*** en tanto se satisface un conjunto de ***condiciones restrictivas*** o ***restricciones***. La función objetivo es una representación matemática del objetivo general expresado como una función de las variables de decisión x_j. La función objetivo puede representar objetivos como el nivel de utilidad, el rendimiento total, el costo total, los niveles de contaminación, la participación en el mercado y el rendimiento porcentual sobre una inversión.

El conjunto de restricciones, también expresado en términos de x_j, representa condiciones que se deben satisfacer al determinar niveles para las variables de decisión. Por ejemplo, al tratar de maximizar las utilidades de la producción y venta de un grupo de productos, las restricciones de muestra podrían reflejar recursos de trabajo limitados, materias primas limitadas y demanda limitada de los productos.

Otras condiciones que es necesario satisfacer toman la forma de **requerimientos**. Por ejemplo, cuando se determinan las cantidades de diferentes productos que se deben fabricar, es probable que se especifiquen cantidades mínimas de producción. Las restricciones de un problema de programación lineal se pueden representar mediante ecuaciones o desigualdades (tipos $\leq$, $\geq$, o ambos).

Estos problemas reciben el nombre de problemas de programación ***lineal*** porque la función objetivo y todas las restricciones son lineales. Éste es un problema simple de programación lineal:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximice} & z = 4x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ & 4x_1 + 3x_2 \geq 30 \end{array}$$

El objetivo es incrementar al máximo z, que se expresa como una función lineal de las dos variables de decisión x_1 y x_2. No obstante, al seleccionar los valores para x_1 y x_2 se deben satisfacer dos restricciones. Las restricciones se representan mediante las dos desigualdades lineales.

Un escenario

Los problemas de mezcla de productos representan un importante grupo de aplicaciones de modelación matemática. En capítulos previos se estudiaron ejemplos de mezcla de productos. Ilustremos el tratamiento de programación lineal de este tipo de problema en un ejemplo simplificado. Una empresa fabrica dos productos, cada uno de los cuales se debe procesar en los departamentos 1 y 2. La tabla 10.1 resume los requerimientos de horas laborales por unidad para cada producto en cada departamento. También se presentan las capacidades de horas laborales semanales en cada departamento y los respectivos márgenes de utilidad para los dos productos. El problema es determinar el número de unidades que se producirán de cada producto con el fin de maximizar la contribución total al costo fijo y la utilidad.

Tabla 10.1

	Producto A	**Producto B**	**Capacidad de trabajo semanal**
Departamento 1	3 horas por unidad	2 horas por unidad	120 horas
Departamento 2	4 horas por unidad	6 horas por unidad	260 horas
Margen de utilidad	\$5 por unidad	\$6 por unidad	

Si se supone que x_1 y x_2 equivalen al número de unidades producidas y vendidas, respectivamente, de los productos A y B, entonces se puede encontrar la contribución total a la utilidad al sumar las contribuciones de ambos productos. Se calcula la contribución de cada producto al multiplicar el margen de utilidad por unidad por el número de unidades producidas y vendidas. *Si se define z como la contribución total al costo fijo y la utilidad*, se tiene

$$z = 5x_1 + 6x_2$$

A partir de la información proporcionada en el enunciado del problema, las únicas restricciones al decidir el número de unidades que se van a producir son las capacidades de trabajo semanales en los dos departamentos. Con base en los análisis de capítulos anteriores, se debería ser capaz de verificar que es posible representar estas restricciones por medio de desigualdades

$$3x_1 + 2x_2 \leq 120 \qquad \text{(departamento 1)}$$

$$4x_1 + 6x_2 \leq 260 \qquad \text{(departamento 2)}$$

Aunque no hay enunciado formal de dicha restricción, se sabe implícitamente que x_1 y x_2 no pueden ser negativas. Se debe considerar esta clase de restricción al formular el modelo.

Combinando la función objetivo y las restricciones, el modelo de programación lineal que representa el problema se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{array}{llr}
\text{Maximice} & z = 5x_1 + 6x_2 & \\
\text{sujeto a} & 3x_1 + 2x_2 \leq 120 & \mathbf{(10.1)} \\
 & 4x_1 + 6x_2 \leq 260 & \mathbf{(10.2)} \\
 & x_1 \geq 0 & \mathbf{(10.3)} \\
 & x_2 \geq 0 & \mathbf{(10.4)}
\end{array}$$

Restricciones estructurales y restricciones de no negatividad

El modelo de programación lineal se ocupa de maximizar o minimizar una función objetivo lineal sujeta a dos tipos de restricciones: 1) ***restricciones estructurales*** y 2) ***restricciones de no negatividad***, una para cada variable de decisión. Las restricciones estructurales reflejan factores como limitaciones de los recursos y otras condiciones impuestas por el establecimiento del problema. Las desigualdades (10.1) y (10.2) en la formulación anterior son restricciones estructurales. Las restricciones de no negatividad garantizan que cada variable de decisión no sea negativa. Las restricciones (10.3) y (10.4) son restricciones de no negatividad. Casi en todos los problemas la restricción de no negatividad tiene sentido intuitivamente. Hay técnicas disponibles para manejar los casos inusuales en que se permite que una variable asuma valores negativos.

10.2 Soluciones gráficas

Cuando se establece un modelo de programación lineal en términos de dos variables de decisión, se puede resolver por procedimientos gráficos. El planteamiento gráfico ofrece un marco de referencia visual efectivo y es extremadamente útil para comprender las clases de fenómenos que pueden ocurrir al resolver problemas de programación lineal. En esta sección se desarrollará el planteamiento de solución gráfica. Antes de estudiar el método de solución gráfica, se analizarán las gráficas de las desigualdades lineales.

Gráficas de las desigualdades lineales

Cuando una desigualdad lineal implica dos variables, el conjunto solución se puede describir gráficamente. Por ejemplo, la desigualdad

$$-4x + 3y \leq -24$$

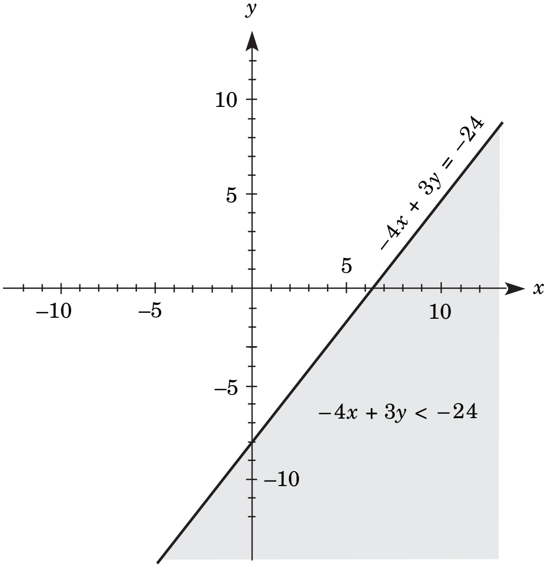


Figura 10.1 Semiplano cerrado que representa $-4x + 3y \leq -24$.

tiene un conjunto solución representado por el ***medio espacio cerrado*** (semiplano) sombreado en la figura 10.1. El conjunto solución se puede dividir en dos subconjuntos. Un subconjunto consiste en todos los pares de valores (x, y) que satisfacen la *parte de igualdad* o la ecuación $-4x + 3y$ ⊜ -24. Este subconjunto se representa por la línea recta de la figura 10.1. El otro subconjunto consta de todos los pares de valores (x, y) que satisfacen la *parte de desigualdad* o la desigualdad $-4x + 3y$ ⧀ -24. Este subconjunto se representa mediante el área sombreada por debajo y a la derecha de la línea recta de la figura 10.1.

Se concluye lo siguiente: *1*) *Las desigualdades lineales que implican dos variables se pueden representar gráficamente en dos dimensiones con un* semiplano *cerrado del plano cartesiano, y* 2) *el* semiplano *consiste en la línea limítrofe que representa la parte de igualdad de la desigualdad y todos los puntos en un lado de la línea limítrofe (que representa la desigualdad estricta).*

El procedimiento para determinar el semiplano apropiado es el siguiente:

1. ***Grafique la línea limítrofe que representa la ecuación.***
2. ***Determine el lado de la línea que satisface la desigualdad estricta.*** *Para determinar esto, se puede seleccionar un punto arbitrario en cualquier lado de la línea y sustituir sus coordenadas en la desigualdad (las coordenadas del* origen *son una selección conveniente si éste no cae sobre la línea). Si las coordenadas* satisfacen *la desigualdad,* ese *lado de la línea está incluido en el* **semiplano permisible**. *Si las coordenadas no satisfacen la desigualdad, el semiplano permisible cae del otro lado de la línea.*

Para ilustrar el paso 2, si se escoge (0, 0) como un punto de prueba, las coordenadas no satisfacen la desigualdad $[-4(0) + 3(0) \not\leq -24]$. Ya que el punto de prueba no logra satisfacer la desigualdad, no cae dentro del semiplano permisible. Por consiguiente, en la figura 10.1, el semiplano permisible se encuentra a la derecha y por debajo de la línea.

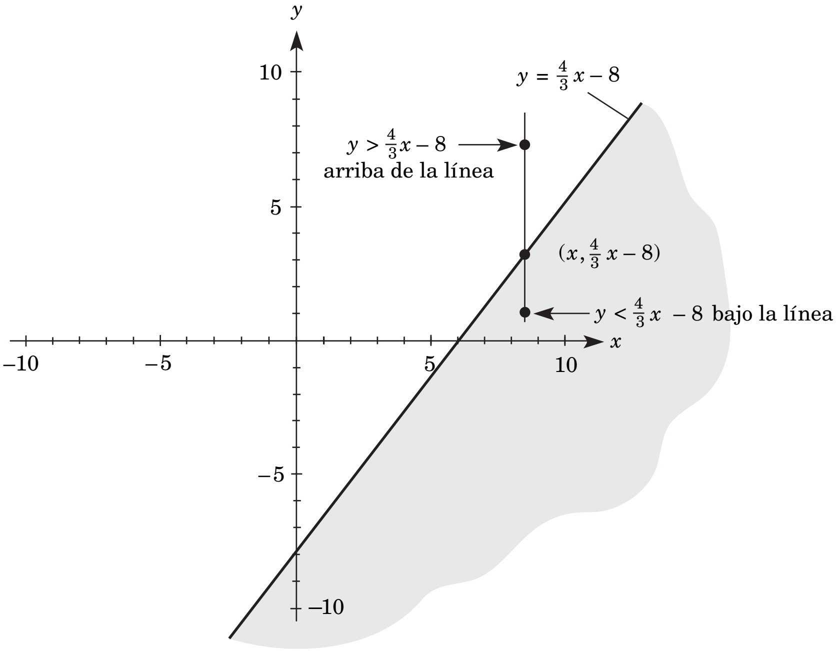


Figura 10.2 Determinación de la pendiente-intersección del semiplano cerrado para $-4x + 3y \leq -24$.

Otra manera de determinar qué lado de la línea satisface la desigualdad estricta es despejar la variable y para obtener la forma de pendiente-intersección de la restricción. Dada la restricción

$$-4x + 3y \leq -24$$

la forma de pendiente-intersección es

$$y \leq \tfrac{4}{3}x - 8$$

Como se puede apreciar en la figura 10.2, los pares ordenados de (x, y) que satisfacen la forma de pendiente-intersección de la *ecuación de restricción*

$$y = \tfrac{4}{3}x - 8$$

se representan mediante la línea limítrofe. Los pares ordenados (x, y) que satisfacen la desigualdad estricta

$$y = \tfrac{4}{3}x - 8$$

caen por debajo de la línea.

Para generalizar este planteamiento:

> Dada una desigualdad lineal de la forma $ax + by$ ($\leq$ o $\geq$) c, despeje la variable y para obtener la forma de pendiente-intersección de la desigualdad. Si la desigualdad de pendiente-intersección tiene la forma
>
> **I** $y \leq \dfrac{-a}{b}x + \dfrac{c}{b}$, *el semiplano correspondiente cae por debajo de la línea limítrofe.*
>
> **II** $y \geq \dfrac{-a}{b}x + \dfrac{c}{b}$, *el semiplano correspondiente cae por encima de la línea limítrofe.*

Ejemplo 1

Una empresa fabrica dos productos. Los productos se deben procesar en un departamento. El producto *A* requiere cuatro horas por unidad y el producto *B* necesita dos horas por unidad. El tiempo de producción total disponible para la semana entrante es de 60 horas. Por consiguiente, una restricción en la planeación de la programación de la producción es que el total de horas usadas en la producción de los dos productos no puede exceder de 60; o *si* x_1 *equivale al número de unidades fabricadas del producto A y* x_2 *es igual al número de unidades fabricadas del producto B*, se representa la restricción mediante la siguiente desigualdad:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 60$$

Hay otras dos restricciones implícitas por las definiciones de las variables. Dado que cada variable representa una cantidad de producción, ninguna variable puede ser negativa. Estas restricciones se representan por las desigualdades $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$.

El conjunto solución de la desigualdad original representa las diferentes combinaciones de los dos productos que se pueden fabricar mientras no se exceda de 60 horas. La figura 10.3 ilustra gráficamente el conjunto solución. Revise para ver si se ha identificado de manera correcta el semiplano permisible. Los puntos que satisfacen la desigualdad $4x_1 + 2x_2 \leq 60$ serían el semiplano que incluye

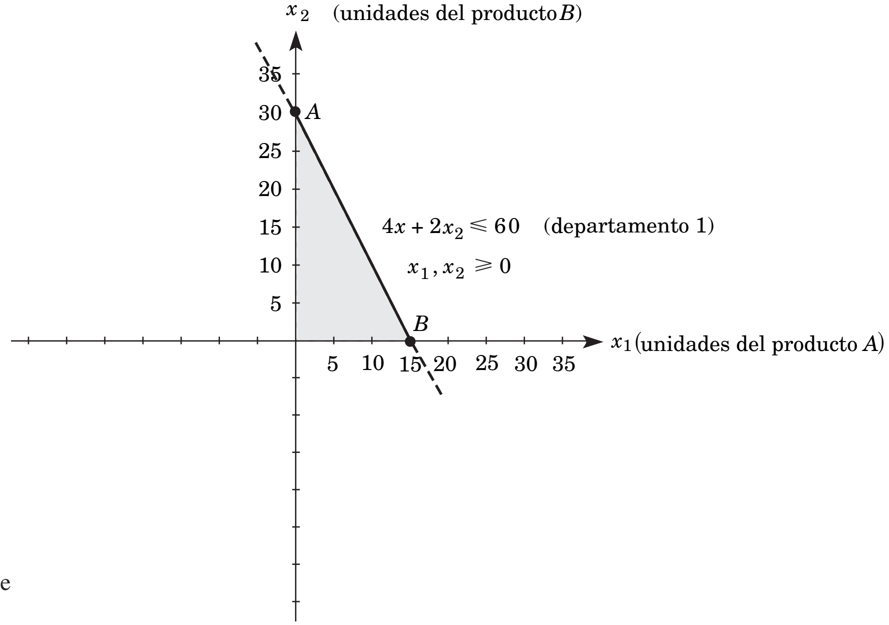


Figura 10.3 Posibilidades de producción: departamento 1.

todos los puntos sobre la línea y a la izquierda de la misma. Sin embargo, la restricción de que ambas variables no sean negativas limita a la porción del semiplano en el primer cuadrante. Por lo tanto, el área sombreada representa las combinaciones de los productos *A* y *B* que se pueden fabricar. Se puede hacer una mayor distinción en la figura 10.3. Todas las combinaciones de los dos productos representadas por los puntos en $\overline{AB}$ usarían el total de 60 horas. Cualquier punto en el interior del área sombreada representa combinaciones de los dos artículos que requerirían menos de 60 horas. ¿Es el origen una decisión posible? ❑

Sistemas de desigualdades lineales

En los problemas de programación lineal se trabajará con *sistemas* de desigualdades lineales. Se interesa en determinar el conjunto solución que satisfaga todas las desigualdades en el sistema de restricciones. Para ilustrar la representación gráfica de sistemas de desigualdades lineales, considere los ejemplos siguientes.

Ejemplo 2

Suponga que los productos del ejemplo anterior también se tienen que procesar en otro departamento, además del departamento original. Suponga que en este segundo departamento el producto *A* necesita tres horas por unidad y que el producto *B* requiere cinco horas por unidad. Si el segundo departamento tiene 75 horas disponibles cada semana, la desigualdad que describe las posibilidades de producción en este departamento es

$$3x_1 + 5x_2 \leq 75 \qquad \text{(departamento 2)}$$

El conjunto solución para esta desigualdad se ilustra en la figura 10.4. Igual que en la figura 10.3, el área sombreada representa todas las combinaciones de los productos *A* y *B* que se pueden fabricar en el segundo departamento en tanto no se exceda de las 75 horas disponibles.

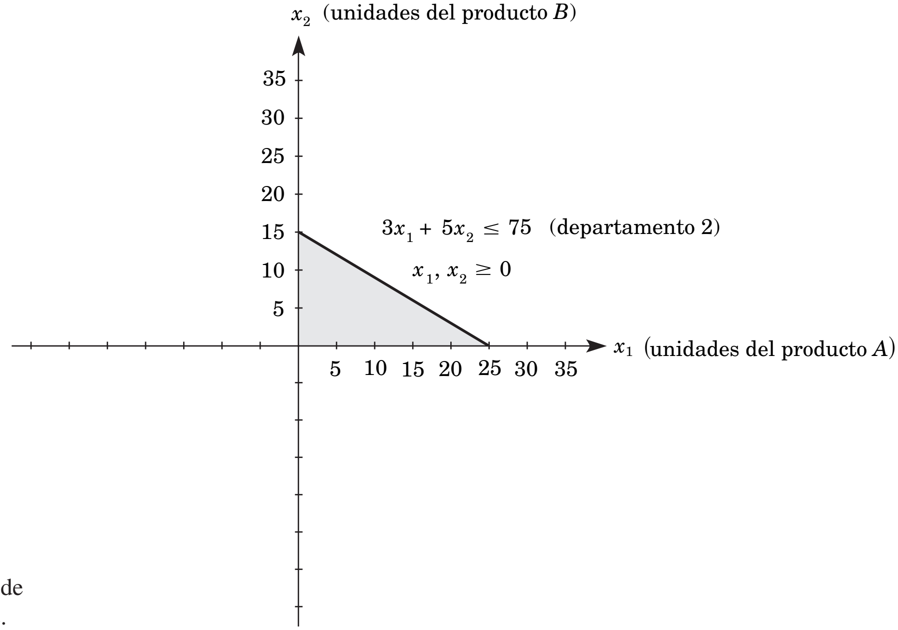


Figura 10.4 Posibilidades de producción: departamento 2.

Si el objetivo es determinar las combinaciones de los dos productos que se pueden procesar en *ambos* departamentos, se busca el conjunto solución para el sistema de desigualdades lineales

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &\leq 60 \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 75 \\ x_1 \qquad &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

La figura 10.5 ilustra la combinación de los dos conjuntos solución de las figuras 10.3 y 10.4. El conjunto solución para el sistema contiene el conjunto de puntos que son comunes para los conjuntos solución en estas figuras. Y en la figura 10.5, el conjunto solución para el sistema es el área sombreada *ABCD.*

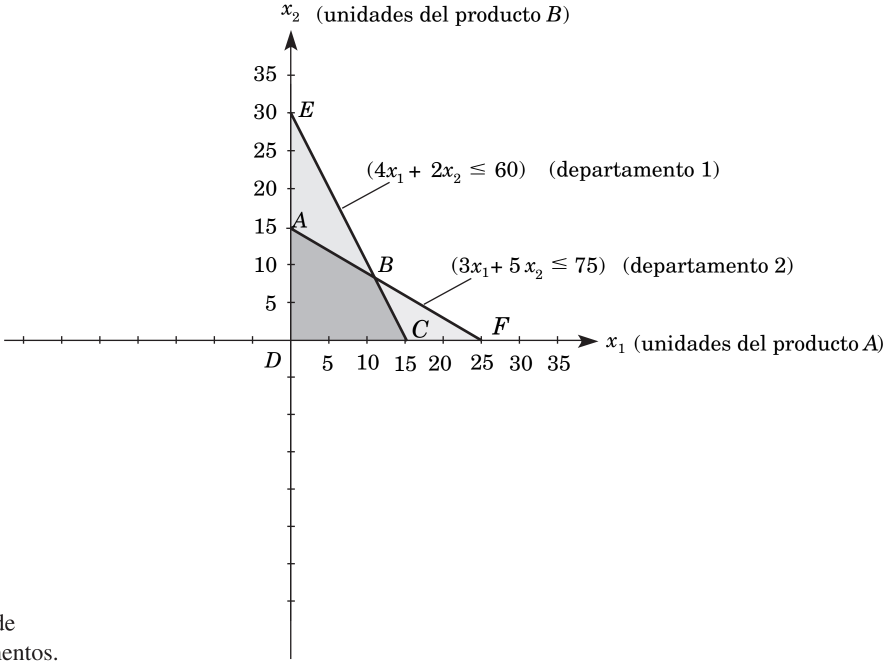


Figura 10.5 Posibilidades de producción: ambos departamentos.

❑

PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR

¿Por qué no son posibles las combinaciones de los dos productos en el área *AEB*? ¿Por qué hay combinaciones en *BFC* que no son posibles? ¿Hay alguna característica de producción única asociada a la combinación de productos representada por el punto *B*? ¿Qué sucede con las combinaciones a lo largo de $\overline{AB}$? ¿Y con las que están a lo largo de $\overline{BC}$?

Ejemplo 3 Determine gráficamente el conjunto solución para el siguiente sistema.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\leq 20 \\ 2x_1 + 2x_2 &\geq 24 \\ 2x_1 + x_2 &= 10 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

La figura 10.6 ilustra el sistema. Nótese que el tercer miembro de este sistema es una ecuación cuyo conjunto solución se representa mediante una línea. Del mismo modo, no hay puntos comunes para las dos primeras desigualdades. Por consiguiente, el conjunto solución no contiene elementos. No hay puntos (x_1, x_2) que satisfagan todas las relaciones del sistema.

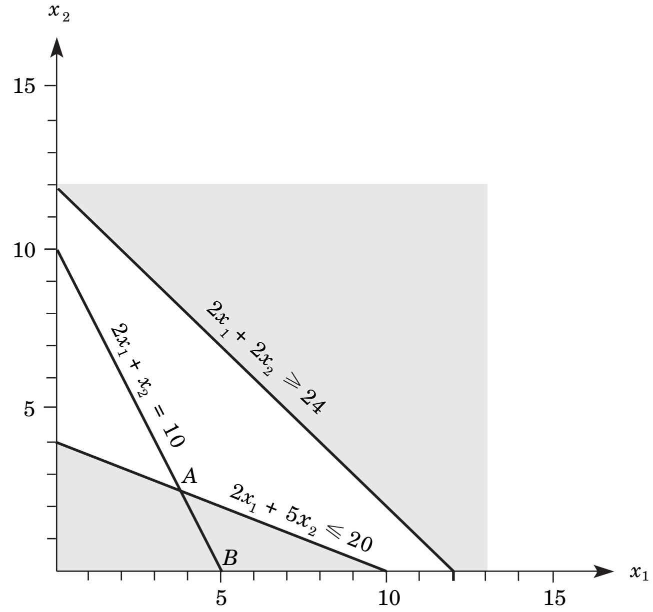


Figura 10.6 Ningún conjunto solución.

❑

Región de soluciones factibles

En la sección 10.1 se formula un problema de programación lineal de mezcla de productos con dos variables. La formulación se vuelve a escribir como sigue:

$$\begin{array}{lll} \text{Maximice} & z = 5x_1 + 6x_2 & \\ \text{sujeto a} & 3x_1 + 2x_2 \leq 120 \quad \text{(departamento 1)} & \textbf{(10.5)} \\ & 4x_1 + 6x_2 \leq 260 \quad \text{(departamento 2)} & \textbf{(10.6)} \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \textbf{(10.7)} \end{array}$$

donde x_1 y x_2 representan el número de unidades fabricadas de los productos A y B. Puesto que el problema implica dos variables de decisión, se puede determinar gráficamente la solución óptima. *El primer paso en el procedimiento gráfico es identificar el conjunto solución para el sistema de restricciones.* Este conjunto solución a menudo recibe el nombre de ***región de soluciones factibles***. Incluye todas las combinaciones de las variables de decisión que satisfacen las restricciones estructurales y no negativas. Pueden considerarse estas combinaciones como *candidatos* para la solución óptima. El conjunto solución para las desigualdades (10.5) − (10.7) se indica en la figura 10.7. Ésta es la región de soluciones factibles para el problema de programación lineal.

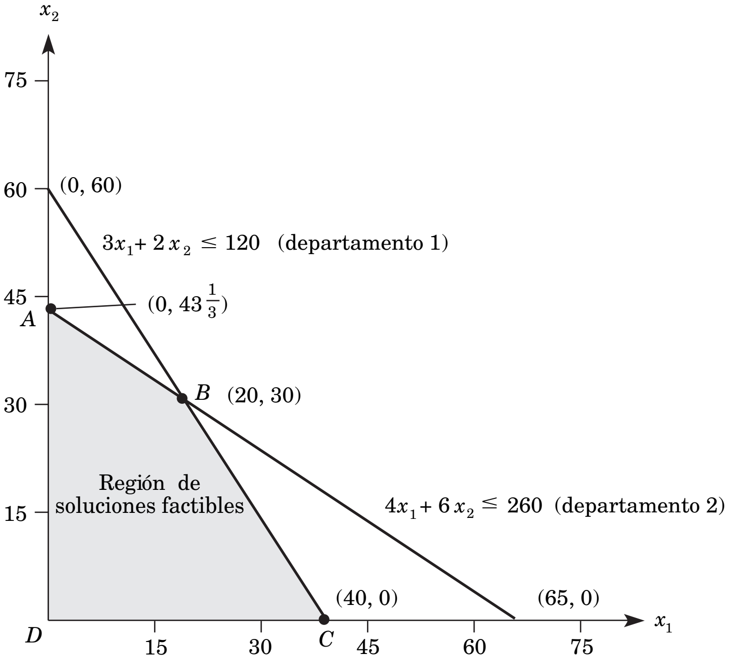


Figura 10.7 Región de soluciones factibles (problema de la mezcla de productos).

NOTA Las coordenadas de los puntos *A* y *C* se identifican como los valores de la intersección. Dada la imprecisión en la gráfica, puede ser difícil leer las coordenadas exactas de algunos puntos como *B*. Con el fin de determinar las coordenadas exactas de dichos puntos, se deben resolver en forma simultánea las *ecuaciones* de las líneas que se intersecan en el punto. Para determinar las coordenadas (20, 30), las partes de igualdad de (10.5) y (10.6) se resuelven en forma simultánea.

Cada punto en la región de soluciones factibles de la figura 10.7 representa una combinación de los dos productos que se puede fabricar. El problema consiste en determinar la(s) combinación(es) que maximice(n) el valor de la función objetivo.

Incorporación de la función objetivo

El procedimiento de solución de la programación lineal implica una búsqueda de la región de soluciones factibles para la solución óptima. Antes de presentar el procedimiento de búsqueda, analicemos primero algunas características de las funciones objetivo. En el problema de la mezcla de productos, identificar combinaciones de los dos productos que generarían algún nivel de utilidad predeterminado. Por ejemplo, si se quiere determinar las diferentes combinaciones de los dos productos que generarían una utilidad de \$120, se debe establecer la función objetivo igual a 120:

$$5x_1 + 6x_2 = 120$$

Si se grafica esta ecuación, el resultado es la línea de utilidad de \$120 que se muestra en la figura 10.8. Si interesa determinar las combinaciones que generan una utilidad de \$180, se determinaría el conjunto solución para la ecuación

$$5x_1 + 6x_2 = 180$$

La gráfica de esta línea también aparece en la figura 10.8. De modo similar, en la figura 10.8 se indica la línea de utilidad de \$240. Estas tres líneas con frecuencia se denominan ***líneas de isoutilidad*** porque cada punto en una línea dada representa el mismo nivel de utilidad.

Nótese que en el caso de estas tres líneas de utilidad se interesa en las porciones que caen dentro de la región de soluciones factibles. Para la línea de \$240 hay algunas combinaciones de los dos productos que generarían una utilidad combinada de \$240 pero no están dentro de la región de soluciones factibles. Un ejemplo de tal combinación consiste en 48 unidades del producto *A* y ninguna unidad del producto *B*. Aunque esta combinación generaría una utilidad de \$240, no hay horas suficientes (en el departamento 1) para producir esas cantidades.

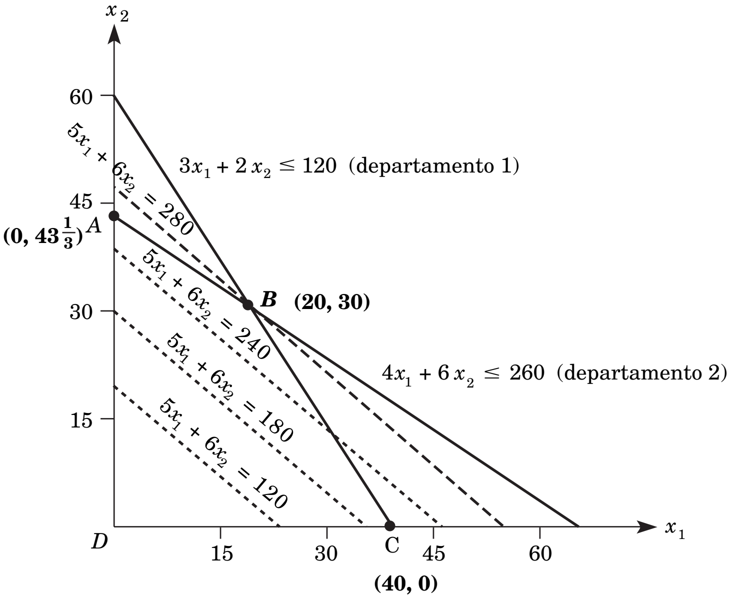


Figura 10.8 Líneas de isoutilidad.

Observe, a partir de las tres líneas de utilidad, que los niveles de utilidad se incrementan conforme la línea se mueve hacia afuera desde el origen. También se advierte que las tres líneas de utilidad son paralelas entre sí. Esto se puede verificar con rapidez al reformular la función de la utilidad

$$z = 5x_1 + 6x_2 \tag{10.8}$$

en la forma de pendiente-intersección. En la figura 10.8, x_2 es equivalente a y (si hubiéramos llamado a nuestras variables x y y). Si se despeja x_2 en la ecuación (10.8), se obtiene

$$x_2 = \frac{-5}{6}\,x_1 + \frac{z}{6}$$

La pendiente para la función objetivo es $-\frac{5}{6}$ y no es influida por el valor de z. Se determina sólo por los coeficientes de las dos variables en la función objetivo.

La intersección de x_2 (o y) se define por $(0, z/6)$. A partir de esto, se puede ver que conforme z cambia de valor, lo mismo sucede con la intersección de x_2. Si el valor de z aumenta, lo mismo pasa con la intersección de x_2, lo que significa que la línea de isoutilidad se mueve hacia arriba y a la derecha. Si lo que interesa es maximizar la utilidad, se necesita mover la línea de utilidad hacia afuera tanto como sea posible en tanto siga tocando un punto dentro de la región de soluciones factibles. Al deslizarse hacia afuera desde la línea de \$240, el último punto que se debe tocar es B, con las coordenadas (20, 30). Este punto cae en la línea de utilidad de \$280. *La conclusión es que se maximiza la utilidad con un valor de \$280 cuando se fabrican 20 y 30 unidades de los productos A y B, respectivamente.*

Ejemplo 4

(Problema de minimización) Determine la solución óptima para el problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Minimice} & z = 3x_1 + 6x_2 \\ \text{sujeto a} & 4x_1 + x_2 \geq 20 \\ & x_1 + x_2 \leq 20 \\ & x_1 + x_2 \geq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

SOLUCIÓN

La figura 10.9*a* ilustra la región de soluciones factibles para el conjunto de restricciones. En un esfuerzo por determinar la solución óptima, se determina la orientación de la función objetivo. Suponga un valor arbitrario para z, por ejemplo 60. La ecuación

$$3x_1 + 6x_2 = 60$$

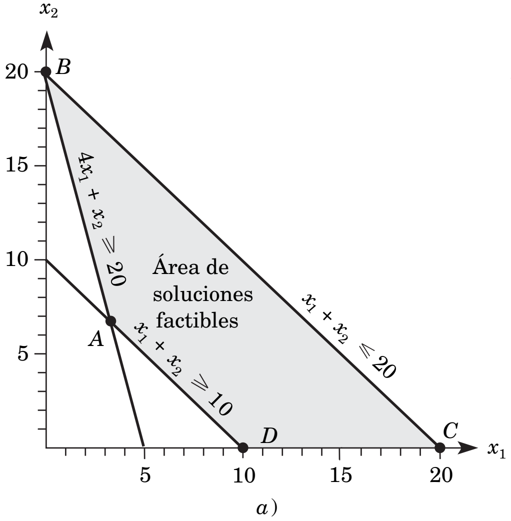
se grafica en la figura 10.9*b*. Para determinar la dirección de movimiento de la función objetivo, se puede seleccionar un punto en cualquier lado de la línea y determinar el valor correspondiente de z. Si se selecciona el origen de coordenadas, se encuentra que el valor de la función objetivo en (0, 0) es

$$\begin{aligned} z &= 3(0) + 6(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

El valor de z en el origen es menor que 60 y se concluye que el *movimiento de la función objetivo hacia el origen da como resultado valores menores que z*. Como se quiere minimizar z, se necesita mover la función objetivo, paralela a sí misma, tan cerca del origen tanto como sea posible en tanto siga tocando un punto dentro de la región de soluciones factibles. El último punto tocado antes de que la función se mueva por completo fuera de la región de soluciones factibles es D, o bien (10, 0). Dado que el valor mínimo de z ocurre en (10, 0), se calcula el valor mínimo así:

$$\begin{aligned} z &= 3(10) + 6(0) \\ &= 30 \end{aligned}$$

❑



a) *b*)

Figura 10.9

Soluciones del punto vértice

Es posible simplificar el procedimiento de búsqueda si se aprovechan las características conjuntas de la región de soluciones factibles y la función objetivo. Un ***conjunto convexo*** es un conjunto de puntos tales que si dos puntos cualesquiera seleccionados arbitrariamente dentro del conjunto se conectan por medio de una línea recta, y todos los elementos en el segmento de recta también son elementos del conjunto. La figura 10.10 ilustra la diferencia entre un conjunto convexo y un conjunto no convexo. El conjunto de puntos en la figura 10.10*b* representa un conjunto convexo. Si dos puntos cualesquiera dentro del conjunto se conectan con un segmento de recta, todos los elementos en el segmento de recta también son un elemento del conjunto. En contraste con esto, la figura 10.10*a* ilustra un conjunto no convexo. Para este conjunto puede haber muchos pares de puntos como *A* y *B* para los cuales el segmento de recta de conexión contiene puntos que *no* son elementos del conjunto.

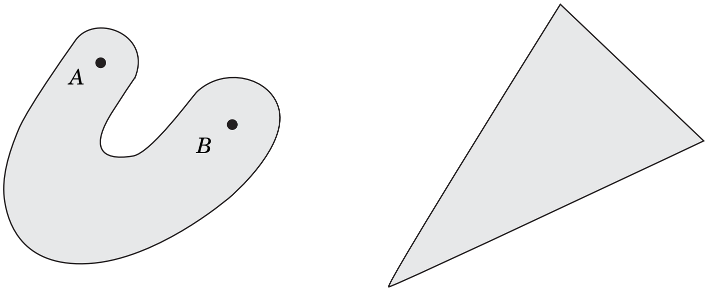


Figura 10.10 *a*) Conjunto no convexo *b*) Conjunto convexo

Esto conduce a los siguientes enunciados que son de importancia fundamental para la programación lineal.

1. *El conjunto solución para un grupo de desigualdades lineales es un conjunto convexo. Por lo tanto, la región de soluciones factibles (si existe alguna) para un problema de programación lineal es un conjunto convexo.*
2. *Dada una función objetivo lineal en un problema de programación lineal, la solución óptima siempre incluirá un punto vértice en la región de soluciones factibles. Esto es cierto no obstante la pendiente de la función objetivo y para problemas ya sea de maximización o minimización.*

El segundo enunciado simplemente implica que cuando una función objetivo lineal se cambia a través de una región convexa de soluciones factibles, el último punto tocado antes de que se mueva por completo fuera del área incluirá por lo menos un punto vértice.

Por consiguiente, el ***método del punto vértice*** para resolver problemas de programación lineal es el siguiente:

Método del punto vértice

I *Identifique gráficamente la región de soluciones factibles.*

II *Determine las coordenadas de cada punto vértice en la región de soluciones factibles.*

III *Sustituya las coordenadas de los puntos vértice en la función objetivo para determinar el valor correspondiente de z.*

IV *Una solución óptima ocurre en un problema de maximización en el punto vértice que da el valor más alto de z y en un problema de minimización en el punto vértice que da el menor valor de z.*

Ejemplo 5 En el ejemplo de la mezcla de productos de esta sección, la función objetivo que se debe maximizar es $z = 5x_1 + 6x_2$. Los puntos vértice en la región de soluciones factibles son (0, 0), $(0, 43\frac{1}{3})$, (20, 30) y (40, 0). Al sustituirlos en la función objetivo, se llega a las cifras de la tabla 10.2. Nótese que una solución óptima ocurre en $x_1 = 20$ y $x_2 = 30$, dando como resultado un valor máximo de 280 para z.

Tabla 10.2

Punto vértice	(x_1, x_2)	$z = 5x_1 + 6x_2$
A	(0, 0)	$5(0) + 6(0) = 0$
B	$(0, 43\frac{1}{3})$	$5(0) + 6(43\frac{1}{3}) = 260$
C	(20, 30)	$5(20) + 6(30) = 280^*$
D	(40, 0)	$5(40) + 7(0) = 200$

Ejemplo 6 En el ejemplo 4, la figura 10.9 indica cuatro puntos vértice en la región de soluciones factibles. Utilizando el método del punto vértice, los puntos vértice y valores respectivos de la función objetivo se resumen en la tabla 10.3. Dado que el objetivo es minimizar z, la solución óptima ocurre en el punto vértice *D* cuando $x_1 = 10$, $x_2 = 0$ y $z = 30$.

El objetivo ha sido maximizar z en este problema, un valor máximo de 120 resultaría en el punto vértice *B* cuando $x_1 = 0$ y $x_2 = 20$.

Tabla 10.3

Punto vértice	(x_1, x_2)	$z = 3x_1 + 6x_2$
A	$(3\frac{1}{3}, 6\frac{2}{3})$	$3(3\frac{1}{3}) + 6(6\frac{2}{3}) = 50$
B	(0, 20)	$3(0) + 6(20) = 120$
C	(20, 0)	$3(20) + 6(0) = 60$
D	(10, 0)	$3(10) + 6(0) = 30^*$

❑

Soluciones óptimas alternativas

En el método del punto vértice se indicó que una solución óptima siempre ocurrirá en un punto vértice de la región de soluciones factibles. Existe la posibilidad de más de una solución óptima en un problema de programación lineal. La figura 10.11 ilustra un caso en que la función objetivo tiene la misma pendiente que la restricción (2). Si se mejora la función objetivo moviéndose hacia afuera, alejándose del origen de coordenadas (0, 0), los últimos puntos tocados antes de que la función objetivo se mueva fuera de la región de soluciones factibles son todos los puntos que coinciden en $\overline{AB}$. En esta situación existirá un número infinito de puntos, cada uno dando como resultado el mismo valor máximo de z. Para situaciones como ésta, se dice que hay ***soluciones óptimas alternativas*** para el problema.

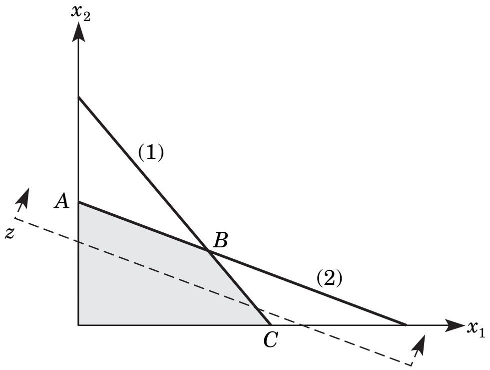


Figura 10.11 Soluciones óptimas alternativas.

Se deben satisfacer dos condiciones para que haya soluciones óptimas alternativas: *1) la función objetivo debe ser paralela a una restricción que forme un borde o límite en la región de soluciones factibles; 2) la restricción debe formar un límite en la región de soluciones factibles en la dirección del movimiento óptimo de la función objetivo; es decir, la restricción debe ser una restricción obligatoria que impida que se mejore más el valor de la función objetivo.* Esta segunda condición se violaría en la figura 10.11 si el problema fuera de minimización, esto es, si se deseara cambiar la función objetivo en la otra dirección. A pesar de que la función objetivo es paralela a la restricción 2), la restricción no impide moverse hacia el origen.

Cuando se usa el método del punto vértice, se señalan soluciones óptimas alternativas cuando ocurre una *coincidencia* de una línea limítrofe de una restricción con el valor óptimo de la función objetivo. Las soluciones óptimas alternativas ocurren en los puntos vértice "de coincidencia", a lo largo del segmento de recta completo que conecta los dos puntos.

Ejemplo 7 Resuelva el siguiente problema de programación lineal mediante el método del punto vértice.

$$\text{Maximice} \quad z = 20x_1 + 15x_2$$

$$\text{sujeto a} \quad 3x_1 + 4x_2 \leq 60 \quad (1)$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 60 \quad (2)$$

$$x_1 \leq 10 \quad (3)$$

$$x_2 \leq 12 \quad (4)$$

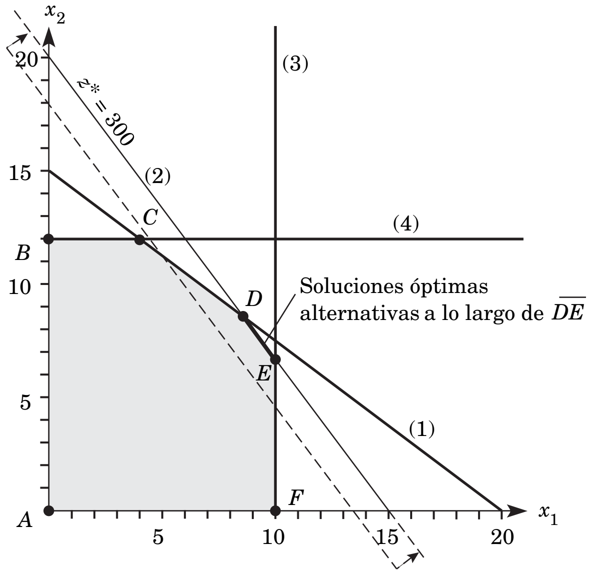
$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (5)$$

SOLUCIÓN

La región de soluciones factibles se presenta en la figura 10.12. Los puntos vértice y sus respectivos valores para z se resumen en la tabla 10.4. Nótese que hay una coincidencia para el máximo valor de z entre los puntos D y E. La pendiente de la función objetivo es la misma que para la restricción (2). En la figura 10.12 hay una infinidad de soluciones óptimas alternativas a lo largo de $\overline{DE}$. ❑

PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR

Hay varias implicaciones de las soluciones óptimas alternativas. Un aspecto es el conjunto de criterios que se podría seleccionar para escoger la solución que se llevará a cabo. Estos criterios pueden incluir factores tanto tangibles como intangibles. Para que sirva como base para el análisis, regrese al problema de la mezcla de productos de la página 447 y vuelva a resolverlo usando la nueva función objetivo $z = 4x_1 + 6x_2$. Debe verificar que existen soluciones óptimas alternativas a lo largo de $\overline{AB}$ en la figura 10.7. Analice las implicaciones de seleccionar el punto *A* contra el punto *B*. Considere aspectos como el número de horas de producción consumidas en cada departamento y la *mezcla* de productos que se van a ofrecer a los consumidores.



Soluciones óptimas alternativas a lo largo de $\overline{DE}$

Figura 10.12 Soluciones óptimas alternativas.

Tabla 10.4

Punto vértice	(x_1, x_2)	$z = 20x_1 + 15x_2$
A	(0, 0)	20(0) + 15(0) = 0
B	(0, 12)	20(0) + 15(12) = 180
C	(4, 12)	20(4) + 15(12) = 260
D	$(\frac{60}{7}, \frac{60}{7})$	$20(\frac{60}{7}) + 15(\frac{60}{7})$ = 300*
E	$(10, \frac{20}{3})$	$20(10) + 15(\frac{20}{3})$ = 300*
F	(10, 0)	20(10) + 15(0) = 200

Sin solución factible

El sistema de restricciones en un problema de programación lineal tal vez no tenga puntos que satisfagan todas las restricciones. En algunos casos no hay puntos en el conjunto solución y se dice que el problema de programación lineal ***no tiene solución factible***. La figura 10.13 ilustra un problema que no tiene solución factible. La restricción (1) es de la forma "menor o igual que" y la restricción (2) es de la forma "mayor o igual que". Un problema ciertamente puede tener ambos tipos de restricciones. En este caso, el conjunto de puntos que satisfacen una restricción no incluye ninguno de los puntos que satisfacen la otra.

Soluciones no acotadas

La figura 10.14 ilustra lo que se conoce como ***espacio de soluciones no acotado***. Las dos restricciones son de la forma ($\geq$) con el espacio de soluciones resultante que se extiende *hacia afuera* una distancia infinita, sin tener límites. Dado un espacio de soluciones no acotado, el valor óptimo de la función objetivo puede tener límites o no tenerlos. Si en la figura 10.14 la *dirección de mejoramiento* en la función objetivo es hacia el origen (como lo hace típicamente un objetivo de minimización), habría un límite en el valor de z y se tendría en el punto vértice A, B o C. Por el contrario, si la dirección del mejoramiento es hacia afuera, alejándose del origen (como lo hace comúnmente un objetivo de maximización), la función objetivo se puede llevar hacia afuera una distancia infinita. Por consiguiente, no hay límite alguno en el valor de la función objetivo y se dice que el problema tiene una ***solución no acotada***. Con el fin de repetir para hacer énfasis, una *solución no acotada* ocurre cuando no hay límites en el valor de la función objetivo.

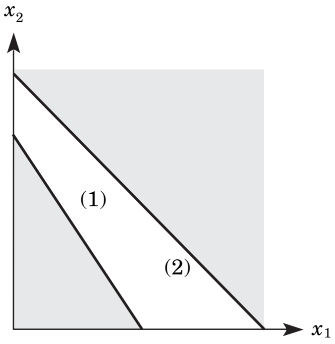


Figura 10.13. Ninguna solución factible.

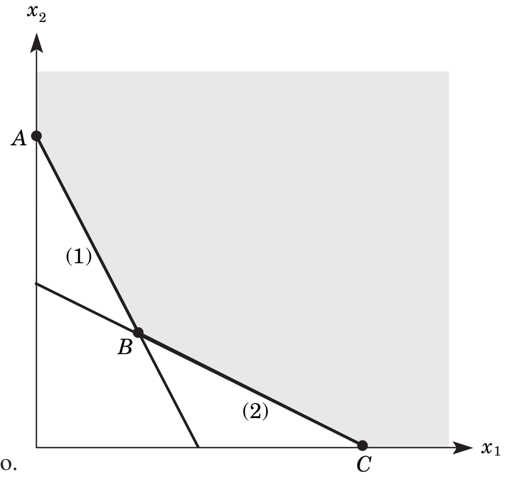


Figura 10.14 Espacio de soluciones no acotado.

NOTA Un espacio de soluciones no acotado es una *condición necesaria*, pero no suficiente, para que ocurra una solución no acotada.

Sección 10.2 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 10, determine de manera gráfica el semiplano permisible que satisface la desigualdad.

1. $2x + 3y \le 24$

2. $-4x + 4y \ge 36$

3. $0.5x - y \ge 6$

4. $2x + 2.5y \le 40$

5. $1.5x + 4y \le -18$

6. $-x + 2y \ge 7$

7. $-x + 2y \ge -8$

8. $8x - 2y \ge -40$

9. $-2x + 6y \le -24$

10. $8x - 4y \le 40$

En los ejercicios 11 a 20, determine gráficamente el espacio de soluciones (si existe alguno).

11.
$$\begin{aligned} 2x - 4y &\le 20 \\ 3x + 2y &\le 18 \end{aligned}$$

12.
$$\begin{aligned} 4x + 2y &\le 28 \\ 3x + 4y &\le 48 \end{aligned}$$

13.
$$\begin{aligned} 5x + 2y &\le 20 \\ 3x + 4y &\le 32 \end{aligned}$$

14.
$$\begin{aligned} 3x - 2y &\le 12 \\ x + 2y &\ge 4 \end{aligned}$$

15.
$$\begin{aligned} x + y &\ge 8 \\ 2x + y &\ge 12 \\ x &\le 10 \\ x &\ge 2 \\ y &\le 10 \end{aligned}$$

16.
$$\begin{aligned} x + y &\ge 2 \\ x + y &\le 7 \\ x + 2y &\ge 14 \\ y &\le 5 \\ x &\ge 0 \\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

17.
$$\begin{aligned} 4x + 3y &\le 24 \\ x + y &\ge 4 \\ x &\le 6 \\ y &\le 6 \\ x &\ge 2 \\ y &\ge 1 \end{aligned}$$

18.
$$\begin{aligned} 6x + 3y &\le 24 \\ x &\ge 1 \\ x &\le 4 \\ y &\ge 1 \\ y &\le 5 \end{aligned}$$

19.
$$\begin{aligned} 4x - 2y &\ge 12 \\ x + y &\le 8 \\ y &\le 6 \\ x &\ge 0 \\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

20.
$$\begin{aligned} 2x + 2y &\le 16 \\ 3x - y &\ge 18 \\ x + 2y &= 10 \\ x &\ge 0 \\ y &\ge 0 \end{aligned}$$

Para los siguientes problemas de programación lineal, grafique la región de soluciones factibles (si existe alguna) y resuelva por el método del punto vértice.

21. Maximice $z = 4x_1 + 8x_2$

sujeto a
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 20 \\ 2x_1 + x_2 &\le 32 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

22. Maximice $z = 5x_1 + 3x_2$

sujeto a
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\ge 60 \\ 4x_1 + 5x_2 &\ge 90 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

23. Maximice $z = 30x_1 + 20x_2$
sujeto a
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\le 18 \\ x_1 + x_2 &\le 12 \\ x_1 &\ge 2 \\ x_2 &\ge 5 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

24. Maximice $z = 10x_1 + 16x_2$
sujeto a
$$\begin{aligned} x_1 &\le 400 \\ x_2 &\ge 200 \\ x_1 + x_2 &= 500 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

25. Maximice $z = 20x_1 + 8x_2$
sujeto a
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 20 \\ 2x_1 + x_2 &\le 48 \\ x_1 &\le 20 \\ x_1 + x_2 &\le 30 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

26. Maximice $z = 2x_1 + 5x_2$
sujeto a
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 16 \\ x_1 &\le 12 \\ x_1 &\ge 8 \\ x_2 &\le 10 \\ x_2 &\ge 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

27. Maximice $z = 4x_1 + 8x_2$
sujeto a
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 30 \\ x_1 + 2x_2 &\le 24 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

28. Maximice $z = 16x_1 + 25x_2$
sujeto a
$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\le 40 \\ x_1 + 2x_2 &\le 30 \\ 1.5x_1 + x_2 &\ge 50 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

29. Maximice $z = 8x_1 + 4x_2$
sujeto a
$$\begin{aligned} 20x_1 + 10x_2 &\le 60 \\ 40x_1 + 32x_2 &\le 160 \\ x_1 &\le 2.5 \\ x_2 &\le 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

30. Maximice $z = 10x_1 + 10x_2$
sujeto a
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 12 \\ 4x_1 + x_2 &\ge 24 \\ x_1 &\ge 3 \\ x_2 &\le 18 \\ 5x_1 + 4x_2 &\le 120 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

31. Maximice $z = 18x_1 + 30x_2$
sujeto a
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 48 \\ 6x_1 + 9x_2 &\le 216 \\ 15x_1 + 10x_2 &\le 360 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

32. Maximice $z = 6x_1 + 3x_2$
sujeto a
$$\begin{aligned} 4x_1 + 6x_2 &\le 48 \\ x_1 + x_2 &\ge 15 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

33. Una empresa fabrica dos productos. Cada producto se debe procesar en dos departamentos. El producto *A* requiere dos horas por unidad en el departamento 1 y cuatro horas por unidad en el departamento 2. El producto *B* requiere tres horas por unidad en el departamento 1 y dos horas por unidad en el departamento 2. Los departamentos 1 y 2 tienen, respectivamente, 60 y 80 horas disponibles cada semana. Los márgenes de utilidad de los dos productos son, respectivamente, \$3 y \$4 por unidad. Si x_j equivale al número de unidades producidas del producto *j*: *a*) formule el modelo de programación lineal para determinar la mezcla de productos que maximiza la utilidad total y *b*) resuelva utilizando el método del punto vértice. *c*) Interprete por completo los resultados que indican la mezcla de productos recomendada. ¿Qué porcentaje de la capacidad diaria se utilizará en cada departamento?

34. En el ejercicio 33, suponga que un requerimiento adicional es que el número de unidades fabricadas del producto *B* debe ser por lo menos el mismo que el número de unidades fabricadas del producto *A*. ¿Cuál es la restricción matemática que representa esta condición? Agregue esta restricción al conjunto original y resuelva de nuevo el ejercicio 33.

35. El dietista de una institución penal local prepara el menú para la comida *ligera* de esta noche. Se servirán dos alimentos en la comida. El dietista está preocupado por lograr el requerimiento diario mínimo de dos vitaminas. En la tabla 10.5 se resume el contenido vitamínico por onza de cada alimento, los requerimientos diarios mínimos de cada uno y el costo por onza de cada alimento. Si x_j equivale al número de onzas del alimento j:

a) Formule el modelo de programación lineal para determinar las cantidades de los dos alimentos que minimizará el costo de la comida y al mismo tiempo garantizará que se satisfagan los niveles mínimos de ambas vitaminas.

b) Resuelva mediante el método del punto vértice e indique en qué consistirá la comida de menor costo y su costo. ¿Qué porcentajes de los requerimientos mínimos diarios de cada vitamina se alcanzarán?

36. En el ejercicio 35, suponga que la cantidad incluida del alimento 1 debe ser al menos 50% mayor que la del alimento 2. ¿Cuál es la restricción matemática que representa esta condición? Agregue esta restricción al conjunto original y vuelva a resolver el ejercicio 35.

Tabla 10.5

	Alimento 1	**Alimento 2**	**Requerimiento mínimo diario**
Vitamina 1	2 mg/oz	3 mg/oz	18 mg
Vitamina 2	4 mg/oz	2 mg/oz	22 mg
Costo por onza	\$0.12	\$0.15	

10.3 Aplicaciones de la programación lineal

En esta sección se presentarán varias áreas de aplicación de la programación lineal. Se volverá a ver algunos de estos escenarios en el capítulo 11, cuando se estudien los métodos de solución por computadora.

Modelos de la mezcla dietética

Un problema clásico de mezcla dietética implica determinar los alimentos que se deben incluir en una comida para: 1) minimizar el costo de la comida, en tanto que: 2) se satisfacen ciertos requerimientos nutricionales. Los requerimientos nutricionales toman con frecuencia la forma de requerimientos vitamínicos diarios, restricciones que alientan la variedad en la comida (por ejemplo, no servir a cada persona 10 libras de papas hervidas) y restricciones que consideran el sabor y las guarniciones lógicas. El ejemplo siguiente ilustra un problema simple de mezcla dietética.

Ejemplo 8

(**Modelo de la mezcla dietética**) Un dietista planea el menú para la cena en el comedor de una universidad. Se servirán tres alimentos principales, todos con contenidos nutricionales diferentes. El dietista se interesa en proporcionar por lo menos el requerimiento mínimo diario de cada una de las tres vitaminas en esta comida. En la tabla 10.6 se resume el contenido vitamínico por onza de cada tipo de alimento, el costo por onza de cada alimento y los requerimientos mínimos diarios (RMD) para las tres vitaminas. Se puede seleccionar cualquier combinación de los tres alimentos siempre y cuando el tamaño total de la ración sea como mínimo de 9 onzas.

Tabla 10.6

	Vitamina			
Alimento	**1**	**2**	**3**	**Costo por onza, $**
1	50 mg	20 mg	10 mg	0.10
2	30 mg	10 mg	50 mg	0.15
3	20 mg	30 mg	20 mg	0.12
Requerimiento mínimo diario (RMD)	290 mg	200 mg	210 mg	

El problema es determinar el número de onzas de cada alimento que se debe incluir en la comida. El objetivo es minimizar el costo de cada comida y satisfacer los requerimientos mínimos diarios de las tres vitaminas, igual que la restricción o tamaño de la ración mínima.

Para formular el modelo de la programación lineal para este problema, *suponga que* x_j *equivale al número de onzas incluidas del alimento j*. La función objetivo debe representar el costo total de la comida. Expresado en dólares, el costo total es igual a la suma de los costos de los tres alimentos, es decir:

$$z = 0.10x_1 + 0.15x_2 + 0.12x_3$$

Puesto que se interesa en proporcionar *al menos* el requerimiento mínimo diario de cada una de las tres vitaminas, habrá tres restricciones "mayor o igual que". La restricción para cada vitamina tendrá la forma

$$\boxed{\text{Miligramos de ingesta de vitaminas } \geq \text{MDR}}$$

o bien:

Miligramos del alimento 1 + miligramos del alimento 2 + miligramos del alimento 3 ≥ RMD

Las restricciones son, respectivamente:

$$50x_1 + 30x_2 + 20x_3 \geq 290 \qquad \text{(vitamina 1)}$$
$$20x_1 + 10x_2 + 30x_3 \geq 200 \qquad \text{(vitamina 2)}$$
$$10x_1 + 50x_2 + 20x_3 \geq 210 \qquad \text{(vitamina 3)}$$

La restricción de que cada ración debe ser por lo menos de 9 onzas se expresa de la siguiente forma:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 9 \qquad \text{(tamaño de la ración mínima)}$$

La formulación completa del problema es como sigue:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimice} & z = 0.10x_1 + 0.15x_2 + 0.12x_3 \\
\text{sujeto a} & 50x_1 + 30x_2 + 20x_3 \geq 290 \\
& 20x_1 + 10x_2 + 30x_3 \geq 200 \\
& 10x_1 + 50x_2 + 20x_3 \geq 210 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \geq 9 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Observe que se incluyó la restricción no negativa en la formulación. Esto asegura que no se recomendarán cantidades negativas de cualquiera de los alimentos.

Éste es un problema muy simplificado que implica la planeación de una comida, el uso de sólo tres tipos de alimentos y la consideración de sólo tres vitaminas. En la práctica real, se han formulado modelos que consideran: 1) la planeación del menú en periodos extensos (diario, semanal, etcétera); 2) las interrelaciones entre todas las comidas servidas durante un día dado; 3) las interrelaciones entre las comidas servidas en un periodo de planeación completo; 4) varios alimentos, y 5) muchos requerimientos nutricionales. El número de variables y el número de restricciones para este modelo puede crecer en exceso. ❑

Modelos de transporte

Los modelos de transporte tal vez sean los modelos de programación lineal más usados. Las compañías petroleras comprometen una enorme cantidad de recursos para llevar a cabo tales modelos. El ejemplo clásico de un problema de transporte implica el envío de alguna *mercancía homogénea* desde *m fuentes de abastecimiento* u ***orígenes*** hasta *n puntos de demanda* o ***destinos***. Por *homogéneo* se quiere decir que no hay diferencias significativas en la calidad del artículo surtido por las distintas fuentes de abastecimiento. En esencia, las características de los artículos son las mismas.

En el problema clásico, cada origen puede surtir a cualquier destino. También se puede surtir en conjunto la demanda en cada destino desde una combinación de los orígenes o totalmente desde un origen. Cada origen tiene por lo regular una capacidad específica que representa el número máximo de unidades que puede surtir. Cada destino tiene una demanda específica que representa el número de unidades requeridas.

Dado que cada origen puede surtir unidades a cada destino, se especifica alguna medida de costo o esfuerzo de envío de una unidad para cada *combinación del origen-destino*. Esto puede tomar la forma de un costo en dólares, distancia entre los dos puntos o el tiempo requerido para desplazarse de un punto a otro. Un problema típico se ocupa de determinar el número de unidades que se deben abastecer desde cada origen hasta cada destino. El objetivo es minimizar el costo total de transporte o entrega a la vez que se asegura que: 1) el número de unidades enviadas desde cualquier origen no exceda el número de unidades disponibles en ese origen y 2) se satisfaga la demanda en cada destino. El ejemplo 9 ilustra un modelo de transporte simple.

Ejemplo 9

(Mantenimiento de carreteras) Una ciudad mediana tiene dos ubicaciones en las que se mantienen reservas de sal y arena para usarlas durante las heladas y tormentas de nieve. Durante una tormenta, se distribuyen sal y arena desde estas dos ubicaciones a cuatro zonas diferentes de la ciudad. En ocasiones se necesita más sal y arena. Sin embargo, con frecuencia es imposible obtener provisiones adicionales durante una tormenta dado que las reservas se encuentran en una posición central distante de la ciudad. Los funcionarios de la ciudad esperan que no haya tormentas en sitios opuestos.

El director de las obras públicas se interesa en determinar el costo mínimo de distribuir las reservas de sal y arena durante una tormenta. En la tabla 10.7 se resume el costo de abastecimiento de una tonelada de sal o arena desde cada reserva hasta cada zona de la ciudad. Además, se indican las capacidades de reserva y los niveles normales de la demanda para cada zona (en toneladas).

Tabla 10.7

	Zona				
	1	**2**	**3**	**4**	**Oferta máxima, toneladas**
Reserva 1	\$2.00	\$3.00	\$1.50	\$2.50	900
Reserva 2	4.00	3.50	2.50	3.00	750
Demanda, toneladas	300	450	500	350	

Al formular el modelo de programación lineal para este problema, hay ocho decisiones por tomar: cuántas toneladas se deben enviar desde cada reserva hasta cada zona. En algunos casos, la mejor decisión puede ser no enviar unidades desde una reserva particular hasta una zona dada. Definamos las variables de decisión de manera diferente. *Suponga que x_{ij} equivale al número de toneladas surtidas de la reserva i a la zona j*. Por ejemplo, x_{11} es el número de toneladas abastecidas por la reserva 1 a la zona 1. De modo similar, x_{23} es igual al número de toneladas abastecidas por la reserva 2 a la zona 3. Esta *variable con dos subíndices* ofrece más información que las variables $x_1, x_2, \ldots, x_8$. Una vez que entienda que el primer subíndice corresponde al número de reserva y el segundo subíndice a la zona de la ciudad, el significado de una variable como x_{24} es más obvio.

Dada esta definición de las variables de decisión, el costo total de distribuir sal y arena tiene la forma

$$\text{Costo total } = 2x_{11} + 3x_{12} + 1.5x_{13} + 2.5x_{14} + 4x_{21} + 3.5x_{22} + 2.5x_{23} + 3x_{24}$$

Este costo representa la función objetivo que se desea reducir al mínimo.

Un tipo de restricción trata con las capacidades de las distintas reservas. Para cada reserva se debe formular una restricción que especifique que los envíos totales no excedan la oferta disponible. Para la reserva 1, la suma de los envíos a todas las zonas no puede exceder 900 toneladas, es decir:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 900 \qquad \text{(reserva 1)}$$

La misma restricción para la reserva 2 es:

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 750 \qquad \text{(reserva 2)}$$

La clase final de restricciones debería garantizar que cada zona reciba la cantidad demandada. En el caso de la zona 1, la suma de envíos desde las reservas 1 y 2 debería ser igual a 300 toneladas, es decir:

$$x_{11} + x_{21} = 300 \qquad \text{(zona 1)}$$

Las mismas restricciones para las otras tres zonas son, respectivamente:

$$x_{12} + x_{22} = 450 \qquad \text{(zona 2)}$$

$$x_{13} + x_{23} = 500 \qquad \text{(zona 3)}$$

$$x_{14} + x_{24} = 350 \qquad \text{(zona 4)}$$

La formulación completa del modelo de programación lineal es la siguiente:

$$\begin{array}{ll}
\text{Minimice} & z = 2x_{11} + 3x_{12} + 1.5x_{13} + 2.5x_{14} + 4x_{21} + 3.5x_{22} + 2.5x_{23} + 3x_{24} \\
\text{sujeto a} & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 900 \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 750 \\
 & x_{11} + x_{21} = 300 \\
 & x_{12} + x_{22} = 450 \\
 & x_{13} + x_{23} = 500 \\
 & x_{14} + x_{24} = 350 \\
 & x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24} \geq 0
\end{array}$$

❑

Modelos del presupuesto de capital

Las decisiones del presupuesto de capital (racionalización) implican la asignación de fondos de inversión limitados entre un conjunto de alternativas de inversión competidoras. Con frecuencia, las alternativas disponibles en cualquier periodo dado se caracterizan por un costo de inversión y algún beneficio estimado. Es relativamente fácil determinar los costos de inversión. Estimar los beneficios puede ser más difícil, en especial cuando los proyectos se caracterizan por rendimientos menos tangibles (por ejemplo, programas que tienen beneficios sociales). Por lo regular, el problema estriba en seleccionar el conjunto de alternativas que incrementará al máximo los beneficios totales sujetos a las restricciones del presupuesto y otras restricciones que podrían afectar la selección de proyectos.

Ejemplo 10

(Entrega de premios) Un organismo federal tiene un presupuesto de $1 000 millones para dar como premio por la investigación innovadora en el área de alternativas de energía. Un equipo de revisión de la gerencia que consiste en científicos y economistas hizo una revisión preliminar de 200 solicitudes, reduciendo el campo a seis finalistas. Se han evaluado los proyectos de cada uno de los seis finalistas y se les calificó en relación con los beneficios potenciales esperados en los próximos 10 años. En la tabla 10.8 se

Tabla 10.8

Proyecto	Clasificación del proyecto	Beneficio neto por $ invertido	Nivel de fondos requerido, $ millones
1	Solar	4.4	220
2	Solar	3.8	180
3	Combustibles sintéticos	4.1	250
4	Carbón	3.5	150
5	Nuclear	5.1	400
6	Geotérmica	3.2	120

muestran estos beneficios potenciales. Representan el *beneficio neto por dólar invertido* en cada alternativa. Por ejemplo, el valor de 4.4 asociado a la alternativa 1 sugiere que cada dólar invertido dará un beneficio neto (después de restar la inversión en dólares) de $4.40 en los próximos 10 años.

En la tabla 10.8 también se muestra el nivel de fondos requerido (en millones de dólares). Estas cifras representan la cantidad *máxima* que se puede otorgar como premio a cada proyecto. El organismo puede otorgar cualquier cantidad hasta el máximo indicado para un proyecto dado. De igual manera, el presidente ordenó que se debe otorgar al proyecto nuclear por lo menos 50% de la cantidad solicitada. El administrador del organismo se interesa mucho en proyectos solares y pidió que la cantidad concedida a los dos proyectos solares sea de por lo menos $300 millones.

El problema es determinar las sumas de dinero que se concederán a cada proyecto con el fin de maximizar el total de *beneficios netos*, medido en dólares. Si se supone que x_j *es igual al número de dólares (en millones) concedido al proyecto j*, la función objetivo es

$$\text{Maximice} \qquad z = 4.4x_1 + 3.8x_2 + 4.1x_3 + 3.5x_4 + 5.1x_5 + 3.2x_6$$

Nótese que z es igual a los beneficios netos totales, en *millones de dólares*.

Las restricciones estructurales incluyen los tipos siguientes. Primero, el presupuesto es igual a $1 000 millones y la suma total concedida no puede exceder esta cantidad. Expresado en modo matemático,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 1\,000 \qquad \text{(presupuesto total)} \qquad \textbf{(10.9)}$$

Debe haber una restricción para *cada* proyecto que refleje el premio máximo posible. Para el proyecto 1 la restricción es

$$x_1 \leq 220 \qquad \text{(premio máximo, proyecto 1)}$$

Se deben incluir cinco restricciones adicionales para los proyectos restantes. Para asegurar la preocupación del presidente sobre el proyecto nuclear, se debe incluir la restricción

$$x_5 \geq 0.5(400)$$

o

$$x_5 \geq 200 \qquad \text{(premio mínimo, nuclear)}$$

Finalmente, se asegura el interés del administrador sobre los proyectos solares por la restricción

$$x_1 + x_2 \geq 300 \qquad \text{(premio mínimo, proyectos solares)}$$

La formulación completa para este problema es la siguiente:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximice} & z = 4.4x_1 + 3.8x_2 + 4.1x_3 + 3.5x_4 + 5.1x_5 + 3.2x_6 \\
\text{sujeto a} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 1\,000 \\
& x_1 \leq 200 \\
& x_2 \leq 180 \\
& x_3 \leq 250 \\
& x_4 \leq 150 \\
& x_5 \leq 400 \\
& x_6 \leq 120 \\
& x_5 \geq 200 \\
& x_1 + x_2 \geq 300 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6 \geq 0
\end{array}
$$

❑

PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR

¿Es razonable expresar la restricción del presupuesto total [ecuación (10.9)] como una igualdad estricta? ¿Por qué sí o por qué no?

Modelos de mezcla

La programación lineal ha encontrado aplicaciones amplias en un área conocida como los ***modelos de mezcla***. Se formulan modelos de mezcla para determinar una combinación óptima de ingredientes a fin de mezclarlos en un producto final. Los modelos de mezcla se han utilizado en la mezcla de productos de petróleo, mezcla de alimentación para el uso en la agricultura, fertilizantes y semillas de pasto, licores, tés, cafés y demás. El objetivo con dichos modelos con frecuencia es minimizar el costo de la mezcla. Las restricciones comunes incluyen restricciones del tamaño del lote para cada mezcla, requerimientos tecnológicos (o receta) y disponibilidad limitada de ingredientes. El ejemplo siguiente ilustra un modelo de mezcla.

Ejemplo 11

(Mezcla de petróleo; escenario de motivación) Una refinería pequeña está por mezclar cuatro productos del petróleo en tres mezclas finales de gasolina. Aunque las fórmulas de mezclado no son precisas, hay algunas restricciones que se deben observar en el proceso de mezcla. Estas restricciones son las siguientes:

1. *El componente 2 no debe constituir más de 40% del volumen de la mezcla 1.*
2. *El componente 3 debe constituir por lo menos 25% del volumen de la mezcla 2.*

3. *El componente 1 debe ser exactamente 30% de la mezcla 3.*
4. *Los componentes 2 y 4, juntos, deben constituir por lo menos 60% del volumen de la mezcla 1.*

Hay disponibilidad limitada de los componentes 2 y 3, 1 500 000 litros y 1 000 000 de litros, respectivamente. El gerente de producción quiere mezclar un total de 5 000 000 de litros. De este total se deberían producir por lo menos 2 000 000 de litros de la mezcla final 1. El precio al mayoreo por litro de la venta de cada mezcla final es igual a \$0.26, \$0.22 y \$0.20, respectivamente. Los componentes de insumo cuestan \$0.15, \$0.18, \$0.12 y \$0.14 por litro, respectivamente. El problema es determinar el número de litros de cada componente que se usará en cada mezcla final para maximizar la contribución a la utilidad total de la operación de producción.

Al formular este problema, se utilizará la variable de subíndice doble x_{ij} *para representar el número de litros del componente i usados en la mezcla final j*. Una suposición importante en este modelo es que no hay pérdida de volumen en el proceso de mezcla. Es decir, si se combinan tres litros de productos componentes, el resultado es una mezcla final de tres litros exactamente. Refiérase a la figura 10.15 para que le ayude a comprender las relaciones de mezcla.

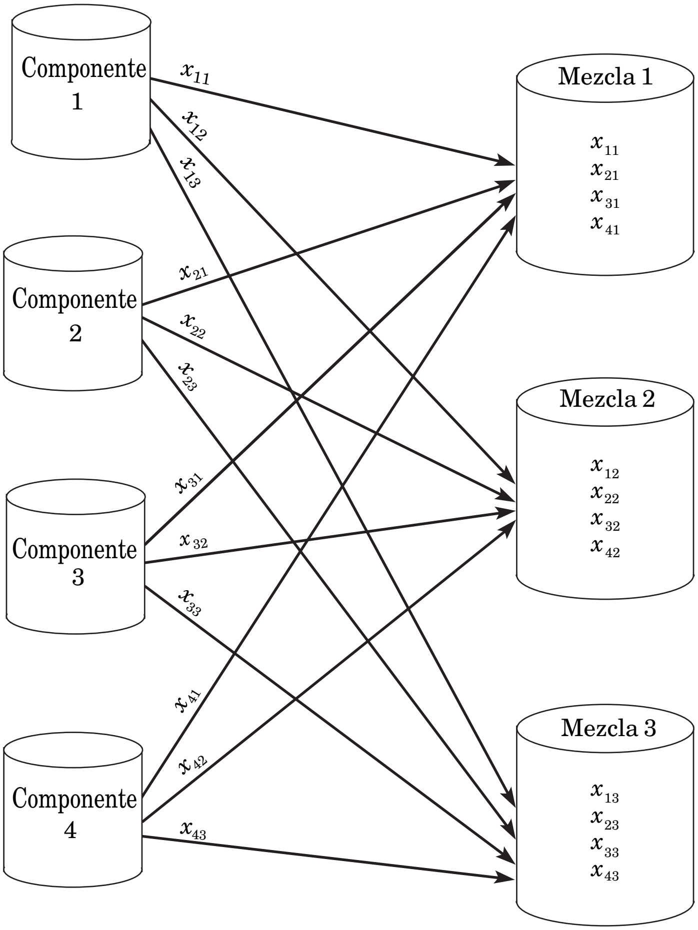


Figura 10.15 Proceso de mezcla de petróleo.

La función objetivo tiene la forma

Contribución a la utilidad total

= Ingreso total de las tres mezclas	− Costo total de los cuatro componentes			
= Ingreso total de la mezcla 1	+ Ingreso total de la mezcla 2	+ Ingreso total de la mezcla 3	− Costo del componente 1 − costo del componente 3	− Costo del componente 2 − costo del componente 4
= \$0.26 (núm. de litros de la mezcla 1)	+ \$0.22 (núm. de litros de la mezcla 2)	+ \$0.20 (núm. de litros de la mezcla 3)	− \$0.15 (núm. de litros del componente 1) − \$0.12 (núm. de litros del componente 3)	− \$0.18 (núm. de litros del componente 2) − \$0.14 (núm. de litros del componente 4)

Examine las expresiones entre paréntesis en las ecuaciones siguientes y verifique que la función objetivo sea

$$\begin{aligned} z = {} & 0.26(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}) + 0.22(x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}) \\ & + 0.20(x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43}) - 0.15(x_{11} + x_{12} + x_{13}) \\ & - 0.18(x_{21} + x_{22} + x_{23}) - 0.12(x_{31} + x_{32} + x_{33}) \\ & - 0.14(x_{41} + x_{42} + x_{43}) \end{aligned}$$

que se puede simplificar al combinar términos semejantes para producir

$$\begin{aligned} z = {} & 0.11x_{11} + 0.07x_{12} + 0.05x_{13} + 0.08x_{21} + 0.04x_{22} + 0.02x_{23} + 0.14x_{31} \\ & + 0.10x_{32} + 0.08x_{33} + 0.12x_{41} + 0.08x_{42} + 0.06x_{43} \qquad \text{(utilidad total)} \end{aligned}$$

Respecto a las restricciones estructurales, la producción total debe ser igual a 5 000 000 de litros, es decir:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{41} + x_{42} + x_{43} = 5\,000\,000 \qquad \textbf{(10.10)}$$

La restricción de receta (1) se representa mediante la siguiente desigualdad:

$$\text{Cantidad del componente 2 usado en la mezcla 1} \le \text{40\% de la cantidad de la mezcla final 1}$$

o sea:

$$x_{21} \le 0.40(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41})$$

Esta restricción se simplifica en la siguiente forma:

$$-0.4x_{11} + 0.6x_{21} - 0.4x_{31} - 0.4x_{41} \le 0 \qquad \textbf{(10.11)}$$

La restricción de receta (2) se expresa así:

$$\begin{array}{lcl}\text{Cantidad del componente 3} & \geq & \text{25\% de la cantidad de la} \\ \text{usada en la mezcla 2} & & \text{mezcla final 2}\end{array}$$

es decir:

$$x_{32} \geq 0.25(x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42})$$

o bien:

$$-0.25x_{12} - 0.25x_{22} + 0.75x_{32} - 0.25x_{42} \geq 0 \qquad \textbf{(10.12)}$$

Las restricciones (3) y (4) se representan de modo similar mediante la ecuación (10.13) y la desigualdad:

$$x_{13} = 0.3(x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43})$$

es decir:

$$0.7x_{13} - 0.3x_{23} - 0.3x_{33} - 0.3x_{43} = 0 \qquad \textbf{(10.13)}$$

y

$$x_{21} + x_{41} \geq 0.6(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41})$$

o sea:

$$-0.6x_{11} + 0.4x_{21} - 0.6x_{31} + 0.4x_{41} \geq 0 \qquad \textbf{(10.14)}$$

Las disponibilidades limitadas de los componentes 2 y 3 se representan por las desigualdades (10.15) y (10.16):

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1\,500\,000 \qquad \text{(disponibilidad del componente 1)} \qquad \textbf{(10.15)}$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 1\,000\,000 \qquad \text{(disponibilidad del componente 2)} \qquad \textbf{(10.16)}$$

Para concluir, se representa el requerimiento de la producción mínima para la mezcla final 1 mediante

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \geq 2\,000\,000 \qquad \textbf{(10.17)}$$

La formulación completa de este modelo de mezcla es la siguiente:

Maximice $z = 0.11x_{11} + 0.07x_{12} + 0.05x_{13} + 0.08x_{21} + 0.04x_{22} + 0.02x_{23} + 0.14x_{31} + 0.10x_{32} + 0.08x_{33} + 0.12x_{41} + 0.08x_{42} + 0.06x_{43}$

sujeto a

$$\begin{array}{l}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{41} + x_{42} + x_{43} = 5\,000\,000 \\
-0.4x_{11} + 0.6x_{21} - 0.4x_{31} - 0.4x_{41} \geq 0 \\
-0.25x_{12} - 0.25x_{22} + 0.75x_{32} - 0.25x_{42} \geq 0 \\
0.7x_{13} - 0.3x_{23} - 0.3x_{33} - 0.3x_{43} = 0 \\
-0.6x_{11} + 0.4x_{21} - 0.6x_{31} + 0.4x_{41} \geq 0 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1\,500\,000 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 1\,000\,000 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \geq 2\,000\,000 \\
x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{41}, x_{42}, x_{43} \geq 0
\end{array}$$

❑

Conforme comienza a evaluar sus habilidades para formular modelos de programación lineal, se sugieren los siguientes lineamientos.

Consejos para formular modelos de programación lineal

1. ***Lea el planteamiento del problema con cuidado.***
2. ***Identifique las variables de decisión.*** *Éstas son las decisiones que se necesita realizar. Una vez identificadas estas decisiones, clasifíquelas al proporcionar una definición matemática (por ejemplo, x_1 = número de unidades producidas y vendidas por semana del producto 1, x_2 = número de unidades producidas y vendidas por semana del producto 2).*
3. ***Identifique el objetivo.*** *¿Qué es lo que se debe maximizar o minimizar (por ejemplo, maximizar la utilidad semanal total de fabricar los productos 1 y 2)?*
4. ***Identifique las restricciones estructurales.*** *¿Qué condiciones se deben satisfacer cuando asignamos valores a las variables de decisión? Tal vez necesite escribir una descripción verbal de la restricción antes de escribir la representación matemática (por ejemplo, la producción total del producto 1 $\geq$ 100 unidades; entonces $x_1 \geq 100$). También, siéntase cómodo con el hecho de que las restricciones estructurales para un problema de programación lineal dado pueden expresar una gran variedad de unidades. Es decir, dado el conjunto de variable x_j, es posible formular restricciones estructurales que expresen condiciones medidas en dólares, horas, unidades producidas, etc. Simplemente debe estar seguro de que la dimensión para cualquier restricción dada es consistente en ambos lados de la restricción.*
5. ***Formule el modelo matemático.*** *Dependiendo del problema, podría empezar por definir la función objetivo o las restricciones estructurales. ¡No olvide incluir la restricción no negativa!*

Sección 10.3 Ejercicios de seguimiento

1. Para el ejemplo 10, modifique la formulación si lo siguiente es cierto.
   a) Cada proyecto debe recibir por lo menos 20% del nivel de financiamiento requerido.
   b) La cantidad otorgada al proyecto de combustibles sintéticos debe ser por lo menos igual que la concedida al proyecto de carbón.
   c) Los fondos combinados para el proyecto geotérmico y el proyecto sintético deberían ser por lo menos de $30 millones.
   d) Los fondos del proyecto nuclear deberían ser por lo menos 40% mayores que los fondos del proyecto geotérmico.
   e) El financiamiento del proyecto 2 no debería ser de más de 80% de los fondos del proyecto 1.

2. Para el ejemplo 11, modifique la formulación si se deben satisfacer las condiciones adicionales siguientes.
   a) No se deben hacer más de 2 millones de litros de la mezcla final 1.
   b) Los componentes 1 y 4, juntos, deben constituir por lo menos 40% de la mezcla final 3.
   c) Los componentes 2 y 3 deberían constituir no más de 60% de la mezcla final 2.
   d) El ingreso total de la mezcla 1 debe ser mayor de $250 000.

3. Un dietista planea el menú para la comida de mediodía en una escuela primaria. Planea servir tres alimentos principales, todos con contenidos nutricionales distintos. El dietista se interesa en proporcionar por lo menos el requerimiento mínimo diario de cada una de las tres vitaminas en esta comida. En la tabla 10.9 se resume el contenido vitamínico por onza de cada tipo de alimento, el costo por onza y el requerimiento mínimo diario de cada vitamina. Se debe seleccionar cualquier combinación de los tres alimentos siempre y cuando el tamaño de la ración total sea por lo menos de 6.0 onzas.

Formule el problema de programación lineal que al ser resuelto determinaría el número de onzas que se tienen que servir en cada comida. El objetivo es minimizar el costo de la comida en tanto se satisfagan los niveles del requerimiento mínimo diario de las tres vitaminas, igual que la restricción del tamaño de la ración mínima.

Tabla 10.9

	Vitamina			
Alimento	**1**	**2**	**3**	**Costo por onza, $**
1	20 mg	10 mg	20 mg	0.15
2	40 mg	25 mg	30 mg	0.18
3	30 mg	15 mg	25 mg	0.22
RMD	240 mg	120 mg	180 mg	

4. Un procesador líder de azúcar tiene dos plantas que abastecen cuatro almacenes. En la tabla 10.10 se resumen las capacidades semanales de cada planta, requerimientos semanales de cada almacén y el costo de envío por tonelada (en dólares) entre cualquier planta y cualquier almacén. Si x_{ij} equivale al número de toneladas enviadas de la planta i al depósito j, formule el modelo de programación lineal que permite determinar el programa de distribución que da como resultado el costo mínimo de envío. No se deben violar las capacidades semanales de la planta y se tienen que satisfacer los requerimientos del almacén.

Tabla 10.10

	Almacén				
	1	**2**	**3**	**4**	**Oferta semanal, toneladas**
Planta 1	20	15	10	25	2 800
Planta 2	30	25	20	15	3 500
Demanda semanal, toneladas	1 400	1 600	1 000	1 500	

5. Una compañía química produce oxígeno líquido en tres ubicaciones diferentes en el sur. Debe surtir a cuatro depósitos de almacenamiento en la misma región. En la tabla 10.11 se resume el costo de envío por 1 000 galones entre cualquier planta y cualquier depósito, igual que la capacidad mensual de cada planta y la demanda mensual en cada depósito. Si x_{ij} equivale al número de galones (en miles) enviados de la planta i al depósito j, formule el modelo de programación lineal que permite determinar el programa de distribución que tiene el costo mínimo. No se deben violar las capacidades de la planta y las demandas de los depósitos se deben satisfacer de acuerdo con el programa.

Tabla 10.11

	Depósito				
	1	**2**	**3**	**4**	**Oferta, 1 000 galones**
Planta 1	50	40	35	20	1 000
Planta 2	30	45	40	60	1 400
Planta 3	60	25	50	30	1 800
Demanda, 1 000 galones	800	750	650	900	

Tabla 10.12

	Producto			
	A	***B***	***C***	**Disponibilidad semanal**
Departamento 1	2.5	4	2	120 horas
Departamento 2		2	2	160 horas
Departamento 3	3	1		100 horas
Departamento 4	2	3	2.5	150 horas
Libras de materia prima por unidad	5.5	4.0	3.5	500 libras
Precio de venta	$60	$50	$75	
Costo de trabajo por unidad	20	27	36	
Costo de material por unidad	21	8	7	

6. Una empresa fabrica tres productos que se deben procesar en algunos o en sus cuatro departamentos. En la tabla 10.12 se indica el número de horas que requiere una unidad de cada producto en los diferentes departamentos y el número de libras de materia prima requeridas. También se mencionan los costos de trabajo y material por unidad, precio de venta y capacidades semanales tanto de horas laborales como de materias primas. Si el objetivo es maximizar la utilidad semanal total, formule el modelo de programación lineal para este ejercicio.

7. Refiérase al ejercicio 6, escriba las restricciones asociadas a cada una de las condiciones siguientes.

a) La producción semanal combinada debe ser por lo menos de 50 unidades.

b) El número de unidades del producto *A* no debe ser mayor que el doble de la cantidad del producto *B*.

c) Ya que los productos *B* y *C* con frecuencia se venden juntos, los niveles de producción deben ser los mismos para ambos.

d) El número de unidades del producto *B* no debe ser mayor que la mitad de la producción semanal total.

8. Una agencia de renta de camiones local planea una fuerte demanda durante los meses de verano. La agencia tomó las cuentas de los camiones en ciudades diferentes y las comparó con las necesidades proyectadas para cada ciudad (todos los camiones son del mismo tamaño). Se espera que tres áreas metropolitanas tengan más camiones de los que se necesitarán durante el verano, aunque se espera que cuatro ciudades tengan menos camiones de los que se demandarán. Para prepararse para estos meses, los camiones se pueden reasignar de las áreas de superávit a las áreas de déficit al contratar conductores. Se paga a los conductores una tarifa fija que depende de la

Tabla 10.13

	Área de déficit				
	1	**2**	**3**	**4**	**Superávit de camiones**
Ciudad con superávit 1	$100	$250	$200	$150	120
Ciudad con superávit 2	200	175	100	200	125
Ciudad con superávit 3	300	180	50	400	100
Déficit de camiones	60	80	75	40	

distancia entre las dos ciudades. Además reciben viáticos (diarios). En la tabla 10.13 se resumen los costos de que un camión entregue entre dos ciudades. También se muestran los superávit proyectados para cada ciudad que tiene una provisión excesiva y los déficit proyectados para cada ciudad que necesita camiones adicionales. (Nótese que el superávit total excede el déficit total.)

Si el objetivo es minimizar el costo de reasignar los camiones, formule el modelo de programación lineal que le permitiría resolver este problema. (*Sugerencia*: Suponga que x_{ij} es igual al número de camiones entregados del área de superávit *i* al área de déficit *j*.)

9. Un productor de café mezcla cuatro granos de café componentes en tres mezclas finales de café. Los cuatro granos componentes cuestan al productor $0.65, $0.80, $0.90 y $0.75 por libra respectivamente. Las disponibilidades semanales de los cuatro componentes son 80 000, 40 000, 30 000 y 50 000 libras, respectivamente. El productor vende las tres mezclas en precios al mayoreo de $1.25, $1.40 y $1.80 por libra, respectivamente. La producción semanal debería incluir por lo menos 50 000 libras de la mezcla final 3.

Las siguientes son las restricciones de la mezcla que debe seguir el mezclador.

a) El componente 2 debería constituir por lo menos 30% de la mezcla final 3 y no más de 20% de la mezcla final 1.

b) El componente 3 debería constituir exactamente 25% de la mezcla final 3.

c) El componente 4 debería constituir por lo menos 40% de la mezcla final 1 y no más de 18% de la mezcla final 2.

El objetivo es determinar el número de libras de cada componente que se debería usar en cada mezcla final para maximizar la utilidad semanal total. Formule esto como un modelo de programación lineal definiendo con cuidado sus variables de decisión.

BancOhio National Bank

APLICACIÓN DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL EN LA INDUSTRIA BANCARIA*

La mayor parte de los bancos importantes han centralizado centros de procesamiento de cheques. Se entregan cheques de las diferentes sucursales al centro de procesamiento de cheques usando una variedad de modos de transporte. Al llegar al centro de procesamiento de cheques, éstos: 1) se codifican con el importe en dólares en tinta magnética en la parte inferior del cheque; 2) se microfilman, y 3) se procesan mediante una máquina de clasificación que lee la información importante del cheque relacionada con la teneduría de libros y el procesamiento del cheque. Los cheques que se giran contra otros bancos entonces se canalizan a la Reserva Federal o a una casa de compensación.

El procesamiento oportuno de los cheques es importante para minimizar lo que se conoce como "cantidad flotante". La cantidad flotante se refiere a la cantidad de dinero representada por los cheques en circulación que están en proceso de cobranza. Hay un costo de oportunidad para los bancos cuando los cheques están en proceso de cobranza. Si los bancos tuvieran estos fondos, podrían invertirlos y ganar interés. Estas inversiones perdidas pueden costar a los grandes bancos cantidades considerables de dinero cada año. El procesamiento eficiente de los cheques depende de la programación de los operadores del codificador. La programación se complica por: 1) la alta variabilidad de los volúmenes de cheques sobre una base por hora y por día, y 2) un número fijo de máquinas codificadoras.

El BancOhio National Bank, en Columbus, con activos del orden de los $6 mil millones y más de 200 sucursales en todo el estado, aplicó con éxito la programación lineal en el desarrollo de un sistema de programación de cambios para sus codificadores. El modelo desarrollado para el banco determina el número de codificadores de medio tiempo y de tiempo completo que se deben asignar a cada uno de un conjunto de turnos predeterminados, para que se minimicen los salarios semanales (tiempo regular y tiempo extra) y costos flotantes. Los oficiales del banco estimaron que los ahorros para el primer año de los programas de turno modificados serán de $1 millón.

---

* L. J. Krajewski y L. P. Ritzman, "Shift Scheduling in Banking Operations: A Case Application", *Interfaces*, vol. 10, núm. 2 (abril de 1980), páginas 1-8.

❑ TÉRMINOS Y CONCEPTOS CLAVE

carencia de solución factible 456
conjunto convexo 451
espacio de soluciones no acotado 456
función objetivo 438
líneas de isoutilidad 449
método del punto vértice 452
modelos de la mezcla dietética 459
modelos de mezcla 465
modelos de transporte 461
modelos del presupuesto de capital 463
programación lineal 438
programación matemática 438
región de soluciones factibles 447
restricciones de no negatividad 440
restricciones estructurales 440
semiplano (cerrado) 441
semiplano permisible 442
solución no acotada 456
soluciones óptimas alternativas 453
variables de decisión 438

❑ EJERCICIOS ADICIONALES

SECCIÓN 10.2

Para los problemas de programación lineal siguientes, grafique la región de soluciones factibles (si existe alguna) y resuelva por el método del punto vértice.

1. Maximice $z = 8x_1 + 3x_2$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ 2x_1 + 5x_2 &\le 40 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

2. Minimice $z = 15x_1 + 6x_2$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 24 \\ x_2 &\ge 4 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 30 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

3. Maximice $z = 2x_1 + 4x_2$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\le 10 \\ -x_1 + x_2 &\ge 8 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

4. Maximice $z = 3x_1 + 3x_2$

sujeto a

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &\ge 12 \\ 2x_1 + 3x_2 &\ge -6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

5. Minimice $z = 4x_1 + 4x_2$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\le 24 \\ 3x_1 + x_2 &\ge 26 \\ x_1 - x_2 &= 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

6. Maximice $z = 3x_1 + 2x_2$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\ge 6 \\ 9x_1 + 6x_2 &\le 108 \\ x_1 &\ge 8 \\ x_2 &\ge 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

7. Maximice $z = 4x_1 + 3x_2$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 4 \\ 8x_1 + 6x_2 &\le 48 \\ x_1 &\ge 3 \\ x_2 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

8. Minimice $z = 3x_1 + 2x_2$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 10 \\ 9x_1 + 6x_2 &\ge 18 \\ x_1 &\ge 2 \\ x_2 &\ge 4 \\ x_1 &\le 6 \\ x_2 &\le 8 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

9. Minimice $z = 5x_1 + 8x_2$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 6 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 30 \\ 2x_1 + x_2 &\le 5 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

10. Maximice $z = 8x_1 + 4x_2$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &\le 24 \\ 2x_1 + 3x_2 &\ge 12 \\ x_1 &\le 6 \\ 4x_1 + 3x_2 &\ge 36 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

SECCIÓN 10.3

11. Un fabricante de maquinaria quiere maximizar la utilidad de fabricar dos productos, producto *A* y producto *B*. Los tres insumos principales para cada producto son acero, electricidad y horas laborales. En la tabla 10.14 se resumen los requerimientos por unidad de cada producto, recursos disponibles y margen de utilidad por unidad. El número de unidades del producto *A* no debe ser mayor de 80% del número del producto *B*. Formule el modelo de programación lineal para esta situación.

Tabla 10.14

	Producto		
	A	*B*	**Disponibilidad total mensual**
Energía	100 kWh	200 kWh	20 000 kWh
Acero	60 lb	80 lb	10 000 lb
Trabajo	2.5 h	2 h	400 h
Utilidad por unidad	$30	$40	

12. En cierta área hay dos almacenes que surten comida a cinco tiendas de abarrotes. En la tabla 10.15 se resume el costo de entrega por carga de camión de cada almacén a cada tienda, el número requerido de cargas de camión por tienda por semana y el número máximo de cargas de camión disponible por semana por almacén. Formule un modelo de programación lineal que determine el número de entregas de cada almacén a cada tienda que minimizaría el costo de entrega total.

Tabla 10.15

	Almacén					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**Máximo de cargas de camión**
Almacén *A*	$40	$30	$45	$25	$50	100
Almacén *B*	$50	$35	$40	$20	$40	250
Número requerido de cargas de camión	80	50	75	45	80	

13. **Expansión de capital** Una compañía considera la compra de alguna maquinaria adicional como parte de un programa de expansión del capital. Se consideran cuatro tipos de máquinas. En la tabla 10.16 se indican los atributos relevantes de las cuatro máquinas.

Tabla 10.16

	Máquina			
	A	*B*	*C*	*D*
Costo	$50 000	$35 000	$60 000	$80 000
Pies cuadrados requeridos	200	150	250	280
Salida diaria, unidades	10 000	8 000	25 000	18 000

El presupuesto total para este programa es $750 000. El espacio de suelo disponible es 16 000 pies cuadrados. La compañía quiere maximizar la salida (número total de unidades producidas) que resulta de la compra de las máquinas nuevas. Defina cuidadosamente sus variables de decisión y formule el modelo de programación lineal para este problema.

14. Una empresa nacional de renta de automóviles hace planes para la temporada de verano. Un análisis de los inventarios actuales de automóviles subcompactos en siete ciudades, junto con pronósticos de demanda durante el verano en estas mismas ciudades, indican que tres de estas áreas tendrán escasez de necesidades, en tanto que cuatro de las ciudades tendrán superávit de automóviles subcompactos. Con el fin de prepararse para la temporada de verano, los oficiales de la ciudad decidieron reasignar los automóviles desde las ciudades que se espera que tengan déficit. Los automóviles se pueden reasignar al contratar a una empresa de transporte de automóviles. Se han recibido licitaciones de la empresa de camiones que indican el costo de reubicar un automóvil de una ciudad con superávit dado en una ciudad con déficit dado. En la tabla 10.17 se resumen estos costos junto con los superávit y los déficit para las ciudades mencionadas.

Suponga que x_{ij} es igual al número de automóviles reubicados de un área con superávit i a un área con déficit j. Si el objetivo es minimizar el costo de reubicar estos automóviles con el fin de que se satisfagan todas las necesidades de cada área con déficit, formule el modelo de programación lineal para este problema.

Tabla 10.17

	Área con déficit				
	1	**2**	**3**	**4**	**Superávit de automóviles**
Ciudad con superávit 1	$50	$40	$25	$30	300
Ciudad con superávit 2	$40	$25	$35	$45	150
Ciudad con superávit 3	$35	$50	$40	$25	250
Déficit de automóviles	250	150	125	175	

15. **Cartera financiera** Una persona se interesa en invertir $500 000 en una mezcla de inversiones. En la tabla 10.18 se indican las opciones de inversión y las tasas de rendimiento estimadas para cada una. La inversionista quiere que por lo menos 35% de su inversión se haga en bonos del gobierno. Como consecuencia del mayor riesgo percibido de las dos acciones, especificó que la inversión combinada de éstos no exceda de $80 000. La inversionista también tiene la corazonada de que las tasas de interés permanecerán altas y especificó que por lo menos 20% de la inversión debe estar en el fondo de mercado de dinero. Su condición final es que la cantidad invertida en el fondo mutuo *A* no debiera ser mayor que la cantidad invertida en el fondo mutuo *B*. El problema es decidir la cantidad de dinero que se debe invertir en cada alternativa con el fin de maximizar el rendimiento anual total (en dólares). Defina cuidadosamente sus variables y formule el modelo de programación lineal para este problema.

Tabla 10.18

Inversión	**Tasa de rendimiento pronosticada**
Fondo mutuo *A*	0.12
Fondo mutuo *B*	0.09
Fondo del mercado de dinero	0.08
Bonos del gobierno	0.085
Acción *A*	0.16
Acción *B*	0.18

16. **Modelo de asignación** Una compañía se interesa en asignar cinco representantes de ventas a cinco distritos de ventas diferentes. La gerencia estimó las ventas totales que cada representante debe generar si se asigna a distritos diferentes en un periodo de un año. En la tabla 10.19 se resumen estas estimaciones de ventas (en \$1 000 unidades). Se quiere asignar a cada representante a un distrito de ventas de manera que se maximicen las ventas anuales. Suponga que $x_{ij} = 1$ si se asigna al representante i al distrito j y que $x_{ij} = 0$ si no se asigna al representante i al distrito j. Formule el modelo de programación lineal para este problema (recordando que cada representante debe ser asignado y que a cada distrito se debe asignar un representante).

Tabla 10.19

Representante de ventas	Distrito 1	2	3	4	5
1	200	150	100	90	160
2	120	180	160	120	100
3	100	200	120	100	140
4	150	100	220	80	180
5	80	120	100	150	200

17. **Ganancia por carga** El propietario de un barco de carga considera la naturaleza del próximo embarque. Se ofrece el envío de cuatro mercancías diferentes. En la tabla 10.20 se resumen peso, volumen y características de generación de ingreso. El barco tiene tres compartimientos de carga, cada uno caracterizado por sus capacidades de peso y volumen. El compartimiento frontal tiene una capacidad de peso de 100 toneladas y de volumen de 6 000 pies cúbicos. El compartimiento central tiene una capacidad de peso de 140 toneladas y de volumen de 8 000 pies cúbicos. El compartimiento posterior tiene una capacidad de peso de 80 toneladas y de volumen de 5 000 pies cúbicos. El problema es decidir cuánto de cada mercancía se debe aceptar para el embarque si el objetivo es maximizar el ingreso total. Específicamente, se debe decidir cuántas toneladas de cada mercancía se deben colocar en cada compartimiento siempre y cuando no se excedan las capacidades de peso y volumen. Suponga que x_{ij} es igual al número de toneladas de la mercancía i colocadas en el compartimiento j y formule el modelo de programación lineal para este problema.

Tabla 10.20

Mercancía	Peso ofrecido, toneladas	Volumen, pies^3/toneladas	Ingreso, \$ por tonelada
1	200	70	\$1 250
2	100	50	900
3	80	60	1 000
4	150	75	1 200

❑ EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. Determine de manera gráfica el espacio de soluciones, si existe alguno, para este sistema de desigualdades:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geq 5 \\ x_1 + x_2 &\leq 15 \\ x_1 \quad &\leq 20 \\ x_2 &\geq 5 \end{aligned}$$

2. Una compañía fabrica y vende cinco productos. En la tabla 10.21 se dan los costos por unidad, el precio de venta y los requerimientos de trabajo por hora por unidad producida. Si el objetivo es maximizar la utilidad total, formule un modelo de programación lineal que tenga las restricciones siguientes: se deben fabricar por lo menos 20 unidades del producto *A* y por lo menos 10 unidades del producto *B*; no se tiene disponible la materia prima suficiente para una producción total que exceda de 75 unidades; el número de unidades fabricadas de los productos *C* y *E* debe ser igual; la producción combinada de *A* y *B* no debe ser mayor de 50% de la producción combinada de *C*, *D* y *E*; la cantidad producida de *C* debe ser por lo menos la de *A*; y la disponibilidad de trabajo en los departamentos 1 y 2 es igual a 120 y 150 horas, respectivamente.

Tabla 10.21

	Producto				
	A	**B**	**C**	**D**	**E**
Costo por unidad	\$50	\$80	\$300	\$25	\$10
Precio de venta	\$70	\$90	\$350	\$50	\$12
Horas laborales en el departamento 1 por unidad	2	1	0.5	1.6	0.75
Horas laborales en el departamento 2 por unidad	1.5	0.8	1.5	1.2	2.25

3. Resuelva el problema siguiente por el método del punto vértice.

$$\begin{aligned} \text{Maximice} \quad & z = 1.5x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + x_2 \geq 10 \\ & 5x_1 + 10x_2 \leq 120 \\ & x_1 \leq 8 \\ & x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

4. Para los fenómenos de programación lineal siguientes, analice sus significados y apariencia gráfica.

a) Soluciones óptimas alternativas
b) Carencia de solución factible
c) Solución no acotada

MINICASO

PROGRAMACIÓN DE CONTROLADORES DE TRÁFICO AÉREO

Los oficiales de un importante aeropuerto metropolitano revisan sus necesidades de controladores de tráfico aéreo. El contrato de trabajo más reciente especificaba la contratación de ocho turnos diferentes consistentes en ocho horas por turno. Las regulaciones de la FAA especifican que los controladores aéreos trabajen intervalos de dos horas con descansos de una hora. Los oficiales del aeropuerto especifican que cada controlador trabaje las primeras dos horas de un turno. Por consiguiente un controlador está activo seis de las ocho horas.

La figura 10.16 ilustra las horas de cada turno y los periodos en los que cada controlador está trabajando. Con base en un análisis del volumen de tráfico diario y los lineamientos de la FAA, los funcionarios determinaron el número mínimo de controladores en activo por cada hora del día. Éstos también se indican en la figura 10.16.

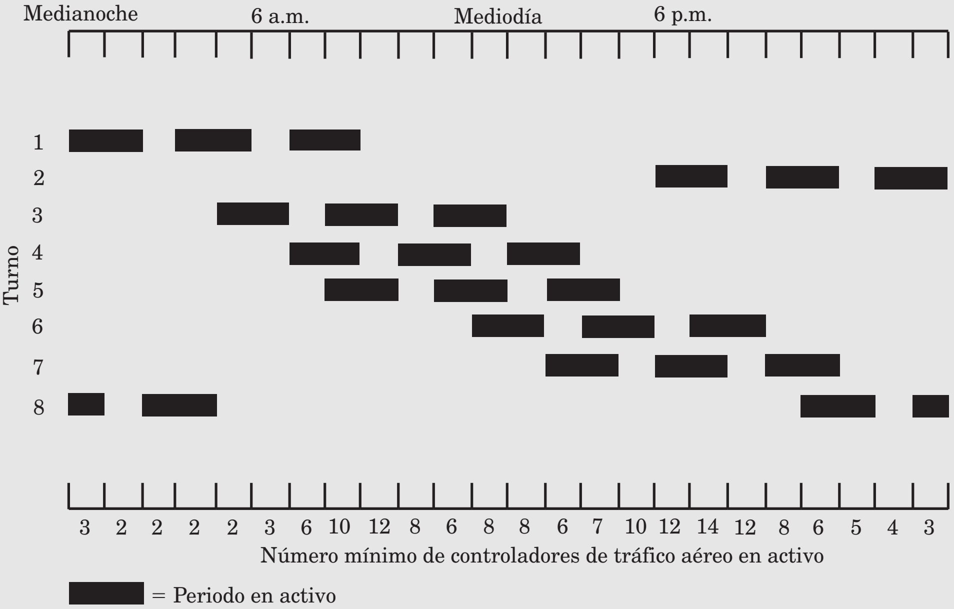


Figura 10.16 Requerimientos del turno de los controladores de tráfico aéreo.

El pago base por controlador es de $80 por turno con ciertas diferencias para ciertos turnos. A cualquier turno *que comienza* entre las 4 p.m. y las 11 p.m. (inclusive) se paga una prima de 10% por el turno completo; cualquiera *que comience* entre la medianoche y las 6 a.m. (inclusive) recibe una prima de 20 por ciento.

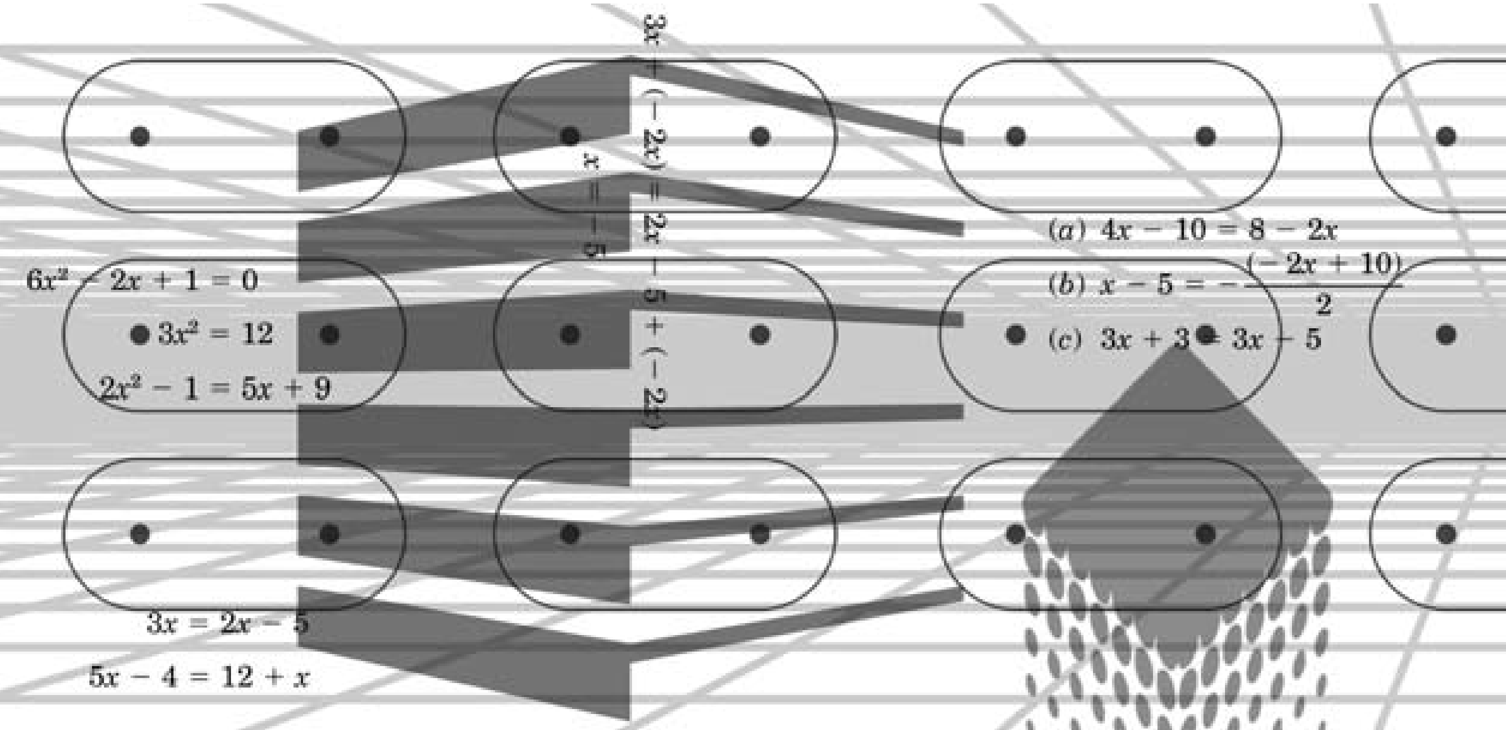
Los oficiales del aeropuerto quieren determinar el número de controladores que se deben contratar para cada turno con el fin de cumplir los requerimientos por hora con un costo mínimo por día.

***a*)** Formule un modelo apropiado.

***b*)** Suponga que la FAA permitirá turnos de tiempo extra de tres horas, dado que la primera hora de las tres horas se está inactivo. Quienes trabajan horas extra reciben crédito de un mediodía adicional de trabajo y se les paga turno y medio (basados en el pago/turno determinado en la parte *a*) para el tiempo extra. Las decisiones con estas suposiciones son cuántos controladores deben comenzar un turno regular y cuántos un turno de tiempo extra (de 11 horas) para cada uno de los ocho turnos. Formule este problema.

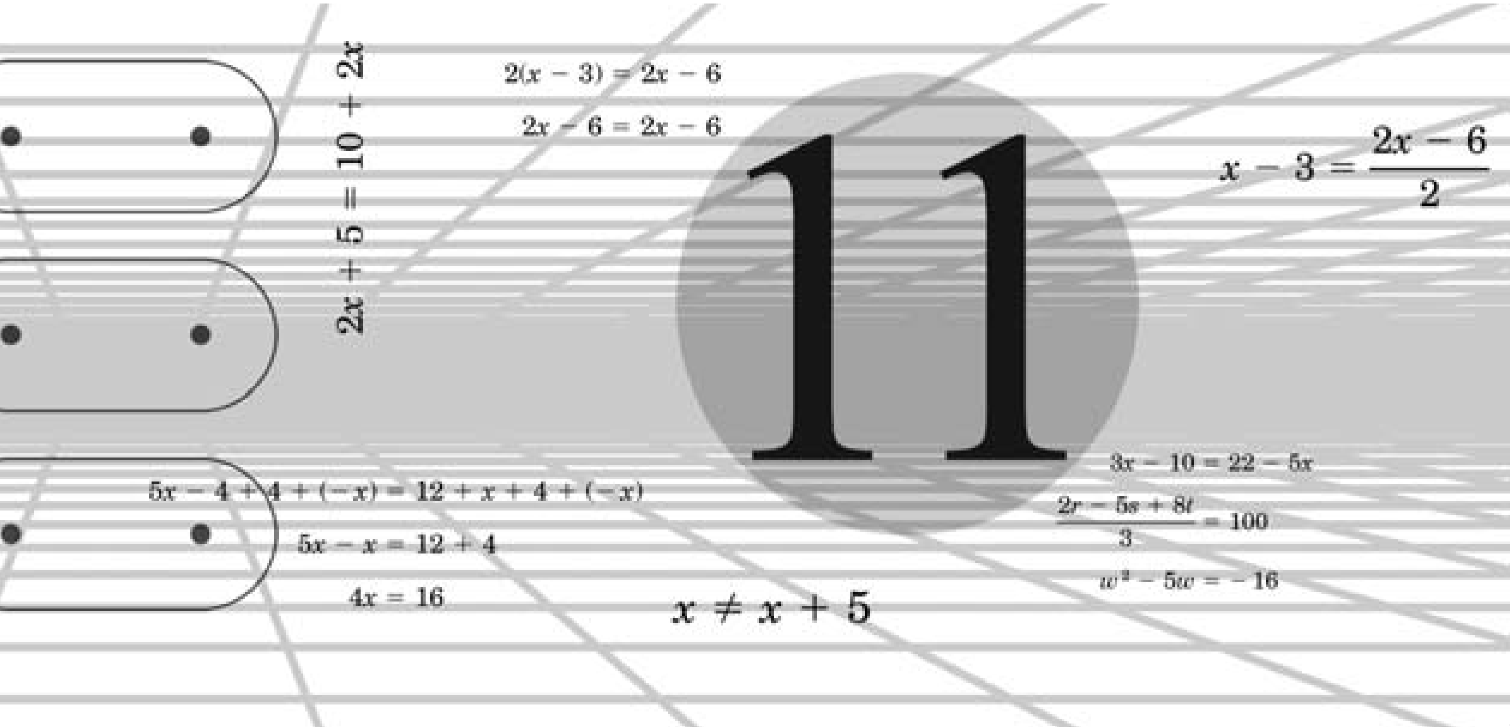
CAPÍTULO 11

Método simplex y métodos de solución por computadora



OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Proporcionar una comprensión de la estructura y las suposiciones subyacentes en los modelos de programación lineal.
- Ilustrar maneras en que se manifiesten los fenómenos especiales de programación lineal cuando se utiliza el método simplex.
- Analizar los métodos de solución por computadora para problemas de programación lineal, haciendo énfasis particular en la interpretación de los resultados por computadora.



ESCENARIO DE MOTIVACIÓN: Revisión de entrega de premios

En el ejemplo 10 del capítulo 10 se presenta una aplicación en la que un organismo federal deseaba otorgar $1 000 millones en premios por la investigación innovadora en el área de alternativas de energía. Un equipo de revisión de la gerencia formado por científicos y economistas hizo una revisión preliminar de 200 solicitudes, reduciendo el campo a seis finalistas. Dado un conjunto de consideraciones y requerimientos asociados a la cesión de premios, se formuló el modelo de programación lineal para esta aplicación. En este capítulo se pretende determinar la solución óptima para el problema (ejemplo 14).

En este capítulo se estudiará el método simplex para resolver problemas de programación lineal. Primero se verá un panorama de la naturaleza y los requerimientos para utilizar el método simplex. A continuación se presentará e ilustrará la técnica para resolver problemas de maximización que contienen todas las restricciones de “menor o igual que”. Después se comentará el procedimiento para resolver problemas de minimización y problemas que contienen otros tipos de restricciones. Luego se analizará la manera en que se identifican los fenómenos especiales, como las soluciones óptimas alternativas, mediante el método simplex. Se estudiarán métodos de solución por computadora para modelos de programación lineal, enfatizando en particular la interpretación de la salida de las soluciones por computadora. Por último, se estudiará el problema de la programación lineal *dual* y su importancia.

11.1 Preliminares del método simplex

El propósito en esta sección es ofrecer un panorama del método simplex y analizar los requerimientos necesarios para usarlo.

Panorama del método simplex

Como se indicó en el capítulo 10, se pueden aplicar procedimientos de solución gráfica sólo para problemas de programación lineal que implican dos variables. Se puede estudiar la geometría de los problemas con tres variables; sin embargo, la mayoría de nosotros no tenemos capacitación en gráficas tridimensionales. Y más allá de las tres variables, no hay marco geométrico de referencia. Puesto que las aplicaciones más realistas de la programación lineal implican mucho más que dos variables, es necesario un procedimiento de solución aparte del método gráfico.

El procedimiento no gráfico más popular recibe el nombre de *método simplex*. El método simplex es un procedimiento algebraico para resolver sistemas de ecuaciones en que se debe optimizar la función objetivo. Éste es un proceso *iterativo*, el cual identifica una solución inicial factible. El procedimiento entonces busca para averiguar si existe una mejor solución. “Mejor” se mide por si es posible mejorar el valor de la función objetivo. Si se señala una mejor solución, la búsqueda se reanuda. La generación de cada solución sucesiva implica resolver un sistema de ecuaciones lineales. La búsqueda continúa hasta que ya no es posible mejorar la función objetivo.

Gráficamente puede imaginar el procedimiento como la búsqueda de diferentes puntos vértice en la región de las soluciones factibles. Las soluciones encontradas en cada ite-

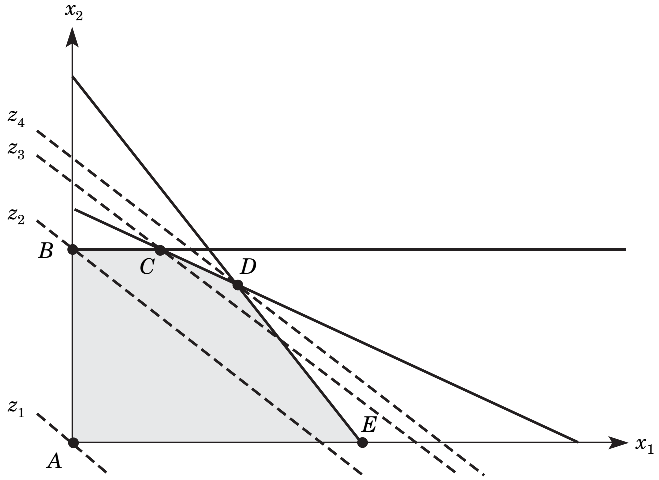


Figura 11.1

ración del método simplex representan tales puntos vértice. No obstante, no se examinan todos los puntos vértice. La búsqueda selecciona sólo un subconjunto de estos puntos vértice, escogiendo uno nuevo y sólo uno si la función objetivo es por lo menos tan buena como el actual punto vértice. Esta idea se ilustra en la figura 11.1. Si se supone un objetivo de maximización, el método simplex podría pasar de una solución inicial en el punto vértice *A* a los puntos *B*, *C* y finalmente *D*. Observe las *líneas de igual utilidad* (*isoutilidad*) z_1, z_2, z_3 y z_4. La línea de isoutilidad se mueve hacia afuera, alejándose del origen, con cada punto vértice sucesivo. Esto ilustra una situación en que el valor de z aumenta con cada solución sucesiva. En un problema de minimización, las soluciones sucesivas tendrían valores de la función objetivo que por lo regular son decrecientes.

Requerimientos del método simplex

Hay tres requerimientos para resolver un problema de programación lineal mediante el método simplex.

Requerimientos del método simplex

I *Se deben expresar como ecuaciones todas las restricciones.*
II *El lado derecho de una restricción no puede ser negativo.*
III *Todas las variables se limitan a valores no negativos.*

En cuanto al *primer requerimiento*, el método simplex es una rutina especial para resolver sistemas de ecuaciones lineales. La mayor parte de los problemas de programación lineal contienen restricciones que son desigualdades. Antes de resolver mediante el método simplex, se deben reformular estas desigualdades como ecuaciones. La transformación de desigualdades en ecuaciones varía dependiendo de la naturaleza de la desigualdad.

Requerimiento I (restricciones de $\leq$)

Para cada restricción de "menor o igual que" ($\leq$) hay una variable no negativa, llamada ***variable de holgura***, la cual se agrega al lado izquierdo de la restricción. Esta variable cumple la función de balancear los dos lados de la ecuación.

Ejemplo 1

Considere las dos restricciones

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 50 && \text{(departamento 1)} \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 60 && \text{(departamento 2)} \end{aligned}$$

donde x_1 *y* x_2 *equivalen, respectivamente, al número de unidades fabricadas de los productos A y B.* Suponga que las dos restricciones representan disponibilidad de trabajo limitada en dos departamentos; los coeficientes de las variables expresan el número de horas requeridas para fabricar una unidad de cada producto y los lados derechos de las restricciones equivalen al número de horas disponibles en cada departamento.

El tratamiento de estas restricciones es sumar una variable de holgura al lado izquierdo de cada una. O bien, las restricciones se reformulan como

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + S_1 &= 50 && \text{(departamento 1)} \\ 4x_1 + 2x_2 + S_2 &= 60 && \text{(departamento 2)} \end{aligned}$$

Las variables de holgura S_1 y S_2 mantienen balanceados los dos lados de sus respectivas ecuaciones. También tienen un significado que es fácil de entender. En este problema representan el número de horas sin emplear en cada departamento. Por ejemplo, $x_1 = 5$ y $x_2 = 10$ sugieren cinco unidades del producto *A* y 10 unidades del producto *B*. Si se sustituyen estos valores en las dos restricciones, se tiene

$$\left.\begin{aligned} 2(5) + 3(10) + S_1 &= 50 \\ 4(5) + 2(10) + S_2 &= 60 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{(departamento 1)} \\ &\text{(departamento 2)} \end{aligned}$$

o

$$\left.\begin{aligned} 40 + S_1 &= 50 \\ 40 + S_2 &= 60 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{(departamento 1)} \\ &\text{(departamento 2)} \end{aligned}$$

o

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= 10 \\ S_2 &= 20 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\text{(departamento 1)} \\ &\text{(departamento 2)} \end{aligned}$$

En otras palabras, en cada departamento se utilizarían 40 horas para la producción. Las variables de holgura tendrían que asumir los valores respectivos de $S_1 = 10$ y $S_2 = 20$ para balancear las ecuaciones. La interpretación de estos valores consiste en que producir cinco unidades del producto *A* y 10 unidades del producto *B* dará como resultado 10 horas restantes en el departamento 1 y 20 horas en el departamento 2. ❑

Ejercicio de práctica

En el ejemplo 1, suponga que $x_1 = 7$ y $x_2 = 12$. ¿Qué valores deben asumir S_1 y S_2? Analice la interpretación de este resultado. *Respuesta*: $S_1 = 0$ y $S_2 = 8$; si se fabrican siete unidades del producto *A* y 12 unidades del producto *B*, se usarán todas las horas en el departamento 1, en tanto que en el departamento 2 sobrarán ocho horas.

Nótese que las variables de holgura se convierten en variables adicionales en el problema, por lo que deben tratarse como cualquier otra variable. Esto significa que están sujetas al requerimiento III; es decir, no pueden asumir valores negativos.

Requerimiento I (restricciones de $\geq$)

Para cada restricción de "mayor o igual que" ($\geq$), una variable no negativa ***E***, llamada ***variable de superávit***, se sustrae del lado izquierdo de la restricción. Esta variable sirve para la misma función que una variable de holgura; mantiene balanceados los dos lados de la ecuación. Además de restar una variable de superávit, se suma una variable no negativa ***A***, conocida como ***variable artificial***, al lado izquierdo de la restricción.

La variable artificial no tiene significado real en el problema; su única función es la de ofrecer un punto de inicio (solución inicial) conveniente para el método simplex.

Ejemplo 2

Suponga en el ejemplo 1 que la fabricación combinada de los dos productos debe ser por lo menos de 25 unidades. La restricción que representa esta tercera condición es:

$$x_1 + x_2 \geq 25$$

Antes de resolver por el método simplex, se debe transformar la desigualdad en la ecuación equivalente

$$x_1 + x_2 - \boldsymbol{E_3} + \boldsymbol{A_3} = 25$$

Los subíndices de E_3 y A_3 indican el número de restricción. Si $x_1 = 20$ y $x_2 = 35$, la variable de superávit E_3 debe ser igual a 30 para balancear los dos lados de la ecuación. La interpretación de la variable de superávit E_3 es que la fabricación combinada de 20 unidades del producto *A* y 35 unidades del producto *B* excede el requerimiento mínimo por 30 unidades. Igual que con las variables de holgura, las variables de superávit a menudo tienen una interpretación significativa en la aplicación. El valor asociado de A_3 es cero. Se comprenderán mejor las variables artificiales conforme se avance en este capítulo. ❑

Requerimiento I (restricciones de $=$)

Para cada restricción de "igual a" ($=$) se suma una variable artificial al lado izquierdo de la restricción.

Ejemplo 3 Transforme el siguiente conjunto de restricciones en la forma estándar mediante el método simplex:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 100 \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 40 \\ x_1 - 2x_2 &= 25 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

SOLUCIÓN

El conjunto de restricciones transformado es el siguiente:

$$x_1 + x_2 + S_1 \qquad\qquad\qquad = 100 \qquad \textbf{(1)}$$

$$2x_1 + 3x_2 \qquad - E_2 + A_2 \qquad = 40 \qquad \textbf{(2)}$$

$$x_1 - 2x_2 \qquad\qquad\qquad + A_3 = 25 \qquad \textbf{(3)}$$

$$x_1, x_2, S_1, E_2, A_2, A_3 \geq 0$$

*Nótese que a cada variable complementaria (de holgura, de superávit y artificial) se asigna un subíndice que corresponde al número de restricción.** También la restricción no negativa (requerimiento III) se aplica a todas las variables complementarias. ❑

El requerimiento II del método simplex establece que el lado derecho de cualquier ecuación de restricción no sea negativo. Si una restricción tiene un lado derecho negativo, se puede multiplicar la restricción por −1 para hacer que el lado derecho sea positivo.

Ejemplo 4 Para las siguientes restricciones, haga que el lado derecho sea positivo.

a) $2x_1 - 5x_2 \leq -10$ *b*) $x_1 + 6x_2 \geq -100$ *c*) $5x_1 - 2x_2 = -28$

SOLUCIÓN

a) Multiplicar la restricción por −1 da como resultado

$$-2x_1 + 5x_2 \geq 10$$

b) Multiplicar la restricción por −1 da como resultado

$$-x_1 - 6x_2 \leq 100$$

c) Multiplicar la restricción por −1 da como resultado

$$-5x_1 + 2x_2 = 28$$

---

* El denominativo de variables complementarias puede variar ligeramente en diferentes libros de texto.

Nótese que en el caso de las restricciones de desigualdades, el sentido de la desigualdad se invierte al multiplicar por un número negativo. ❑

El requerimiento III del método simplex establece que todas las variables se restrinjan a valores no negativos. Hay técnicas especializadas para manejar las variables que *pueden* asumir valores negativos; sin embargo, no se estudiarán estos métodos. El único punto que se debe repetir es que las variables de holgura, de superávit y artificiales también están restringidas a valores no negativos.

Ejemplo 5

Un problema de programación lineal tiene cinco variables de decisión, 10 restricciones de ($\leq$), 8 restricciones de ($\geq$) y 2 restricciones de ($=$). Cuando se reformula este problema para observar el requerimiento I del método simplex, ¿cuántas variables habrá y de qué tipos?

SOLUCIÓN

Habrá 33 variables: cinco variables de decisión, 10 variables de holgura asociadas a las 10 restricciones de ($\leq$), 8 variables de superávit asociadas a las 8 restricciones de ($\geq$) y 10 variables artificiales asociadas a las restricciones de ($\geq$) y ($=$). ❑

Ejercicio de práctica

Un problema de programación lineal tiene ocho variables de decisión, 20 restricciones de ($\leq$), 10 restricciones de ($\geq$) y 5 restricciones de ($=$). Cuando se reformula para observar el requerimiento I, ¿cuántas variables habrá? *Respuesta*: 53.

Soluciones factibles básicas

Cuando los problemas de programación lineal se han convertido a la *forma estándar* en que todas las restricciones se reformulan y se han sumado las variables complementarias, el sistema resultante de ecuaciones de restricción tiene más variables que ecuaciones.

Ejemplo 6

Considere una vez más el problema de la mezcla de productos con dos variables empleado para ilustrar el procedimiento de solución gráfica de la sección 10.2.

$$
\begin{array}{lrll}
\text{Maximice} & z = 5x_1 + 6x_2 & & \\
\text{sujeto a} & 3x_1 + 2x_2 \leq 120 & \text{(departamento 1)} & \textbf{(1)} \\
 & 4x_1 + 6x_2 \leq 260 & \text{(departamento 2)} & \textbf{(2)} \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & & \textbf{(3)}
\end{array}
$$

Enfóquese por un momento en el conjunto de restricciones estructurales. Cuando se transforman en la forma estándar, se pueden reformular como

$$3x_1 + 2x_2 + S_1 \qquad = 120 \tag{4}$$

$$4x_1 + 6x_2 \qquad + S_2 = 260 \tag{5}$$

El conjunto de restricciones reformulado es un sistema de ecuaciones de (2 × 4), con más variables que ecuaciones. ❑

Se ilustran los conceptos de: *a*) una **solución factible**; *b*) una **solución básica** y *c*) una **solución básica factible**. Si se refiere a las ecuaciones (4) y (5) en el ejemplo 6, una ***solución factible*** *es cualquier conjunto de valores para las cuatro variables que satisfaga las dos ecuaciones y las restricciones no negativas.* Por ejemplo, si se establece tanto x_1 como x_2 igual a 5, estos valores se pueden sustituir en (4) y (5) para despejar los valores correspondientes de S_1 y S_2.

$$\begin{aligned} 3(5) + 2(5) + S_1 \qquad &= 120 \\ 4(5) + 6(5) \qquad + S_2 &= 260 \\ 25 + S_1 \qquad &= 120 \\ 50 \qquad + S_2 &= 260 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} S_1 \qquad &= 95 \\ S_2 &= 210 \end{aligned}$$

Por tanto, una solución factible para el sistema es $x_1 = 5$, $x_2 = 5$, $S_1 = 95$ y $S_2 = 210$.

Se puede encontrar una ***solución básica*** *al asignar valores de cero a un subconjunto de variables y despejar los valores correspondientes de las variables restantes.* El número de variables a que se asignan valores de cero es tal que el número de variables restantes equivale al número de ecuaciones (es decir, el sistema resultante es cuadrado). Para las ecuaciones (4) y (5) se encontraría una solución básica al establecer dos variables cualesquiera de las cuatro iguales a cero y despejar las dos resultantes. Por ejemplo, si S_2 y x_2 se establecen iguales a cero, la sustitución da

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2(0) + S_1 \qquad &= 120 \\ 4x_1 + 6(0) \qquad + (0) &= 260 \end{aligned}$$

Al despejar x_1 en la segunda ecuación y sustituir en la primera,

$$\begin{aligned} x_1 \qquad &= \ \ 65 \\ 3(65) + S_1 &= \ 120 \\ S_1 &= -75 \end{aligned}$$

Por consiguiente, una solución básica para el sistema es $x_1 = 65$, $x_2 = 0$, $S_1 = -75$ y $S_2 = 0$. Las variables que se establecen en cero (x_2 y S_2) se consideran las **variables no básicas** para esta solución. Las despejadas (x_1 y S_1) son las **variables básicas**. Nótese que esta solución básica particular no es factible porque no satisface la restricción no negativa.

Una ***solución factible básica*** *es cualquier solución básica que satisfaga la restricción no negativa.* Por ejemplo, si se establece x_1 y x_2 iguales a cero, la sustitución en las dos ecuaciones da

$$\begin{aligned} 3(0) + 2(0) + S_1 \qquad\quad &= 120 \\ 4(0) + 6(0) \qquad\quad + S_2 &= 260 \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} S_1 \qquad\quad &= 120 \\ S_2 &= 260 \end{aligned}$$

Por tanto, otra solución básica para el sistema es: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $S_1 = 120$ y $S_2 = 260$. Las variables x_1 y x_2 son las variables no básicas y S_1 y S_2 son las variables básicas. Dado que las cuatro variables satisfacen la restricción no negativa, ésta es una solución factible básica.

Indiquemos algunas definiciones que son importantes para los próximos análisis. Suponga que la forma de un problema de programación lineal tiene m restricciones estructurales y un total de n' variables de decisión y variables complementarias.

Definición: Solución factible

Una ***solución factible*** es cualquier conjunto de valores para las n' variables que satisfaga tanto las restricciones estructurales como las restricciones de no negatividad.

Definición: Solución básica

Una ***solución básica*** es cualquier solución obtenida al establecer las variables $(n' - m)$ iguales a 0 y despejar en el sistema de ecuaciones los valores de las m variables restantes. Las m variables despejadas se llaman ***variables básicas***. Se dice que estas variables constituyen una ***base***. Las variables restantes $(n' - m)$ o aquellas a las que se asignaron valores de cero reciben el nombre de ***variables no básicas***.

Definición: Solución factible básica

Una ***solución factible básica*** es una solución básica que también satisface las restricciones de no negatividad.

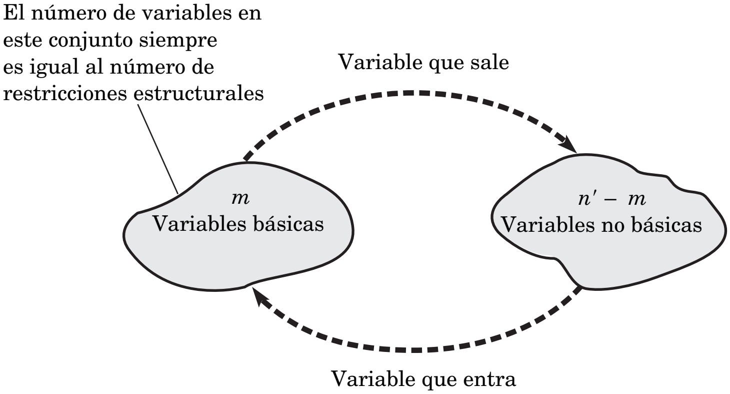


Figura 11.2 Intercambio de variables con el método simplex.

Se puede demostrar que la solución óptima para un problema de programación lineal se incluye en el conjunto de soluciones factibles básicas. Por ende, es posible encontrar la solución óptima al efectuar una búsqueda del conjunto de soluciones factibles básicas. Esto es lo que realiza el método simplex. Comienza con una solución factible básica que consiste en dos conjuntos de variables: las m variables básicas y las $(n' - m)$ variables no básicas. El método simplex determina si se puede mejorar la función objetivo al intercambiar una variable básica y una variable no básica. Si un intercambio da como resultado una mejoría, se establece una variable básica existente igual a 0 (convirtiéndose en una variable no básica), se incluye una variable no básica existente en el conjunto de variables básicas y el sistema de ecuaciones se vuelve a resolver con el nuevo conjunto de variables básicas para formar una nueva solución factible básica. Una vez más se determina si existe una mejor solución. De ser así, tiene lugar otro intercambio y el proceso se repite. Se dice que el método simplex es un ***proceso iterativo*** porque se repite un conjunto específico de pasos de solución hasta que se llega a una conclusión acerca de la solución del problema. El intercambio de variables que tiene lugar en cada iteración se resume en la figura 11.2.

Ejemplo 7

La figura 11.3 ilustra la región de soluciones factibles para un problema de programación lineal.

a) Identifique la naturaleza (tipo) de cada restricción.

b) ¿Qué variables complementarias se sumarán cuando se reformule el problema para cumplir con el requerimiento I del método simplex?

c) ¿Cuántas variables básicas y no básicas habrá en cualquier solución factible básica?

d) ¿Cuáles son las variables básicas y no básicas asociadas al punto vértice *B*? ¿Al punto vértice *F*?

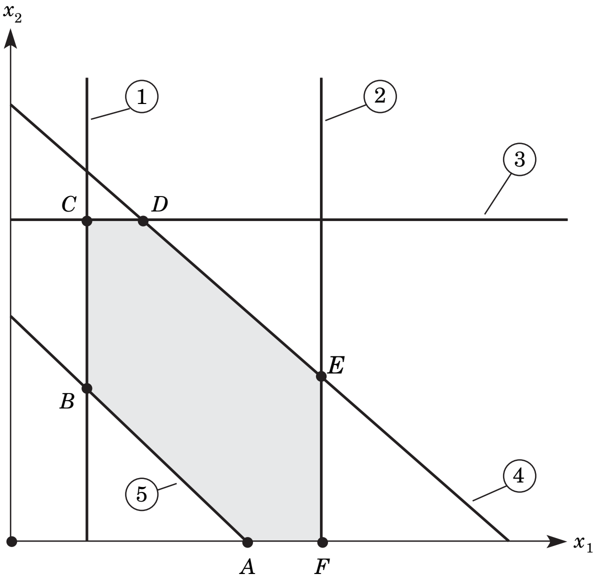


Figura 11.3

SOLUCIÓN

a) Con base en la figura 11.3, las restricciones (1) y (5) son del tipo (≥), en tanto que las restricciones (2), (3) y (4) son del tipo (≤).

b) Usando la convención de que los subíndices de las variables complementarias indican el número de restricción, se introducirían las siguientes variables para satisfacer el requerimiento I del método simplex.

Restricción	Variables complementarias
(1)	E_1 y A_1
(2)	S_2
(3)	S_3
(4)	S_4
(5)	E_5 y A_5

c) Dado que hay cinco restricciones estructurales, habrá cinco variables básicas. El número total de variables (variables de decisión más las complementarias) equivale a nueve: x_1, x_2, E_1, A_1, S_2, S_3, S_4, E_5 y A_5. Si hay cinco variables básicas, las cuatro variables restantes deben ser no básicas.

d) El mejor planteamiento para identificar las variables básicas es determinar primero cuál de las variables de decisión es básica. Mediante la observación del punto vértice *B*, tanto la coordenada x_1 como x_2 parecen ser positivas. Por consiguiente, estas dos variables son básicas. Ahora vamos con las variables complementarias. Se buscan tres variables más que tienen valores positivos en el vértice *B*.

Se ve la ubicación del punto vértice con respecto de las posiciones de las restricciones. *Si el punto vértice no cae en la línea de restricción, esa restricción tiene ya sea holgura o superávit, dependiendo del tipo de restricción. Si el punto vértice cae en una línea de restricción, no hay holgura o superávit en la restricción.* Para el punto B:

Restricción	**Relación con el punto vértice**	**Conclusión**
(1)	B cae sobre ésta	No hay superávit ($E_1 = 0$)
(2)	B cae a la izquierda	Hay holgura ($S_2 > 0$)
(3)	B cae por debajo	Hay holgura ($S_3 > 0$)
(4)	B cae por debajo	Hay holgura ($S_4 > 0$)
(5)	B cae sobre ésta	No hay superávit ($E_5 = 0$)

Por tanto, las variables básicas son x_1, x_2, S_2, S_3 y S_4. Las variables no básicas son E_1, E_5, A_1 y A_5. **Para cualquier punto vértice en una región de soluciones factibles, cualquier variable artificial será igual a cero, implicando que no es básica.**

La observación del punto vértice F debe llevarle a concluir que x_1 es positiva y x_2 equivale a cero. Al considerar el punto vértice F con respecto de las cinco restricciones da como resultado la tabla siguiente:

Restricción	**Relación con el punto de la esquina**	**Conclusión**
(1)	F cae a la derecha	Hay superávit ($E_1 > 0$)
(2)	F cae sobre la línea	No hay holgura ($S_2 = 0$)
(3)	F cae por debajo	Hay holgura ($S_3 > 0$)
(4)	F cae por debajo	Hay holgura ($S_4 > 0$)
(5)	F cae a la derecha	Hay superávit ($E_5 > 0$)

De este modo, las variables básicas son x_1, E_1, S_3, S_4 y E_5. Las variables no básicas son x_2, S_2, A_1 y A_5. ❑

Ejercicio de práctica

¿Cuáles son las variables básicas y no básicas asociadas al punto de la esquina D?
Respuesta: básicas, x_1, x_2, E_1, S_2, E_5; no básicas, S_3, S_4, A_1 y A_5.

Sección 11.1 Ejercicios de seguimiento

1. Dado el siguiente problema de programación lineal, reformule el conjunto de restricciones en la forma estándar incorporando todas las variables complementarias.

$$\begin{array}{ll} \text{Maximice} & z = 5x_1 - 3x_2 + 7x_3 \\ \text{sujeto a} & x_1 + x_2 + x_3 \geq 15 \\ & 3x_1 \qquad - 2x_3 \leq -5 \\ & 4x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 24 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

2. Dado el siguiente problema de programación lineal, reformule el conjunto de restricciones en la forma estándar incorporando todas las variables complementarias.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimice} & z = 3x_1 + 5x_2 \\
\text{sujeto a} & x_1 + x_2 \geq 10 \\
& 2x_1 - 3x_2 \leq 6 \\
& 2x_1 + 5x_2 = 18 \\
& 3x_1 + 2x_2 \leq -3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

3. Dado el siguiente problema de programación lineal, reformule el conjunto de restricciones en la forma estándar incorporando todas las variables complementarias.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimice} & z = 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 7x_4 \\
\text{sujeto a} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 25 \\
& -x_1 + 3x_2 - 2x_4 \leq -20 \\
& 3x_1 - 4x_4 = 10 \\
& 5x_1 - x_2 + 3x_3 + 8x_4 \leq 125 \\
& x_1 \geq 5 \\
& x_3 \leq 30 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{array}
$$

4. Dado el siguiente problema de programación lineal, reformule el conjunto de restricciones en la forma estándar incorporando todas las variables complementarias.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximice} & z = 6x_1 + 4x_2 + 9x_3 \\
\text{sujeto a} & 3x_1 - x_2 + x_3 \geq 16 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \leq 20 \\
& 4x_1 - 2x_3 \geq 6 \\
& 4x_2 + 2x_3 \geq 10 \\
& 2x_1 + 5x_2 - x_3 \leq 40 \\
& x_1 \leq 4 \\
& x_3 \geq 2 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

5. Dada la formulación de la aplicación de la mezcla dietética (ejemplo 8) en la página 460, reformule el conjunto de restricciones en la forma estándar incorporando todas las variables complementarias.

6. Dada la formulación de la aplicación del mantenimiento de carreteras (ejemplo 9) en la página 462, reformule el conjunto de restricciones en la forma estándar incorporando todas las variables complementarias.

7. Dada la formulación de la aplicación de la entrega de premios (ejemplo 10) en la página 463, reformule el conjunto de restricciones en la forma estándar incorporando todas las variables complementarias.

8. Dada la formulación de la aplicación de la mezcla de petróleo (ejemplo 11) en la página 465, reformule el conjunto de restricciones en la forma estándar incorporando todas las variables complementarias.

9. Un problema de programación lineal tiene 15 variables de decisión, 20 restricciones de ($\leq$), 12 restricciones de ($\geq$) y 8 restricciones de ($=$). Al reformular en la forma estándar, ¿cuántas variables se incluirán? ¿Cuántas variables complementarias de cada tipo?

10. Un problema de programación lineal tiene 8 variables de decisión, 16 restricciones de ($\leq$), 10 restricciones de ($\geq$) y 3 restricciones de ($=$). Al reformular en la forma estándar, ¿cuántas variables se incluirán? ¿Cuántas variables complementarias de cada tipo?

11. Dada la región de soluciones factibles de la figura 11.4:

a) Identifique la naturaleza (tipo) de cada restricción.

b) ¿Qué variables complementarias se sumarán cuando se reformule el problema para observar el requerimiento I?

c) ¿Cuántas variables básicas y no básicas habrá en cualquier solución factible básica?

d) ¿Cuáles son las variables básicas y no básicas asociadas a los puntos vértice A, B, C y D?

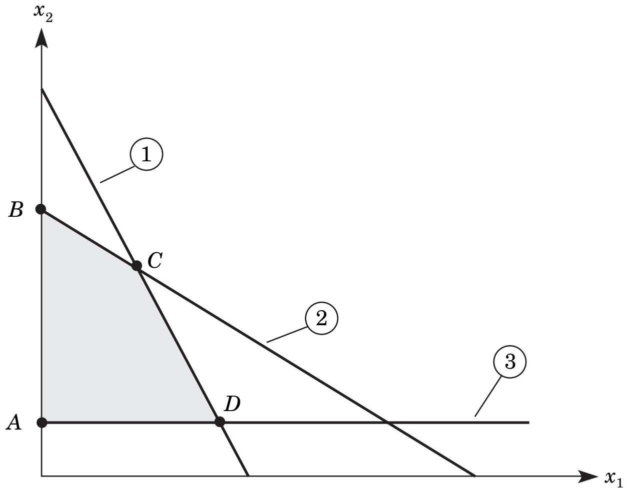


Figura 11.4

12. Dada la región de soluciones factibles de la figura 11.5:

a) Identifique la naturaleza (tipo) de cada restricción.

b) ¿Qué variables complementarias se sumarán cuando se reformule el problema para observar el requerimiento I?

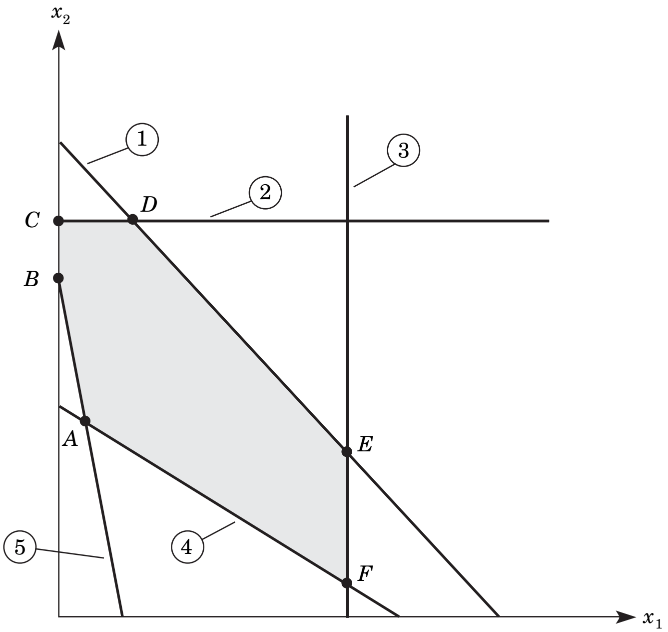


Figura 11.5

c) ¿Cuántas variables básicas y no básicas habrá en cualquier solución factible básica?

d) ¿Cuáles son las variables básicas y no básicas asociadas a los puntos vértice *B* y *D*?

13. Dada la región de soluciones factibles de la figura 11.6:

a) Identifique la naturaleza (tipo) de cada restricción.

b) ¿Qué variables complementarias se sumarán cuando se reformule el problema para observar el requerimiento I?

c) ¿Cuántas variables básicas y no básicas habrá en cualquier solución factible básica?

d) ¿Cuáles son las variables básicas y no básicas asociadas a los puntos vértice *A* y *C*?

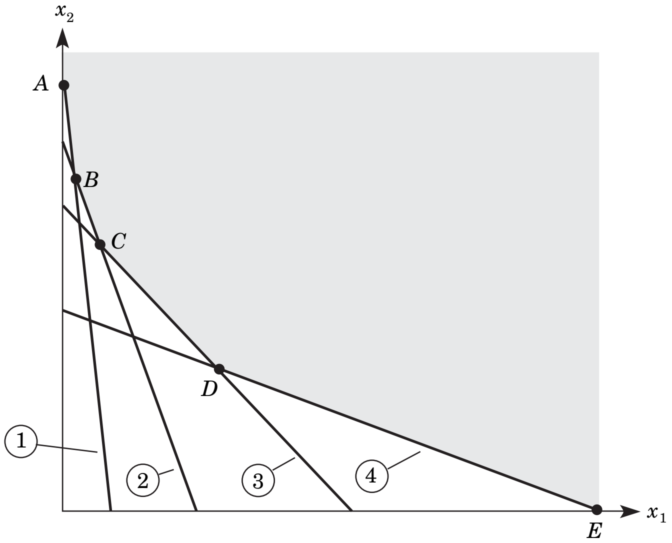


Figura 11.6

14. La región de soluciones factibles de la figura 11.7:

a) Identifique la naturaleza (tipo) de cada restricción.

b) ¿Qué variables complementarias se sumarán cuando se reformule el problema para observar el requerimiento I?

c) ¿Cuántas variables básicas y no básicas habrá en cualquier solución factible básica?

d) ¿Cuáles son las variables básicas y no básicas asociadas a cada uno de los puntos vértice?

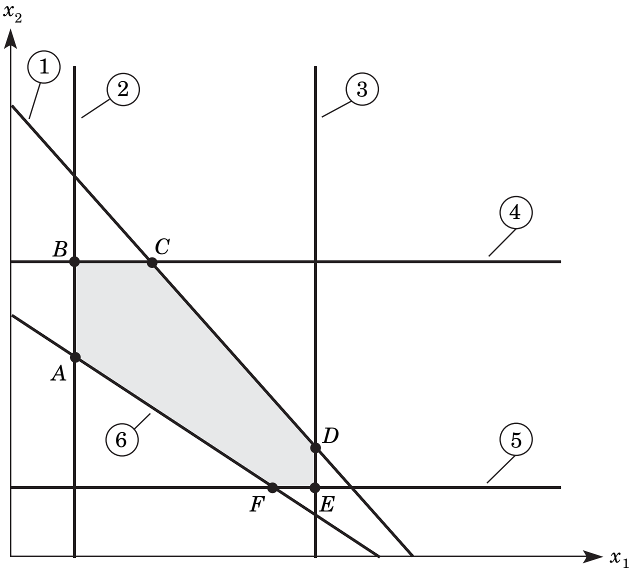


Figura 11.7

11.2 El método simplex

Antes de iniciar los análisis del método simplex, demos una expresión generalizada de un modelo de programación lineal. Dadas las siguientes definiciones

x_j = j-ésima variable de decisión
c_j = coeficiente de la j-ésima variable de decisión en la función objetivo
a_{ij} = coeficiente en la i-ésima restricción para la j-ésima variable
b_i = constante del lado derecho para la i-ésima restricción

el modelo generalizado de programación lineal se puede expresar como sigue:

Optimice (maximice o minimice)

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

sujeto a

$$
\begin{array}{lllllr}
a_{11}x_1 & + \; a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & (\leq, \geq, =)b_1 & (1) \\
a_{21}x_1 & + \; a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & (\leq, \geq, =)b_2 & (2) \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + \; a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & (\leq, \geq, =)b_m & (m) \\
 & & & x_1 & \geq \quad 0 & \\
 & & & x_2 & \geq \quad 0 & \\
 & & & \vdots & \vdots \quad \vdots & \\
 & & & x_n & \geq \quad 0 &
\end{array}
$$

Este modelo generalizado tiene *n* variables de decisión y *m* restricciones estructurales. Nótese que cada restricción estructural tiene sólo una de las condiciones ($\leq, \geq, =$) asignada a la misma. Conforme se estudie el método simplex en ocasiones se usará la notación de este modelo.

Solución por enumeración

Considere un problema que tiene *m* restricciones de ($\leq$) y *n* variables. Antes de resolverlo desaplicando el método simplex, las *m* restricciones se cambiarían en ecuaciones al sumar *m* variables de holgura. Esta reformulación da como resultado un conjunto de restricciones que consiste en *m* ecuaciones y $m + n$ variables.

En la sección 10.2 se estudia el siguiente problema de programación lineal:

$$
\begin{array}{rl}
\text{Maximice} & z = 5x_1 + 6x_2 \\
\text{sujeto a} & 3x_1 + 2x_2 \leq 120 \\
 & 4x_1 + 6x_2 \leq 260 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

Antes de resolver este problema mediante el método simplex, se debe transformar el conjunto de restricciones en el siguiente conjunto equivalente:

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + S_1 &= 120 \\
4x_1 + 6x_2 + S_2 &= 260 \\
x_1, x_2, S_1, S_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

El conjunto restricción implica dos ecuaciones y cuatro variables. Observe que las variables de holgura, además de las variables de decisión, se limitan a valores no negativos.

De todas las soluciones posibles para el conjunto restricción, se puede probar que ocurre una solución óptima cuando dos de las cuatro variables en este problema se establecen iguales a cero y se despejan en el sistema las otras dos variables. La pregunta es: ¿cuáles son las dos variables que se deben establecer iguales a 0 (deben ser *variables no básicas*)? Enumérense las diferentes posibilidades. Si S_1 y S_2 se establecen iguales a 0, las ecuaciones de restricción se convierten en

$$3x_1 + 2x_2 = 120$$

$$4x_1 + 6x_2 = 260$$

Resolviendo el sistema para las correspondientes *variables básicas* x_1 y x_2, da como resultado $x_1 = 20$ y $x_2 = 30$.

Si se establecen iguales a cero tanto S_1 como x_1, el sistema se convierte en:

$$2x_2 = 120$$

$$6x_2 + S_2 = 260$$

Al resolver el sistema para las variables básicas correspondientes x_2 y S_2, da como resultado $x_2 = 60$ y $S_2 = -100$.

La tabla 11.1 resume las *soluciones básicas*, es decir, todas las posibilidades de solución que resultan al suponer que a dos de las cuatro variables se asignan valores de 0. Nótese que las soluciones 2 y 5 no son factibles. Contienen una variable que tiene un valor negativo, violando la restricción de no negatividad. No obstante, las soluciones 1, 3, 4 y 6 son *soluciones factibles básicas* para el problema de programación lineal y son candidatas para la solución óptima.

Tabla 11.1

Solución	Variables no básicas	Variables básicas
1	S_1, S_2	$x_1 = 20, x_2 = 30$
*2	x_1, S_1	$x_2 = 60, S_2 = -100$
3	x_1, S_2	$x_2 = 43\frac{1}{3}, S_1 = 33\frac{1}{3}$
4	x_2, S_1	$x_1 = 40, S_2 = 100$
*5	x_2, S_2	$x_1 = 65, S_1 = -75$
6	x_1, x_2	$S_1 = 120, S_2 = 260$

La figura 11.8 es la representación gráfica del conjunto de restricciones. En esta figura, los puntos de intersección *(A, B, C, D, E, F)* entre las líneas de restricción estructural y las restricciones no negativas (ejes de x_1 y x_2) representan el conjunto de soluciones básicas. Las soluciones 1, 3, 4 y 6 de la tabla 11.1 son las soluciones factibles básicas y corresponden a los cuatro puntos vértice en la región de soluciones factibles de la figura 11.8. Específicamente, la solución 1 corresponde al punto vértice *C*, la solución 3 corresponde al punto vértice *B*, la solución 4 corresponde al punto vértice *D* y la solución 6 corresponde al punto vértice *A*. Las soluciones 2 y 5, que no son factibles, corresponden a los puntos *E* y *F* de la figura 11.8.

Lo que cabe destacar es que al establecer todas las combinaciones de dos diferentes variables iguales a 0 y resolver el sistema para obtener las variables restantes, se permitió identificar un conjunto de soluciones potenciales (soluciones básicas) para el problema de programación lineal. Se descalificó automáticamente un subconjunto de estas soluciones porque contenían soluciones no factibles (2 y 5). Sin embargo, las soluciones factibles básicas restantes correspondían a los puntos vértice en la región de soluciones factibles. Como se sabe que ocurrirá una solución óptima por lo menos en uno de estos puntos vértice, un análisis más detallado revelará una solución óptima.

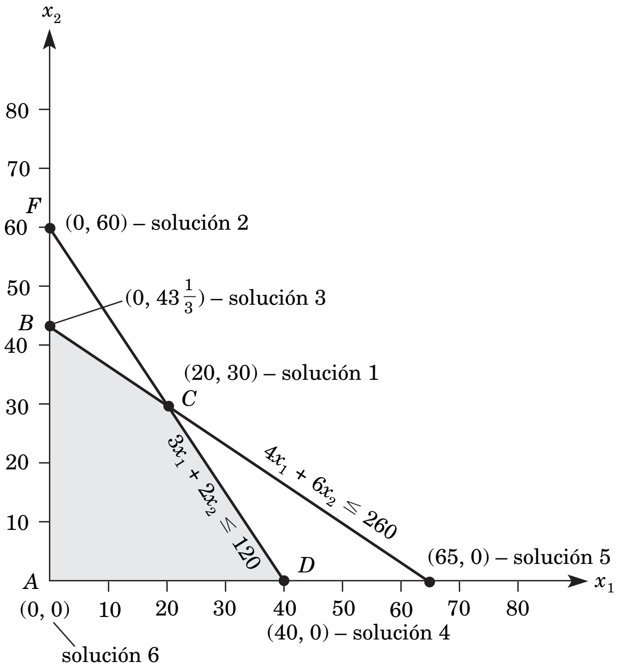


Figura 11.8

Para un problema de maximización que tiene m restricciones de $(\leq)$ y n variables de decisión, la adición de m variables de holgura da como resultado m ecuaciones de restricción que contienen $m + n$ variables. *Es posible encontrar una solución óptima para este problema al establecer n de las variables iguales a 0 y despejar las m variables restantes.* En el proceso de seleccionar diferentes combinaciones de n variables que se deben establecer iguales a 0, el método simplex: 1) *nunca seleccionará una combinación que dé como resultado una solución no factible,* y 2) *garantizará que cada nueva combinación seleccionada dé como resultado una solución que tiene un valor de la función objetivo por lo menos tan bueno como el de la solución común y corriente.*

El álgebra del método simplex

Antes de presentar el método simplex de manera formal, se analizará el álgebra en que éste se basa. La aritmética simplex se basa en el método de eliminación de Gauss que se estudió en la sección 3.2. Se sugiere volver a leer esta sección si no está familiarizado con este método.

Regrese al siguiente problema de maximización:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximice} & z = 5x_1 + 6x_2 + 0S_1 + 0S_2 \\ \text{sujeto a} & 3x_1 + 2x_2 + S_1 \qquad\quad = 120 \\ & 4x_1 + 6x_2 \qquad\quad + S_2 = 260 \\ & \qquad\qquad x_1, x_2, S_1, S_2 \geq \quad 0 \end{array}$$

Nótese que a las variables de holgura se les asignaron coeficientes de la función objetivo de 0. *Aunque puede haber excepciones, a las variables de holgura casi siempre se les asignan coeficientes de 0 en la función objetivo.* La razón es que estas variables por lo regular con nada contribuyen al valor de la función objetivo.

Ilustremos la forma en que el procedimiento de eliminación de Gauss se puede utilizar para identificar el conjunto de soluciones básicas. Si se representa el sistema de ecuaciones de restricción mostrando sólo los coeficientes de las variables y las constantes del lado derecho, se tiene

$$\begin{array}{cccc|cl} \underline{x_1} & \underline{x_2} & \underline{S_1} & \underline{S_2} & & \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 120 & \boldsymbol{R_1} \\ 4 & 6 & 0 & 1 & 260 & \boldsymbol{R_2} \end{array}$$

Recuerde que el procedimiento de eliminación de Gauss usa ***operaciones de fila*** para transformar el sistema de ecuaciones original en un sistema equivalente. Al terminar el procedimiento de Gauss (suponiendo que haya una solución única), el sistema equivalente tiene las propiedades de que sólo una variable permanece en cada ecuación y que el lado derecho de la ecuación es igual al valor de esa variable. Al revisar los coeficientes de las variables para este sistema de ecuaciones de restricción ($\boldsymbol{R_1}$ y $\boldsymbol{R_2}$), un punto de partida conveniente sería declarar x_1 y x_2 como variables no básicas, estableciendo que son iguales a 0. Los coeficientes de las variables para S_1 y S_2 ya están en la forma deseada. Si tanto x_1 como x_2 es igual a 0, los valores correspondientes de las variables básicas S_1 y S_2 son $S_1 = 120$ y $S_2 = 260$.

$$\begin{array}{cccc|c} \underline{x_1} & \underline{x_2} & \underline{S_1} & \underline{S_2} & \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 120 \\ 4 & 6 & 0 & 1 & 260 \end{array}$$

Suponga que se quiere establecer x_1 y S_1 iguales a cero y resolver el sistema para x_2 y S_2. En comparación con la solución original, se desea reemplazar S_1 con x_2 como una variable básica. Y nos gustaría que los coeficientes para x_2 y S_2 tuvieran la forma

$$\begin{array}{cccc|c} \underline{x_1} & \underline{x_2} & \underline{S_1} & \underline{S_2} & \\ & \textcircled{1} & & 0 & \\ & \textcircled{0} & & 1 & \end{array}$$

Dado que los coeficientes para S_2 ya tienen la forma deseada, sólo se necesita cambiar los de x_2 de $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Para crear el ①, se multiplica la fila 1 por $\frac{1}{2}$, obteniendo como resultado

$$\begin{array}{cccc|cl} \underline{x_1} & \underline{x_2} & \underline{S_1} & \underline{S_2} & & \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 60 & \boldsymbol{R'_1 = \tfrac{1}{2} R_1} \\ 4 & 6 & 0 & 1 & 260 & \boldsymbol{R_2} \end{array}$$

El 6 se transforma en ⓪ al multiplicar la nueva fila 1 (R_1') por -6 y sumar este múltiplo a la fila 2, o

$$\begin{array}{cccc|cl} x_1 & x_2 & S_1 & S_2 & & \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 60 & \boldsymbol{R_1'} \\ -5 & 0 & -3 & 1 & -100 & \boldsymbol{R_2' = R_2 - 6R_1'} \end{array}$$

Puesto que x_1 y S_1 se establecieron iguales a 0, los valores de x_2 y S_2 se pueden leer directamente como $x_2 = 60$ y $S_2 = -100$. Si consulta la tabla 11.1 verá que esta solución es igual a la solución 2.

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & S_1 & S_2 & \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 60 \\ -5 & 0 & -3 & 1 & -100 \end{array}$$

Si se establece S_1 y S_2 iguales a 0, x_1 va a reemplazar a S_2 como una variable básica. Para la nueva base nos gustaría que los coeficientes de x_1 y x_2 tengan la forma

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & S_1 & S_2 & \\ \textcircled{0} & 1 & & & \\ \textcircled{1} & 0 & & & \end{array}$$

Empezando con la última solución básica, los coeficientes de x_2 están en la forma deseada y se necesita cambiar los de x_1 de $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -5 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. El ① se crea al multiplicar R_2' por $-\frac{1}{5}$, obteniendo como resultado

$$\begin{array}{cccc|cl} x_1 & x_2 & S_1 & S_2 & & \\ \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 60 & \boldsymbol{R_1'} \\ 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 20 & \boldsymbol{R_2'' = -\tfrac{1}{5}R_2'} \end{array}$$

El ⓪ se crea al multiplicar R_2'' por $-\frac{3}{2}$ y sumar este múltiplo a R_1', o

$$\begin{array}{cccc|cl} x_1 & x_2 & S_1 & S_2 & & \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \frac{3}{10} \\ -\frac{1}{5} \end{matrix}} & \begin{matrix} 30 \\ 20 \end{matrix} & \begin{matrix} \boldsymbol{R_1'' = R_1' - \tfrac{3}{2}R_2''} \\ \boldsymbol{R_2''} \end{matrix} \end{array}$$

Si se establece S_1 y S_2 iguales a 0, los valores de x_1 y x_2 se leen directamente como $x_1 = 20$ y $x_2 = 30$, que corresponden a la solución 1 de la tabla 11.1.

Incorporación de la función objetivo

Al resolver mediante el método simplex, la función objetivo y las restricciones se combinan para formar un sistema de ecuaciones. La función objetivo es una de las ecuaciones y z se convierte en una variable adicional en el sistema. Al reordenar las variables en la función objetivo de modo que todas queden en el lado izquierdo de la ecuación, el problema se representa mediante el sistema de ecuaciones

$$z - 5x_1 - 6x_2 - 0S_1 - 0S_2 = 0 \quad \textbf{(0)}$$

$$3x_1 + 2x_2 + S_1 = 120 \quad \textbf{(1)}$$

$$4x_1 + 6x_2 + S_2 = 260 \quad \textbf{(2)}$$

Nótese que la función objetivo está marcada como ecuación (0).

El objetivo es resolver este sistema de ecuaciones de (3 × 5) con el fin de maximizar el valor de z. Dado que preocupa en particular el valor de z y queremos conocerlo para cualquier solución, z siempre será una variable básica. Sin embargo, la práctica estándar no es referirse a z como una variable básica. Los términos *variable básica* y *variable no básica* casi siempre se reservan para las otras variables en el problema.

Las operaciones del método simplex se realizan en un formato tabular. La tabla inicial, o ***cuadro***, para nuestro problema se muestra en la tabla 11.2. Nótese que hay una fila para cada ecuación y la tabla contiene los coeficientes de cada variable en las ecuaciones. La ***columna b_i*** contiene las constantes del lado derecho de las ecuaciones, donde b_i es la constante del lado derecho para la ecuación i o la fila i.

Tabla 11.2

	z	x_1	x_2	S_1	S_2	b_i	Número de fila
Variables básicas	**1**	**−5**	**−6**	**0**	**0**	**0**	**(0)**
S_1	0	3	2	1	0	120	(1)
S_2	0	4	6	0	1	260	(2)

En un problema de maximización que tiene todas las restricciones de (≤), la solución inicial tendrá un conjunto de variables que consiste en las variables de holgura del problema. Al establecer x_1 y x_2 iguales a 0 en nuestro problema, la solución inicial es $S_1 = 120$, $S_2 = 260$ y $z = 0$. Las variables básicas y las filas en las que se leen sus valores se muestran en la primera columna del cuadro.

Dada cualquier solución intermedia, el método simplex compara las variables no básicas con el conjunto de variables básicas. El propósito es determinar si cualquiera de las variables no básicas debe reemplazar a una básica. ***Una variable no básica reemplazará una básica sólo si: 1) parece que la función objetivo va a mejorar y 2) la nueva solución es factible.***

En cualquier cuadro simplex, los coeficientes de la fila (0) para todas las variables (excepto z) representan el cambio en el valor actual de la función objetivo si el valor de la variable (en esa columna) aumenta una unidad. *El signo de los coeficientes de la fila (0) es el opuesto de la dirección real del cambio. Es decir, un coeficiente negativo sugiere un* ***incremento*** *en el valor de z; un coeficiente positivo sugiere un* ***decremento****.*

Regla 1: Comprobación de la optimización en un problema de maximización

En un problema de maximización se encontrará la solución óptima si todos los coeficientes de la fila (0) correspondientes a las variables son mayores o iguales que 0. Si cualesquiera de los coeficientes de la fila (0) son negativos para las variables no básicas, es posible encontrar una mejor solución al asignar a estas variables una cantidad positiva.

Ya que los coeficientes de la fila (0) para x_1 y x_2 son –5 y –6, respectivamente, en la tabla 11.2 no se ha encontrado la solución óptima.

Regla 2: Nueva variable básica en el problema de maximización

En un problema de maximización, la variable no básica que va a reemplazar una variable básica es la que tiene el coeficiente de la fila (0) ***más negativo***. Las “coincidencias” se pueden deshacer en forma arbitraria.

Al seleccionar una variable no básica para que se convierta en una básica, el método simplex elige aquella que dará como resultado la mayor mejora *marginal* (por unidad) en z. Puesto que un mejoramiento de seis unidades es preferible que uno de cinco unidades, el método simplex elegiría x_2 para que se convierta en una variable básica en la próxima solución. *En el cuadro simplex, la columna que representa la nueva variable básica se llamará* ***columna clave***.

Si z aumenta seis unidades por *cada* unidad de x_2, nos gustaría que x_2 se volviera lo más grande posible. El método simplex permitirá que x_2 aumente en valor hasta que una de las variables básicas actuales llegue a un valor de 0 (convirtiéndose así en una variable no básica). Si se reformulan las ecuaciones (1) y (2) como una función de las variables no básicas, se pueden observar los efectos que los cambios en x_2 tendrán sobre los valores de las variables básicas actuales:

$$S_1 = 120 - 3x_1 - 2x_2 \tag{1a}$$

$$S_2 = 260 - 4x_1 - 6x_2 \tag{2a}$$

La ecuación (1*a*) indica que, en este momento, S_1 es igual a 120, pero reducirá su valor en dos unidades por cada unidad que x_2 aumente. Si se permite que el valor de x_2 aumente a 120/2 o 60 unidades, S_1 se llevará a un valor de 0. La ecuación (2*a*) indica que actualmente S_2 es igual a 260, pero su valor se reducirá seis unidades por cada unidad que x_2 se incremente. S_2 se llevará a un valor de 0 si se permite que x_2 aumente a un valor de 260/6 o $43\frac{1}{3}$ unidades. La pregunta es: ¿Qué variable básica se llevará primero a un valor de 0 (se convertirá en no básica) al permitir que x_2 aumente de valor? La respuesta es S_2, cuando $x_2 = 43\frac{1}{3}$. Si se permitiera que x_2 aumentara a un valor de 60, la sustitución en la ecuación (2*a*) daría como resultado

$$\begin{aligned} S_2 &= 260 - 6(60) \\ &= -100 \end{aligned}$$

Puesto que S_2 sería negativo, esta solución no es factible. Se concluye que x_2 deberá reemplazar S_2 como una variable básica en la siguiente solución.

Utilizando la estructura de cuadro, la decisión de qué variable básica se debe sustituir se toma concentrándose en la columna clave y la columna b_i. El cuadro parcial de la tabla 11.3 ilustra una columna que se supone representa la *columna clave* para una solución intermedia.

Tabla 11.3

	Columna clave			
. . .	x_k	. . .	b_i	**Número de fila**
. . .	a_{0k}	. . .	b_0	(0)
. . .	a_{1k}	. . .	b_1	(1)
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
. . .	a_{mk}	. . .	b_m	(m)

El elemento de la columna clave a_{ik} representa la constante que aparece en la fila i de la columna clave (k). De modo similar, los valores de b_i representan las constantes del lado derecho para la fila i.

Para cualquier columna, los valores de a_{ij} (i = 1 hasta m) reciben el nombre de **índices marginales de sustitución*****. Estos valores indican los cambios necesarios en cada una de las variables básicas actuales si la variable (en la columna clave) aumenta una unidad. Como sucede con los coeficientes de la fila (0), el signo en estos índices marginales de sustitución es el opuesto de la dirección del cambio real. Un valor de a_{ij} positivo indica un*** **decremento** ***en la i-ésima variable básica; un valor negativo de a_{ij} indica un*** **aumento** ***en la i-ésima variable básica.***

Tabla 11.4

	Variables básicas	z	x_1	x_2 (Columna clave)	S_1	S_2	b_i	**Número de fila**	b_i/a_{ik}
		1	**−5**	**−6**	**0**	**0**	**0**	**(0)**	
	S_1	0	3	2	1	0	120	(1)	120/2 = 60
(Variable de partida)	S_2	0	4	6	0	1	260	(2)	**260/6 = $43\frac{1}{3}$***

Si nos concentramos en la columna clave de la tabla 11.4, el coeficiente en la fila (0) sugiere que el valor actual de *z aumentará* seis unidades si se incrementa el valor de x_2 una unidad. Los valores de a_{ik} en las filas (1) y (2) son 2 y 6, respectivamente. Éstos indican que si x_2 aumenta su valor en una unidad: 1) el valor de S_1 *se reducirá* dos unidades (de su valor actual de 120) y 2) el valor de S_2 *disminuirá* seis unidades (de su valor actual de 260).

Regla 3: Variable básica de salida

La variable básica que se va a reemplazar se encuentra al determinar la fila i relacionada con

$$\text{mín } \frac{b_i}{a_{ik}}, \qquad i = 1, \ldots, m$$

donde $a_{ik} > 0$. Además de identificar la variable básica de salida, el valor mínimo de b_i/a_{ik} es el número máximo de unidades que se pueden introducir de la variable básica de entrada.

La regla 3 sugiere que la razón b_i/a_{ik} se debe determinar para las filas desde la (1) hasta la (m), *donde* $a_{ik} > 0$. Sólo se consideran valores positivos de a_{ik} porque se relacionan con variables básicas que *reducen* su valor al introducir unidades adicionales de la variable de entrada. Se debe identificar la razón mínima y señalar la fila i correspondiente. La variable básica de salida es aquella cuyo valor se lee en este momento desde esta fila. En la tabla 11.4, las razones b_i/a_{ik} se calculan para las filas (1) y (2). La razón mínima es $43\frac{1}{3}$, relacionada con la fila (2). Como el valor de S_2 ahora se lee de la fila (2), S_2 es la variable básica de salida.

PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR

¿Por qué cree que la regla 3 sugiere la identificación de la razón *mínima* b_i/a_{ik}? En la tabla 11.4 seleccione la variable de salida al identificar la razón máxima y vea lo que sucede.

En la solución siguiente se desea leer el valor de la nueva variable básica x_2 de la fila (2). Por lo tanto, se necesita aplicar los procedimientos de eliminación de Gauss para transformar la columna de coeficientes bajo x_2 de $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Se crea el ① al multiplicar la fila (2) por $\frac{1}{6}$. Se crean los dos ⓪ al multiplicar la fila (2) *nueva* por $+6$ y -2 y sumar estos múltiplos, respectivamente, a las filas (0) y (1). La solución siguiente aparece en la tabla 11.5. Observe que una notación abreviada a la derecha de cada fila indica cómo se calcularon los elementos de esa fila. Se utiliza la notación $\boldsymbol{R_j}$ para representar la fila j.

Asimismo, nótese en la tabla 11.5 que x_2 reemplazó S_2 en la columna de las variables básicas. Se pueden leer los valores de z, S_1 y x_2 de la columna b_i como $z = 260$, $S_1 = 33\frac{1}{3}$ y $x_2 = 43\frac{1}{3}$. Ya que x_1 y S_2 son variables no básicas, sus valores son cero para esta solución.

Tabla 11.5

Variables básicas	z	x_1	x_2	S_1	S_2	b_i	Número de fila	
	1	**−1**	**0**	**0**	**1**	**260**	**(0)**	$R_0' = R_0 + 6R_2'$
S_1	0	$\frac{10}{6}$	**0**	1	$-\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	(1)	$R_1' = R_1 - 2R_2'$
x_2	0	$\frac{4}{6}$	**1**	0	$\frac{1}{6}$	$43\frac{1}{3}$	(2)	$R_2' = \frac{1}{6}R_2$

Ejercicio de práctica

Sustituya los valores de $x_1 = 0$ y $x_2 = 43\frac{1}{3}$ en la formulación original y verifique que: *a*) la primera restricción tiene una holgura igual a $33\frac{1}{3}$ unidades; *b*) se satisface la segunda restricción como una igualdad ($S_2 = 0$), y *c*) el valor de z es igual a 260.

Con esta solución nueva, lo primero que debemos verificar es si es óptima. Al aplicar la regla 1, se concluye que la solución no es óptima a causa del coeficiente de −1 para x_1 en la fila (0). Ya que x_1 tiene el único coeficiente negativo en la fila (0), se convertirá en la nueva variable básica. Para determinar la variable básica de salida, se enfoca en los elementos de la columna x_1. Como se muestra en la tabla 11.6, la razón mínima b_i/a_{ik} es 20 y esta razón mínima se asocia a la fila (1). Ya que el valor de S_1 se lee ahora de la fila (1), se identifica S_1 como la variable de salida.

En la solución siguiente se desea leer el valor de la variable básica nueva x_1 de la fila (1). Como tal, la columna de coeficientes bajo x_1 se debería transformar de $\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{10}{6} \\ \frac{4}{6} \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Tabla 11.6

Variables básicas	z	Columna clave x_1	x_2	S_1	S_2	b_i	Número de fila	b_1/a_{ik}
	1	**−1**	**0**	**0**	**1**	**260**	**(0)**	
S_1	0	$\frac{10}{6}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	(1)	$\mathbf{33\frac{1}{3} \div \frac{10}{6} = 20^*}$
x_2	0	$\frac{4}{6}$	1	0	$\frac{1}{6}$	$43\frac{1}{3}$	(2)	$43\frac{1}{3} \div \frac{4}{6} = 65$

Se crea el ① al multiplicar la fila (1) por $\frac{6}{10}$. Los dos ⓪ se crean al multiplicar la fila (1) nueva por +1 y $-\frac{4}{6}$ y sumar estos múltiplos, respectivamente, a las filas (0) y (2).

(Véanse las ecuaciones a la derecha de la tabla 11.7.) La nueva solución aparece en la tabla 11.7.

Tabla 11.7

Variables básicas	z	x_1	x_2	S_1	S_2	b_i	Número de fila	
	1	**0**	**0**	$\mathbf{\frac{6}{10}}$	$\mathbf{\frac{24}{30}}$	**280**	**(0)**	$R_0'' = R_0' + R_1''$
x_1	0	1	0	$\frac{6}{10}$	$-\frac{6}{30}$	20	(1)	$R_1'' = \frac{6}{10}R_1'$
x_2	0	0	1	$-\frac{24}{60}$	$\frac{3}{10}$	30	(2)	$R_2'' = R_2' - \frac{4}{6}R_1''$

Nótese en la tabla 11.7 que x_1 reemplazó a S_1 en la columna de variables básicas. Con S_1 y S_2 no básicas, los valores de z, x_1 y x_2 se leen de la columna b_i como $z = 280$, $x_1 = 20$ y $x_2 = 30$. El paso siguiente es verificar la optimización. Al aplicar la regla 1, se concluye que esta solución es óptima porque *todos los coeficientes de la fila (0) son mayores o iguales que 0*. Esta respuesta concuerda con la que se encuentra al resolver de manera gráfica en la sección 10.2. Se maximiza la función objetivo con un valor de 280 cuando $x_1 = 20$, $x_2 = 30$, $S_1 = 0$ y $S_2 = 0$. La figura 11.9 ilustra la progresión iterativa simplex de la solución óptima.

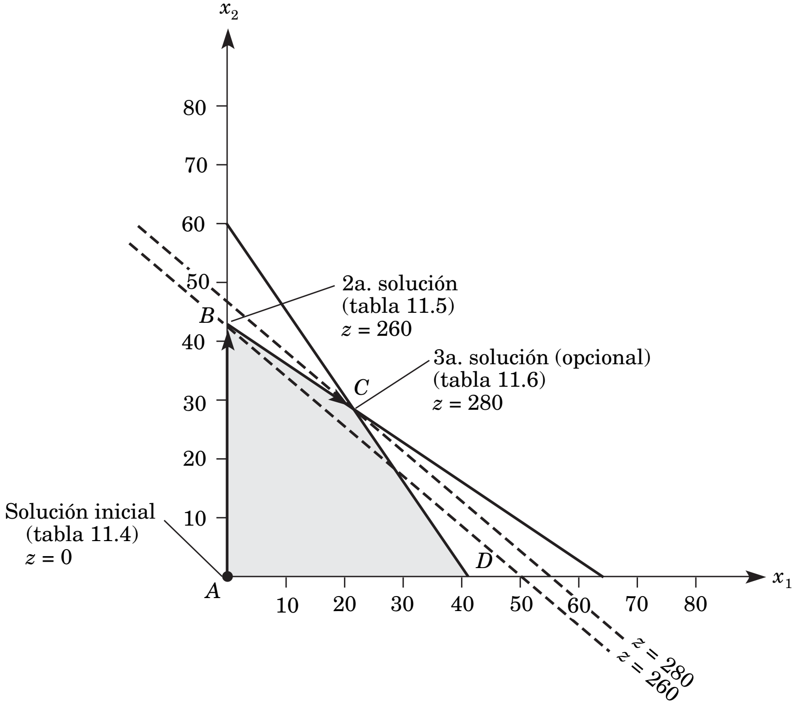


Figura 11.9 Progresión simplex para la solución óptima.

Resumen del procedimiento simplex

Generalice el ***procedimiento simplex para problemas de maximización que tienen todas las restricciones del tipo*** ($\leq$). Primero, sume variables de holgura a cada restricción y a la función objetivo y coloque los coeficientes de las variables al lado izquierdo y las constantes del lado derecho en un cuadro simplex. Después:

1. *Identifique la solución inicial al declarar cada una de las variables de holgura como variables básicas. Todas las demás variables son no básicas en la solución inicial.*
2. *Determine si la solución actual es óptima al aplicar la regla 1* ***[¿todos los coeficientes de la fila (0) son ≥ 0?].*** *Si es óptima, ¡alto! Si no es óptima, proceda al paso 3.*
3. *Determine la variable no básica que debería volverse una variable básica en la solución siguiente al aplicar la regla 2* ***[coeficiente de la fila (0) más negativo].***
4. *Determine la variable básica que se debería sustituir en la solución siguiente al aplicar la regla 3* ***(razón*** b_i/a_{ik} ***mínima donde*** $a_{ik} > 0$***).***
5. *Aplique las operaciones de eliminación de Gauss para generar la nueva solución (o cuadro nuevo). Vaya al paso 2.*

Ejemplo 8

Resolvamos el problema de programación lineal siguiente al utilizar el método simplex.

$$\begin{array}{ll} \text{Maximice} & z = 2x_1 + 12x_2 + 8x_3 \\ \text{sujeto a} & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 100 \\ & x_1 - 2x_2 + 5x_3 \leq 80 \\ & 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 300 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Al volver a escribir el problema en la forma estándar con las variables de holgura sumadas, se tiene lo siguiente.

$$\begin{array}{ll} \text{Maximice} & z = 2x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 \\ \text{sujeto a} & 2x_1 + 2x_2 + x_3 + S_1 = 100 \\ & x_1 - 2x_2 + 5x_3 + S_2 = 80 \\ & 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 + S_3 = 300 \\ & x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0 \end{array}$$

La función objetivo debería reformularse al mover todas las variables al lado izquierdo de la ecuación. El cuadro simplex inicial se muestra en la tabla 11.8.

Tabla 11.8

Variables básicas	z	x_1	Columna clave x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	b_i	Número de fila	b_i/a_{ik}
	1	**−2**	**−12**	**−8**	**0**	**0**	**0**	**0**	**(0)**	
S_1	0	2	2	1	1	0	0	100	(1)	**100/2 = 50***
S_2	0	1	−2	5	0	1	0	80	(2)	
S_3	0	10	5	4	0	0	1	300	(3)	300/5 = 60

- ☐ **Paso 1.** En la solución inicial, x_1, x_2 y x_3 son variables no básicas que tienen valores de 0. Las variables básicas son las variables de holgura con $S_1 = 100$, $S_2 = 80$, $S_3 = 300$ y $z = 0$.
- ☐ **Paso 2.** Ya que todos los coeficientes de la fila (0) *no* son mayores o iguales que 0, la solución inicial no es óptima.
- ☐ **Paso 3.** El coeficiente más negativo en la fila (0) es -12 y se asocia a x_2. Por consiguiente, x_2 se volverá una variable básica en la próxima solución y su columna de coeficientes se convierte en la columna clave.
- ☐ **Paso 4.** Al calcular las razones b_i/a_{ik}, la razón mínima es 50 y corresponde a la fila (1). Por tanto, S_1 se convertirá en una variable no básica en la siguiente solución. Observe que no se calculó ninguna razón de la fila (2) porque el valor de a_{ik} era negativo.
- ☐ **Paso 5.** La solución nueva se encuentra al transformar los coeficientes de la columna de x_2

$$\text{de} \begin{pmatrix} -12 \\ 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La tabla 11.9 indica la siguiente solución. La notación abreviada a la derecha de cada fila indica cómo se calcularon los elementos de la misma. En esta solución, las variables básicas y sus valores son $x_2 = 50$, $S_2 = 180$, $S_3 = 50$ y $z = 600$. Continuando con el procedimiento simplex, regresemos enseguida al paso 2.

Tabla 11.9

Variables básicas	z	x_1	Columna clave x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	b_i	Número de fila		b_i/a_{ik}
	1	**10**	**0**	**−2**	**6**	**0**	**0**	**600**	**(0)**	$R_0' = R_0 + 12R_1'$	
x_2	0	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	50	(1)	$R_1' = \frac{1}{2}R_1$	$50 \div \frac{1}{2} = 100$
S_2	0	3	0	6	1	1	0	180	(2)	$R_2' = R_2 + 2R_1'$	**180 ÷ 6 = 30***
S_3	0	5	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	1	50	(3)	$R_3' = R_3 - 5R_1'$	$50 \div \frac{3}{2} = 33\frac{1}{3}$

- ❑ **Paso 2.** Ya que el coeficiente de la fila (0) para x_3 es negativo, esta solución no es óptima.
- ❑ **Paso 3.** La variable x_3 se volverá una variable básica en la próxima solución, ya que tiene el único coeficiente negativo en la fila (0). La columna x_3 se convierte en la nueva columna clave.
- ❑ **Paso 4.** Al calcular las razones b_i/a_{ik}, la razón mínima es 30 y corresponde a la fila (2). Por lo tanto, S_2 se convertirá en una variable no básica en la solución siguiente.
- ❑ **Paso 5.** Se encuentra la solución nueva al transformar los coeficientes en la columna de x_3 de $\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 6 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La tabla 11.10 indica la solución siguiente. Las variables básicas y sus valores en esta solución son $x_2 = 35$, $x_3 = 30$ y $S_3 = 5$. El valor de z es 660. Regresamos al paso 2.

Tabla 11.10

Variables básicas	z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	b_i	Número de fila	
	1	**11**	**0**	**0**	$\mathbf{\frac{38}{6}}$	$\mathbf{\frac{2}{6}}$	**0**	**660**	**(0)**	$R_0'' = R_0' + 2R_2''$
x_2	0	$\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{12}$	0	35	(1)	$R_1'' = R_1' - \frac{1}{2}R_2''$
x_3	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	30	(2)	$R_2'' = \frac{1}{6}R_2'$
S_3	0	$\frac{17}{4}$	0	0	$-\frac{11}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	5	(3)	$R_3'' = R_3' - \frac{3}{2}R_2''$

- ❑ **Paso 2.** Ya que todos los coeficientes de la fila (0) son mayores o iguales que 0 en la tabla 11.10, la solución actual es la solución óptima.

Se maximiza la función objetivo con un valor de 660 cuando $x_1 = 0$, $x_2 = 35$, $x_3 = 30$, $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ y $S_3 = 5$. ❑

Problemas de maximización con restricciones mixtas

Se escoge la estructura del problema más simple para ilustrar el método simplex: un problema de maximización con todas las restricciones del tipo ($\leq$). Para un problema de maximización que tiene una mezcla de restricciones ($\leq$, $\geq$ y $=$), el método simplex no cambia en sí. El único cambio se tiene al transformar las restricciones a una forma de ecuación estándar con las variables complementarias apropiadas. *Recuerde que para cada restricción de* ($\geq$), *se sustrae una variable de superávit y se suma una variable artificial al lado izquierdo de la restricción. Para cada restricción de* ($=$) *se suma una variable artificial al lado izquierdo*. Se agrega una columna adicional al cuadro simplex para cada variable complementaria. Además, se deben asignar coeficientes (valores de c_j) apropiados de la función objetivo a las variables artificiales y de superávit. Por lo general, a las variables de superávit se les asigna un coeficiente de 0 en la función objetivo. Para problemas de maximización, se asigna un coeficiente negativo grande a las variables artificiales, que se expresará como $-M$, donde se supone que $|M|$ es mucho mayor que cualquier otro coeficiente. Esta asignación hace que las variables artificiales sean muy poco atractivas, dado el objetivo de maximización.

En cuanto al cálculo, el método simplex procede exactamente como se estudió. La única diferencia que se notará es la identificación de la base inicial.

Base inicial en el método simplex

En cualquier problema de programación lineal, el conjunto inicial de variables básicas consistirá en todas las variables de holgura y todas las variables artificiales que aparecen en el problema.

Ejemplo 9

Resolvamos el problema de maximización siguiente que tiene una mezcla de una restricción de ($\leq$) y una restricción de ($\geq$).

$$\begin{aligned} \text{Maximice} \quad & z = 8x_1 + 6x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 10 \\ & 3x_1 + 8x_2 \leq 96 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Al reformular el problema con las restricciones expresadas como ecuaciones,

$$\begin{aligned} \text{Maximice} \quad & z = 8x_1 + 6x_2 + 0E_1 - MA_1 + 0S_2 \\ \text{sujeto a} \quad & 2x_1 + x_2 - E_1 + A_1 = 10 \\ & 3x_1 + 8x_2 + S_2 = 96 \\ & x_1, x_2, E_1, A_1, S_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Si se mueven todas las variables en la función objetivo al lado izquierdo de la ecuación, el cuadro inicial para este problema aparece como en la tabla 11.11. Nótese que la variable artificial es una de las variables básicas en la solución inicial. Sin embargo, *para cualquier problema que contiene variables artificiales, los coeficientes de la fila* (0) *para las variables artificiales no serán iguales a cero en el cuadro inicial.* En consecuencia, no se tienen las columnas deseadas de una matriz identidad en las columnas asociadas a las variables básicas. En la tabla 11.11, el coeficiente $+M$ se debe cambiar a 0 mediante operaciones de fila. Si se multiplica la fila (1) por $-M$ y se suma a la fila (0), se obtiene el resultado deseado. La tabla 11.12 muestra el resultado de esta operación de fila. Para esta solución inicial, A_1 y S_2 son variables básicas; x_1, x_2 y E_1 son variables no básicas y el valor de z es $-10M$.

Tabla 11.11

Necesario para cambiar a cero

Variables básicas	z	x_1	x_2	E_1	A_1	S_2	b_i	Número de fila
	1	**−8**	**−6**	**0**	$\boxed{M}$	**0**	**0**	**(0)**
A_1	0	2	1	−1	1	0	10	(1)
S_2	0	3	8	0	0	1	96	(2)

Tabla 11.12

Columna clave

Transformado a cero

Variables b· sicas	z	x_1	x_2	E_1	A_1	S_2	b_i	Número de fila		b_i/a_{ik}
	1	**$-8-2M$**	**$-6-M$**	**M**	$\boxed{0}$	**0**	**$-10M$**	**(0)**	$R'_0 = R_0 - MR_1$	
A_1	0	2	1	−1	1	0	10	(1)	R_1	**10/2 = 5***
S_2	0	3	8	0	0	1	96	(2)	R_2	96/3 = 32

Al aplicar la regla 1, vemos que la solución inicial no es óptima. Los coeficientes de la fila (0), tanto para x_1 como para x_2, son negativos. Al aplicar la regla 2, el coeficiente de la fila (0) para x_1 es el más negativo y x_1 se identifica para convertirse en la nueva variable básica. La columna de x_1 se vuelve la nueva columna clave.

Tabla 11.13

Columna clave

Variables básicas	z	x_1	x_2	E_1	A_1	S_2	b_i	Número de fila		b_i/a_{ik}
	1	**0**	**−2**	**−4**	**$4+M$**	**0**	**40**	**(0)**	$R''_0 = R'_0 + (8+2M)R'_1$	
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	5	(1)	$R'_1 = \frac{1}{2}R_1$	—
S_2	0	0	$\frac{13}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	81	(2)	$R'_2 = R_2 - 3R'_1$	**$81/\frac{3}{2} = 54$**

Cuando se calculan razones b_i/a_{ik}, se identifica A_1 como la variable básica de salida. Al efectuar las operaciones de fila del método simplex, la tabla 11.13 indica la solución siguiente. Para esta solución, z es igual a 40 y las variables básicas son $x_1 = 5$ y $S_2 = 81$.

Al aplicar la regla 1, los coeficientes negativos de la fila (0), tanto para x_2 como para E_1 indican que la solución actual no es óptima. Al aplicar la regla 2, se identifica E_1 para convertirse en la nueva variable básica. Al determinar la variable básica de salida, la única razón relevante b_i/a_{ik} se relaciona con la fila (2). Por consiguiente, se identifica S_2 como la variable básica de salida. La tabla 11.14 muestra los resultados de realizar operaciones de fila del método simplex. Ya que todos los coeficientes de la fila (0) son mayores o iguales que cero, la solución que aparece en esta tabla es óptima. Se maximiza la función objetivo con un valor de 256 cuando $x_1 = 32$ y $E_1 = 54$.

Tabla 11.14

Variables básicas	z	x_1	x_2	E_1	A_1	S_2	b_i	Número de fila	
	1	**0**	$\mathbf{\frac{46}{3}}$	**0**	$\boldsymbol{M}$	$\mathbf{\frac{8}{3}}$	**256**	**(0)**	$R_0''' = R_0'' + 4R_2''$
x_1	0	1	$\frac{8}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	32	(1)	$R_1'' = R_1' + \frac{1}{2}R_2''$
E_1	0	0	$\frac{13}{3}$	1	-1	$\frac{2}{3}$	54	(2)	$R_2'' = \frac{2}{3}R_2'$

❑

Ejercicio de práctica

Resuelva de manera gráfica el problema de este ejemplo. Determine las posiciones en su gráfica que corresponden a las soluciones que se muestran en las tablas 11.12 a 11.14.

Problemas de minimización

El procedimiento simplex sólo cambia ligeramente cuando se resuelven problemas de minimización. Aparte de la asignación de coeficientes de la función objetivo de $+M$ a las variables artificiales, la única diferencia se relaciona con la interpretación de los coeficientes de la fila (0). Las dos reglas siguientes son modificaciones de la regla 1 y la regla 2. Éstas se aplican en los problemas de minimización.

Regla 1a: Comprobación de la optimización en un problema de minimización

En un problema de minimización, se encontrará la solución óptima si todos los coeficientes de la fila (0) de las variables son menores o iguales que 0. Si cualquier coeficiente de la fila (0) es positivo para variables no básicas, se puede encontrar una mejor solución al asignar una cantidad positiva a estas variables.

Regla 2a: Nueva variable básica en un problema de minimización

En un problema de minimización, la variable no básica que reemplazará una variable básica actual es la que tiene el coeficiente **positivo mayor** de la fila (0). Las “coincidencias” o empates se pueden deshacer en forma arbitraria.

Ejemplo 10 Resuelva el problema de programación lineal siguiente por el método simplex.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimice} & z = 5x_1 + 6x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 + x_2 \geq 10 \\ & 2x_1 + 4x_2 \geq 24 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

SOLUCIÓN

Primero se reformula este problema con las restricciones expresadas como ecuaciones, como sigue:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimice} & z = 5x_1 + 6x_2 + 0E_1 + 0E_2 + MA_1 + MA_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 + x_2 - E_1 + A_1 = 10 \\ & 2x_1 + 4x_2 - E_2 + A_2 = 24 \\ & x_1, x_2, E_1, E_2, A_1, A_2 \geq 0 \end{array}$$

Si se mueven todas las variables en la función objetivo al lado izquierdo de la ecuación, el cuadro inicial para este problema aparece como en la tabla 11.15. Nótese que las variables artificiales son las variables básicas en esta solución inicial. Como en el ejemplo 9, no se tienen las columnas deseadas de una matriz identidad en las columnas de la variable básica. Estos coeficientes de $-M$ en la fila (0) se deben cambiar a 0 usando operaciones de fila si el valor de z se debe leer de la fila (0). En la tabla 11.15 se puede realizar esto al multiplicar las filas (1) y (2) por $+M$ y al sumar estos múltiplos a la fila (0). La tabla 11.16 muestra el cuadro resultante. En esta solución inicial, las variables no básicas son x_1, x_2, E_1 y E_2. Las variables básicas son las dos variables artificiales con $A_1 = 10$, $A_2 = 24$ y $z = 34M$.

Tabla 11.15

Necesario para ser transformado a cero

Variables básicas	z	x_1	x_2	E_1	E_2	A_1	A_2	b_i	Número de fila
	1	**–5**	**–6**	**0**	**0**	**$-M$**	**$-M$**	**0**	**(0)**
A_1	0	1	1	–1	0	1	0	10	(1)
A_2	0	2	4	0	–1	0	1	24	(2)

Tabla 11.16

Columna clave

Transformado a cero

Variables básicas	z	x_1	x_2	E_1	E_2	A_1	A_2	b_i	Número de fila		b_i/a_{ik}
	1	**$-5+3M$**	**$-6+5M$**	**$-M$**	**$-M$**	**0**	**0**	**$34M$**	**(0)**	$R'_0 = R_0 + MR_1 + MR_2$	
A_1	0	1	1	–1	0	1	0	10	(1)	R_1	10/1 = 10
A_2	0	2	4	0	–1	0	1	24	(2)	R_2	**24/4 = 6***

Al aplicar la regla 1A, se concluye que esta solución no es óptima. Ambos coeficientes de la fila (0) para x_1 y x_2 son positivos. (Recuerde que M es un número extremadamente grande.) Al aplicar la regla 2A, se identifica x_2 como la nueva variable básica. La columna de x_2 se vuelve la nueva columna clave. El valor mínimo de b_i/a_{ik} es igual que 6 y se asocia a la fila (2). Por tanto, A_2 será la variable básica de salida. La tabla 11.17 indica la siguiente solución. En la tabla 11.17 las variables no básicas son x_1, E_1, E_2 y A_2. Para esta solución, $A_1 = 4$, $x_2 = 6$ y $z = 36 + 4M$.

Tabla 11.17

Variables básicas	z	Columna clave x_1	x_2	E_1	E_2	A_1	A_2	b_i	Número de fila		b_i/a_{ik}
	1	$\mathbf{-2+\frac{M}{2}}$	**0**	$\mathbf{-M}$	$\mathbf{-\frac{3}{2}+\frac{M}{4}}$	**0**	$\mathbf{\frac{3}{2}-\frac{5M}{4}}$	$\mathbf{36+4M}$	**(0)**	$R_0'' = R_0' + (6-5M)R_2'$	
A_1	0	$\frac{1}{2}$	0	-1	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	4	(1)	$R_1' = R_1 - R_2'$	$\mathbf{4/\frac{1}{2} = 8^*}$
x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	6	(2)	$R_2' = \frac{1}{4}R_2$	$6/\frac{1}{2} = 12$

Al aplicar la regla 1A, se ve que esta solución no es óptima. Los dos coeficientes de la fila (0) para x_1 y E_2 son positivos. Al aplicar la regla 2A, x_1 se identifica como la nueva variable básica. La columna de x_1 se convierte en la columna clave nueva. Las razones de b_i/a_{ik} son $4 \div \frac{1}{2} = 8$ y $6 \div \frac{1}{2} = 12$ para las filas (1) y (2). Puesto que la razón mínima está asociada a la fila (1), A_1 se identifica como la variable básica de salida. La tabla 11.18 indica la nueva solución. La solución de la tabla 11.18 tiene $x_1 = 8$, $x_2 = 2$ y $z = 52$.

Al aplicar la regla 1A, se concluyó que esta solución es óptima. Todos los coeficientes de la fila (0) son menores o iguales que cero para las variables básicas y no básicas. Por ende, z se minimiza con un valor de 52 cuando $x_1 = 8$ y $x_2 = 2$.

Tabla 11.18

Variables básicas	z	x_1	x_2	E_1	E_2	A_1	A_2	b_i	Número de fila	
	1	**0**	**0**	$\mathbf{-4}$	$\mathbf{-\frac{1}{2}}$	$\mathbf{4-M}$	$\mathbf{\frac{1}{2}-M}$	**52**	**(0)**	$R_0''' = R_0'' + \left(2 - \frac{M}{2}\right)R_1''$
x_1	0	1	0	-2	$\frac{1}{2}$	2	$-\frac{1}{2}$	8	(1)	$R_1'' = 2R_1'$
x_2	0	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	2	(2)	$R_2'' = R_2' - \frac{1}{2}R_1''$

❑

Sección 11.2 Ejercicios de seguimiento

1. Dado el problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{Maximice} \quad & z = 14x_1 + 10x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & 5x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 26 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

a) Transforme las restricciones de (≤) en ecuaciones.

b) Enumere todas las soluciones para las cuales se han establecido dos variables iguales a 0.

c) Con base en el inciso *b*, identifique las soluciones factibles básicas.
d) Grafique el conjunto de restricciones original y confirme que las soluciones factibles básicas sean los puntos vértice en el área de soluciones factibles.
e) ¿Cuál es la solución óptima?

2. Dado el problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{Maximice} \quad & z = 6x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & 6x_1 + 10x_2 \leq 90 \\ & 12x_1 + 8x_2 \leq 96 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

a) Transforme las restricciones de ($\leq$) en ecuaciones.
b) Enumere todas las soluciones para las cuales se han establecido dos variables iguales a 0.
c) Con base en el inciso *b*, identifique las soluciones factibles básicas.
d) Grafique el conjunto de restricciones original y confirme que las soluciones factibles básicas sean los puntos vértice en el área de soluciones factibles.
e) ¿Cuál es la solución óptima?

En los ejercicios 3 a 8, resuelva mediante el método simplex.

3. $$\begin{aligned} \text{Maximice} \quad & z = 4x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + x_2 \leq 50 \\ & 6x_1 \leq 240 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} \text{Maximice} \quad & z = 4x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & 4x_1 + 8x_2 \leq 24 \\ & 24x_1 + 16x_2 \leq 96 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} \text{Maximice} \quad & z = 10x_1 + 12x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + x_2 \leq 150 \\ & 3x_1 + 6x_2 \leq 300 \\ & 4x_1 + 2x_2 \leq 160 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} \text{Maximice} \quad & z = 6x_1 + 8x_2 + 10x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + 2.5x_2 \leq 1\,200 \\ & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 2\,600 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} \text{Maximice} \quad & z = 10x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 400 \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 200 \\ & x_3 \leq 40 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} \text{Maximice} \quad & z = 4x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & 6x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 240 \\ & 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 \leq 40 \\ & 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 80 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

9. *a*) Resuelva el siguiente problema de programación lineal utilizando el método simplex.

$$\begin{aligned} \text{Minimice} \quad & z = 3x_1 + 6x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & 4x_1 + x_2 \geq 20 \\ & x_1 + x_2 \leq 20 \\ & x_1 + x_2 \geq 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

b) Verifique la solución del inciso *a* resolviendo gráficamente.

10. *a*) Resuelva el siguiente problema de programación lineal usando el método simplex.

$$\begin{aligned} \text{Minimice} \quad & z = 6x_1 + 10x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 \leq 12 \\ & 2x_2 = 36 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 54 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

b) Verifique la solución del inciso *a* resolviendo de manera gráfica.

11.3 Fenómenos especiales

En la sección 10.2 se estudiaron ciertos fenómenos que pueden surgir cuando se resuelven problemas de programación lineal. Específicamente, se presentaron los fenómenos de ***soluciones óptimas alternativas***, ***carencia de solución factible*** y ***soluciones no acotadas***. En esta sección se estudiará la manera en que estos fenómenos ocurren al resolver un problema con el método simplex.

Soluciones óptimas alternativas

En la sección 10.2 se describieron circunstancias donde hay más de una solución óptima para un problema de programación lineal. Esta situación, llamada *soluciones óptimas alternativas*, tiene lugar cuando la función objetivo es paralela a una restricción que coincide con la dirección de la optimización. En problemas de dos variables estamos conscientes de soluciones óptimas alternativas con el *método del punto vértice* cuando ocurre una “coincidencia” o “empate” para el punto vértice óptimo.

Si se usa el método simplex, se presentan soluciones óptimas alternativas cuando:

1. *Se ha identificado una solución óptima.*
2. *El coeficiente de la fila (0) para una variable no básica es igual a cero.*

La primera condición confirma que no hay mejor solución que la solución actual. La presencia de un 0 en la fila (0) para una variable no básica indica que la variable no básica puede convertirse en una variable básica (puede llegar a ser positiva) y que no cambiará el valor actual de la función objetivo (que, según se sabe, es óptimo).

Ejemplo 11 Considere el problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{Maximice} \quad & z = 6x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1 + x_2 \leq 5 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

La tabla 11.9 presenta la solución simplex inicial con $S_1 = 5$ y $S_2 = 12$, que son las variables básicas; x_1 y x_2 son variables no básicas. Por la regla 1 se ve que existe una solución mejor. Al usar la regla 2, se selecciona x_1 como la nueva variable básica y la columna de x_1 se vuelve la columna clave. Se calculan las razones b_i/a_{ik} con S_2 identificada como la variable de salida. Se transforman los elementos en la columna de x_1 de $\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mediante operaciones de fila, y el resultado es el cuadro simplex mostrado en la tabla 11.20. En esta nueva solución, x_1 reemplazó a S_2 en la base; las variables básicas son $S_1 = 1$ y $x_1 = 4$ con un valor de la función objetivo resultante de $z = 24$.

Tabla 11.19

Variables básicas	z	x_1	x_2	S_1	S_2	b_i	Número de fila	b_i/a_{ik}
		Columna clave						
	1	**−6**	**−4**	**0**	**0**	**0**	**(0)**	
S_1	0	1	1	1	0	5	(1)	5/1 = 5
S_2	0	3	2	0	1	12	(2)	**12/3 = 4***

Tabla 11.20

Variables básicas	z	x_1	x_2	S_1	S_2	b_i	Número de fila		b_i/a_{ik}
	1	**0**	**⓪**	**0**	**2**	**24**	**(0)**	$R'_0 = R_0 + 6R'_2$	
S_1	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	1	(1)	$R'_1 = R_1 - R'_2$	**$1/\frac{1}{3} = 3$***
x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	4	(2)	$R'_2 = \frac{1}{3}R_2$	$4/\frac{2}{3} = 6$

Indicación de la solución óptima alterna

Al aplicar la regla 1, se ve que ésta es la solución óptima, ya que todos los coeficientes de la fila (0) son mayores o iguales que 0. Sin embargo, para la variable no básica x_2, el coeficiente de la fila (0) es igual a 0. Esto sugiere que x_2 puede asumir valores positivos (convertirse en una variable básica) y que no cambiará el valor actual (óptimo) de z.

> Cuando se presentan soluciones óptimas alternativas por el método simplex, las otras alternativas del punto vértice óptimo pueden generarse al tratar la variable no básica con el coeficiente cero como si fuera una variable básica nueva.

Si en la tabla 11.20 se trata la columna de x_2 como una columna clave asociada a la entrada de la variable básica nueva x_2, se calculan las razones b_i/a_{ik} como se hace normalmente y se identifica S_1 como la variable de salida. La tabla 11.21 indica la nueva solución. La comprobación de la optimización (regla 1) indica que la solución es óptima con $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ y $z = 24$. Y para la variable no básica S_1, el coeficiente de 0 en la fila (0) indica que hay una solución óptima alternativa en la cual S_1 sería una variable básica. Si se debiera tratar la columna S_1 como la columna clave y hacer iteraciones para tener una nueva solución, se regresaría a la primera solución óptima encontrada en la tabla 11.20.

Tabla 11.21

Variables básicas	z	x_1	x_2	S_1	S_2	b_i	**Número de fila**	
	1	**0**	**0**	**0**	**2**	**24**	**(0)**	$R''_0 = R'_0$
x_2	0	0	1	3	-1	3	(1)	$R''_1 = 3R'_1$
x_1	0	1	0	-2	1	2	(2)	$R''_2 = R'_2 - \frac{2}{3}R''_1$

❑

Ejercicio de práctica

Verifique las dos soluciones óptimas alternativas de punto vértice encontradas en este ejemplo al resolver el problema de manera gráfica.

Tal vez existan múltiples soluciones óptimas alternativas (de punto vértice) en un problema. Esta situación podría presentarse: 1) si más de una variable no básica tiene un coeficiente de 0 en la fila (0) de un cuadro óptimo, o bien 2) si en el curso de generar soluciones óptimas alternativas sucesivas mediante el método simplex, los coeficientes de 0 aparecen en la fila (0) para variables no básicas que antes no aparecieron en una solución óptima.

Carencia de solución factible

En la sección 10.2 se indica que un problema *no* tiene *solución factible* si no hay valores para las variables que satisfagan todas las restricciones. Aunque dicha condición puede ser obvia al inspeccionar pequeños problemas, es considerablemente más difícil de identificar en problemas a gran escala.

La condición de solución no factible se manifiesta en el método simplex cuando una variable artificial aparece en una base óptima en un nivel (valor) positivo. El ejemplo siguiente ilustra esta condición.

Ejemplo 12 Resolvamos el problema de programación lineal siguiente, el cual, por inspección, tiene solución no factible.

$$\begin{aligned}\text{Maximice}\quad & z = 10x_1 + 20x_2\\ \text{sujeto a}\quad & x + x_2 \leq 5\\ & x_1 + x_2 \geq 20\\ & x_1, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

Las tablas 11.22 a 11.24 muestran las iteraciones simplex en la solución de este problema. En la tabla 11.24, todos los coeficientes de la fila (0) son mayores o iguales que 0, lo que indica una solución óptima. Sin embargo, una de las variables básicas es A_2 y tiene un valor de 15; esto es, la solución óptima es $x_2 = 5$, $A_2 = 15$ y $z = -15M + 100$. Las variables artificiales no tienen significado alguno en un problema de programación lineal y la asignación de $A_2 = 15$ señala que no hay solución factible alguna para el problema.

Tabla 11.22

Necesita convertirse en cero

Variables básicas	z	x_1	x_2	S_1	E_2	A_2	b_i	Número de Fila	
	1	**−10**	**−20**	**0**	**0**	M	**0**	**(0)**	R_0
S_1	0	1	1	1	0	0	5	(1)	R_1
A_2	0	1	1	0	−1	1	20	(2)	R_2

Tabla 11.23

Columna clave

Variables básicas	z	x_1	x_2	S_1	E_2	A_2	b_i	Número de fila		b_i/a_{ik}
	1	$-10-M$	$-20-M$	**0**	M	**0**	$-20M$	**(0)**	$R'_0 = R_0 + MR_2$	
S_1	0	1	1	1	0	0	5	(1)	R_1	**5/1 = 5***
A_2	0	1	1	0	−1	1	20	(2)	R_2	20/1 = 20

Tabla 11.24

Variables básicas	z	x_1	x_2	S_1	E_2	A_2	b_i	Número de fila	
	1	**10**	**0**	$M+20$	M	**0**	$-15M+100$	**(0)**	$R''_0 = R'_0 + (M+20)R'_1$
x_2	0	1	1	1	0	0	5	(1)	$R'_1 = R_1$
A_2	0	0	0	−1	−1	1	15	(2)	$R'_2 = R_2 - R'_1$

❑

Soluciones no acotadas

Hay soluciones no acotadas cuando: 1) hay un *espacio de soluciones no acotado* y 2) ocurre una mejora en la función objetivo con movimiento en la dirección de la porción no acotada del espacio de soluciones.

Si en cualquier iteración del método simplex todos los valores de a_{ik} son 0 o negativos para que la variable seleccionada se convierta en la nueva variable básica, hay una solución no acotada para el problema de programación lineal. ¿Recuerda el análisis sobre los valores de a_{ik} de la sección 11.2? Los valores de a_{ik} indican cambios marginales en los valores de las variables básicas actuales por cada unidad introducida de la nueva variable básica. Los valores positivos de a_{ik} *indican decrementos marginales* en los valores de las variables básicas correspondientes, los valores negativos de a_{ik} indican *incrementos marginales* y los valores de a_{ik} de 0 indican *la ausencia de cambio*. Una vez identificada una nueva variable básica (regla 2), la variable básica de salida se encuentra al calcular el valor mínimo de b_i/a_{ik}, donde $a_{ik} > 0$ (regla 3). Cuando se aplica la regla 3, nos concentramos en las variables básicas cuyo valor disminuirá ($a_{ik} > 0$) conforme se introduce la nueva variable básica. Se desea determinar el número máximo de unidades por introducir antes de llevar a 0 una variable básica existente. Si todos los valores de a_{ik} son 0 o negativos, ninguna de las variables básicas actuales disminuirá en valor y no hay límite en el número de unidades de la nueva variable que pueden introducirse. Ya que se seleccionó la nueva variable sobre la base de un mejoramiento prometido de z y no hay límite en el número de unidades que pueden introducirse, tampoco hay límite en cuanto al mejoramiento de la función objetivo; por lo tanto, hay una solución no acotada.

Ejemplo 13 Considere el problema siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximice} & z = -2x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 \qquad \leq 10 \\ & 2x_1 - x_2 \leq 30 \\ & x_1, x_2 \geq \ \ 0 \end{array}$$

La tabla 11.25 presenta el cuadro simplex inicial. La fila (0) indica que la variable no básica x_2 dará como resultado un mejor valor de z. Sin embargo, los valores de a_{ik} son 0 y -1. Esto sugiere que por *cada unidad* introducida de x_2, S_1 no cambiará y S_2 *aumentará* en una unidad. Ninguna de estas variables básicas se llevará a cero. Esto señala una solución no acotada.

Tabla 11.25

			Columna clave			
	z	x_1	x_2	S_1	S_2	b_i
Variables básicas	**1**	**2**	**−3**	**0**	**0**	**0**
S_1	0	1	0	1	0	10
S_2	0	2	−1	0	1	30

❑

Ejercicio de práctica

Verifique que este problema tenga una solución no acotada al resolverlo gráficamente.

Cuadros condensados

El método simplex se puede tornar un cuanto tedioso cuando se resuelven los problemas en forma manual. Los problemas que vimos en esta sección han sido pequeños y fáciles de manejar. Hay una manera de reducir la carga del cálculo cuando se usa el método simplex. Ésta consiste en condensar el tamaño del cuadro. Se puede reducir el tamaño del cuadro, ya que se enfoca en las variables no básicas en cada cuadro. Dada cualquier solución intermedia para un problema de programación lineal, nos interesamos en los efectos asociados a la introducción de variables no básicas en la base. Por consiguiente, ¿por qué llevar en el cuadro la matriz identidad asociada a las variables básicas? Se pueden tratar las columnas de la matriz identidad como columnas "fantasma", recordando que deberían aparecer en el cuadro; sin embargo, es más fácil (y más eficiente) no volver a calcular estos valores de las columnas en cada iteración.

El cuadro condensado que aquí se ilustrará incluye columnas para cada variable no básica y una columna de matriz identidad para la variable básica de salida. Para ilustrar este planteamiento, volvamos a trabajar con el problema resuelto en el ejemplo 1. En las tablas 11.26 a 11.28 se muestra la solución de este problema. Si compara estos cuadros con los cuadros originales (tablas 11.8 a 11.10) los encontrará muy similares. No obstante, para

Tabla 11.26

		Columna clave ↓		Variable básica de salida ↓			
Variables básicas	x_1	x_2	x_3	S_1	b_i	**Número de fila**	b_i/a_{ik}
	−2	**−12**	**−8**	**0**	**0**	**(0)**	
S_1	2	2	1	1	100	(1)	**100/2 = 50***
S_2	1	−2	5	0	80	(2)	
S_3	10	5	4	0	300	(3)	300/5 = 60

Tabla 11.27

				Variable básica de salida ↓			
Variables básicas	x_1	x_3	S_1	S_2	b_i	**Número de fila**	b_i/a_{ik}
	10	**−2**	**6**	**0**	**600**	**(0)**	
x_2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	50	(1)	$50 \div \frac{1}{2} = 100$
S_2	3	6	1	1	180	(2)	**180 ÷ 6 = 30***
S_3	5	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	50	(3)	$50 \div \frac{3}{2} = 33\frac{1}{3}$

Tabla 11.28

Variables básicas	x_1	S_1	S_2		b_i	**Número de fila**
	11	$\mathbf{\frac{38}{6}}$	$\mathbf{\frac{2}{6}}$		**660**	**(0)**
x_2	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{12}$		35	(1)
x_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$		30	(2)
S_3	$\frac{17}{4}$	$-\frac{11}{4}$	$-\frac{1}{4}$		5	(3)

aclarar cabe hacer algunos comentarios. En cada cuadro, la columna que representa la variable básica de salida se llena sólo después de que se ha identificado la razón mínima b_i/a_{ik}. En la tabla 11.26, la razón mínima de 50 identificó S_1 como la variable básica de salida. Puesto que los elementos de columna asociados a S_1 cambiarán cuando se genera el cuadro siguiente (ya no será una columna de la matriz identidad), se inserta esta columna "fantasma" en el cuadro para realizar la aritmética del método simplex en ella. Nótese que en la tabla 11.27 x_2 sustituyó S_1 como una variable básica y la nueva columna S_1 reemplazó a la columna de x_2 como una de las variables no básicas.

La aritmética del método simplex es exactamente la misma que en el cuadro a escala completa en que se realizan operaciones básicas de fila para transformar los elementos de una columna para la variable básica de entrada en la correspondiente columna de la matriz identidad.

Sección 11.3 Ejercicios de seguimiento

Resuelva los siguientes ejercicios con el método simplex.

1. Maximice $z = 4x_1 + 2x_2$
sujeto a $x_1 + x_2 \le 15$
$2x_1 + x_2 \le 20$
$x_1, x_2 \ge 0$

2. Minimice $z = 4x_1 + 6x_2$
sujeto a $3x_1 + x_2 \ge 15$
$2x_1 + 3x_2 \ge 17$
$x_1, x_2 \ge 0$

3. Maximice $z = 6x_1 + 3x_2$
sujeto a $x_1 + 2x_2 \le 20$
$4x_1 + 2x_2 \le 32$
$x_1 \le 8$
$x_1, x_2 \ge 0$

4. Maximice $z = 5x_1 + 3x_2$
sujeto a $4x_1 + 3x_2 \le 24$
$3x_1 + x_2 \ge 20$
$x_1, x_2 \ge 0$

5. Minimice $z = 4x_1 - 3x_2$
sujeto a $2x_1 - 4x_2 \ge 20$
$4x_1 + 3x_2 \le 12$
$x_1, x_2 \ge 0$

6. Maximice $z = 5x_1 + 3x_2$
sujeto a $-x_1 + 2x_2 \le 10$
$x_2 \le 5$
$x_1, x_2 \ge 0$

Resuelva los siguientes problemas con el método simplex usando el cuadro condensado.

7. Maximice $z = 25x_1 + 50x_2$
sujeto a $2x_1 + 2x_2 \le 1\,000$
$3x_1 \le 600$
$x_1 + 3x_2 \le 600$
$x_1, x_2 \ge 0$

8. Minimice $z = 6x_1 + 8x_2 + 16x_3$
sujeto a $2x_1 + x_2 \ge 5$
$x_2 + 2x_3 \ge 4$
$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

11.4 Métodos de solución por computadora

En aplicaciones reales, los problemas de programación lineal se resuelven con métodos por computadora. Hay muchos códigos de computación eficaces disponibles en la actualidad mediante fabricantes de computadoras, empresas de software y universidades. Como usuarios de modelos de programación lineal, no siempre necesitamos preocuparnos por los componentes internos y su funcionamiento para el método de solución.* Más bien, se puede hacer un uso eficaz de estos modelos si: 1) se comprende por completo la programación lineal y sus suposiciones; 2) se es hábil para reconocer un problema de programación lineal; 3) se entiende bien la formulación de un problema; 4) se puede solucionar con un paquete de computadora, y 5) se es capaz de interpretar el resultado de dichos paquetes.

Ilustración de un paquete de programación lineal

Según se ha mencionado, hay disponibles muchos paquetes de computadora de programación lineal. Debería revisar con su centro de cómputo para ver cuáles tiene disponibles en su sistema. Esta sección ilustra un paquete de programación lineal interactivo disponible para el uso en varios sistemas de microcomputadoras.†

Ejemplo 14

(Entrega de premios: Escenario de motivación) El ejemplo 10 del capítulo 10 presentó una aplicación en la que un organismo federal quería otorgar $1 000 millones en premios por la investigación de innovación en el área de alternativas de energía. Para ayudar en el seguimiento de este ejemplo, se repitió la formulación del problema en la figura 11.10.

$$
\begin{array}{llr}
\text{Maximice} & & \\
\quad z = 4.4x_1 + 3.8x_2 + 4.1x_3 + 3.5x_4 + 5.1x_5 + 3.2x_6 & & \\
\text{sujeto a} & & \\
\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 & \le 1000 & (1) \\
\quad x_1 & \le 220 & (2) \\
\quad x_2 & \le 180 & (3) \\
\quad x_3 & \le 250 & (4) \\
\quad x_4 & \le 150 & (5) \\
\quad x_5 & \le 400 & (6) \\
\quad x_6 & \le 120 & (7) \\
\quad x_5 & \ge 200 & (8) \\
\quad x_1 + x_2 & \ge 300 & (9) \\
\quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 & \ge 0 &
\end{array}
$$

Figura 11.10 Formulación del modelo de entrega de premios.

---

* Con todo, no hay duda que se *puede* ser un mejor usuario de estos paquetes si se *entienden* los componentes y su funcionamiento.

† El programa “LINP1” es uno de varios programas incluidos en *Computer Models for Management Science*, segunda edición, por Warren Erikson y Owen P. Hall, Jr. (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1986).

La figura 11.11 indica los resultados de la salida del análisis por el paquete de computadora. Observe que se resume la estructura del problema junto con la formulación real del modelo. Los resultados muestran los valores de cada variable de decisión seguidos por un resumen de cada restricción, el valor de cada variable de holgura o superávit y el valor máximo de la función objetivo. El beneficio neto total del programa de entrega de premios se maximiza con un valor de $4 527 millones.

Decisiones óptimas

- ☐ $x_1 = 220$ [premio de $220 millones al proyecto 1 (solar)].
- ☐ $x_2 = 130$ [premio de $130 millones al proyecto 2 (solar)].
- ☐ $x_3 = 250$ [premio de $250 millones al proyecto 3 (combustibles sintéticos)].
- ☐ $x_4 = 0$ [ningún premio al proyecto 4 (carbón)]
- ☐ $x_5 = 400$ [premio de $400 millones al proyecto 5 (nuclear)]
- ☐ $x_6 = 0$ [ningún premio al proyecto 6 (geotérmico)]

```
     ******************************
     ANÁLISIS DE PROGRAMACIÓN LINEAL
     ******************************

     ** INFORMACIÓN **

NÚMERO DE RESTRICCIONES          9
NÚMERO DE VARIABLES              6
NÚMERO DE RESTRICCIONES DE <=    7
NÚMERO DE RESTRICCIONES DE  =    0
NÚMERO DE RESTRICCIONES     >=   2

PROBLEMA DE MAXIMIZACIÓN

  4.4 X 1  + 3.8 X 2  + 4.1 X 3  + 3.5 X 4  + 5.1 X 5   +
3.2 X 6

SUJETO A


   1 X 1   + 1 X 2   + 1 X 3     + 1 X 4   + 1 X 5   + 1 X 6
                          <=  1000
   1 X 1   + 0 X 2   + 0 X 3     + 0 X 4   + 0 X 5   + 0 X 6
                          <=  220
   0 X 1   + 1 X 2   + 0 X 3     + 0 X 4   + 0 X 5   + 0 X 6
                          <=  180
   0 X 1   + 0 X 2   + 1 X 3     + 0 X 4   + 0 X 5   + 0 X 6
                          <=  250
   0 X 1   + 0 X 2   + 0 X 3     + 1 X 4   + 0 X 5   + 0 X 6
                          <=  150
   0 X 1   + 0 X 2   + 0 X 3     + 0 X 4   + 1 X 5   + 0 X 6
                          <=  400
   0 X 1   + 0 X 2   + 0 X 3     + 0 X 4   + 0 X 5   + 1 X 6
                          <=  120
   0 X 1   + 0 X 2   + 0 X 3     + 0 X 4   + 1 X 5   + 0 X 6
                          >=  200
   0 X 1   + 1 X 2   + 0 X 3     + 0 X 4   + 0 X 5   + 0 X 6
                          >=  300
```

Figura 11.11 Resultados del problema de entrega de premios.

```
                  VALOR      COEFICIENTE
VARIABLE        VARIABLE      ORIGINAL

  × 1             220           4.4
  × 2             130           3.8
  × 3             250           4.1
  × 4             0             3.5
  × 5             400           5.1
  × 6             0             3.2

NÚMERO DE         RHS       HOLGURA O    PRECIO
RESTRICCIÓN     ORIGINAL    SUPERÁVIT    SOMBRA

    1             1 000       0            3.8
    2             220         0            .61
    3             180         50           0
    4             250         0            .3
    5             150         150          0
    6             400         0            1.3
    7             120         120          0
    8             200         200          0
    9             300         50           0

VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO  :  4 527
```

Figura 11.11 Continuación.

Análisis de holgura/superávit

- Hay una holgura de cero en la restricción (1), lo que sugiere que se asigne el presupuesto total de 1 000 ($ millones).
- Hay una holgura de cero en la restricción (2); se recomienda el premio máximo posible de $220 millones para el proyecto 1 (solar).
- Hay una holgura de 50 en la restricción (3); el premio de $130 millones para el proyecto 2 (solar) es $50 millones menor que el máximo que se podría haber otorgado.
- Hay una holgura de cero en la restricción (4); se recomienda el premio máximo posible de $250 millones para el proyecto 3 (combustibles sintéticos).
- Hay una holgura de 150 en la restricción (5); con ningún premio recomendado para el proyecto 4 (carbón), el organismo otorga $150 millones menos que la cantidad máxima permitida.
- Hay una holgura de cero en la restricción (6); se recomienda el premio posible máximo de $400 millones para el proyecto 5 (nuclear).
- Hay una holgura de 120 en la restricción (7); con ningún premio recomendado para el proyecto 6 (geotérmico), el organismo otorga $120 millones menos que la cantidad máxima permitida.
- Hay un superávit de 200 en la restricción (8); el premio de $400 millones del proyecto 5 (nuclear) excede el mínimo requerido por $200 millones.
- Hay un superávit de 50 en la restricción (9); el premio combinado de $350 millones a los proyectos 1 y 2 (solar) excede el mínimo requerido por $50 millones.

❑

Precios sombra

La solución de un problema de programación lineal se basa en ciertas suposiciones y estimaciones. Una vez que se obtiene una solución, debe ser analizada con cuidado a la luz de estas suposiciones y estimaciones. Esta fase del proceso de solución se llama ***análisis de post-optimización***. Un tipo importante de análisis posterior a lo óptimo es el examen de precios sombra.

Definición: Precio sombra

Un ***precio sombra*** es la cantidad que el valor óptimo de la función objetivo cambiaría si el lado derecho de una restricción aumentara en una unidad.

Ya que muchas restricciones del tipo ($\leq$) representan recursos limitados, a menudo se considera que los precios sombra representan el valor económico de tener una unidad adicional de un recurso. La figura 11.11 ilustra los precios sombra para el ejemplo de entrega de premios.

Si examina la formulación original de la figura 11.10, le ayudará para comprender el análisis de los precios sombra. El precio sombra de 3.8 para la restricción (1) sugiere que si la cantidad total de dinero disponible para premios aumentara de $1 000 millones a $1 001 millones, los beneficios netos totales se incrementarían $3.8 millones, aumentando el máximo original de $4 527 millones a $4 530.8 millones.

El precio sombra de 0.61 para la restricción (2) sugiere que aumentarían los beneficios netos totales $0.6100 millones si la inversión máxima permitida en el proyecto 1 ascendiera de $220 a $221 millones. Recuerde en la solución óptima que se concedió el máximo de $220 millones al proyecto 1.

El precio sombra de 0 asociado a la restricción (3) indica que el valor de la función objetivo no cambiaría si la inversión máxima permitida en el proyecto 2 aumentara de $180 millones a $181 millones. Esto tiene sentido, ya que la solución recomienda en este momento un premio de $130 millones, $50 millones menos que el máximo original.

Interprete los precios sombra restantes por sí mismo. También debería hacer las siguientes observaciones. *Los precios sombra son positivos para cualquier restricción que se satisfizo como una igualdad en la solución óptima (no hay holgura ni superávit)*. La solución óptima llevó estas restricciones a sus límites, al sugerir el valor potencial de poder aumentar estos límites. *Los precios sombra son iguales a 0 para cualquier restricción no satisfecha como una igualdad (hay holgura o superávit)*. La solución óptima no llevó estas restricciones a sus límites respectivos. Aumentar estos límites más allá no da como resultado ninguna mejora adicional de la función objetivo.

Otro punto que se debe considerar es que los precios sombra representan ***rendimientos marginales***. Indican el cambio en el valor óptimo de la función objetivo, dado un aumento de una unidad en la constante del lado derecho de la restricción correspondiente.

El precio sombra es válido para un rango particular de cambios en la constante del lado derecho. El precio sombra de 3.8 no sugiere que un aumento de $100 millones en el lado derecho de la constante de la restricción (1) dará como resultado un aumento de 3.8(100) = $380 millones en beneficios netos totales. El rango válido para cada precio sombra se puede determinar mediante otro tipo de análisis posterior a lo óptimo, estudiado en la próxima sección.

Análisis de la sensibilidad

Los parámetros (constantes) utilizados en un modelo de programación lineal con frecuencia son las mejores estimaciones de sus valores reales. Por ejemplo, la contribución a la utilidad supuesta para un producto se puede basar en las mejores estimaciones del precio de venta y el costo variable por unidad. El costo variable por unidad debe suponer ciertas tasas salariales, tiempos de procesamiento esperados y costos de material. Como otro ejemplo, las estimaciones de disponibilidad de trabajo en diferentes departamentos tal vez no reflejen las incertidumbres asociadas al ausentismo y a los cambios de personal. El punto es que a menudo no es posible determinar con certeza los parámetros utilizados para derivar una solución óptima.

```
                    ANÁLISIS DE LA SENSIBILIDAD

                 COEFICIENTE DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

              LÍMITE    COEFICIENTE    LÍMITE
  VARIABLE    INFERIOR   ORIGINAL      SUPERIOR

    × 1         3.8         4.4        SIN LÍMITE
    × 2         0           3.8          5.1
    × 3         3.8         4.1        SIN LÍMITE
    × 4       SIN LÍMITE    3.5          3.8
    × 5         3.8         5.1        SIN LÍMITE
    × 6       SIN LÍMITE    3.2          3.8


    LADO DERECHO


   NÚMERO      LÍMITE      VALOR        LÍMITE
 RESTRICCIÓN  INFERIOR    ORIGINAL     SUPERIOR

     1          950        1000          1050
     2          170        220           350
     3          130        180         SIN LÍMITE
     4          200        250           300
     5          0          150         SIN LÍMITE
     6          350        400           450
     7          0          120         SIN LÍMITE
     8        SIN LÍMITE   200           400
     9        SIN LÍMITE   300           350


      ** FIN DEL ANÁLISIS **
```

Figura 11.12 Análisis de la sensibilidad para el problema de entrega de premios.

Por tanto, una vez que se deriva una solución al usar estos valores "supuestos", se debe examinar para determinar los efectos si los parámetros tienen valores diferentes de los que se utilizaron en la formulación original. Este análisis posterior a la solución se llama ***análisis de la sensibilidad***. Si el análisis revela que los cambios significativos en los valores de los parámetros sólo afectan ligeramente la *base*, el *valor de la función objetivo óptimo*, o ambos, se dice que la solución es ***insensible***. Sin embargo, si la base, la función objetivo, o ambas varían de manera considerable con cambios menores en los parámetros, la solución se juzga como ***sensible*** y tal vez merezca escrutinio adicional.

Muchos paquetes de programación lineal cuentan con el análisis de la sensibilidad. La figura 11.12 ilustra estos resultados para el ejemplo de entrega de premios. Este paquete particular realiza el análisis de la sensibilidad para los coeficientes de la función objetivo de todas las variables de decisión y las constantes del lado derecho para las restricciones estructurales. Enfoquémonos primero en el análisis de los coeficientes de la función objetivo.

> En el caso de los coeficientes de la función objetivo, el análisis de la sensibilidad determina cuánto puede cambiar cada coeficiente sin que cambie su base actual; es decir, el mismo conjunto de variables básicas sigue siendo óptimo y sus valores no han cambiado. Otra manera de considerar esto es que nos interesamos en cuánto pueden cambiar estos coeficientes para que el punto vértice en la región de soluciones factibles siga siendo óptimo.

Para cada variable de decisión se muestra el coeficiente original de la función objetivo junto con el *límite inferior* y el *límite superior* para el coeficiente. Por ejemplo, el coeficiente para x_1 es 4.4 en la formulación original. Este parámetro puede *disminuir* a un límite inferior de 3.8 y el conjunto actual de variables básicas con sus valores actuales seguirá siendo óptimo. Respecto de los incrementos en el parámetro, el límite superior indica que puede aumentar (sin límite) hasta cualquier valor y el conjunto actual de variables básicas aún será óptimo. Si se piensa en esto de modo intuitivo, el coeficiente original de la función objetivo (beneficio neto por dólar invertido) de 4.4 era suficientemente alto para dar como resultado un premio de $220 millones, el máximo posible para ese proyecto. El análisis de la sensibilidad sugiere que un decremento de c_1 con el paso del tiempo podría hacer más atractivos otros proyectos competidores, dando como resultado que ningún premio se concediera al proyecto 1 o ni un premio menor. Sin embargo, si c_1 aumenta, el proyecto 1 es más atractivo y se refuerza todavía más la decisión de otorgar el premio máximo de $220 millones. Puede decirse que la solución óptima actual es *en cierto modo sensible* a los decrementos de c_1 pero *insensible* a sus incrementos.

Esta sección indica que para x_4 el coeficiente original de la función objetivo de 3.5 puede aumentar a un valor de 3.8 o disminuir sin límite. Una manera de interpretar esto es la siguiente: x_4 es una variable no básica, lo que sugiere que con su coeficiente original de rendimiento neto de 3.5, el proyecto 4 no era lo suficientemente atractivo para recibir un premio. Este análisis implica que si se aumenta el coeficiente del rendimiento neto más allá del valor de 3.8, el proyecto 4 será más atractivo y será más susceptible de recibir un premio. En forma similar, cualquier disminución en la cifra del beneficio neto reforzará que no vale la pena invertir en el proyecto 4.

Ejercicio de práctica

Interprete los resultados del análisis de la sensibilidad de la función objetivo para las variables restantes.

La sección final del análisis de la sensibilidad de la figura 11.12 pertenece a las constantes del lado derecho de las restricciones estructurales.

> Para las constantes del lado derecho, el análisis de la sensibilidad determina cuánto puede cambiar cada valor y que la base óptima todavía sea ***factible***.

Para la restricción (1), el análisis de sensibilidad indica que la constante del lado derecho de 1 000 puede *reducirse* hasta 50 a un límite inferior de 950 o aumentar hasta 50 a un límite superior de 1 050 y la base óptima aún será factible. Si cae por debajo de 950 o excede 1 050, la base óptima ya no será factible. Dicho de otro modo, la base óptima seguirá siendo factible, en tanto que la cantidad total a otorgar sea entre \$950 y \$1 050 millones. Para este parámetro, al parecer la solución óptima es relativamente sensible, tanto para los decrementos como para los incrementos.

Este tipo de análisis de sensibilidad también se relaciona con los precios sombra. El rango de variación permisible para la constante también indica el rango en que el precio sombra correspondiente es válido. Por ejemplo, la figura 11.12 sugiere que el precio sombra de 3.8 asignado a la restricción (1) es válido para decrementos de 50 máximo e incrementos hasta de 50. En otras palabras, la constante puede aumentar a 1 050 y el valor óptimo de z será igual a $4\ 527 + 50(3.8) = 4\ 717$. Del mismo modo, si esta constante se reduce a 950, el valor óptimo de z será igual a $4\ 527 - 50(3.8) = 4\ 337$.

Ejercicio de práctica

Interprete el análisis de sensibilidad para las constantes del lado derecho de las restricciones (3) y (7).

Sección 11.4 Ejercicios de seguimiento

Los ejercicios siguientes están sujetos a la disponibilidad de un paquete computarizado de programación lineal.

1. En la sección 10.2 se resolvió el problema de programación lineal de la página 447 mediante el método del punto vértice. Verifique este resultado al resolverlo con un paquete de programación lineal.

2. En la sección 10.2 se resolvió el problema del ejemplo 4 (página 450). Verifique el resultado al resolver con un paquete de programación lineal.
3. En el ejemplo 7 de la página 454 se resolvió un problema de programación lineal y se encontraron soluciones óptimas alternativas. Resuelva mediante un paquete de programación lineal. ¿Su paquete señala explícitamente soluciones óptimas alternativas?
4. El problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Maximice} & z = 6x_1 + 4x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 + x_2 \geq 10 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

tiene una solución no acotada. Resuelva mediante un paquete de programación lineal y determine si su paquete señala explícitamente este resultado.

5. Resuelva el problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Maximice} & z = 2x_1 + 12x_2 + 8x_3 \\ \text{sujeto a} & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 100 \\ & x_1 - 2x_2 + 5x_3 \leq 80 \\ & 10x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 300 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Si el paquete de programación lineal tiene las capacidades, determine los precios sombra para las tres restricciones y efectúe un análisis de la sensibilidad en los coeficientes de la función objetivo y las constantes del lado derecho.

6. Dada la formulación de la aplicación de la mezcla dietética (ejemplo 8) de la página 461, determine la solución óptima e interprete los resultados.
7. Dada la formulación de la aplicación de mantenimiento de carreteras (ejemplo 9) de la página 463, determine la solución óptima e interprete los resultados.
8. Dada la formulación de la aplicación de mezcla de petróleo (ejemplo 11) de la página 468, determine la solución óptima e interprete los resultados.

11.5 El problema dual

Todo problema de programación lineal tiene un problema relacionado con él, llamado el ***problema dual*** o, simplemente ***dual***. Dado un problema original de programación lineal, conocido como el ***problema primal***, o ***primal***, se puede formular el dual a partir de la información contenida en el primal. El problema dual es significativo por numerosas razones teóricas y también debido a propósitos prácticos. Una propiedad del dual es que, cuando se resuelve, proporciona toda la información esencial acerca de la solución del problema primal. De igual manera, la solución del primal proporciona la información esencial relativa a la solución del problema dual. Dado un problema de programación lineal, se puede determinar su solución al resolver *ya sea* el problema original o su dual. Las propiedades estructurales de los dos problemas pueden dar como resultado una preferencia decidida con respecto de qué problema se debe resolver. Aun con los métodos de solución basados en computadora, puede haber eficiencias de cálculo al resolver una forma de problema.

Formulación del problema dual

Los parámetros y estructura del primal proporcionan toda la información necesaria para formular el dual. La figura 11.13 ilustra la formulación de un problema de maximización y el dual del problema. Hagamos algunas observaciones en cuanto a las relaciones entre estos problemas primales y duales.

1. *El primal es un problema de maximización y el dual es un problema de minimización.* ***El sentido de la optimización siempre es opuesto para los problemas primales y duales correspondientes.***
2. *El primal consta de dos variables y tres restricciones y el dual tiene tres variables y dos restricciones.* ***El número de variables en el primal siempre es igual al número de restricciones que hay en el dual. El número de restricciones en el primal siempre es igual al número de variables en el dual.***
3. *Los coeficientes de la función objetivo para x_1 y x_2 en el primal son iguales a las constantes del lado derecho para las restricciones (1) y (2) en el dual.* ***El coeficiente de la función objetivo para la j-ésima variable primal es igual a la constante del lado derecho para la j-ésima restricción del dual.***

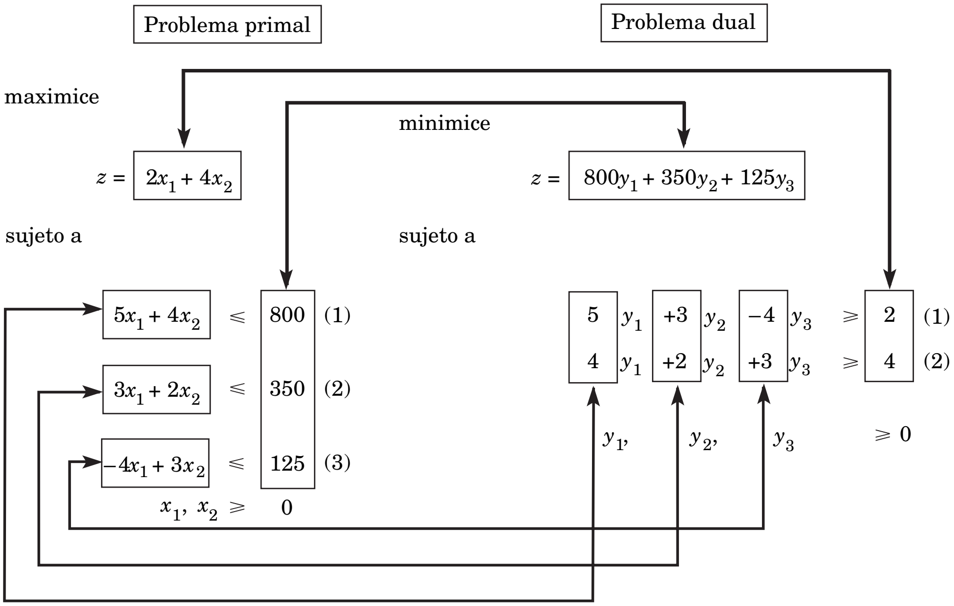


Figura 11.13 Problema primal-Problema dual.

4. *Las constantes del lado derecho para las restricciones (1) a (3) en el primal son iguales a los coeficientes de la función objetivo para las variables duales* y_1, y_2, y_3. ***La constante del lado derecho para la i-ésima restricción primal es igual al coeficiente de la función objetivo para la i-ésima variable del dual.***
5. *Los coeficientes de las variables para la restricción (1) del primal son iguales a los coeficientes de la columna para la variable dual* y_1. *Los coeficientes de las variables para las restricciones (2) y (3) del primal son iguales a los coeficientes de columna de las variables del dual* y_2, y_3. ***Los coeficientes*** a_{ij} ***en el primal son la transpuesta de los del dual. Esto es, los coeficientes de fila en el primal se convierten en coeficientes de columna en el dual, y viceversa.***

Aun cuando este problema tiene un primal que es un tipo de maximización, el primal (problema original) puede ser un problema de minimización. Las reglas de transformación se deben expresar en términos de cómo transformar desde un problema de maximización a un problema de minimización correspondiente o viceversa. La tabla 11.29 resume la simetría de dos tipos de problemas y sus relaciones.

Las relaciones 4 y 8 indican que una restricción de igualdad en un problema corresponde a una ***variable sin restricción*** en el otro problema. Una variable sin restricción puede asumir un valor que es positivo, negativo o 0. De modo similar, las relaciones 3 y 7 indican que un problema puede tener ***variables no positivas*** (por ejemplo, $x_j \leq 0$). Al parecer, variables sin restricción y no positivas contravienen al tercer requerimiento del método simplex, la restricción de no negatividad. Aunque esto es cierto, para problemas que contienen cualquiera de estos tipos especiales de variables hay métodos que permiten ajustar la formulación para satisfacer el tercer requerimiento.

Tabla 11.29

Problema de maximización		**Problema de minimización**
Número de restricciones	$\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}$	Número de variables
Restricción de ($\leq$)	$\overset{(2)}{\Longleftrightarrow}$	Variable no negativa
Restricción de ($\geq$)	$\overset{(3)}{\Longleftrightarrow}$	Variable no positiva
Restricción de ($=$)	$\overset{(4)}{\Longleftrightarrow}$	Variable sin restricción
Número de variables	$\overset{(5)}{\Longleftrightarrow}$	Número de restricciones
Variable no negativa	$\overset{(6)}{\Longleftrightarrow}$	Restricción de ($\geq$)
Variable no positiva	$\overset{(7)}{\Longleftrightarrow}$	Restricción de ($\leq$)
Variable sin restricción	$\overset{(8)}{\Longleftrightarrow}$	Restricción de ($=$)
Coeficiente de la función objetivo para la *j*-ésima variable	$\overset{(9)}{\Longleftrightarrow}$	Constante del lado derecho para la *j*-ésima variable
Constante del lado derecho para la *i*-ésima restricción	$\overset{(10)}{\Longleftrightarrow}$	Coeficiente de la función objetivo para la *i*-ésima variable
Coeficiente en la restricción *i* para la variable *j*	$\overset{(11)}{\Longleftrightarrow}$	Coeficiente en la restricción *j* para la variable *i*

Ejemplo 15 Dado el problema primal

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Minimice} & z = 10x_1 + 20x_2 + 15x_3 + 12x_4 & & \\
\text{sujeto a} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 100 & & (1) \\
& 2x_1 - x_3 + 3x_4 \leq 140 & & (2) \\
& x_1 + 4x_2 - 2x_4 = 50 & & (3) \\
& x_1, x_3, x_4 \geq 0 & & \\
& x_2 \quad \text{sin restricción} & &
\end{array}
$$

verifique que el problema dual correspondiente sea

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximice} & z = 100y_1 + 140y_2 + 50y_3 \\
\text{sujeto a} & y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 10 \\
& y_1 + 4y_3 = 20 \\
& y_1 - y_2 \leq 15 \\
& y_1 + 3y_2 - 2y_3 \leq 12 \\
& y_1 \geq 0 \\
& y_2 \leq 0 \\
& y_3 \quad \text{sin restricción}
\end{array}
$$

❑

Soluciones al problema primal y dual

Ya se ha indicado que se puede obtener la solución del problema primal a partir de la solución del problema dual y viceversa. Ilustremos esto con un ejemplo. Considere el problema primal:

$$
\begin{array}{llr}
\text{Maximice} & z = 5x_1 + 6x_2 & \\
\text{sujeto a} & 3x_1 + 2x_2 \leq 120 & (1) \\
& 4x_1 + 6x_2 \leq 260 & (2) \\
& x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

El dual correspondiente es

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimice} & z = 120y_1 + 260y_2 \\
\text{sujeto a} & 3y_1 + 4y_2 \geq 5 \\
& 2y_1 + 6y_2 \geq 6 \\
& y_1, y_2 \geq 0
\end{array}
$$

La tabla 11.30 presenta el cuadro final (óptimo) para el problema dual. Observe en este cuadro que se minimiza z con un valor de 280 cuando $y_1 = \frac{3}{5}$ y $y_2 = \frac{4}{5}$. Se resolvió con anterioridad el problema primal en el capítulo. La tabla 11.7, que resume la solución óptima, se repite por conveniencia. Ilustremos cómo se puede leer la solución de cada problema del cuadro óptimo del problema dual correspondiente.

Propiedad 1 del problema primal-dual

Si existen soluciones factibles tanto para los problemas primal como dual, entonces ambos problemas tienen una solución óptima para la cual los valores de la función objetivo son iguales. Una relación periférica es que si un problema tiene una solución no acotada, su problema dual carecerá de solución factible.

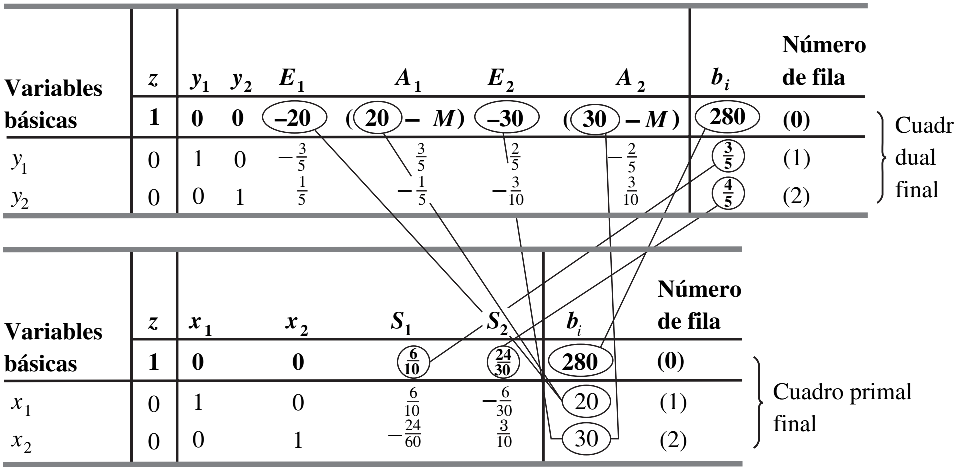


Tabla 11.30

Variables básicas	z	y_1	y_2	E_1	A_1	E_2	A_2	b_i	Número de fila
	1	**0**	**0**	**-20**	**$(20 - M)$**	**-30**	**$(30 - M)$**	**280**	**(0)**
y_1	0	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	(1)
y_2	0	0	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{5}$	(2)

Cuadro dual final

Tabla 11.31

Variables básicas	z	x_1	x_2	S_1	S_2	b_i	Número de fila
	1	**0**	**0**	$\frac{6}{10}$	$\frac{24}{30}$	**280**	**(0)**
x_1	0	1	0	$\frac{6}{10}$	$-\frac{6}{30}$	20	(1)
x_2	0	0	1	$-\frac{24}{60}$	$\frac{3}{10}$	30	(2)

Cuadro primal final

Para este par de problemas primal-dual, nótese que los valores óptimos para sus respectivas funciones objetivo son ambos iguales a 280.

Propiedad 2 del problema primal-dual

Los valores óptimos de las variables de decisión en un problema se leen a partir de la fila (0) del cuadro óptimo para el otro problema.

Los valores óptimos $y_1 = \frac{3}{5}$ y $y_2 = \frac{4}{5}$ se leen de la tabla 11.7 como los coeficientes de la fila (0) para las variables de holgura S_1 y S_2. Los valores óptimos $x_1 = 20$ y $x_2 = 30$ se leen de la tabla 11.30 como los negativos de los coeficientes de la fila (0) para las variables de superávit E_1 y E_2. Es posible leer estos valores, alternativamente, bajo sus variables artificiales respectivas, como la parte (término) de los coeficientes de la fila (0) que *no* contiene M.

Epílogo

El dual es un tema difícil pero significativo en la programación lineal. El propósito es que conozca el tema y comprenda algunas propiedades importantes del dual. Si decide tomar un curso de programación lineal o matemática, probablemente tendrá un tratamiento más detallado del dual y de sus implicaciones.

Sección 11.5 Ejercicios de seguimiento

Para los problemas primales siguientes, formule el problema dual correspondiente.

1. Maximice $z = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\le 45 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 &\le 30 \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 &\le 50 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

2. Minimice $z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 5x_3 &\ge 300 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\ge 75 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

3. Maximice $z = 20x_1 + 15x_2 + 18x_3 + 10x_4$

sujeto a

$$\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 + 10x_3 + 4x_4 &\le 60 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 25 \\ -x_2 + 4x_3 + 7x_4 &\ge 35 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \\ x_4 &\quad \text{sin restricción} \end{aligned}$$

4. Minimice $z = 6x_1 + 4x_2$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 45 \\ 5x_1 - 4x_2 &= 10 \\ -3x_1 + 5x_2 &\ge 75 \\ 3x_1 + 6x_2 &\ge 30 \\ x_1 &\quad \text{sin restricción} \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

5. Minimice $z = 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_5$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 45 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_4 &\le 24 \\ 7x_3 - 5x_4 + 3x_5 &\ge 20 \\ x_1, x_2, x_4 &\ge 0 \\ x_3, x_5 &\quad \text{sin restricción} \end{aligned}$$

6. Maximice $z = x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 3x_5 + 2x_6$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_5 &= 40 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 - 3x_6 &= 70 \\ 4x_2 - 5x_3 + 2x_5 - 4x_6 &= 35 \\ x_1, x_3, x_4, x_6 &\ge 0 \\ x_2, x_5 &\quad \text{sin restricción} \end{aligned}$$

7. Dado el problema primal siguiente

$$\begin{aligned} \text{Maximice} \quad & z = 5x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & 2x_1 + 4x_2 \leq 32 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 24 \\ & x_1, x_2 \geq \ \ 0 \end{aligned}$$

a) Formule el problema dual correspondiente.
b) Resuelva el problema primal mediante el método simplex.
c) Determine la solución óptima del problema dual a partir del cuadro de soluciones óptimas del problema primal.
d) Resuelva el problema dual mediante el método simplex para verificar el resultado obtenido en el inciso *c*. Lea la solución óptima del problema primal del cuadro de soluciones óptimas del problema dual.

8. Dado el problema primal siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Minimice} \quad & z = 4x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & 4x_1 + 2x_2 \geq 80 \\ & 3x_1 + \ \ x_2 \geq 50 \\ & x_1, x_2 \geq \ \ 0 \end{aligned}$$

a) Formule el problema dual correspondiente.
b) Resuelva el problema primal usando el método simplex.
c) Determine la solución óptima del problema dual del cuadro óptimo del problema primal.
d) Resuelva el problema dual por el método simplex para verificar el resultado obtenido en el inciso *c*. Lea la solución óptima del problema primal del cuadro óptimo del dual.

❑ TÉRMINOS Y CONCEPTOS CLAVE

análisis posterior a lo óptimo 529
base 491
columna clave 505
cuadro 504
método de eliminación de Gauss 501
método simplex 483
precio sombra 529
(problema) dual 533
(problema) primal 533
solución básica 490
solución factible básica 491
ninguna solución no factible 521
solución por enumeración 499
soluciones sin límite no acotadas 523
soluciones óptimas alternativas 519
variable artificial 487
variable básica 491
variable de holgura 486
variable de superávit 487
variable no básica 491
variable sin restricción 535
variables no positivas 535

❑ EJERCICIOS ADICIONALES

SECCIÓN 11.1

1. Dado el siguiente problema de programación lineal, reformule el conjunto restricción en la forma estándar incorporando todas las variables complementarias.

$$\begin{array}{ll}
\text{Maximice} & z = 6x_1 - 2x_2 + 8x_3 \\
\text{sujeto a} & 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 50 \\
& 2x_1 - 3x_2 \leq -15 \\
& 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq 40 \\
& x_1 + 2x_2 \geq 15 \\
& -2x_2 \leq -4 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}$$

2. Dado el problema de programación lineal siguiente, vuelva a escribir el conjunto restricción en la forma estándar al incorporar todas las variables complementarias.

$$\begin{array}{ll}
\text{Minimice} & z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
\text{sujeto a} & 5x_1 - 3x_2 + 6x_3 \leq 30 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \geq 14 \\
& 3x_1 - 4x_3 \geq -15 \\
& x_2 \leq 10 \\
& x_1 = 2x_3 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}$$

3. Dado el siguiente problema de programación lineal, reformule el conjunto de restricciones en la forma estándar incorporando todas las variables complementarias.

$$\begin{array}{ll}
\text{Maximice} & z = 10x_1 + 12x_2 + 8x_3 \\
\text{sujeto a} & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 12 \\
& x_1 - 3x_2 \leq 20 \\
& x_1 + x_2 + x_3 \geq 8 \\
& 4x_1 - 5x_2 + 3x_3 \leq 25 \\
& x_1 \geq 5 \\
& x_2 \leq 6 \\
& x_3 \geq 2 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}$$

4. Un problema de programación lineal tiene 25 variables de decisión, 60 restricciones del tipo ($\leq$), 30 restricciones de ($\geq$) y 10 restricciones de ($=$). Cuando se vuelven a escribir en la forma estándar, ¿cuántas variables se incluirán? ¿Cuántas variables complementarias de cada tipo?
5. Un problema de programación lineal tiene 50 variables de decisión, 80 restricciones de ($\leq$), 150 restricciones de ($\geq$) y 20 restricciones de ($=$). Cuando se vuelve a escribir en la forma estándar, ¿cuántas variables se incluirán? ¿Cuántas variables complementarias de cada tipo?
6. Un problema de programación lineal tiene 150 variables de decisión, 300 restricciones de ($\leq$), 100 restricciones de ($\geq$) y 50 restricciones de ($=$). Cuando se vuelven a escribir en la forma estándar, ¿cuántas variables se incluirán? ¿Cuántas variables complementarias de cada tipo?
7. Dada la región de soluciones factibles de la figura 11.14:
   a) Identifique la naturaleza (tipo) de cada restricción.
   b) ¿Qué variables complementarias se sumarán cuando se resuelva por el método simplex?
   c) ¿Cuántas variables básicas y no básicas habrá?
   d) Identifique las variables básicas y no básicas asociadas a todos los puntos vértice.

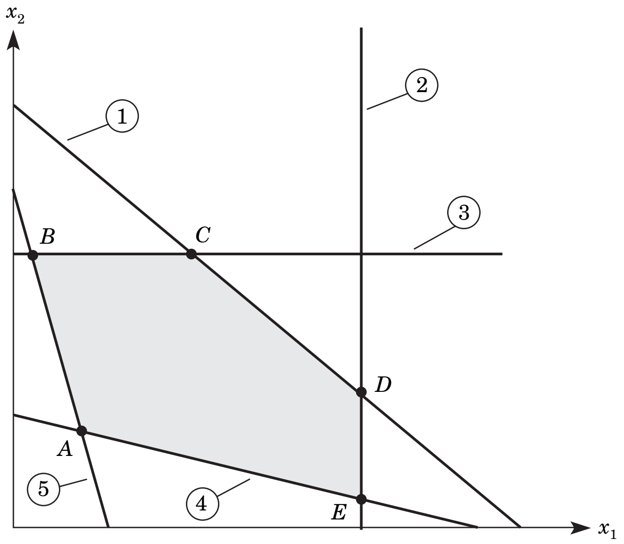


Figura 11.14

8. Dada la región de soluciones factibles de la figura 11.15:
   a) Identifique la naturaleza (tipo) de cada restricción.
   b) ¿Qué variables complementarias se sumarán cuando se resuelva por el método simplex?
   c) ¿Cuántas variables básicas y no básicas habrá?
   d) Identifique las variables básicas y no básicas asociadas a todos los puntos vértice.

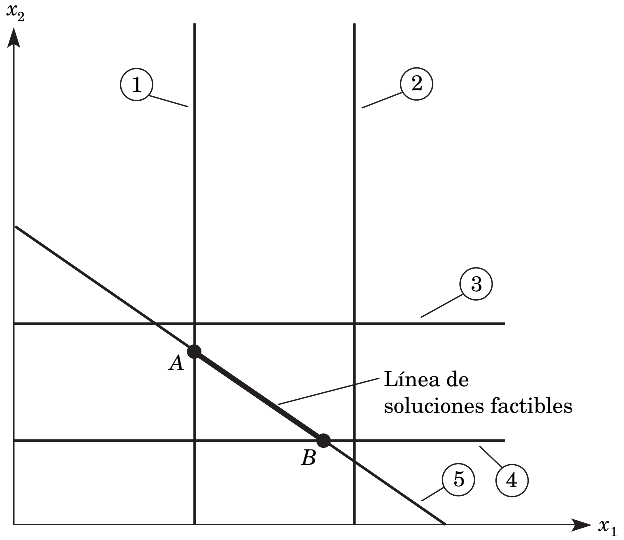


Figura 11.15

SECCIÓN 11.2

Resuelva los problemas siguientes usando el método simplex.

9. Maximice $z = 5x_1 + 9x_2$

sujeto a

$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 &\le 600 \\ 12x_1 + 8x_2 &\le 960 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

10. Minimice $z = 100x_1 + 75x_2$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\ge 200 \\ x_2 &\ge 100 \\ x_1 &\ge 80 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

11. Maximice $z = 4x_1 + 2x_2 + 6x_3$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 100 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\le 120 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

12. Minimice $z = 4x_1 + 4x_2$

sujeto a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &\ge 160 \\ 2x_1 &\ge 60 \\ 2x_2 &\ge 40 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

13. Maximice $z = 6x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 2x_4$

sujeto a

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 6x_4 &\le 1\,100 \\ 8x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 &\le 1\,400 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 &\le 400 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

14. Maximice $z = 5x_1 + 8x_2 + x_3$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 &\le 70 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 100 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\le 80 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

15. Minimice $z = 8x_1 + 4x_2 + 7x_3$

sujeto a

$$\begin{aligned} 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 &\ge 120 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\ge 80 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\ge 80 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

16. Maximice $z = 7x_1 + 2x_2 + 5x_3$

sujeto a

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 35 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\le 50 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 40 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

SECCIÓN 11.3

En los ejercicios siguientes, resuelva por el método simplex.

17. Maximice $z = 5x_1 + 10x_2$

sujeto a
$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 &\le 53 \\ x_1 + 2x_2 &\le 22 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

18. Minimice $z = 15x_1 + 25x_2$

sujeto a
$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 &\ge 80 \\ 6x_1 + 10x_2 &\ge 160 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

19. Minimice $z = 6x_1 + 4x_2$

sujeto a
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\le 24 \\ x_1 + 2x_2 &\ge 30 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

20. Maximice $z = 2x_1 + 3x_2$

sujeto a
$$\begin{aligned} -x_1 + 3x_2 &\ge 12 \\ x_1 &\le 5 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

SECCIÓN 11.4

Use un software de programación lineal apropiado para resolver los ejercicios siguientes.

21. Maximice $z = 3x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 6x_4$

sujeto a
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 &\le 50 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 &\le 40 \\ 10x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 &\le 150 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

22. Minimice $z = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 7x_4 + 4x_5$

sujeto a
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\ge 20 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &\le 100 \\ 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 &\ge 24 \\ x_1 &\ge 4 \\ x_4 &\ge 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0 \end{aligned}$$

23. Maximice $z = -1x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 4x_5 + 5x_6$

sujeto a
$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &\le 32\,000 \\ x_2 + x_5 &\le 20\,000 \\ x_3 + x_6 &\le 38\,000 \\ -5x_1 + x_2 - 4x_3 &\le 0 \\ 28x_1 + 10x_2 - 7x_3 &\ge 0 \\ -2x_4 + 4x_5 - x_6 &\le 0 \\ 8x_4 - 10x_5 - 27x_6 &\ge 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\ge 30\,000 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\ge 0 \end{aligned}$$

24. Maximice $z = 180\,000x_1 + 20\,000x_2 + 72\,000x_3 + 80\,000x_4$

sujeto a
$$\begin{aligned} 30\,000\,x_1 + 12\,000x_2 + 30\,000x_3 + 20\,000x_4 &\le 65\,000 \\ 40\,000\,x_1 + 8\,000x_2 + 20\,000x_3 + 30\,000x_4 &\le 80\,000 \\ 40\,000\,x_1 + 20\,000x_3 + 40\,000x_4 &\le 80\,000 \\ 30\,000\,x_1 + 4\,000x_2 + 20\,000x_3 + 10\,000x_4 &\le 50\,000 \\ x_1 &\le 1 \\ x_2 &\le 1 \\ x_3 &\le 1 \\ x_4 &\le 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

25. Minimice
$$\begin{aligned} z = {} & 464x_1 + 513x_2 + 654x_3 + 867x_4 + 352x_5 + 416x_6 + 690x_7 + 791x_8 \\ & + 995x_9 + 682x_{10} + 388x_{11} + 685x_{12} \end{aligned}$$
sujeto a
$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \leq & 75 \\ x_5 + x_6 + x_7 + x_8 & \leq & 125 \\ x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} & \leq & 100 \\ x_1 + x_5 + x_9 & = & 80 \\ x_2 + x_6 + x_{10} & = & 65 \\ x_3 + x_7 + x_{11} & = & 70 \\ x_4 + x_8 + x_{12} & = & 85 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12} & \geq & 0 \end{array}$$

26. Resuelva el problema de la cartera financiera del ejercicio 15 (página 476) e interprete los resultados.

27. Resuelva el problema del modelo de asignación planteado en el ejercicio 16 (página 477) e interprete los resultados.

28. Resuelva el problema de carga del ejercicio 17 (página 477) e interprete los resultados.

SECCIÓN 11.5

Para los problemas siguientes, formule el problema dual correspondiente.

29. Minimice $z = 8x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4$
sujeto a
$$\begin{array}{rcl} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 & \leq & 125 \\ x_1 + x_3 + x_4 & = & 75 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 & \leq & 150 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \\ x_4 & & \text{sin restricción} \end{array}$$

30. Maximice $z = x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 2x_5$
sujeto a
$$\begin{array}{rcl} 3x_1 + 4x_2 & \leq & 35 \\ 5x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 2x_4 + x_5 & \geq & 130 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 50 \\ x_4 + x_5 & \leq & 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

31. Formule el dual del problema de mantenimiento de carreteras (ejemplo 9 en la página 462) presentado en el capítulo 10.

32. Formule el dual del problema de entrega de premios (ejemplo 10 en la página 463) presentado en el capítulo 10.

33. Formule el dual del problema de mezcla de petróleo (ejemplo 11 en la página 465) presentado en el capítulo 10.

EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. Dado el problema de programación lineal siguiente:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximice} & z = 10x_1 + 8x_2 + 12x_3 \\
\text{sujeto a} & 4x_1 - 2x_2 + x_3 \le 25 \\
 & x_1 + 3x_2 \ge -10 \\
 & 2x_1 + 3x_3 = -20 \\
 & x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{array}
$$

transforme el conjunto de restricciones en un sistema equivalente de ecuaciones de restricción deseable para el método simplex.

2. Resuelva el problema de programación lineal siguiente por el método simplex.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximice} & z = 20x_1 + 24x_2 \\
\text{sujeto a} & 3x_1 + 6x_2 \le 60 \\
 & 4x_1 + 2x_2 \le 32 \\
 & x_1, x_2 \ge 0
\end{array}
$$

3. Se le da el problema de programación lineal:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimice} & z = 5x_1 + 4x_2 \\
\text{sujeto a} & x_1 + x_2 \ge 10 \\
 & 2x_1 - x_2 = 15 \\
 & x_1, x_2 \ge 0
\end{array}
$$

a) Establezca el cuadro simplex inicial y revíselo, si es necesario, para que los coeficientes de la fila (0) sean iguales a 0 para todas las variables básicas.

b) ¿Qué variable básica se irá primero?

c) ¿Qué variable no básica entrará primero?

4. Describa la manera en que se indican las soluciones óptimas alternativas cuando se usa el método simplex. ¿Cómo se indica una solución no acotada?

5. Dado el problema primal siguiente, formule el problema dual correspondiente.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimice} & z = 8x_1 + 5x_2 + 6x_3 \\
\text{sujeto a} & x_1 + x_2 + x_3 = 25 \\
 & 4x_1 - 5x_2 \ge 10 \\
 & x_1 - x_2 + 2x_3 \le 48 \\
 & x_2 \le 12 \\
 & x_1, x_2 \ge 0 \\
 & x_3 \quad \text{sin restricción}
\end{array}
$$

6. Analice el significado de: *a*) los precios sombra, y *b*) el análisis de sensibilidad.

MINICASO

CONCESIÓN DE CONTRATOS

El departamento de compras de un organismo estatal requiere ofertas para cinco productos diferentes. Tres proveedores presentaron ofertas de los productos. La tabla 11.31 resume los precios de oferta por unidad para cada producto. Observe que los proveedores no necesariamente hacen ofertas de los cinco productos. También se muestra en la tabla 11.31 la cantidad que el organismo requiere de cada artículo.

Tabla 11.31

	Producto				
Proveedor	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	$5.00	$7.50	$3.00	–	$4.50
2	–	$7.25	$3.20	$8.75	$4.20
3	$4.80	47.75	$3.10	$9.00	–
Requerimiento del organismo	20 000	15 000	30 000	25 000	22 000

Algunos proveedores indicaron las cantidades máximas que pueden surtir de productos particulares. El proveedor 1 indicó que no puede surtir más de 10 000 unidades del producto 3, el proveedor 2 no puede surtir más de 8 000 unidades del producto 2 y el proveedor 3 no puede surtir más de 18 000 unidades del producto 1. Las regulaciones de compras estatales no requieren que se compren todas de un producto dado de un proveedor. De igual manera, no requieren que se asignen contratos al menor postor.

El departamento de compras quiere determinar cuántas unidades de cada producto debe comprar a cada proveedor con el fin de satisfacer los requerimientos del organismo en un costo total mínimo.

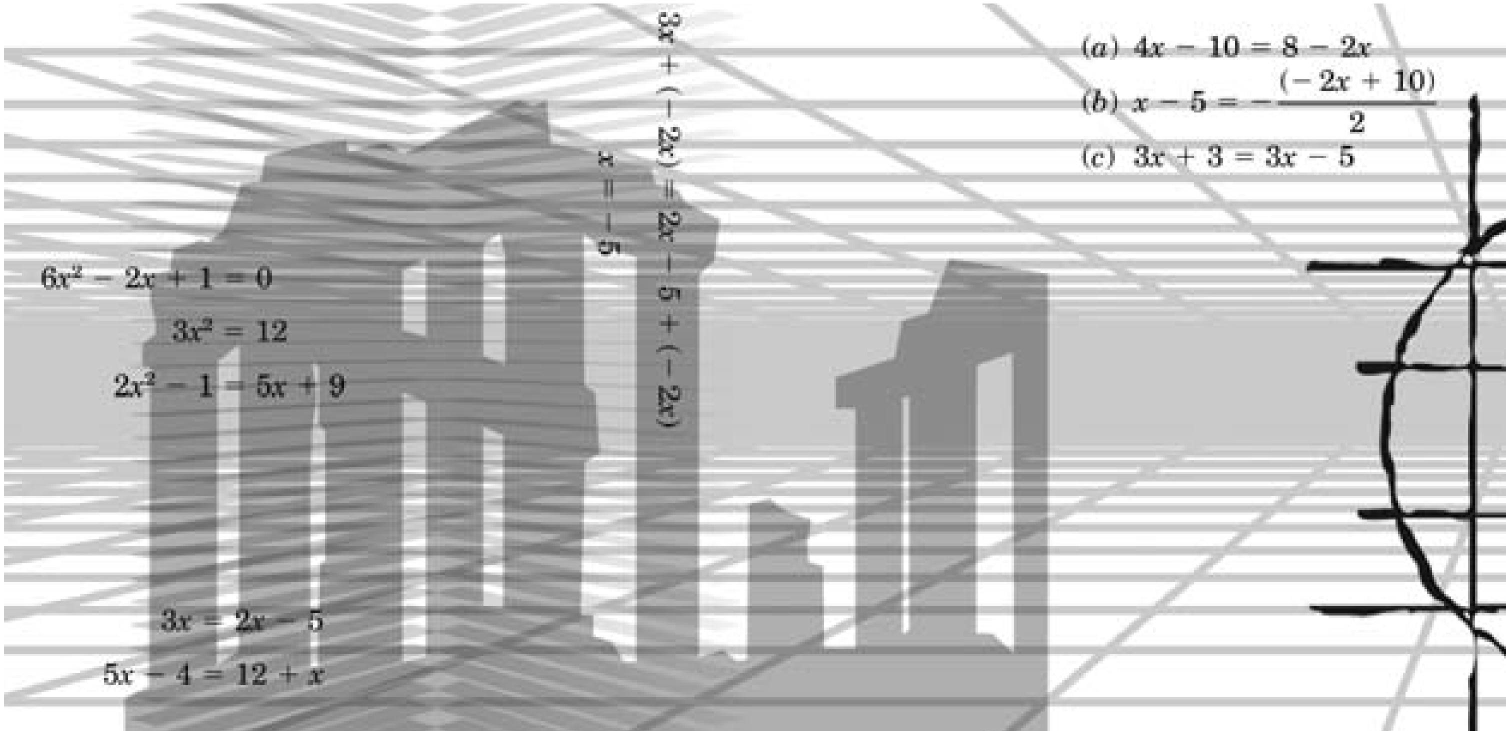
1. Formule el modelo de programación lineal para este problema, definiendo con cuidado sus variables.
2. Resuelva el problema mediante un paquete de programación lineal computarizado e interprete por completo los resultados. Indique las cantidades de cada producto compradas y las cantidades de dólares asignadas a cada proveedor. También indique a cuánto equivalen los costos mínimos totales.
***3.** Suponga que el departamento de compras no quiere otorgar más de $300 000 en contratos a un solo proveedor. También, suponga que el proveedor 3 estipuló que debería recibir contratos de por lo menos $200 000; si no se cumple este requerimiento, el proveedor retirará todas las ofertas. Modifique la formulación original y resuelva por medio de un paquete de programación lineal por computadora. Interprete sus resultados y compárelos con la respuesta de la parte 2. (*Sugerencia*: Formule y resuelva dos modelos separados, uno que supone que se cumplirán los requerimientos del proveedor 3 y el otro que supone que el proveedor 3 ha retirado sus ofertas.)

CAPÍTULO 12

Modelos de transporte y asignación

12.1 EL MODELO DE TRANSPORTE
12.2 MÉTODOS DE SOLUCIÓN PARA EL MODELO DE TRANSPORTE
12.3 EL MODELO DE ASIGNACIÓN Y LOS MÉTODOS DE SOLUCIÓN

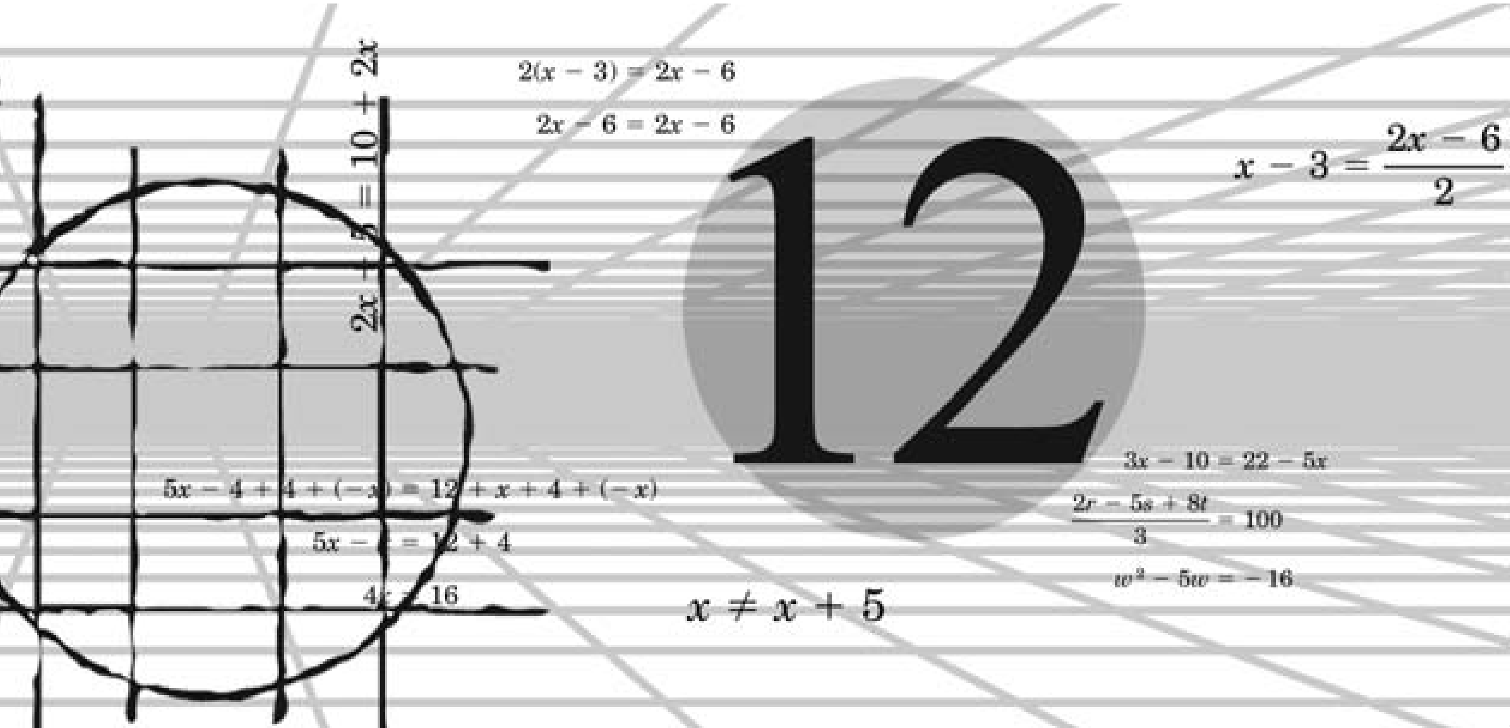
Términos y conceptos clave
Ejercicios adicionales
Evaluación del capítulo
Minicaso: Distribución del almacenamiento



OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

Proporcionar una perspectiva general de varias ampliaciones del modelo básico de programación lineal. Se incluye una discusión de las suposiciones, características distintivas, métodos de solución y aplicaciones de los siguientes modelos:

- Modelo de transporte.
- Modelo de asignación.



ESCENARIO DE MOTIVACIÓN: Asignaciones de árbitros de la NCAA

El torneo de basquetbol de la división I de la Asociación Nacional Atlética Colegial (NCAA, National Collegiate Athletic Association) está en marcha. Al prepararse para los cuatro torneos regionales, la Comisión de Torneos ha seleccionado cuatro equipos de árbitros que se han distinguido como los más capacitados para el torneo de este año. Cada equipo de oficiales se compone de seis árbitros regulares y dos alternos, que también viajan al torneo regional. A los oficiales se les remunera con los honorarios de un torneo estándar más los gastos de transportación. **La comisión quiere asignar a los cuatro equipos de oficiales de modo que se minimicen los gastos de transportación totales (ejemplo 3).**

Existe un conjunto de modelos de programación matemáticos que son extensiones directas del modelo de programación lineal estándar. Este conjunto de modelos tiene muchas aplicaciones, en los cuales se incluyen, entre otros, el *modelo de transporte* y el *modelo de asignación*. Estos modelos serán revisados en este capítulo. Para cada modelo se comentará su forma general y las suposiciones de los mismos. A manera de ejemplos se ilustrarán una o más aplicaciones con los métodos de solución. Los propósitos de este capítulo son informarle de esta importante colección de modelos y proporcionarle más experiencia en el área de la formulación del problema.

12.1 El modelo de transporte

Todos los modelos de programación lineal pueden resolverse mediante el método simplex. Sin embargo, debido a sus estructuras especiales, algunas clases de problemas de programación lineal se prestan a solucionarse mediante métodos que son más eficientes que el método simplex desde el punto de vista de los cálculos. Una clase de tales modelos de programación lineal es el ***modelo de transporte***.

Forma general y suposiciones

El modelo de transporte clásico implica el embarque de cierto ***artículo o producto homogéneo*** desde un conjunto de ***orígenes*** hasta un conjunto de ***destinos***. Cada origen representa una fuente de suministro para el artículo o producto; cada destino representa un punto de demanda para el producto. El ejemplo 9 del capítulo 10 (página 462) es un ejemplo de modelo de transporte. En ese ejemplo, el producto homogéneo era sal y arena que se utilizan en las carreteras durante las formaciones de hielo en invierno y las tormentas de nieve. Los orígenes fueron dos reservas, cada una caracterizada por una capacidad máxima de almacenamiento. Los destinos fueron las cuatro zonas de la ciudad, caracterizadas cada una por una necesidad esperada (demanda) durante una tormenta dada. La primera suposición implica que no hay diferencias significativas en las características del producto disponible en cada origen. Esto sugiere que a menos que existan otras restricciones, cada origen puede suministrar unidades a cualquiera de los destinos.

Suposición 1

El modelo estándar supone un artículo o producto homogéneo.

El propósito en el modelo de transporte clásico es asignar el suministro u oferta disponible en cada origen de manera que satisfaga la demanda para cada destino. Pueden emplearse diversos criterios para medir la efectividad de la asignación. Los objetivos típicos son la minimización de los costos de transportaciones totales o alguna medición ponderada de distancia* o la maximización de la contribución a la ganancia total de la asignación. En el ejemplo del capítulo 10, el objetivo fue minimizar el costo de distribución total. En la tabla 12.1 se hace un resumen del costo de distribución de una tonelada de sal o arena desde cada reserva hasta cada zona de la ciudad. También se muestran las capacidades de las reservas y los niveles normales de la demanda (ligeramente modificados a partir del ejemplo original).

Tabla 12.1

	Zona (destino)				
Reserva (origen)	**1**	**2**	**3**	**4**	**Oferta máxima, toneladas**
1	\$2.00	\$3.00	\$1.50	\$2.50	900
2	4.00	3.50	2.50	3.00	750
Demanda, tons	300	450	550	350	

Dado que x_{ij} *es igual al número de toneladas de sal y arena distribuidas desde la reserva i hacia la zona j,* la fórmula completa para este problema modificado es

$$\begin{array}{ll}
\text{Minimice} & z = 2x_{11} + 3x_{12} + 1.5x_{13} + 2.5x_{14} + 4x_{21} + 3.5x_{22} + 2.5x_{23} + 3x_{24} \\
\text{sujeta a} & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 900 \text{ (reserva 1)} \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 750 \text{ (reserva 2)} \\
& x_{11} + x_{21} = 300 \text{ (zona 1)} \\
& x_{12} + x_{22} = 450 \text{ (zona 2)} \\
& x_{13} + x_{23} = 550 \text{ (zona 3)} \\
& + x_{14} + x_{24} = 350 \text{ (zona 4)} \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24} \geq 0
\end{array}$$

Suposición 2

El modelo estándar supone que el suministro total y la demanda total son iguales.

Se requiere de esta segunda suposición por un algoritmo de solución especial para este tipo de modelo. Aun cuando el ejemplo fue modificado para crear un equilibrio entre el suministro (o la oferta) y la demanda, esta suposición rara vez se satisface en un problema real. Existen procedimientos para manipular el desequilibrio cuando se presenta en un

---

* Por ejemplo, el número de unidades distribuidas ponderado (multiplicado) por la distancia que recorren.

problema. Estos procedimientos son semejantes a agregar variables de holgura y demasía a una fórmula de programación lineal para propósitos de uso del método simplex.

Nótese que en las restricciones estructurales todas las variables tienen coeficientes de 0 o 1. Por ejemplo, la primera restricción puede preverse como de la forma:

$$1x_{11} + 1x_{12} + 1x_{13} + 1x_{14} + 0x_{21} + 0x_{22} + 0x_{23} + 0x_{24} = 900$$

De igual manera, la última restricción tiene la forma implícita:

$$0x_{11} + 0x_{12} + 0x_{13} + 1x_{14} + 0x_{21} + 0x_{22} + 0x_{23} + 1x_{24} = 350$$

Esta característica, junto con la suposición del equilibrio entre la oferta y la demanda, es importante al distinguir los modelos de transporte de otros modelos de programación lineal. Se han desarrollado métodos de solución que sacan provecho de esta estructura y producen eficiencias de cálculo significativas.

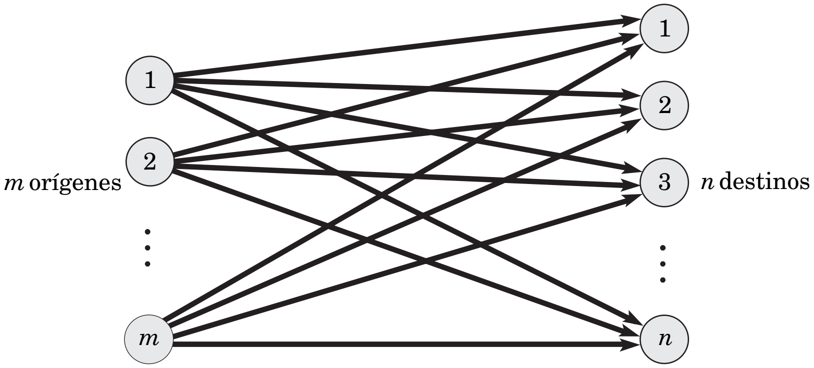


Figura 12.1 Modelo de transporte general.

Establezcamos el modelo de transporte general asociado a la estructura mostrada en la figura 12.1. Si

x_{ij} = *número de unidades distribuidas desde el origen i hasta el destino j*

c_{ij} = *contribución a la función objetivo al distribuir una unidad desde el origen i hasta el destino j*

s_i = *número de unidades disponibles en el origen i*

d_j = *número de unidades que se demandan en el destino j*

m = *número de orígenes*

n = *número de destinos*

el modelo generalizado puede establecerse de la manera siguiente:

$$\begin{array}{ll}
\text{Minimice} & z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \cdots \\
\text{(o maximice)} & \qquad + c_{2n}x_{2n} + \cdots + c_{mn}x_{mn} \\
\text{sujeta a} & \left.\begin{array}{l}
x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = s_1 \\
x_{22} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = s_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \quad\; \vdots \\
x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} = s_m
\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{restricciones} \\ \text{de la oferta}\end{array} \\
 & \left.\begin{array}{l}
x_{11} + x_{22} + \cdots + x_{m1} = d_1 \\
x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{m2} = d_2 \\
\vdots \qquad\qquad\qquad\quad \vdots \quad\; \vdots \\
x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} = d
\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{restricciones} \\ \text{de la} \\ \text{demanda}\end{array} \\
 & \qquad\qquad x_{ij} \geq 0 \quad \text{para todas las } i \text{ y } j
\end{array}$$

En el modelo se encuentra implícito el equilibrio entre la oferta y la demanda,

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_m = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$$

El modelo de transporte es un modelo muy flexible que puede aplicarse a problemas que nada tienen que ver con la distribución de productos. El siguiente ejemplo es un caso que ilustra lo anterior.

Ejemplo 1

(Investigación de solicitudes de empleo) Una agencia de empleos trabaja con base en contratos con los empleadores o patrones. Un fabricante de computadoras está abriendo una nueva planta y ha hecho un contrato con la agencia de empleos para procesar solicitudes de empleo para posibles empleados. Debido a la demanda poco uniforme de la carga de trabajo de la agencia, a menudo hace uso de personal eventual para propósitos de aplicaciones de procesamiento. Para este contrato en particular, deben contratarse cinco analistas. Cada analista ha proporcionado una estimación del número máximo de solicitudes de trabajo que puede evaluar durante el mes entrante. (La agencia examina estas estimaciones para asegurarse de que sean razonables.) A los analistas se les paga a destajo, con una tarifa determinada por el tipo de solicitud evaluada y la experiencia del analista.

En la tabla 12.2 se resume el costo por analista del procesamiento para cada tipo de solicitud de trabajo. También se indica tanto el número máximo de solicitudes que pueden ser procesadas por cada analista como el número de solicitudes que se espera en cada categoría de trabajo. El problema para la agencia es determinar el número de solicitudes de cada tipo de empleo que debe asignar a cada analista, de manera que se minimice el costo del proceso del lote esperado de solicitudes de empleo. Cada analista puede considerarse como un origen con una capacidad máxima para la investigación de solicitudes.

Si x_{ij} es *igual al número de solicitudes de trabajo de tipo j asignado al analista i*, el problema puede formularse como se muestra en el modelo que se encuentra en la parte superior de la página siguiente. Nótese que la oferta total (el número máximo de solicitudes que pueden procesarse por cinco analistas) excede la demanda total (número esperado de solicitudes). Como resultado, las restricciones (1) a (5) no pueden establecerse como igualdades. Y de acuerdo con la suposición 2, la oferta y la demanda totales deben llegar a un equilibrio, artificialmente, antes de resolver el problema.

Tabla 12.2

	Tipo de solicitud de trabajo				
Analista asignado	1 Ingeniero	2 Programador/ analista	3 Trabajador experimentado	4 Trabajador sin experiencia	Número máximo de solicitudes
1	$15	$10	$8	$7	90
2	12	8	7	5	120
3	16	9	9	8	140
4	12	10	7	7	100
5	10	7	6	6	110
Número esperado de solicitudes	100	150	175	125	560 550

$$\begin{array}{l}
\text{Minimice} \qquad z = 15x_{11} + 10x_{12} + 8x_{13} + 7x_{14} + \cdots + 6x_{54} \\
\text{sujeta a}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lr}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & \leq \ \ 90 \ (1) \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & \leq 120 \ (2) \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} & \leq 140 \ (3) \\
+ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} & \leq 100 \ (4) \\
x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} & \leq 110 \ (5) \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} & = 100 \ (6) \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} & = 150 \ (7) \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} & = 175 \ (8) \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} & = 125 \ (9) \\
 & x_{ij} \geq 0 \text{ para todo } i \text{ y } j
\end{array}$$

❑

12.2 Métodos de solución para el modelo de transporte

Como se señaló con anterioridad, el modelo de transporte se distingue de otros modelos de programación lineal en la medida en que su estructura se presta en sí misma a procedimientos de solución más eficaces que el método simplex. El método simplex *puede* utilizarse para resolver modelos de transporte. Sin embargo, métodos como el ***algoritmo del cruce de arroyo*** (también conocido como ***método del punto de apoyo*** o bien ***algoritmo de las piedras de paso***, del inglés ***stepping stone algorithm***) y un mejoramiento basado en el problema dual denominado ***método MODI**** (distribución modificada, también denominado u-v) demuestran ser mucho más eficaces.

Soluciones iniciales (de arranque)

La eficacia incrementada puede presentarse durante dos diferentes fases de la solución: 1) la determinación de la solución inicial y 2) el desarrollo desde la solución inicial hasta la solución óptima. Con el método simplex, la solución inicial se encuentra predeterminada por la estructura de la restricción. El conjunto inicial de variables básicas siempre se compondrá de las variables de holgura y artificiales en el problema. En los modelos de transporte, el algoritmo del cruce de arroyo (o en su caso el método MODI) aceptará cualquier solución factible como un punto de partida. Por consiguiente, se han propuesto varias aproximaciones para encontrar una buena solución inicial de arranque. Éstas incluyen el ***método de la esquina noroeste*** (***superior izquierda***), el ***método del menor costo*** y el ***método de aproximación de Vogel*** (véase la nota en esta página). Particularmente con los últimos dos métodos, se tiene la esperanza de que con algún esfuerzo extra "por adelantado" se pueda producir una solución de inicio que se encuentre cerca de la solución óptima. La expectativa es que esto reduzca el tiempo y el esfuerzo requeridos por el algoritmo del cruce de arroyo para pasar de la solución inicial a la óptima. Ninguno de los métodos propuestos ha demostrado de manera consistente tener más éxito que los otros. Sin embargo, dependiendo del problema, pueden llegar a ser de eficacia considerable.

Tabla 12.3

	Destino			
Origen	**1**	**2**	**3**	**Oferta**
1	5	10	10	55
2	20	30	20	80
3	10	20	30	75
Demanda	70	100	40	210

Considere los datos contenidos en la tabla 12.3 para un problema de transportación que implica tres orígenes y tres destinos. Suponga que los elementos en el cuerpo de la tabla representan los costos de embarque correspondientes a una unidad desde cada origen hasta cada destino. También se muestran las capacidades de suministro de los tres orígenes así como las demandas en cada destino. Por conveniencia, el suministro u oferta total, así como la demanda total coinciden en el mismo valor. El problema es determinar cuántas unidades transportar desde cada origen hacia cada destino de manera que se satisfagan las demandas en los tres destinos mientras no se violen las capacidades de los tres orígenes. El objetivo es hacer estas asignaciones de tal forma que se minimicen los costos de transportación totales.

Este problema se resolverá haciendo uso de dos algoritmos especiales. En el ejemplo 2 se ilustra el método de la esquina noroeste, que puede emplearse para determinar una solución inicial (de arranque). En la siguiente sección se ilustra el algoritmo del cruce de

---

* Para descripciones de estos métodos, consulte Frank S. Budnick, Dennis W. McLeavey y Richard Mojena, *Principles of Operations Research for Management*, 2a. edición, Richard D. Irwin, Homewood, Ill. (1988), capítulo 7.

arroyo, que puede utilizarse para resolver estos tipos de modelos. Antes de comenzar con estos ejemplos, se comentarán algunos requisitos del algoritmo del cruce de arroyo.

Requerimientos del algoritmo del cruce de arroyo

1. ***El suministro u oferta total en los orígenes debe ser igual a la demanda total en los destinos.*** *Puesto que éste no es por lo regular el caso en las aplicaciones reales, el "equilibrio" entre la oferta y la demanda a menudo se crea de manera artificial. Esto se hace agregando un origen "ficticio" o un destino "ficticio" que tenga la oferta (demanda) suficiente para crear el equilibrio necesario. Nuestro ejemplo se ha diseñado de manera que ya exista ese equilibrio.*
2. ***Dado un problema de transporte con m orígenes y n destinos (donde m y n incluyen cualquier origen o destino "ficticios" agregados para crear un equilibrio), el número de variables básicas en cualquier solución dada debe ser igual a: m + n – 1****. En el problema, cualquier solución debería contener: 3 + 3 – 1 = 5 variables básicas.*

Ejemplo 2

(Obtención de una solución inicial: el método de la esquina noroeste) Cuando se resuelven problemas de transportación haciendo uso del algoritmo del cruce de arroyo, la tarea se lleva a cabo en un formato tabular, como el utilizado en el método simplex. Como se puede apreciar en la tabla 12.4, el formato tabular para nuestro ejemplo tiene el aspecto de una "hoja de anotación para el juego de boliche".

Tabla 12.4

	Destino			
Origen	**1**	**2**	**3**	**Oferta**
1	5 x_{11}	10 x_{12}	10 x_{13}	55
2	20 x_{21}	30 x_{22}	20 x_{23}	80
3	10 x_{31}	20 x_{32}	30 x_{33}	75
Demanda	70	100	40	210

Para cada combinación de origen/destino existe una casilla que contiene el valor de la variable de decisión correspondiente x_{ij} y el coeficiente de la función objetivo o costo unitario de transportación. A medida que se continúa con la solución de un problema, se sustituyen los valores reales para las x_{ij} en la tabla a medida que se intentan asignaciones diferentes.

Como se indicó con anterioridad, existen diversas técnicas que deben emplearse para determinar una solución inicial. El método de la esquina noroeste se ilustra en este ejemplo porque es sencillo de utilizar. Sin tener en cuenta la técnica usada para hallar una solución inicial, deben existir las condiciones siguientes: 1) deberá asignarse el suministro (oferta) para cada origen; 2) debe satisfacerse la demanda para cada destino, y 3) deberá haber exactamente: $m + n - 1$ variables básicas (asignaciones).

El *método de la esquina noroeste* es una técnica popular (pero irreflexiva) para llegar a una solución inicial. La técnica comienza en la casilla superior izquierda (esquina noroeste) de una tabla de transportación y asigna las unidades del origen 1 hacia el destino 1. Las asignaciones continúan de tal manera que el suministro en el origen 1 se encuentre completamente asignado antes que trasladarse hacia el origen 2. El suministro en el origen 2 se encuentra por completo asignado antes de pasar hacia el origen 3, y así sucesivamente. De manera similar, una asignación secuencial a los destinos se asegura de que la demanda para el destino 1 sea satisfecha antes de efectuar asignaciones para el destino 2, y así sucesivamente. Este patrón de asignaciones conduce a una clasificación del arreglo en escalones para las asignaciones en la tabla de transportación. La tabla 12.5 indica la solución inicial a nuestro problema como se deriva haciendo uso del método de la esquina noroeste. Examinemos las asignaciones.

Tabla 12.5

Solución inicial utilizando el método de la esquina noroeste

	Destino			
Origen	**1**	**2**	**3**	**Oferta**
1	5 55	10	10	~~55~~
2	20 15	30 65	20	~~80~~ ~~65~~
3	10	20 35	30 40	~~75~~ ~~40~~
Demanda	~~70~~ ~~15~~	~~100~~ ~~35~~	~~40~~	210

1. *Empezando en la esquina noroeste, la oferta en el origen 1 es 55 y la demanda en el destino 1 es 70. Así, se asigna toda la oferta disponible en el origen 1 en una tentativa por satisfacer la demanda en el destino 1 ($x_{11} = 55$).*
2. *Cuando la oferta completa en el origen 1 ha sido asignada, la siguiente asignación será a partir del origen 2. La asignación en la casilla (1, 1) no satisfizo por completo la demanda en el destino 1. Se demandan quince unidades adicionales. Comparando la oferta en el origen 2 con la demanda permanente en el destino 1, se asignan 15 unidades del origen 2 al destino 1 ($x_{21} = 15$). Esta asignación completa las necesidades del destino 1, y en seguida se ubicará la demanda en el destino 2.*
3. *La última asignación dejó el origen 2 con 65 unidades. La demanda en el destino 2 es 100 unidades. De esta forma, asignamos la oferta remanente de 65 unidades al destino 2 ($x_{22} = 65$). La siguiente asignación vendrá del origen 3.*
4. *La asignación de 65 unidades del origen 2 dejó el destino 2 con una demanda incumplida de 35 unidades. Ya que el origen 3 tiene una oferta de 75 unidades, 35 unidades son asignadas para completar la demanda de ese destino ($x_{32} = 35$). Así, la siguiente asignación se hará en el destino 3.*
5. *La asignación de 35 unidades del origen 3 deja ese origen con 40 unidades restantes. La demanda en el destino 3 también es igual a 40; por eso, la asignación final de 40 unidades se hace del origen 3 al destino 3 ($x_{33} = 40$).*

Nótese que en la tabla 12.5 todas las asignaciones se encuentran encerradas en círculos en las casillas apropiadas. Éstas representan las variables básicas para esta solución. Deberían existir cinco variables básicas ($m + n - 1$) para satisfacer el requerimiento del algoritmo del cruce de arroyo. Las asignaciones recomendadas y los costos asociados para esta solución inicial se encuentran resumidos en la tabla 12.6. ☐

El algoritmo del cruce de arroyo

Dada la solución inicial generada en la tabla 12.6, en el algoritmo del cruce de arroyo se efectúa un *análisis marginal* que estudia los efectos que produce modificar la solución dada. Específicamente, se examinan los efectos marginales de introducir una unidad de una variable no básica, como fue el caso con el método simplex.

- ☐ **Paso 1: Determine el *índice de mejoramiento* para cada variable (casilla) no básica**. A medida que se examinan los efectos de introducir una unidad de una variable no básica, nos enfocamos en dos efectos marginales o secundarios: *1) ¿Qué ajustes deben realizarse a los valores de las variables básicas actuales* (a fin de continuar satisfaciendo todas las restricciones de la oferta y la demanda)? *2) ¿Cuál es el cambio resultante en el valor de la función objetivo*?

Tabla 12.6

Del origen	Al destino	Cantidad		Costo unitario	Costo total
1	1	55	×	$ 5.00	$ 275.00
2	1	15	×	20.00	300.00
2	2	65	×	30.00	1 950.00
3	2	35	×	20.00	700.00
3	3	40	×	30.00	1 200.00
					$4 425.00

Tabla 12.7

Trayectoria cerrada y ajustes a la casilla (1, 2)

	Destino			
Origen	**1**	**2**	**3**	**Oferta**
1	−1 5 55	+1 10	10	55
2	+1 20 15	−1 30 65	20	80
3	10	20 35	30 40	75
Demanda	70	100	40	210

> Como ilustración, concentrémonos en la tabla 12.7. La casilla o celda (1, 2) no tiene asignación en la solución inicial y es una casilla no básica. La pregunta que se hará es: ¿qué cambios (o ajustes) se requerirían con las variables básicas existentes si una unidad es enviada desde el origen 1 hacia el destino 2? Si una unidad es asignada a la casilla (1, 2), serán entregadas un total de 56 unidades desde el origen 1, una más de lo que es su capacidad. De este modo, se deben reducir en 1 unidad los envíos en las otras partes desde el origen 1. El único lugar donde se pueden reducir es en la casilla (1, 1). De esta manera, se hace el ajuste al disminuir la asignación en esa casilla en 1 unidad. Sin embargo, esta reducción produce un envío menor hacia el destino 1. Los envíos reducidos en la casilla (1, 1) a 54 provocan que un total de 69 unidades sean asignadas hacia el destino 1, 1 menos que su demanda. Así, se compensa incrementando la asignación a la casilla (2, 1) en 1 unidad, obteniendo 16. Este ajuste produce un excedente de envío desde el origen 2 (16 + 65 = 81). Para ajustarlo, se disminuirán los envíos en la casilla (2, 2) en una unidad para obtener 64. Este último ajuste devuelve el sistema al equilibrio. La serie de ajustes requeridos se indica en la tabla 12.7 mediante la *trayectoria cerrada* de flechas dirigidas. En resumen, para compensar la adición de una unidad a la casilla (2, 2), los envíos en la casilla (1, 1) deben *disminuirse* en 1 unidad, los envíos en la casilla (2, 1) deben *incrementarse* en 1 unidad y los envíos en la casilla (2, 2) deben disminuir en 1 unidad.

Ahora que se han identificado los ajustes necesarios en las variables básicas actuales, la siguiente pregunta es, ¿cuál es el efecto marginal sobre el valor de la función objetivo? Para determinar esto, examinemos la trayectoria cerrada en la tabla 12.7. Para cada casilla (i, j) que recibe una asignación aumentada de 1 unidad, los costos *se incrementan* por el correspondiente coeficiente de costo (c_{ij}). De manera semejante, los costos *disminuyen* por el valor del coeficiente de costo dondequiera que las asignaciones se han reducido en 1 unidad. Estos efectos se resumen en la tabla 12.8.

Tabla 12.8

Efectos marginales sobre el valor de la función objetivo al introducir una unidad en la casilla (1, 2)

Casilla ajustada	Ajuste	Cambio en el costo	
(1, 2)	+1	+$10.00	
(1, 1)	−1	− 5.00	
(2, 1)	+1	+ 20.00	
(2, 2)	−1	− 30.00	
Cambio neto		$\boxed{-\ \$5.00}$	(Índice de mejoramiento)

El efecto neto marginal asociado a la asignación de una unidad desde el origen 1 hasta el destino 2 es reducir el costo total en $5.00. Este cambio marginal en la función objetivo se denomina el **índice de mejoramiento** para la casilla (1, 2).

Cálculo del índice de mejoramiento

Trace una “trayectoria cerrada” que comience en una casilla desocupada de interés; muévase de manera alternada en direcciones horizontal y vertical, girando o “pivoteando” *solamente en las casillas ocupadas*; y termine en la casilla no ocupada. Se asigna un (+1) a la casilla no ocupada (indicando un incremento de una unidad) y a los puntos de esquina subsiguientes sobre la trayectoria se les asignan alternativamente valores de (−1) y (+1). Los signos de más y de menos indican los ajustes necesarios para satisfacer los requerimientos de fila o renglón (oferta) y columna (demanda). *Nota*: La dirección en la que se traza la trayectoria no es importante. El recorrido tanto en dirección de las manecillas del reloj como en el sentido contrario produce la misma trayectoria e idénticos ajustes.

Una vez que se ha identificado la trayectoria cerrada para una casilla no básica, se calcula el índice de mejoramiento para esa casilla sumando todos los coeficientes de función objetivo para las casillas en las posiciones con signo más sobre la trayectoria y restando los correspondientes coeficientes de función objetivo para las casillas en las posiciones con signo menos sobre la trayectoria.

La tabla 12.9 indica la trayectoria cerrada para la casilla (1, 3), la cual era no básica en la solución inicial. Nótese que al agregar una unidad a la casilla (1, 3), se requieren los ajustes y se producen las consecuencias mostradas en la tabla 12.10. Adviértase que agregar una unidad a la casilla (1, 3) producirá una reducción neta en el valor de la función objetivo de $15.00.

Tabla 12.9

Trayectoria cerrada y ajustes a la casilla (1, 3)

	Destino			
Origen	**1**	**2**	**3**	**Oferta**
1	$\boxed{5}$ −1 55	$\boxed{10}$	$\boxed{10}$ +1	55
2	$\boxed{20}$ +1 15	$\boxed{30}$ −1 65	$\boxed{20}$	80
3	$\boxed{10}$	$\boxed{20}$ +1 35	$\boxed{30}$ −1 40	75
Demanda	70	100	40	210

Tabla 12.10 **Efectos marginales sobre el valor de la función objetivo al introducir una unidad en la casilla (1, 3)**

Casilla ajustada	Ajuste	Cambio en el costo
(1, 3)	+1	+ $10.00
(1, 1)	−1	− 5.00
(2, 1)	+1	+ 20.00
(2, 2)	−1	− 30.00
(3, 2)	+1	+ 20.00
(3, 3)	−1	− 30.00
Cambio neto		− $15.00 (Índice de mejoramiento)

Tabla 12.11 **Trayectorias cerradas e índice de mejoramiento para la solución inicial**

Casilla no básica	Trayectoria cerrada	Índice de mejoramiento
(1, 2)	(1, 2) → (1, 1) → (2, 1) → (2, 2) → (1, 2)	− $ 5.00
(1, 3)	(1, 3) → (1, 1) → (2, 1) → (2, 2) → (3, 2) → (3, 3) → (1, 3)	− $15.00
(2, 3)	(2, 3) → (2, 2) → (3, 2) → (3, 3) → (2, 3)	− $20.00*
(3, 1)	(3, 1) → (3, 2) → (2, 2) → (2, 1) → (3, 1)	

En la tabla 12.11 se resumen las trayectorias cerradas y los índices de mejoramiento para todas las casillas no básicas en la solución inicial. Verifique las trayectorias y valores para los índices de mejoramiento, con objeto de cerciorarse de que ha comprendido lo que se ha estado comentando.

☐ **Paso 2: Si existe una solución mejor, determine cuál variable (casilla) debería entrar en la base**. Un examen de los índices de mejoramiento en la tabla 12.11 indica que con la introducción de tres de las cuatro variables no básicas, se llegaría a una reducción en los costos totales.

> Para *problemas de minimización* existe una mejor solución si hay índices de mejoramiento negativo. Se ha encontrado una solución óptima cuando *todos* los índices de mejoramiento son no negativos. Para *problemas de maximización* existe una mejor solución si hay índices de mejoramiento positivo. Se ha encontrado una solución óptima cuando *todos* los índices de mejoramiento son no positivos.

Como en el método simplex, se selecciona la variable (casilla) que conduce a la mayor mejora marginal en la función objetivo.

Variable de entrada

Para problemas de minimización, la variable de entrada se identifica como la casilla con el índice de mejoramiento *negativo* más grande (los vínculos o empates pueden romperse arbitrariamente). Para problemas de maximización, la variable de entrada es la casilla con el índice de mejoramiento *positivo* más grande.

En nuestro ejemplo, la casilla (2, 3), o x_{23}, se selecciona como la variable de entrada.

Tabla 12.12 **Trayectoria cerrada y ajustes para la casilla de entrada (2, 3)**

	Destino			
Origen	1	2	3	Oferta
1	5 55	10	10	55
2	20 15	30 − 65	20 +	80
3	10	20 + 35	30 − 40	75
Demanda	70	100	40	210

Disminuyen en valor a medida que x_{23} aumenta

- ☐ **Paso 3: Determine la variable de salida y el número de unidades para asignar la variable de entrada**. Este paso se realiza regresando a la trayectoria cerrada asociada a la casilla entrante. En la tabla 12.12 se muestra la trayectoria cerrada para la casilla (2, 3). Debido a que el algoritmo del cruce de arroyo es exactamente paralelo al método simplex, se necesita determinar el número de unidades que se pueden asignar a la casilla (2, 3), de modo que el valor de una de las variables básicas actuales se lleve a 0. De la tabla 12.12 se observa que sólo dos variables básicas disminuyen en su valor a medida que se asignan unidades adicionales a la casilla (2, 3): las casillas (2, 2) y (3, 3), las cuales se encuentran en posiciones con signo *menos* sobre la trayectoria cerrada. La pregunta es cuál de éstas se irá a 0 primero a medida que se agreguen más unidades a la casilla (2, 3). Vea si puede razonar que cuando se agrega la *unidad* 40 a la casilla (2, 3), el valor para la casilla (2, 2) se reduce a 25, el valor para la casilla (3, 2) se incrementa a 75 y el valor de la casilla (3, 3) resulta 0.

Variable de salida

La variable de salida se identifica como la variable básica más pequeña en una posición con signo menos sobre la trayectoria cerrada de la variable de entrada.

Número de unidades para asignar a la variable de entrada

El número de unidades es igual al tamaño de la variable de salida (el valor más pequeño en una posición con signo menos).

❑ **Paso 4: Obtenga la nueva solución y regrese al paso 1**. Haciendo referencia de nuevo a la trayectoria cerrada para la casilla entrante (2, 3), agregue la cantidad determinada en el paso 3 a todas las casillas en posiciones con signo más y reste esta cantidad de aquellas que se encuentran en posiciones con signo menos. De este modo, dado que la variable de entrada x_{23} es igual a 40 del paso 3, las casillas sobre la trayectoria cerrada están ajustadas, llevando a la segunda solución mostrada en la tabla 12.13. Cuando determine una nueva solución, debería verificar las asignaciones a lo largo de cada renglón y columna para asegurarse de que se agreguen a los valores respectivos de oferta y de demanda. Además, asegúrese de que existan $m + n - 1$ variables básicas. Como puede apreciarse en la tabla 12.13, se satisfacen ambos requerimientos mencionados aquí.

Tabla 12.13

Segunda solución

	Destino			
Origen	**1**	**2**	**3**	**Oferta**
1	5 55	10	10	55
2	20 15	30 25	20 40	80
3	10	20 75	30	75
Demanda	70	100	40	210

Nueva variable básica (casilla)

Variable de salida básica (casilla)

Otra información de interés es el nuevo valor de la función objetivo. Se tienen dos alternativas para determinar este valor. Se puede multiplicar el valor de cada variable básica por su correspondiente coeficiente de la función objetivo y sumar el resultado, como se hizo en la tabla 12.6. O dado que el valor original de la función objetivo fue de \$4 425 y que cada unidad introducida a la casilla (2, 3) disminuye el valor de la función objetivo en \$20, la introducción de 40 unidades a la casilla (2, 3) produce un nuevo valor para un costo total de

$$\begin{aligned} z &= \$4\,425 - (40)(\$20) \\ &= \$4\,425 - \$800 \\ &= \$3\,625 \end{aligned}$$

En las tablas 12.14 a 12.18 se resumen los pasos restantes para la solución de este problema. Vea si puede verificar estos pasos así como el resultado final.

Tabla 12.14 Trayectorias cerradas e índices de mejoramiento para la segunda solución

Casilla no básica	Trayectoria cerrada	Índice de mejoramiento
(1, 2)	(1, 2) → (1, 1) → (2, 1) → (2, 2) → (1, 2)	+ $ 5.00*
(1, 3)	(1, 3) → (1, 1) → (2, 1) → (2, 3) → (1, 3)	+ $ 5.00
(3, 1)	(3, 1) → (3, 2) → (2, 2) → (2, 1) → (3, 1)	− $ 0.00
(3, 3)	(3, 3) → (2, 3) → (2, 2) → (3, 2) → (3, 3)	+ $20.00

Tabla 12.15 Tercera solución (z = $3 500.00)

	Destino			
Origen	**1**	**2**	**3**	**Oferta**
1	5 30	10 25	10	55
2	20 40	30	20 40	80
3	10	20 75	30	75
Demanda	70	100	40	210

Tabla 12.16 Trayectorias cerradas e índices de mejoramiento para la tercera solución

Casilla no básica	Trayectoria cerrada	Índice de mejoramiento
(1, 3)	(1, 3) → (1, 1) → (2, 1) → (2, 3) → (1, 3)	+ $ 5.00
(2, 2)	(2, 2) → (1, 2) → (1, 1) → (2, 1) → (2, 2)	+ $ 5.00
(3, 1)	(3, 1) → (3, 2) → (1, 2) → (1, 1) → (3, 1)	− $ 5.00*
(3, 3)	(3, 3) → (2, 3) → (2, 1) → (1, 1) → (1, 2) → (3, 2) → (3, 3)	+ $15.00

Tabla 12.17 Cuarta (y óptima) solución (z = $3 350.00)

	Destino			
Origen	**1**	**2**	**3**	**Oferta**
1	5	10 55	10	55
2	20 40	30	20 40	80
3	10 30	20 45	30	75
Demanda	70	100	40	210

Tabla 12.18 **Trayectorias cerradas e índices de mejoramiento para la cuarta solución**

Casilla no básica	Trayectoria cerrada	Índice de mejoramiento
(1, 1)	(1, 1) → (3, 1) → (3, 2) → (1, 2) → (1, 1)	+ $ 5.00
(1, 3)	(1, 3) → (1, 2) → (3, 2) → (3, 1) → (2, 1) → (2, 3) → (1, 3)	+ $10.00
(2, 2)	(2, 2) → (2, 1) → (3, 1) → (3, 2) → (2, 2)	$ 0.00
(3, 3)	(3, 3) → (2, 3) → (2, 1) → (3, 1) → (3, 3)	+ $20.00

Debido a que todos los índices de mejoramiento son no negativos en la tabla 12.18, se concluye que la solución en la tabla 12.17 es la óptima. Es decir, el costo total será minimizado a un valor de \$3 350 si se envían 55 unidades desde el origen 1 hacia el destino 2; 40 unidades desde el origen 2 hasta el destino 1; 40 unidades desde el origen 2 hacia el destino 3; 30 unidades desde el origen 3 hasta el destino 1, y 45 unidades del origen 3 hacia el destino 2.

En la tabla 12.18 también se ilustra el fenómeno de las *soluciones óptimas alternativas*.

Soluciones óptimas alternativas

Si se ha identificado una solución óptima para un modelo de transporte, existen soluciones óptimas alternativas si cualquier índice de mejoramiento es igual a 0. Si existen las condiciones para la optimización, la asignación de unidades hacia casillas con índices de mejoramiento de 0 no produce cambio alguno en el valor (óptimo) para la función objetivo.

En nuestra solución óptima, la tabla 12.18 indica que la asignación de unidades a la casilla (2, 2) no produciría cambio alguno en el costo total.

Métodos de solución por computadora

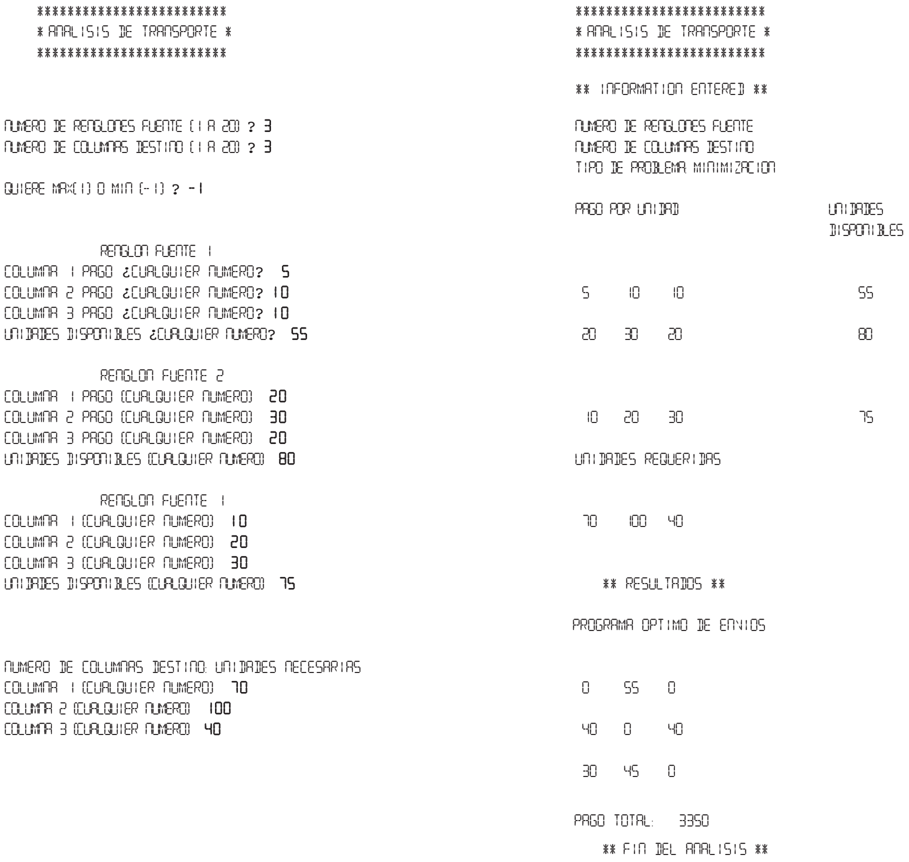
Como se esperaría, existen numerosos paquetes de computación de transportación disponibles para resolver estos modelos. Por lo regular, las características de entrada-salida son más simples que con los paquetes dedicados directamente a programación lineal. En la figura 12.2 se ilustran las características de entrada y salida de un paquete de computación* para el problema de transportación que se acaba de resolver. Para la parte de entrada de datos, las respuestas del usuario se presentan en color (negritas, si es en blanco y negro) para distinguirlas de las respuestas de la computadora.

Sección 12.2 Ejercicios de seguimiento

1. Para el problema que acaba de finalizar, genere una solución óptima alternativa seleccionando la casilla (2, 2) en la tabla 12.17 como la variable de entrada e introduzca tantas unidades como sea posible.

---

*"TRAN1", según Warren J. Erikson y Owen P. Hall, Jr., *Computer Models for Management Science*, 2a. edición, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1986.



```
    ************************
    * ANALISIS DE TRANSPORTE *
    ************************


NUMERO DE RENGLONES FUENTE (1 A 20) ? 3
NUMERO DE COLUMNAS DESTINO (1 A 20) ? 3

QUIERE MAX(1) O MIN (-1) ? -1


            RENGLON FUENTE 1
COLUMNA 1 PAGO ¿CUALQUIER NUMERO?  5
COLUMNA 2 PAGO ¿CUALQUIER NUMERO? 10
COLUMNA 3 PAGO ¿CUALQUIER NUMERO? 10
UNIDADES DISPONIBLES ¿CUALQUIER NUMERO?  55

            RENGLON FUENTE 2
COLUMNA 1 PAGO (CUALQUIER NUMERO)  20
COLUMNA 2 PAGO (CUALQUIER NUMERO)  30
COLUMNA 3 PAGO (CUALQUIER NUMERO)  20
UNIDADES DISPONIBLES (CUALQUIER NUMERO)  80

            RENGLON FUENTE 1
COLUMNA 1 (CUALQUIER NUMERO)  10
COLUMNA 2 (CUALQUIER NUMERO)  20
COLUMNA 3 (CUALQUIER NUMERO)  30
UNIDADES DISPONIBLES (CUALQUIER NUMERO)  75


NUMERO DE COLUMNAS DESTINO: UNIDADES NECESARIAS
COLUMNA 1 (CUALQUIER NUMERO)  70
COLUMNA 2 (CUALQUIER NUMERO)  100
COLUMNA 3 (CUALQUIER NUMERO)  40
```

Fecha de entrada

```
************************
* ANALISIS DE TRANSPORTE *
************************

** INFORMATION ENTERED **

NUMERO DE RENGLONES FUENTE
NUMERO DE COLUMNAS DESTINO
TIPO DE PROBLEMA MINIMIZACION

PAGO POR UNIDAD                   UNIDADES
                                  DISPONIBLES


 5     10    10                      55

 20    30    20                      80


 10    20    30                      75

UNIDADES REQUERIDAS


 70    100   40


   ** RESULTADOS **

PROGRAMA OPTIMO DE ENVIOS


 0     55    0

 40    0     40

 30    45    0

PAGO TOTAL:    3350
   ** FIN DEL ANALISIS **
```

Resultados de salida

Figura 12.2 Solución por computadora para el ejemplo anteriormente resuelto.

2. Según los datos para un problema de transporte en la tabla 12.19:
   a) Utilice el método de la esquina noroeste para determinar una solución inicial.
   b) Proceda a continuación para resolverlo con la solución óptima haciendo uso del algoritmo del cruce de arroyo.
3. Dados los datos para un problema de transportación en la tabla 12.20:

Tabla 12.19

	Destino			
Origen	**1**	**2**	**3**	**Oferta**
1	20	30	10	100
2	30	40	25	300
3	35	15	20	100
Demanda	150	125	225	

a) Utilice el método de la esquina noroeste para determinar una solución inicial.
b) Proceda a continuación para resolverlo con la solución óptima haciendo uso del algoritmo del cruce de arroyo.

4. Dados los datos para un problema de transporte en la tabla 12.21:
   a) Utilice el método de la esquina noroeste para determinar una solución inicial.
   b) Proceda a continuación para resolverlo con la solución óptima haciendo uso del algoritmo del cruce de arroyo.

Tabla 12.20

	Destino			
Origen	**1**	**2**	**3**	**Oferta**
1	8	6	10	125
2	4	9	8	150
3	7	6	5	95
Demanda	110	85	175	

Tabla 12.21

	Destino			
Origen	**1**	**2**	**3**	**Oferta**
1	40	20	30	500
2	60	75	45	600
3	35	50	60	400
Demanda	300	500	700	

5. **La oferta excede a la demanda** Cuando la oferta total en un modelo de transporte excede a la demanda total, se crea “equilibrio” mediante la adición de un destino “ficticio”, el cual tiene una demanda igual a la diferencia entre la oferta y la demanda. Aunque existen excepciones, por lo general los coeficientes de la función objetivo asignados a la columna falsa (ficticia) son iguales a 0 (puesto que no se van a hacer envíos a este destino). En el ejercicio 2, suponga que el suministro u oferta total en el origen 1 es igual a 150. Agregue una columna falsa con una demanda de 50, asigne costos de 0 a cada casilla en la columna y resuelva haciendo uso del algoritmo del cruce de arroyo. [*Nota:* La columna falsa debe ser incluida cuando se determine el número apropiado ($m + n - 1$) de variables básicas.]
6. **La demanda excede a la oferta** Cuando la demanda total excede a la oferta total, se crea “equilibrio” mediante la adición de un origen “ficticio” que tiene capacidad de oferta o suministro igual a la diferencia entre la oferta y la demanda totales. Como con el ejercicio anterior, las casillas en el renglón ficticio por lo regular tienen asignados coeficientes de función objetivo de 0. En el ejercicio 3, suponga que la demanda en el destino 3 es igual a 225. Agregue un renglón ficticio con una oferta de 50 unidades, asigne costos de 0 a cada casilla en el renglón y resuelva utilizando el algoritmo del cruce de arroyo. (Consulte la nota al final del ejercicio 5.)

Tabla 12.22

	Depósito					
Planta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**Capacidad semanal, cientos de casos**
1	$20	$35	$30	$40	$42	400
2	45	30	42	36	38	350
3	38	40	36	35	50	450
Requerimiento semanal, cientos de casos	150	300	200	250	175	

7. Una fábrica de cerveza tiene tres plantas de embotellamiento con botellas etiquetadas genéricamente. La cerveza es distribuida desde las tres plantas hacia cinco depósitos regionales. En la tabla 12.22 se resumen los costos de distribución así como las capacidades semanales para las plantas y los requerimientos semanales para cada depósito, ambas establecidas en cientos de cajas. El cuerpo principal de la tabla contiene los costos de distribución en dólares por centenas de cajas. El problema es determinar el número de cajas que se distribuirán semanalmente desde cada planta hacia cada depósito de modo que se minimicen los costos de distribución total.

a) Formule la función objetivo y el conjunto de restricciones para este modelo de transporte.

b) Por ensayo y error, o algún otro medio, haga la estimación de lo que usted considere sea una buena solución. (*Sugerencia*: Una solución óptima requerirá solamente siete variables positivas.)

c) Resuelva haciendo uso del algoritmo del cruce de arroyo.

d) Si se dispone de un paquete computarizado de transporte (o bien un paquete de programación lineal), encuentre la solución óptima.

Tabla 12.23

	Ciudad con escasez				
Ciudad con exceso	**1**	**2**	**3**	**4**	**Excedente de autos**
1	$30	$45	$26	$28	20
2	32	40	28	24	18
3	27	38	30	32	32
Número de autos faltantes	10	15	12	20	

8. Una compañía de renta de autos necesita trasladar automóviles para el mes entrante. En tres de sus ciudades se proyecta tener un superávit de automóviles, en tanto que en cuatro ciudades se espera una reducción. En la tabla 12.23 se indica el costo de trasladar un automóvil desde una ciudad con excedentes hasta una ciudad con escasez. También se muestran el excedente y la escasez proyectados para las diferentes ciudades. El problema es determinar el número de autos por trasladar desde cada ciudad con excedentes hasta cada ciudad con escasez, de modo que se minimicen los costos totales de traslado.

a) Formule la función objetivo y el conjunto de restricciones para este modelo de transporte.
b) Por ensayo y error, o algún otro medio, haga la estimación de lo que considere sea una buena solución. (*Sugerencia*: Una solución óptima requerirá únicamente seis variables positivas.)
c) Resuelva haciendo uso del algoritmo del cruce de arroyo.
d) Si se tiene disponible un paquete de computadora, encuentre la solución óptima.

9. Si un problema de tipo transporte implica 30 orígenes y 50 destinos, y tanto la oferta como la demanda totales son iguales:
a) ¿Cuántas variables de decisión aparecerán en la formulación de la programación lineal?
b) ¿Cuántas restricciones?
c) ¿Cuántas variables totales habrá cuando el problema se haya convertido a la forma estándar para el método simplex?

10. La compañía de asfalto As ha firmado un contrato para suministrar asfalto para cuatro proyectos de construcción de carreteras. As tiene tres plantas de asfalto que pueden suministrar ese material para alguno o para la totalidad de los proyectos. En la tabla 12.24 se indican las capacidades diarias de cada planta dadas en cargas de camión, la demanda diaria para cada proyecto de construcción, así como el margen de ganancia por carga de camión enviada desde cada planta hacia cada proyecto.

Tabla 12.24

	Proyecto de construcción				
Planta	**1**	**2**	**3**	**4**	**Capacidad diaria, cargas de camión**
1	$ 80	$100	$60	$ 70	120
2	40	80	75	60	100
3	100	120	90	110	80
Demanda diaria cargas de camión	50	40	75	60	

La compañía As desea determinar el número de camiones que destinará desde cada planta hacia cada proyecto a fin de maximizar la ganancia total diaria del contrato.
a) Formule la función objetivo y el conjunto de restricciones.
b) Por ensayo y error, o algún otro medio, haga la estimación de lo que considere sea una buena solución. (*Sugerencia*: Una solución óptima requerirá sólo de seis variables positivas.)
c) Resuelva haciendo uso del algoritmo del cruce de arroyo.
d) Si se dispone de un paquete de computadora, encuentre la solución óptima.

11. **Buscadores de jugadores de baloncesto** Un servicio de búsqueda a nivel nacional de jugadores de baloncesto suministra información sobre los jugadores más destacados en las escuelas de nivel medio. Estos informes se venden a las universidades y colegios con fines del reclutamiento. El servicio tiene un contrato con cinco coordinadores de búsqueda para que la realicen y envíen informes escritos acerca de los jugadores desde ocho regiones del país. Los coordinadores cobran cierta cantidad por cada jugador, y sus honorarios varían dependiendo de la región del país donde habite el jugador descubierto. Para el año entrante el servicio de búsqueda identificó a 1 500 jugadores que han demostrado tener potencial para jugar el baloncesto a nivel colegial. En la tabla 12.25 se resumen los honorarios que se cobran por informe de búsqueda, el número de jugadores en cada región y la cantidad máxima de jugadores que pueden ser asignados a cada coordinador. (*Nota*: Cada coordinador subcontrata a buscadores independientes.) Los coordinadores no realizan la búsqueda en todas las regiones. Esto se indica en la tabla 12.25 mediante la ausencia de honorarios.

Tabla 12.25 **Honorarios de buscadores por jugador**

	Región								**Número máximo de jugadores**
Coordinador	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	
1	$ 30	$ 40	$ 25	$ 45	$ 35				300
2	45	55		25	30	$ 40	$ 50		350
3	60		40		50	20	45	$ 30	325
4	40	40		30	50	35	40	25	250
5	50	60	30	40	80	35	25	45	400
Número de jugadores por buscar	150	100	250	175	225	200	180	220	

El servicio de búsqueda de jugadores desea determinar cuántos jugadores en cada región deberían asignarse a cada coordinador a fin de minimizar el costo de obtener los 1 500 informes de los buscadores.

a) Formule la función objetivo y el conjunto de restricciones.

b) Por ensayo y error, o algún otro medio, haga la estimación de lo que considere sea una buena solución. (*Sugerencia*: Una solución óptima requerirá sólo de 12 variables positivas.)

c) Si se dispone de un paquete de computadora, encuentre la solución óptima. (*Sugerencia*: Si se utiliza un paquete de transporte, se tendrán que asignar honorarios de búsqueda extremadamente altos, por ejemplo $1 000, a las casillas vacías de la tabla 12.25. Con esto se asegurará que a los coordinadores no les hayan asignado jugadores fuera de sus regiones.)

12.3 El modelo de asignación y los métodos de solución

Un caso especial del modelo de transporte lo constituye el ***modelo de asignación***. Este modelo es apropiado en problemas que incluyen la asignación de recursos a tareas (por ejemplo, asignar n personas a n tareas o trabajos diferentes). Del mismo modo que la estructura especial del modelo de transporte considera los procedimientos de solución que son más eficaces que el método simplex, la estructura del modelo de asignación también admite métodos de solución más eficaces que el método de transporte.

Forma general y suposiciones

El problema general de asignación implica la asignación de *n* recursos (orígenes) a *n* tareas (destinos). Los ejemplos más comunes de estos problemas incluyen la asignación de vendedores a territorios de ventas, tripulaciones de vuelo en líneas aéreas, cuadrillas para limpieza de nieve en las zonas de una ciudad, unidades de ambulancias que acuden a llamadas de servicio, árbitros y oficiales para eventos deportivos y abogados de bufetes que defienden, ya sea casos judiciales o clientes. El objetivo al efectuar las asignaciones puede ser conseguir la minimización o bien la maximización (por ejemplo, minimizar el tiempo total requerido para llevar a cabo *n* tareas o maximizar la utilidad total que se logra al asignar los vendedores a los territorios de ventas). Las suposiciones siguientes son importantes al formular modelos de asignación.

Suposición 1

Cada recurso o fuente se asigna exclusivamente a una tarea.

Suposición 2

A cada tarea se asigna exactamente un recurso.

Suposición 3

Para propósitos de solución, el número de recursos disponibles para la asignación debe ser igual al número de tareas que deben ejecutarse.

Si

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{si el recurso i es asignado a la tarea j} \\ 0 & \textit{si el recurso i no es asignado a la tarea j} \end{cases}$$

$$c_{ij} = \textit{contribución de la función objetivo si el recurso i se asigna a la tarea j}$$

$$n = \textit{número de recursos y de tareas}$$

el modelo generalizado de asignación es como se muestra en la parte superior de la página siguiente.

Adviértase en este modelo que las variables están restringidas a los dos valores de 0 (no asignación del recurso) o 1 (asignación del recurso). Esta restricción sobre los valores de las variables es muy diferente a los otros modelos de programación lineal que se han examinado. Por otro lado, las restricciones de (1) a (n) garantizan que cada recurso sea asignado sólo a una tarea. Las restricciones de ($n + 1$) a ($n + n$) aseguran que a cada tarea se le designe exactamente un recurso. Conforme a la suposición 3, el número de recursos deberá ser igual al de las tareas por lo que respecta a la solución del problema.

$$
\begin{array}{lll}
\text{Maximice} & z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + \cdots + c_{nn}x_{nn} & \\
\text{(o minimice)} & & \\
\text{sujeta a} & \left.\begin{array}{lrl}
x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} & = 1 & (1) \\
\qquad x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} & = 1 & (2) \\
\qquad\qquad \ddots & & \vdots \\
\qquad\qquad\qquad x_{n1} + x_{n2} + \cdots + x_{nn} & = 1 & (n)
\end{array}\right\} & \begin{array}{l}\text{cada}\\ \text{recurso}\\ \text{asignado a}\\ \text{una tarea}\end{array} \\
& \left.\begin{array}{lrl}
x_{11} + \qquad x_{21} + \cdots \qquad + x_{n1} & = 1 & (n+1) \\
\quad x_{12} + \qquad x_{22} + \cdots \qquad + x_{n2} & = 1 & (n+2) \\
\quad \ddots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \ddots & \vdots & \vdots \\
\qquad x_{1n} + \qquad x_{2n} + \cdots \qquad + x_{nn} & = 1 & (n+n)
\end{array}\right\} & \begin{array}{l}\text{cada}\\ \text{tarea}\\ \text{asignada a}\\ \text{un recurso}\end{array} \\
& \qquad\qquad x_{ij} = 0 \text{ o } 1 \text{ para todas las } i \text{ o } j &
\end{array}
$$

Como en el caso del modelo de transporte, esta condición podría ser impuesta artificialmente para determinado problema. Por último, adviértase que todas las constantes del lado derecho, que son equivalentes a los valores s_i y d_j en el modelo de transporte, son iguales a 1. La oferta de cada recurso es 1 unidad y la demanda para cada tarea es de 1 unidad.

Ejemplo 3

(Asignación de los árbitros de la NCAA; escenario de motivación) Se ha iniciado el torneo de baloncesto de la división I de la Asociación Nacional Atlética de Colegios (NCAA, National Collegiate Athletic Association). Al preparar los cuatro torneos regionales, el comité del torneo seleccionó cuatro equipos de árbitros que fueron considerados como los más calificados para el torneo de este año. Cada equipo de oficiales está compuesto por seis árbitros titulares y dos sustitutos, quienes también viajan al torneo regional por si acaso alguna enfermedad, lesión u otras circunstancias impiden la participación de cualquiera de los árbitros titulares. El comité seleccionó los equipos de modo que cada árbitro pertenezca a una conferencia atlética diferente. (Esto es con el propósito de tener un arbitraje lo más imparcial posible.)

A los oficiales se les pagan los honorarios normales del torneo, además de los gastos de viaje. Estos viáticos varían según el sitio del torneo al que se les envíe. En la tabla 12.26 se indican los gastos estimados de viaje de cada equipo según el torneo regional al que sea asignado. El comité desea asignar los cuatro equipos de oficiales de manera que se minimicen los gastos totales de viaje.

Tabla 12.26

	Asignación de torneo regional			
Equipo de Oficiales	**(1) Este**	**(2) Medio oeste**	**(3) Lejano oeste**	**(4) Suroeste**
1	\$6 600	\$7 200	\$6 750	\$7 050
2	6 400	6 800	7 250	7 400
3	6 950	7 000	7 400	6 950
4	7 600	6 900	7 300	7 000

Este problema puede formularse como un modelo de asignación. Sea

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{si el equipo i es asignado al torneo j} \\ 0 & \textit{si el equipo i no es asignado al torneo j} \end{cases}$$

La formulación del problema se proporciona a continuación

$$
\begin{array}{ll}
\text{Minimice} & z = 6\,600x_{11} + 7\,200x_{12} + 6\,750x_{13} + 7\,050x_{14} + 6\,400x_{21} + \cdots + 7\,000x_{44} \\
\text{sujeta a} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llr}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & = 1 & (1) \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & = 1 & (2) \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} & = 1 & (3) \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} & = 1 & (4) \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} & = 1 & (5) \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} & = 1 & (6) \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} & = 1 & (7) \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} & = 1 & (8) \\
x_{ij} & = 0 \text{ o } 1 \text{ para} & \\
 & \text{todas la } i \text{ o } j &
\end{array}
$$

Las restricciones (1) a la (4) aseguran que cada equipo de oficiales sea asignado sólo a un sitio de torneo; las restricciones (5) a la (8) garantizan que a cada sitio se le asigne exactamente un equipo de oficiales. ❑

Métodos de solución

Los modelos de asignación puedan resolverse haciendo uso de diversos procedimientos. Éstos incluyen la *enumeración total de todas las soluciones, métodos de programación con 0 y 1*, el *método simplex*, los *métodos de transporte (cruce de arroyo)* y *algoritmos de propósito especial o específico*. Estas técnicas están enumeradas en un orden que refleja una eficacia *creciente*. Se hace distinción entre los modelos de asignación y los modelos de programación estándar y de transporte debido a su estructura especial. De nuevo, esos modelos se prestan a sí mismos a procedimientos más eficaces de solución por medio de algoritmos de propósito específico, los cuales están diseñados para sacar partido de esta estructura especial. Uno de los métodos más populares es el ***método húngaro***, que se comenta en la siguiente sección.

En la figura 12.3 se ilustra un paquete de computación para la solución de modelos de asignación.* El problema resuelto es la formulación de la asignación de árbitros del ejemplo 3. Nótese que los gastos de viaje están minimizados a un valor de $27 000, cuando el equipo 1 es asignado al torneo regional del lejano oeste, el equipo 2 se asigna al torneo regional del este, el equipo 3 al torneo regional del suroeste y el equipo 4 al torneo regional del medio oeste.

---

* "ASGT1", según Warren J. Erikson y Owen P. Hall, Jr., *Computer Models for Management Science*, 2a. edición, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1986.

```
   MODELOS POR COMPUTADORA PARA LAS CIENCIAS DE LA ADMINISTRACIÓN

   MODELO DE ASIGNACIÓN                              03-29-1992 — 10:24:36

                      -=*+-  INFORMACIÓN INTRODUCIDA  -=*+-

     NÚMERO TOTAL DE RENGLONES      :       4
     NÚMERO TOTAL DE COLUMNAS       :       4
     TIPO DE PROBLEMA               :     MINIMIZACIÓN

                                VALORES DE PAGOS

          Este       Med       Oeste       Sur
EQ 1   6600.000   7200.000   6750.000   7050.000
EQ 2   6400.000   6800.000   7250.000   7400.000
EQ 3   6950.000   7000.000   7400.000   6950.000
EQ 4   7600.000   6900.000   7300.000   7000.000


                              -=*=- RESULTADOS -=*=-

                             RENGLÓN DE ASIGNACIONES

        EsteMedOesteSur
EQ 1     —    —   A    —
EQ 2    A    —    —    —
EQ 3    —    —    —    A
EQ 4    —   A    —    —
                                PAGO TOTAL : 27000


         ------------FIN DEL ANÁLISIS ------------
```

Figura 12.3 Solución por computadora para el modelo de asignación de árbitros (ejemplo 3).

El método húngaro

En esta sección se explicará el método húngaro, que es un algoritmo de propósito específico utilizado para resolver modelos de asignación. Este algoritmo saca beneficio de la estructura especial de los modelos de asignación, proporcionando un procedimiento de solución relativamente eficaz en comparación con otros enfoques mencionados en la sección anterior.

El método húngaro se basa en el concepto de costos de oportunidad. Se tienen tres pasos para llevar a cabo el método. En primer lugar, se construye una tabla de costo de oportunidad a partir de la tabla de costos de asignación. Como segundo paso, se determina si puede efectuarse una asignación óptima. Si no puede efectuarse una asignación óptima, el tercer paso implica una revisión de la tabla de costo de oportunidad. Se ilustrará el algoritmo con el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4

(Programación en los juzgados) Un administrador de juzgados (o tribunales) se encuentra en el proceso de programar cuatro listas de causas en los juzgados. Se tienen disponibles cuatro jueces para ser asignados, un juez para cada lista. El administrador tiene información referente a los tipos de causas en cada una de las listas así como también datos que indican la eficiencia relativa de cada uno de los jueces al procesar diferentes tipos de causas en los tribunales.

Tabla 12.27

Estimado de días por causa

	Causas			
Juez	**1**	**2**	**3**	**4**
1	14	13	17	14
2	16	15	16	15
3	18	14	20	17
4	20	13	15	18

Con base en esta información, el administrador de los juzgados ha recopilado los datos en la tabla 12.27, que muestra las estimaciones del número de días en los tribunales que cada juez requeriría a fin de procesar por completo cada una de las listas de causas. Al administrador le gustaría asignar a los cuatro jueces de manera que minimizara el número total de días en los tribunales necesarios para procesar las cuatro listas de causas judiciales.

SOLUCIÓN

☐ **Paso 1: Determinar la tabla de costo de oportunidad**. Para determinar la tabla de costo de oportunidad se requieren dos pasos. En primer lugar, se identifica el elemento con menor costo en cada renglón y se resta de todos los elementos en el renglón. La tabla de costo resultante se denomina en ocasiones *tabla de costo reducido por renglón*. Al haber realizado esto, se identifica al elemento de menor costo en cada columna y se resta de todos los otros elementos en la columna, lo que produce la *tabla de costo de oportunidad*. La tabla 12.28 es la de costo reducido por renglón para nuestro ejemplo. La tabla 12.29 es la de costo de oportunidad.

Tabla 12.28

Tabla de costo reducido por renglón

	Causas			
Juez	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	0	4	1
2	1	0	1	0
3	4	0	6	3
4	7	0	2	5

Tabla 12.29

Tabla de costo de oportunidad

	Causas			
Juez	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0	0	3	1
2	0	0	0	0
3	3	0	5	3
4	6	0	1	5

- ❐ **Paso 2: Determine si puede realizarse una asignación óptima**. La técnica para determinar si es posible una asignación óptima en esta etapa consiste en dibujar líneas rectas (vertical y horizontalmente) a través de la tabla de costo de oportunidad, de manera que se minimice el número de líneas necesarias para cubrir todas las entradas con cero. Si el número de líneas es igual al número de renglones o al número de columnas en la tabla, puede efectuarse una asignación óptima. Si el número de líneas es menor que el número de renglones o columnas, no puede determinarse una asignación óptima y la tabla de costo de oportunidad debe revisarse. En la tabla 12.30 se ilustra este paso al aplicarse a la tabla 12.29. Como se muestra, se requieren tres líneas para cubrir todos los ceros en la tabla, y no se puede determinar una asignación óptima.
- ❐ **Paso 3: Revisar la tabla de costo de oportunidad**. Si no es posible determinar una asignación óptima en el paso 2, la tabla de costo de oportunidad debe ser modificada.

Tabla 12.30

	Causas			
Juez	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0	0	3	1
2	0	0	0	0
3	3	0	5	3
4	6	0	1	5

Esto se llevará a cabo identificando al número más pequeño en la tabla no cubierto por una línea recta y restando este número de todos los números no cubiertos por una línea recta. Por otro lado, este mismo número se *agrega* a todos los números situados en la *intersección* de cualquiera de las dos líneas. Al examinar la tabla 12.30, el elemento más pequeño no cubierto por una línea recta es el 1 en la intersección del renglón 4 y la columna 3. Si este número es restado de todos los elementos no cubiertos por líneas rectas y es sumado a los números que se encuentran en la intersección de cualquiera de las dos líneas rectas, la tabla de costo de oportunidad modificada quedará como se muestra en la tabla 12.31. El paso número 2 se repite entonces en este punto.

Tabla 12.31

Tabla de costo de oportunidad revisada

	Causas			
Juez	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0	1	3	1
2	0	1	0	0
3	2	0	4	2
4	5	0	0	4

Tabla 12.32

Asignaciones óptimas

	Causas					
Juez	**1**	**2**	**3**	**4**	**Asignaciones finales**	**Días**
1	⓪	1	3	1	Juez 1 : Lista de causas 1	14
2	0	1	0	⓪	Juez 2 : Lista de causas 4	15
3	2	⓪	4	2	Juez 3 : Lista de causas 2	14
4	5	0	⓪	4	Juez 4 : Lista de causas 3	15
					Total de días	58

❐ **Paso 2: Determine si puede realizarse una asignación óptima**. Al repetir el paso 2, la tabla 12.31 muestra que se requieren cuatro líneas para cubrir todos los elementos cero. De este modo se concluye que sí puede hacerse una asignación óptima. Las asignaciones óptimas pueden no ser evidentes a partir de la tabla. Un procedimiento para identificar las asignaciones es *seleccionar un renglón o columna en donde haya sólo un cero, y hacer una asignación a esa casilla*. Existe sólo un cero en la columna 4. De este modo, la primera asignación es el juez 2 a la lista de causas 4. Puesto que no puede hacerse ninguna otra asignación en el renglón 2 o la columna 4, se tachan. Con el renglón 2 y la columna 4 tachados, se busca un renglón o columna en donde haya sólo un cero. Como se puede apreciar en la tabla 12.32, las asignaciones restantes son evidentes, puesto que se tienen tres elementos cero que son los únicos elementos de ese tipo en un renglón o columna. De esta manera la asignación óptima de los cuatro jueces produce 58 días-jueces para aclarar las cuatro listas de causas. ❑

Resumen del método húngaro

❐ **Paso 1:** Determine la tabla de costo de oportunidad.

a) Determine la tabla de costo reducido por renglón mediante la resta del elemento de menor costo en cada renglón de todos los elementos en el mismo renglón.

b) Mediante la tabla de costo reducido por renglón, identifique el elemento de menor costo en cada columna y reste de todos los elementos en esa columna.

❐ **Paso 2:** Determine si puede realizarse o no una asignación óptima. Dibuje el número mínimo de líneas rectas necesario para cubrir todos los elementos cero en la tabla de costo de oportunidad. Si el número de líneas rectas es menor que el número de renglones (o columnas) en la tabla, no puede efectuarse la asignación óptima. Vaya al paso 3. Si el número de líneas rectas es igual al número de renglones (columnas), pueden identificarse las asignaciones óptimas.

❐ **Paso 3:** Revise la tabla de costo de oportunidad. Identifique el elemento más pequeño en la tabla de costo de oportunidad que no esté cubierto por una línea recta.

a) Reste este elemento de todo elemento no cubierto por una línea recta.
b) Sume este elemento a cualquier elemento(s) encontrado(s) en la intersección de dos líneas rectas.
c) Regrese al paso 2.

El método húngaro puede utilizarse cuando una función objetivo debe ser maximizada. Pueden emplearse dos enfoques alternativos en esta situación. Pueden modificarse los signos en los coeficientes de la función objetivo, y la función objetivo ser minimizada; o pueden determinarse los costos de oportunidad al restar el elemento más grande (por ejemplo, la ganancia) en un renglón o columna en vez del elemento más pequeño.

Sección 12.3 Ejercicios de seguimiento

1. Resuelva el problema de los árbitros de la NCAA (ejemplo 3) haciendo uso del método húngaro.

2. **Programación de los juzgados** Un administrador de juzgados del distrito quiere asignar cinco jueces a cinco listas de causas de los tribunales. El objetivo es minimizar el tiempo total requerido para terminar todos los casos programados en las cinco listas de causas. El administrador ha realizado estimaciones del número de días que se requerirían para que cada juez completara cada lista diferente. Estas estimaciones se muestran en la tabla 12.33 y están basadas en la composición de tipos de caso en cada lista de causas y en un análisis del registro de cada juez, así como de su experiencia para poder culminar los diferentes tipos de casos.

a) Formule la función objetivo y el conjunto de restricciones.
b) Resuelva haciendo uso del método húngaro.
c) Si se cuenta con un paquete de computadora para el modelo de asignación (o un paquete de transporte o programación lineal), encuentre la solución óptima.

Tabla 12.33

	Causas				
Juez	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	20	18	22	24	21
2	18	21	26	20	20
3	22	26	27	25	19
4	25	24	22	24	18
5	23	20	25	23	22

3. **Asignación de vuelos no regulares** Una compañía aérea tiene cinco aeronaves disponibles para vuelos no regulares (“charter”) este fin de semana. Cinco organizaciones han solicitado el uso de una aeronave. Con base en un análisis de los ingresos esperados de cada vuelo solicitado y de los gastos de operación estimados, la compañía ha llegado a unas cifras esperadas de ganancia resultantes de la asignación de cada uno de los cinco aviones para cada vuelo no regular propuesto. Estas cifras se muestran en la tabla 12.34

Tabla 12.34

Avión	Requerimientos charter 1	2	3	4	5
1	$2 500	$1 000	$2 800	$3 200	$3 500
2	1 800	2 800	4 300	2 700	3 400
3	2 300	1 800	4 000	2 800	3 600
4	3 000	2 100	2 000	2 500	3 000
5	2 800	2 500	2 700	3 000	2 500

Si el objetivo es asignar las cinco aeronaves para cinco de los vuelos no regulares:

a) Formule la función objetivo y las restricciones.
b) Resuelva haciendo uso del método húngaro.
c) Si se tiene un paquete de computadora, encuentre la solución óptima.

4. **Asignación de la fuerza de ventas** Un editor universitario desea asignar cinco representantes de ventas a cinco distritos. La dirección ha estimado las ventas anuales (en miles de dólares) que cada representante generaría si los asignaran a los diferentes distritos. Esto se resume en la tabla 12.35. La dirección desea asignar los cinco representantes a los cinco diferentes distritos de tal forma que maximice las ventas totales anuales.

a) Formule la función objetivo y sus restricciones.
b) Resuelva usando el método húngaro.
c) Si se dispone de un paquete de computación (programación lineal, transportación, o asignación), resuelva la asignación óptima.

Tabla 12.35

Ventas anuales estimadas, en miles de dólares

Representante de ventas	Distrito de ventas 1	2	3	4	5
1	125	140	90	150	110
2	180	190	160	175	200
3	140	250	240	265	210
4	220	200	240	250	225
5	275	300	260	290	310

❑ TÉRMINOS Y CONCEPTOS CLAVE

algoritmo del cruce de arroyo	**534**
destino	**550**
índice de mejoramiento	**558**
método de la esquina noroeste	**555**
método húngaro	**573**
modelo de asignación	**570**
modelo de transporte	**550**
origen	**550**
solución óptima alternativa	**565**
tabla de costo de oportunidad	**575**
tabla de costo reducido por renglón	**575**

❑ EJERCICIOS ADICIONALES

SECCIÓN 12.2

1. Dados los datos para un problema de transporte en la tabla 12.36:

a) Haga uso del método de la esquina noroeste para determinar una solución inicial.

b) Siga buscando la solución óptima haciendo uso del algoritmo del cruce de arroyo.

Tabla 12.36

	Destino			
Origen	**1**	**2**	**3**	**Oferta**
1	50	80	60	250
2	30	70	40	350
3	90	40	80	400
Demanda	400	250	350	

2. Dados los datos para un problema de transporte en la tabla 12.37:

a) Haga uso del método de la esquina noroeste para determinar una solución inicial.

b) Siga buscando la solución óptima haciendo uso del algoritmo del cruce de arroyo.

Tabla 12.37

	Destino			
Origen	**1**	**2**	**3**	**Oferta**
1	10	15	5	350
2	30	10	25	500
3	20	30	15	650
Demanda	600	400	500	

3. **Problemas de maximización** Si la función objetivo va a ser maximizada en un problema de transporte, se aplica el algoritmo del cruce de arroyo del mismo modo que en problemas de minimización. La única diferencia radica en la interpretación del índice de mejoramiento. En un problema de maximización, existe una mejor solución que la actual si cualquiera de los índices de mejoramiento es positivo. Si más de un índice de mejoramiento es positivo, la casilla de entrada se identifica por el índice de mejoramiento más positivo. Se encuentra una solución óptima cuando todos los índices de mejoramiento no son positivos.

   En el ejercicio 1, suponga que la función objetivo va a ser maximizada. Encuentre la solución óptima haciendo uso del algoritmo del cruce de arroyo.
4. Vuelva a resolver el ejercicio 2 si la función objetivo va a ser maximizada.

Tabla 12.38

Precio de oferta por sábana

Compañía de lavado	**Clínica**					**Capacidad semanal, sábanas**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	
1	\$0.25	\$0.28	\$0.20	\$0.30	\$0.24	4 000
2	\$0.24		\$0.25	\$0.28		3 000
3		\$0.25	\$0.23	\$0.30	\$0.26	2 800
Necesidades semanales, sábanas	1 500	2 000	1 200	2 400	1 000	

5. **Administración de clínicas** Una compañía tiene la responsabilidad de la administración de cinco clínicas. Una de las ventajas de este tipo de acuerdo es la eficacia en costos de la compra centralizada de suministros para las cinco clínicas. La compañía tiene ofertas para suministrar el lavado de ropa de cama para las cinco clínicas. La tabla 12.38 es un resumen de las ofertas presentadas por tres compañías de lavado. El precio por sábana incluye costos de recolección y entrega. Dos de las lavanderías no han presentado ofertas para las cinco clínicas. Las clínicas excluidas residen fuera de sus áreas de entrega.

   Las lavanderías pueden recibir contratos para satisfacer alguna o la totalidad de las necesidades de cualquiera de las clínicas. El problema es determinar el número de sábanas por semana suministradas por cada lavandería a cada clínica de manera que se minimice el costo semanal total.

   a) Formule la función objetivo y el conjunto de restricciones.

   b) Mediante ensayo y error estime lo que considere una buena solución.

   c) Si dispone de un paquete de computación de transporte (o de programación lineal), encuentre la solución óptima.
6. **Reasignación de gasolina** Una importante compañía petrolera está planificando el incremento habitual de consumo vacacional que se presenta durante el verano. En un esfuerzo para complacer mejor las necesidades de los automovilistas, la compañía ha hecho una encuesta con sus distribuidores regionales. La encuesta reveló que cuatro regiones esperan tener suministros sobrantes de gasolina, en tanto que seis regiones esperan no alcanzar a

cubrir sus necesidades. La compañía quiere desarrollar un plan para reasignar los suministros de las regiones con excedentes a las regiones con faltantes. En la tabla 12.39 se indican las cantidades excedentes y faltantes por región y el costo (establecido en cientos de dólares) por 100 000 galones de gasolina desviada de una región hacia la otra. El problema es determinar la cantidad de gasolina que será reasignada desde cada región con excedentes a cada región con faltantes, de manera que se minimice el costo total.

a) Formule la función objetivo y el conjunto de restricciones para este modelo.

b) Si dispone de un paquete de computación de transporte (o de programación lineal), encuentre la solución óptima.

Tabla 12.39 **Costos de reasignación, en cientos de dólares**

Región con exceso	Región con escasez						Exceso, 100 000 galones
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	
1	25	18	20	30	15	12	40
2	20	25	30	28	26	18	25
3	16	20	25	15	24	30	60
4	18	23	20	10	15	25	100
Escasez, 100 000 galones	15	20	40	30	10	25	

SECCIÓN 12.3

7. Desarrollo de software El director del área de procesamiento de datos para una compañía consultora quiere asignar cuatro tareas de programación a cuatro de sus programadores. Ha estimado el número total de días que le tomaría a cada programador si se le asignara a cada uno de los programas. En la tabla 12.40 se hace un resumen de estas estimaciones.

Si el objetivo es asignar a un programador por tarea, de manera que se minimice el número total de días requeridos para completar las tareas:

a) Formule la función objetivo y las restricciones.

b) Resuelva haciendo uso del método húngaro.

c) Si dispone de un paquete de computación, encuentre la solución óptima.

Tabla 12.40 **Días estimados por tarea de programación**

Programador	Tarea de programación			
	1	**2**	**3**	**4**
1	45	50	38	56
2	42	53	34	60
3	50	48	40	62
4	48	47	36	58

8. **Asignación de detectives** Un jefe de policía desea asignar cinco equipos de detectives a cinco grupos de casos sin resolver. Los cinco equipos son diferentes respecto del número de detectives, años de experiencia y métodos de operación. Después de analizar los tipos de casos en cada uno de los cinco grupos, el jefe ha estimado el porcentaje de casos que cada equipo de detectives resolvería si se asignara a cada grupo. Estas estimaciones se muestran en la tabla 12.41. El número de casos pendientes en los cinco grupos es de 40, 30, 25, 50 y 20, respectivamente. Si el objetivo es asignar a los cinco equipos de tal manera que se maximice el *número total de casos resueltos*:
   a) Formule la función objetivo y las restricciones.
   b) Resuelva haciendo uso del método húngaro.
   c) Si dispone de un paquete de computación, encuentre la solución óptima.

Tabla 12.41

Porcentaje esperado de crímenes resueltos

Equipo de detectives	**Grupo de crímenes sin resolver** 1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0.30	0.40	0.25	0.30	0.20
2	0.40	0.35	0.40	0.25	0.30
3	0.35	0.50	0.40	0.40	0.45
4	0.50	0.55	0.30	0.20	0.40
5	0.45	0.30	0.50	0.50	0.35

9. En la tabla 12.42 se sintetizan los costos de la asignación de cuatro recursos a cuatro tareas. Resuelva para una solución de costo mínimo haciendo uso del método húngaro.

Tabla 12.42

Recurso	**Tarea** 1	**2**	**3**	**4**
1	24	20	26	22
2	30	22	24	26
3	28	25	28	24
4	26	28	27	25

❑ EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. Dados los datos para el siguiente problema de transporte, determine una solución utilizando el método de la esquina noroeste. ¿Cuáles son los costos totales asociados a la solución?

	Destino				
Origen	**1**	**2**	**3**	**4**	**Oferta**
1	30	50	25	20	1 200
2	40	30	35	60	1 500
3	25	75	40	50	2 400
4	60	15	50	30	1 000
Demanda	800	1 900	2 000	1 400	

2. Resuelva el siguiente problema de transporte haciendo uso del algoritmo del cruce de arroyo.

	Destino				
Origen	**1**	**2**	**3**	**4**	**Oferta**
1	20	27	35	15	300
2	18	31	23	19	500
3	12	17	14	28	450
Demanda	350	400	300	200	

3. La tabla siguiente resume el número de días requeridos para que cuatro personas terminen cuatro tareas diferentes. Determine la asignación óptima de personas a las tareas si el objetivo es minimizar el número total de días para terminar los cuatro trabajos.

	Trabajo			
Persona	**1**	**2**	**3**	**4**
1	8	20	15	17
2	15	16	12	10
3	22	19	16	30
4	25	15	12	9

MINICASO

DISTRIBUCIÓN DEL ALMACENAMIENTO

Una compañía distribuye un producto desde tres almacenes existentes hacia ocho puntos de demanda en el país. La capacidad de los tres depósitos o almacenes está casi agotada y la compañía está considerando agregar uno o más almacenes nuevos. En la tabla 12.43 se resume información importante respecto de la distribución del producto. En la tabla 12.43 se muestran los costos de distribución por unidad desde cada almacén, tanto existente como propuesto, hacia cada punto de demanda, las capacidades mensuales de los almacenes, los gastos generales mensuales relacionados con la operación de cada almacén y las demandas mensuales en los ocho puntos de demanda. La compañía quiere determinar si agrega alguno de los almacenes propuestos y qué cantidades deberían distribuirse cada mes desde cada almacén hacia cada punto de demanda. El objetivo es minimizar la suma de los costos de distribución mensual y los costos generales al mes. Evalúe las cuatro posibles configuraciones de almacén (los tres ya existentes únicamente y los tres existentes más uno o ambos almacenes propuestos). *Cuando realice el análisis, los costos generales tendrán que sumarse manualmente a los costos de distribución mínimos obtenidos de la computadora para cada configuración de almacenes.* Cuando haga el resumen de los resultados para cada configuración de almacenes, incluya lo siguiente:

a) Las cantidades recomendadas para enviar desde cada almacén hacia cada punto de demanda.
b) El costo de distribución mensual total, el costo general mensual total y el costo mensual total.
c) La capacidad no utilizada cada mes para los almacenes incluidos.

Tabla 12.43

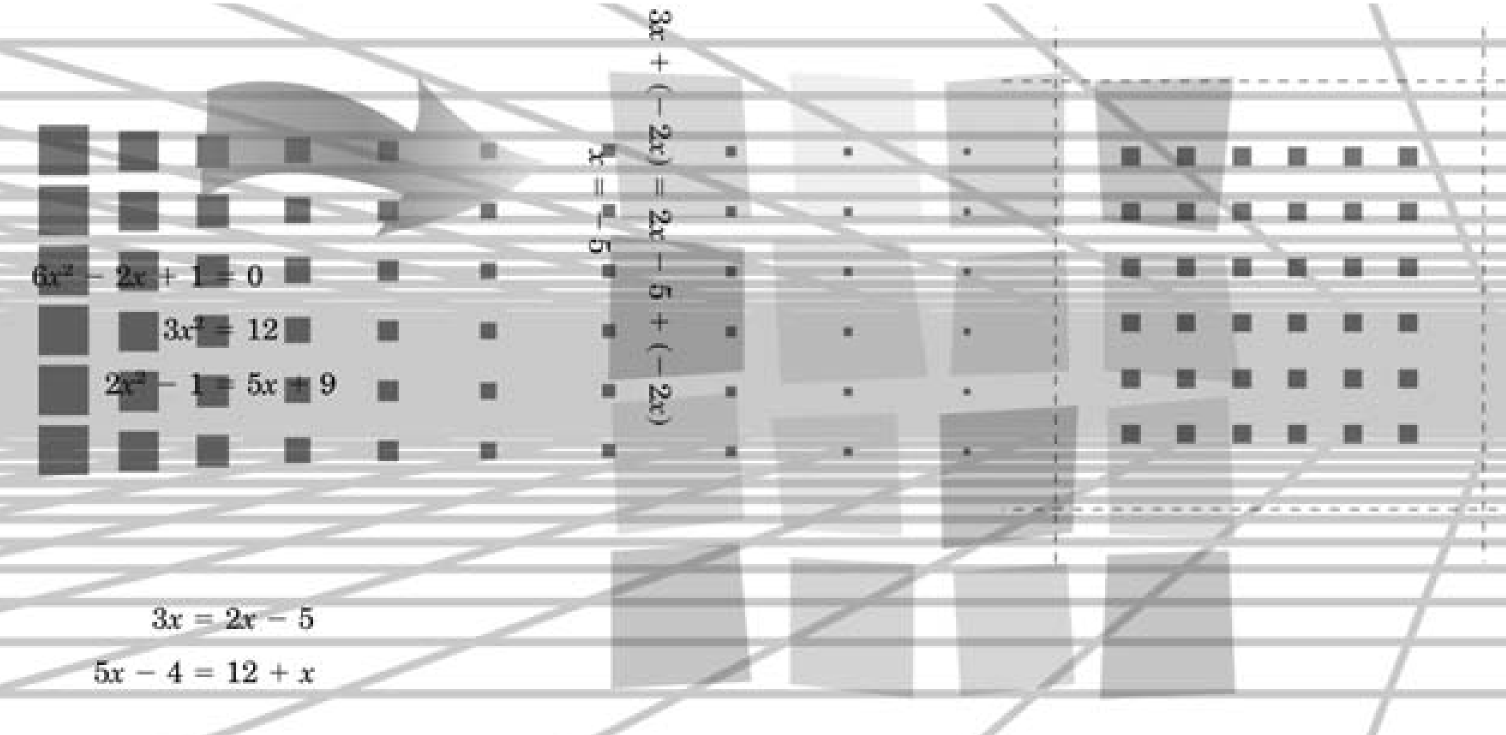
		Punto de demanda								**Capacidad mensual**	**Gasto mensual**
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**		
Almacén existente	1	$16	$12	$22	$18	$10	$8	$15	$20	18 000	$60 000
	2	20	16	19	12	13	6	20	18	24 000	70 000
	3	18	15	16	22	9	6	24	25	32 000	75 000
Almacén propuesto	4	12	10	16	8	5	6	14	15	30 000	40 000
	5	14	12	14	6	7	5	16	12	36 000	42 000
Demanda mensual		8 000	10 000	15 000	12 000	5 000	4 000	13 000	6 000		

CAPÍTULO 13

Introducción a la teoría de la probabilidad

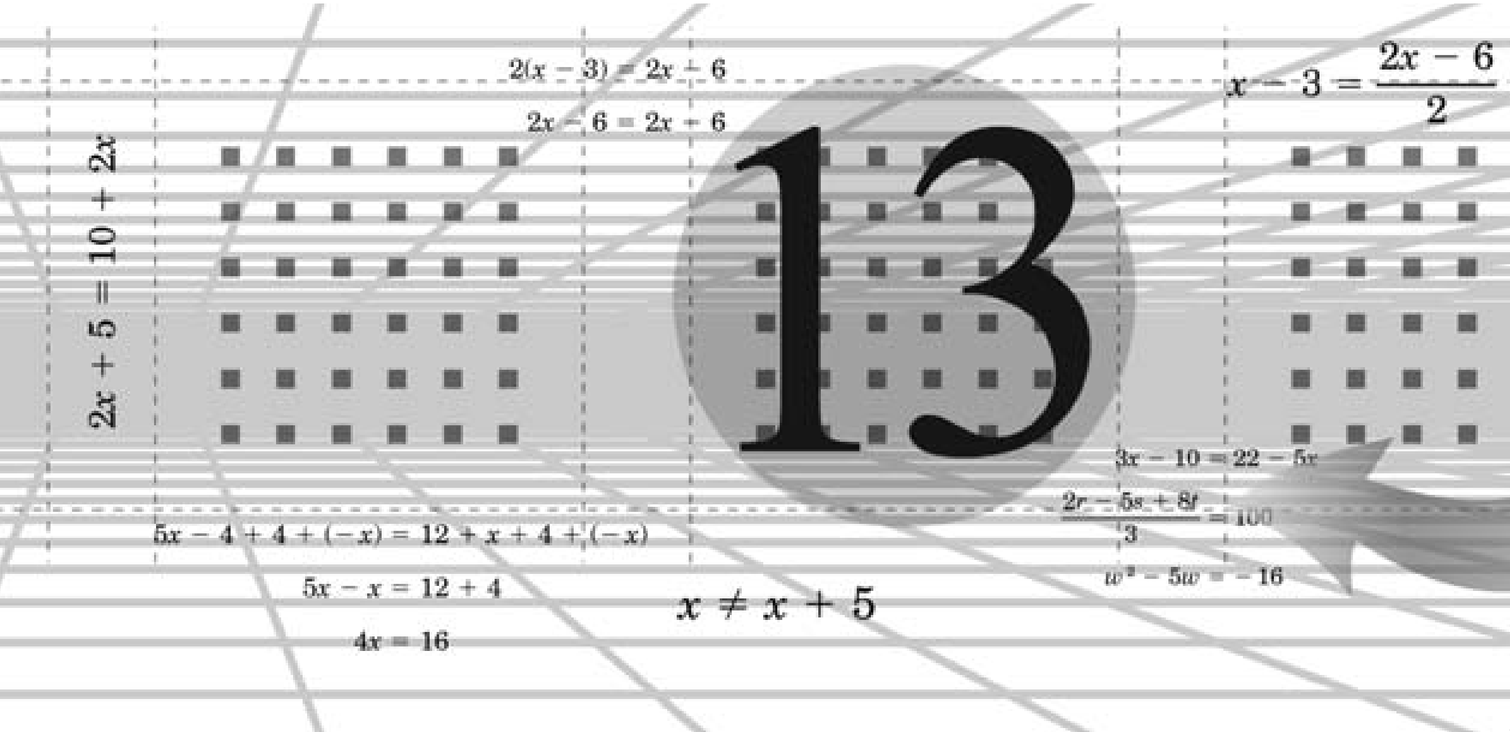
13.1 INTRODUCCIÓN A LOS CONJUNTOS Y OPERACIONES CON CONJUNTOS
13.2 PERMUTACIONES Y COMBINACIONES
13.3 CONCEPTOS BÁSICOS DE LA PROBABILIDAD
13.4 DETERMINACIÓN DE INDEPENDENCIA Y DEPENDENCIA ESTADÍSTICA

Términos y conceptos clave
Fórmulas importantes
Ejercicios adicionales
Evaluación del capítulo
Minicaso: El problema del cumpleaños



OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Proporcionar un repaso de los aspectos fundamentales de la teoría de conjuntos y operaciones con conjuntos.
- Conseguir que el lector comprenda los métodos básicos de conteo, incluyendo las permutaciones y las combinaciones.
- Ofrecer una introducción al concepto de la probabilidad y el cálculo de las probabilidades para ciertos ambientes estadísticos.



ESCENARIO DE MOTIVACIÓN: Posibilidades de una auditoría de impuestos por la oficina de Hacienda

El IRS (Internal Revenue Service: "Oficina de Hacienda") estima que la posibilidad de un error en las declaraciones personales de impuestos sobre la renta es de 0.4. Supongamos que se realiza un experimento en el cual se seleccionan tres declaraciones al azar para propósitos de auditoría. Los resultados de auditar una declaración de impuestos son: que "no contenga errores" o que "tenga errores". **En una muestra de tres declaraciones de impuestos, se quiere determinar todos los posibles resultados y las probabilidades de que ocurran dichos resultados (ejemplo 30).**

Gran parte de la vida de las personas se caracteriza por la incertidumbre. Muchos fenómenos de nuestro mundo parecen estar dominados por un comportamiento aleatorio. La mayor parte de las decisiones se toman en un ambiente caracterizado por la ausencia de un conocimiento completo de las situaciones. Una decisión acerca del número de unidades que se fabricarán de un producto se basa en las *estimaciones* del número de unidades que se espera vender. Si esta cantidad se conociera por adelantado, la decisión sería elaborar exactamente dicha cantidad, sin que hubiera escasez ni excedentes. Sin embargo, en las situaciones reales de toma de decisiones raras veces puede recopilarse una información así de precisa.

Los conceptos de la probabilidad pueden ser sumamente útiles cuando se hace frente a la incertidumbre que caracteriza a la mayor parte de los entornos en que se toman las decisiones. La teoría de la probabilidad se aprovecha de que, para muchos fenómenos inciertos, existen patrones "a largo plazo". Por ejemplo, cuando se lanza una moneda al aire no se sabe con certidumbre si caerá de uno u otro lado ("cara o cruz"). Sin embargo, con muchos lanzamientos de la misma moneda, a la larga aproximadamente la mitad de los resultados deberá corresponder a la "cara" y la otra mitad al lado de la "cruz".

La investigación médica se basa fundamentalmente en las observaciones a largo plazo para generalizar los resultados. En la tabla 13.1 se muestran los resultados de un estudio en que se investigó la eficacia de un nuevo medicamento para reducir la frecuencia de los ataques cardiacos. Se administró el medicamento durante un periodo de cinco años a las personas que sobrevivieron un primer ataque cardiaco. En la tabla 13.1 se resumen los resultados del estudio a medida que la muestra de personas se incrementaba. Adviértase

Tabla 13.1

Personas que reciben medicamento (núm.)	Personas que no tienen recaídas de ataques cardiacos	Personas que no tienen recaídas. Porcentaje
100	64	64
300	196	65.3
500	317	63.4
1 000	636	63.6
5 000	3 177	63.54
10 000	6 351	63.51

cómo el *porcentaje*, o proporción, que no sufrió de una recaída fluctúa, pero tiende a estabilizarse a medida que aumenta el tamaño de la muestra. La incertidumbre de la eficacia del medicamento hace imposible saber lo que le ocurrirá a cada paciente en particular. No obstante, la evidencia después de 10 000 observaciones sugiere que aproximadamente 63.5% de las víctimas de un ataque cardiaco que utilicen este medicamento en particular no tendrán otro ataque en los cinco años posteriores a un primer ataque al corazón.

Estos resultados tienen un significado mayor cuando se comparan con las experiencias de una segunda muestra de víctimas de ataques cardiacos a quienes no se les administró el mismo medicamento. Para 10 000 personas en este segundo grupo, el porcentaje de aquellos que no mostraron una recaída fue de 45.26%. Los resultados comparativos son alentadores respecto de las posibilidades del nuevo fármaco.

El propósito de este capítulo es presentar una introducción a los aspectos fundamentales de la teoría de la probabilidad. Ya que la *teoría de conjuntos* proporciona un medio muy útil para presentar y comentar los conceptos de la probabilidad, en la primera sección de este capítulo se proporciona una breve reseña de los conceptos de conjunto y operaciones con conjuntos. En la segunda sección se estudian los métodos especiales de conteo o recuento que son de extrema utilidad en la teoría de la probabilidad. En la siguiente sección se explican los conceptos fundamentales de la probabilidad y del cálculo de probabilidades. En la última sección se expone el cálculo de probabilidades en condiciones de *independencia estadística* y de *dependencia estadística*.

13.1 Introducción a los conjuntos y operaciones con conjuntos

Aunque antes se ha utilizado una notación de conjunto al hablar de los conjuntos solución en el caso de las ecuaciones lineales, ahora se presentará un repaso más formal de los conceptos de conjunto y de las operaciones con conjuntos.

Conjuntos

Un ***conjunto*** es cualquier colección de objetos *bien definida*. Entre los ejemplos de conjuntos se incluyen el conjunto de estudiantes que están inscritos en un curso de historia en una universidad estatal; el conjunto de los ciudadanos de un país occidental que tienen 65 años de edad o más; el conjunto de jugadores de una liga de baloncesto que anoten más de 20 puntos y logren más de 12 rebotes por juego durante una temporada en particular; el conjunto de ciudades que puedan ser sede de la próxima Feria Mundial, y el conjunto de los números reales. A menudo los objetos pertenecen a un conjunto por poseer ciertos atributos o algunas cualidades que se requieren para formar parte del mismo. Para que un estudiante de universidad estatal sea miembro del conjunto antes mencionado, es necesario que esté inscrito en el curso de historia. Para que un jugador de la liga de baloncesto sea miembro del conjunto citado, debe haber conseguido un promedio superior a los 20 puntos *y* más de 12 rebotes por juego durante la temporada especificada. Los objetos que pertenecen a un conjunto se denominan ***elementos*** del conjunto.

La pertenencia en un conjunto suele definirse en dos formas. El ***método de enumeración*** se limita a enumerar todos los elementos que se encuentran en un conjunto. Si se denota con una letra mayúscula un nombre de conjunto, puede definirse el conjunto de los números enteros impares positivos que tengan un valor menor que 10 del modo que sigue

$$\boxed{A = \{1, 3, 5, 7, 9\}}$$

Nótese el uso de *llaves* o *corchetes* para agrupar los elementos o miembros del *conjunto A*.

El método de enumeración es idóneo cuando el número de elementos en conjunto es pequeño o bien cuando no resulta sencillo o posible formular una propiedad que especifique los requerimientos para la pertenencia al conjunto. Un método alternativo para definir conjuntos es el ***método de propiedad descriptiva***. Con este enfoque, el conjunto se define al establecer la propiedad requerida para la pertenencia al conjunto. El conjunto A, definido en el ejemplo anterior, puede volver a definirse como

$$\boxed{A = \{x \overset{\text{“tal que”}}{\downarrow|} x \text{ es un entero positivo impar menor que } 10\}}$$

Expresado en palabras, la traducción de esta ecuación es *“A es el conjunto que se compone de todos los elementos x ‘tales que’ (la línea vertical) x es un número entero positivo impar que tenga un valor menor que 10”*. La x a la izquierda de la línea vertical indica la notación general para un elemento del conjunto; la expresión a la derecha de la línea vertical establece la(s) condición(es) requeridas para que un elemento pertenezca al conjunto.

Si se quiere indicar que un objeto e es miembro de un conjunto S, se hará uso de la notación

$$\boxed{e \in S}$$

En forma verbal, la notación anterior se traduce como “e es un miembro (o elemento) del conjunto S”. En el conjunto A anteriormente definido puede decirse:

$$9 \in A$$

La notación $e \notin S$ significa que un objeto e no es miembro del conjunto S.

El *número de elementos* contenidos dentro de un conjunto B se denota por

$$\boxed{n(B)}$$

De este modo, para el conjunto A, $n(A) = 5$.

Conjuntos especiales

Existen ciertos conjuntos especiales a los que se hace referencia a menudo cuando se estudia el álgebra de conjuntos.

Definición: Conjunto universo

El ***conjunto universo*** $\mathcal{U}$ es el que contiene todos los elementos posibles dentro de una aplicación particular en consideración.

Ejemplo 1

Si se considera una encuesta de opinión efectuada en una muestra aleatoria de habitantes de la ciudad de Nueva York, pueden identificarse varios conjuntos de personas. Un conjunto podría estar integrado por aquellas personas incluidas en la muestra; otro podría componerse de los residentes que *no* figuran en ella. En esta aplicación, el conjunto universo $\mathcal{U}$ podría definirse como todos los habitantes de la ciudad de Nueva York. ❑

Definición: Complemento

El ***complemento*** de un conjunto S es el conjunto constituido por todos los elementos del conjunto universo que no son miembros del conjunto S. El complemento del conjunto S se denota como $\boldsymbol{S'}$.

Ejemplo 2

En el ejemplo 1, si A representa el conjunto de los habitantes incluidos en la encuesta, el complemento de A, indicado como A', es el conjunto de todos los habitantes de Nueva York que no participaron en la encuesta.

Ejemplo 3

Si el conjunto S está integrado por todos los números enteros positivos y el conjunto universo se define como todos los números enteros, entonces S' se compone de todos los números enteros negativos y el cero.

Ejemplo 4

Si $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, el complemento del conjunto A contiene todos los elementos que son miembros de $\mathcal{U}$ pero no de A, o sea $A' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. ❑

Definición: Conjunto nulo

El ***conjunto nulo***, o ***vacío***, $\varnothing$, es el que no contiene elemento alguno.

Ejemplo 5

Considere el sistema de ecuaciones

$$4x + 3y = 10$$

$$4x + 3y = -5$$

Puesto que no hay valores para x y y que satisfagan a ambas ecuaciones, el conjunto solución S del sistema de ecuaciones es el conjunto vacío, o

$$S = \varnothing$$

Expresándolo de manera diferente,

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y) \mid 4x + 3y = 10 \text{ y } 4x + 3y = -5\} \\ &= \varnothing \end{aligned}$$

❑

Definición: Subconjunto

El conjunto A es un ***subconjunto*** de un conjunto B, si y sólo si todos los elementos del conjunto A son además elementos del conjunto B. Esta relación de subconjuntos se denota como $\boldsymbol{A \subset B}$, lo que se lee "A es un subconjunto de B".

Ejemplo 6 Dados los siguientes conjuntos,

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \qquad C = \{x \mid x \text{ es un número real}\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\} \qquad D = \{z \mid z - 1 = 4\}$$

Se pueden identificar las siguientes relaciones de subconjuntos: $A \subset C$, $B \subset C$, $D \subset C$, $B \subset A$, $D \subset A$ y $D \subset B$. Verifíquelas usted mismo; ¿existen algunas otras relaciones de subconjuntos? ❑

NOTA ***Por definición***, el conjunto nulo es un subconjunto de todos los conjuntos. Por consiguiente, en el ejemplo anterior se tendrá $\varnothing \subset A$, $\varnothing \subset B$, $\varnothing \subset C$ y $\varnothing \subset D$.

Representación del diagrama de Venn

Los ***diagramas de Venn*** son un medio muy adecuado para visualizar las relaciones de conjuntos. Como ilustración, en la figura 13.1 se describe un conjunto universo $\mathcal{U}$ dentro del cual se encuentra otro conjunto A, representado por un área circular. La figura 13.2 ilustra la relación del complemento. El valor principal de estas figuras es la información que suministran respecto de las relaciones entre conjuntos. Por ejemplo, si un conjunto B es subconjunto de otro conjunto A, la representación del diagrama de Venn del conjunto B debería estar contenida dentro del conjunto A. En la figura 13.3, los conjuntos A y B son subconjuntos del conjunto universo, y el conjunto B se representa como un subconjunto de A.

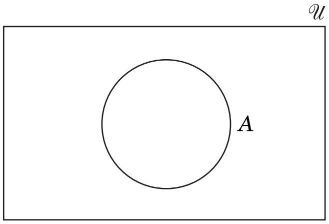


Figura 13.1 Diagrama de Venn: Conjunto A dentro del conjunto universo $\mathcal{U}$.

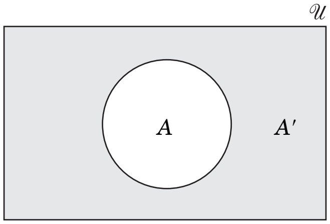


Figura 13.2 Relación de complemento en diagrama de Venn.

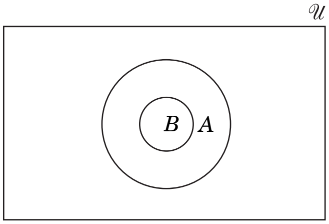


Figura 13.3 Representación en diagrama de Venn de relaciones de subconjuntos: $A \subset \mathcal{U}$, $B \subset \mathcal{U}$ y $B \subset A$.

Operaciones con conjuntos

Del mismo modo que existen operaciones aritméticas que constituyen el fundamento del álgebra, la trigonometría y otras áreas de estudio en las matemáticas, existe una aritmética de la teoría de conjuntos que permite desarrollar un álgebra de conjuntos.

Definición: Igualdad de conjuntos

Dos conjuntos A y B son iguales si y sólo si todos los elementos de A son elementos de B y todos los elementos de B son elementos de A. Expresando esto con símbolos:

$$\mathbf{A = B \quad \text{si} \quad A \subset B \quad \text{y} \quad B \subset A}$$

Ejemplo 7 Dados los conjuntos siguientes, determine si hay conjuntos iguales.

$$A = \{1, 2\} \qquad C = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{x \mid (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0\} \qquad D = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$$

SOLUCIÓN

El conjunto B puede definirse de manera equivalente como $B = \{1, 2, 3\}$. Hecho esto, puede hacerse la afirmación de que el conjunto B es igual al conjunto C, o bien $B = C$. Las raíces de la ecuación cuadrática en el conjunto D son $x = 1$ y $x = 2$. De este modo, el conjunto D puede redefinirse como

$$D = \{1, 2\}$$

y el conjunto A es igual al conjunto D, o bien $A = D$. ❑

Definición: Unión de conjuntos

La ***unión*** de dos conjuntos A y B, indicada por $\boldsymbol{A \cup B}$, es un conjunto formado por todos los elementos contenidos en el conjunto A o el conjunto B, o bien, en los dos conjuntos.

La representación del diagrama de Venn de $A \cup B$ se ilustra en la figura 13.4.

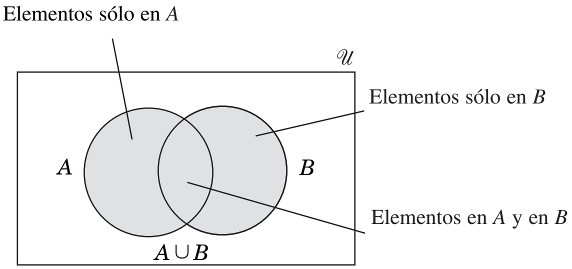


Figura 13.4 Unión de los conjuntos A y B.

Ejemplo 8 Dados los conjuntos siguientes,

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$
b) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$
c) $B \cup C = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{2, 4, 6, 8, 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ❑

NOTA La unión de cualquier conjunto A y su complemento dan como resultado el conjunto universo $\mathscr{U}$, o bien: $A \cup A' = \mathscr{U}$. También, $A \cup \varnothing = A$.

Definición: Intersección de conjuntos

La ***intersección*** de dos conjuntos A y B, denotada por $\boldsymbol{A \cap B}$, es un conjunto que consta de todos los elementos pertenecientes a A y B, o bien a *ambos*.

La representación del diagrama de Venn de la intersección de dos conjuntos A y B es el área sombreada de la figura 13.5. Adviértase en el diagrama que la intersección es el área *común* a los dos conjuntos.

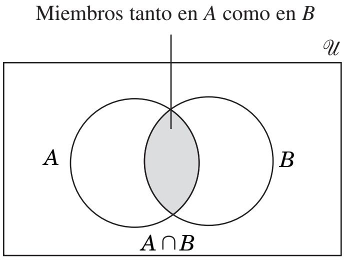


Figura 13.5 Intersección de los conjuntos A y B.

Ejemplo 9 Dados los conjuntos A, B y C definidos en el ejemplo anterior:

a) $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{1, 3, 5\}$
b) $A \cap C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{2, 4, 6, 8, 10\} = \{2, 4\}$
c) $B \cap C = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{2, 4, 6, 8, 10\} = \varnothing$
d) $A \cap A' = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{6, 7, 8, 9, 10\} = \varnothing$
e) $B \cap \mathscr{U} = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ❑

Ejercicio de práctica

Dados $A = \{1, 3, 5, 7, -1, -3, -5, -7\}$, $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ y $C = \{-4, -3, -1, 2, 4\}$, determine: *a*) $A \cup C$, *b*) $B \cap C$, *c*) $A \cap B \cup C$. *Respuestas*: *a*) $\{-7, -5, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 7\}$, *b*) $\{-3, -1, 2\}$, *c*) $\{-4, -3, -1, 1, 2, 3, 4\}$.

Algunas otras propiedades generales de los conjuntos son las siguientes:

1. $\boxed{A \cap A' = \varnothing}$

La intersección de cualquier conjunto A y su complemento A′ es el conjunto nulo. *En forma gráfica esto se muestra en la figura 13.6. Este resultado fue ilustrado en el ejemplo 9d.*

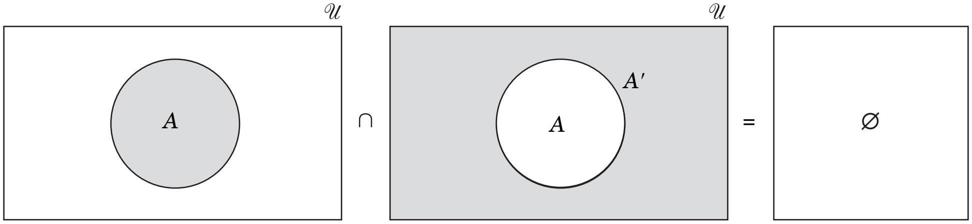


Figura 13.6 $A \cap A' = \varnothing$.

2. $\boxed{A \cap A = A}$

La intersección de un conjunto cualquiera A consigo mismo es el mismo conjunto A. *En forma gráfica esto se muestra en la figura 13.7.*

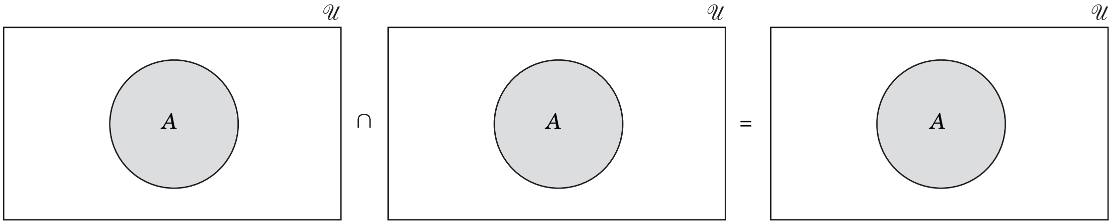


Figura 13.7 $A \cap A = A$.

3. $\boxed{A \cap \mathcal{U} = A}$

La intersección de cualquier conjunto A con el conjunto universo $\mathcal{U}$ ***es el conjunto A.*** *Esto se muestra gráficamente en la figura 13.8. Este resultado fue ilustrado en el ejemplo 9e.*

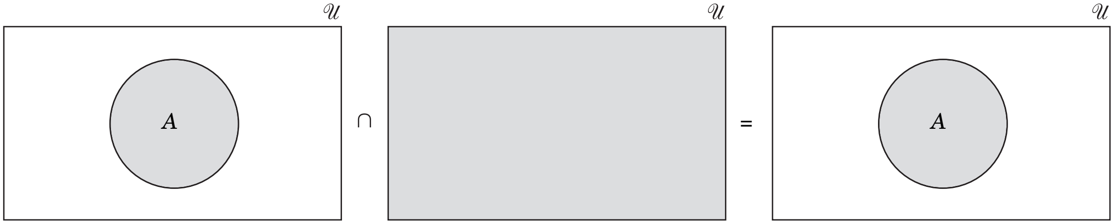


Figura 13.8 $A \cap \mathcal{U} = A$.

Sección 13.1 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 5 redefina cada conjunto aplicando el método de la propiedad descriptiva.

1. $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$
2. $S = \{-3, 3, -2, 2, -1, 1, 0\}$
3. $V = \{a, e, i, o, u\}$
4. $S = \{0, -1, -4, -9, -16, -25, -36\}$
5. $C = \{-1, -8, -27, -64\}$

En los ejercicios 6 a 10 redefina cada conjunto por enumeración.

6. $A = \{a|a$ es un entero negativo impar mayor que $-10\}$
7. $B = \{b|b$ es un entero positivo menor que $8\}$
8. $C = \{c|c$ es el nombre de un día de la semana$\}$
9. $B = \{b|$cuando $a = 2, a + 3b = -7\}$
10. $M = \{m|m$ es la cuarta potencia de un entero negativo mayor que $-6\}$
11. Si $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ y $B = \{b|b$ es un entero positivo par menor que $10\}$, defina B'.

12. Si $\mathcal{U}$ es igual al conjunto de los estudiantes de una clase de matemáticas y P es el conjunto de los estudiantes que reprueban el curso, defina P'.

13. Si $\mathcal{U} = \{x|x$ es un entero mayor que 6 pero menor que 14$\}$ y $S' = \{7, 9, 10, 12, 13\}$, defina S.

14. Si $\mathcal{U}$ es el conjunto que contiene todos los enteros positivos y T' es el conjunto constituido por todos los enteros positivos pares, defina T.

15. Si $\mathcal{U} = \{x|x$ es un entero positivo menor que 20$\}$, $A = \{1, 5, 9, 19\}$, $B = \{b|b$ es un entero positivo impar menor que 11$\}$ y $C = \{c|c$ es un entero positivo impar menor que 20$\}$, defina todas las relaciones con subconjuntos que existan entre $\mathcal{U}$, A, B y C.

16. Dados

$$\mathcal{U} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$$

$$A = \{4, 8, 16\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

trace un diagrama de Venn que represente los conjuntos.

17. Si $\mathcal{U} = \{x|x$ es un entero negativo mayor que $-11\}$, $A = \{a|a$ es un entero negativo impar mayor que $-10\}$ y si $B = \{b|b$ es un entero negativo mayor que $-6\}$, trace un diagrama de Venn que represente los conjuntos.

18. Dados los conjuntos siguientes: *a*) señale cuáles conjuntos, si los hay, son iguales, y *b*) defina todas las relaciones de subconjuntos entre A, B, C y D.

$$A = \{3, -4\} \qquad C = \{x|x^3 + x^2 - 12x = 0\}$$

$$B = \{x|(x - 3)(x + 4) = 0\} \qquad D = \{0, -4, -3\}$$

19. Dados los siguientes conjuntos: *a*) señale cuáles conjuntos, si los hay, son iguales, y *b*) defina todas las relaciones de subconjuntos entre A, B, C y D.

$$A = \{0, 1, -1\} \qquad C = \{1, 0, -1\}$$

$$B = \{b|b^3 - b = 0\} \qquad D = \{d|-d + d^3 = 0\}$$

20. Dados los conjuntos

$$A = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$C = \{2, 4, 6, 8\}$$

Encuentre:

a) $A \cup B$ *b*) $A \cup C$
c) $B \cup C$ *d*) $A \cap B$
e) $A \cap C$ *f*) $B \cap C$

21. Si en el ejercicio 20 $\mathcal{U} = \{x|x$ es un entero positivo$\}$ encuentre:

a) $A \cap A'$ *b*) $A' \cap B'$
c) $B' \cup C$ *d*) $A \cap C'$
e) $B' \cup A$ *f*) $C' \cap A'$

22. En un conjunto cualquiera A:

a) $A \cup \mathcal{U} =$ *b*) $A' \cap \mathcal{U} =$

c) $A \cup \varnothing =$ *d*) $A' \cup \varnothing =$

e) $\mathcal{U}' =$

13.2 Permutaciones y combinaciones

En la presente sección nos concentraremos en varios arreglos de conteo de los elementos de un conjunto. Para comenzar con esta exposición, examinemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 10

Supóngase que se está jugando un juego en el que cada jugada consiste en lanzar un dado y luego una moneda. Cuando se lanza el dado hay seis posibles resultados (1, 2, 3, 4, 5 o 6). Si se arroja una moneda, los dos resultados son cara (H, de "Head") y cruz (T, de "Tail"). Supóngase que interesa determinar todos los resultados posibles de este juego. Una manera de abordar este problema es construir un ***diagrama de árbol*** como el que se muestra en la figura 13.9.

El primer resultado del juego es el que se obtiene al lanzar el dado. El diagrama de árbol representa los seis posibles resultados con seis ramas que se proyectan de izquierda a derecha. Dado cualquiera de esos resultados, existen dos posibles resultados en la segunda parte del juego. Éstos se hallan representados en el diagrama de árbol por los pares de ramas que nacen de cada una de las seis ramas originales. Lo que en el diagrama de árbol se enumera son los 12 posibles resultados combinados del juego.

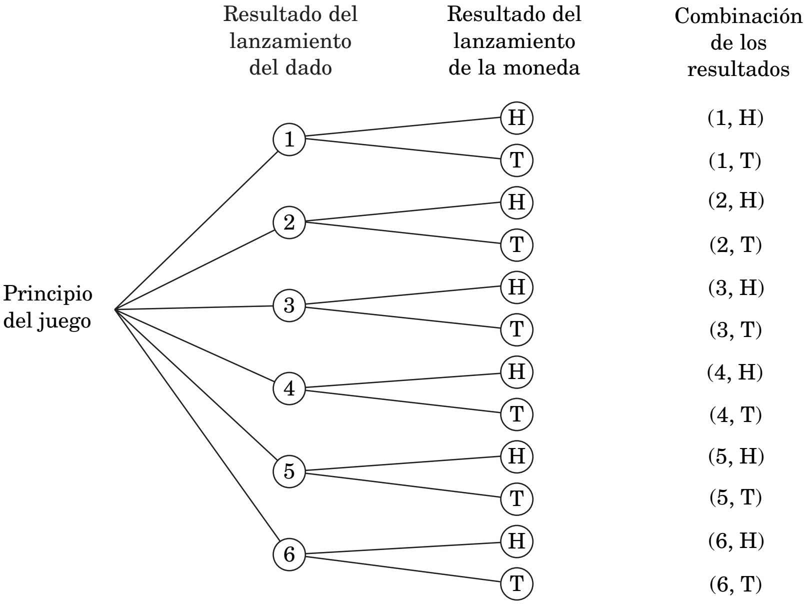


Figura 13.9 Diagrama de árbol para el ejemplo del lanzamiento de dado y moneda.

❑

Ejercicio de práctica

Construya el diagrama de árbol que enumere todos los posibles resultados en el juego anterior, si la moneda se lanza primero y luego el dado. ¿Cuántos resultados combinados se tienen aquí?

Los diagramas de árbol pueden ser muy eficaces para describir y contar los posibles resultados de una serie de experimentos o eventos. Pero tienen limitaciones cuando aumenta el número de los posibles resultados. Si se trazase un diagrama correspondiente a todos los resultados posibles en la extracción de un número de lotería de seis dígitos, imagine el tamaño y el número de las ramas. Sin embargo, tal vez se quisiera evaluar el número de resultados posibles a fin de determinar las probabilidades de ganar la lotería. Por fortuna, se dispone de medios más eficaces de contar estas posibilidades.

Principio fundamental del conteo (Regla de multiplicación)

I *Si dos experimentos se realizan en orden y si hay* n_1 *posibles resultados en el primero y* n_2 *en el segundo, entonces habrá* $n_1 \cdot n_2$ *resultados posibles combinados. Una suposición implícita es que el resultado del primer experimento no influye de modo alguno en el del segundo experimento.*

II *Si N experimentos se llevan a cabo en orden, con* $n_1, n_2, \ldots, n_N$ *como resultados posibles para N experimentos, entonces habrá*

$$n_1 \cdot n_2 \cdot \cdots \cdot n_N$$

resultados posibles combinados.

Ejemplo 11 Si nos referimos al ejemplo 10, el primer experimento fue el lanzamiento de un dado y hubo seis resultados posibles ($n_1 = 6$). El segundo experimento arrojó dos resultados posibles ($n_2 = 2$). Al hacer uso del principio fundamental del conteo, el número de los posibles resultados combinados en la serie de experimentos se calcula de la manera siguiente

$$n_1 \cdot n_2 = (6)(2) = 12$$

Ejemplo 12 Si nos referimos a la extracción de un número de lotería de seis dígitos, la extracción de cada dígito es un experimento con 10 resultados posibles. El número de los resultados posibles combinados (o la cantidad de los números posibles de lotería) se calcula como sigue

$$\begin{aligned} n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 \cdot n_6 &= 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^6 \\ &= 1\,000\,000 \end{aligned}$$

(¿Cuál es su opinión acerca de las oportunidades de ganar?)

Ejemplo 13 **(Equipo de cirujanos)** El jefe de cirugía que encabezará una inminente operación de trasplante está preparándose para seleccionar al grupo de apoyo. Se necesitarán un ayudante del cirujano, un cirujano residente, un anestesista, una enfermera quirúrgica, una enfermera ayudante y un camillero asistente. La fecha de la operación permite al jefe de cirugía escoger entre tres colegas asistentes, siete cirujanos residentes, cinco anestesistas, seis enfermeras quirúrgicas, diez enfermeras ayudantes y cinco camilleros asistentes. ¿Cuántos grupos posibles de apoyo quirúrgico puede elegir?

SOLUCIÓN

Si se aplica el principio fundamental del conteo, el número de equipos o grupos posibles será igual a

$$3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 5 = 31\,500$$ ❑

Una vez comentado el principio fundamental del conteo, a continuación se usará este principio para desarrollar otros dos métodos importantes de conteo.

Permutaciones

Una ***permutación*** es un arreglo ordenado de un conjunto de elementos. Póngase el caso de los tres números 1, 2 y 3. Una permutación de ellos es 123. Otra es 132. Todas las diferentes permutaciones que pueden efectuarse con los tres números son

123 132 213 231 312 321

Regla 1: Conteo de permutaciones

El número de permutaciones de n elementos diferentes *tomados n a la vez* se denota mediante $_nP_n$, donde

$$_nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 \qquad \textbf{(13.1)}$$

El fundamento lógico en que se basa la ecuación (13.1) es que, al seleccionar el primero de n elementos, se cuenta con n elecciones. Una vez escogido el primer elemento, quedan $n - 1$ opciones para el segundo elemento, o $n(n-1)$ posibles elecciones en los dos primeros elementos. Después de escoger el segundo elemento habrá $n - 2$ opciones para el tercer elemento, o $n(n-1)(n-2)$ posibles opciones para los tres primeros elementos. Este razonamiento lleva a la conclusión de que, una vez seleccionados los primeros $n - 1$ elementos, no queda más opción que el n-ésimo elemento. La ecuación (13.1) puede reescribirse haciendo uso de la ***notación factorial*** como

$$\boxed{_nP_n = n!} \qquad \textbf{(13.2)}$$

La notación $n!$ (léase "n factorial") es una forma abreviada de representar el producto del miembro derecho de la ecuación (13.1). Por ejemplo, "5 factorial" se expresa como

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

y

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Por definición $\boxed{0! = 1}$

El número de permutaciones diferentes de los tres números 1, 2 y 3, tomados tres a la vez, es ${}_3P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Nótese que este producto es igual al número de las diferentes permutaciones enumeradas antes.

Ejemplo 14 Seis equipos de fútbol americano compiten en una conferencia. Suponiendo que no haya empates, ¿cuántas clasificaciones diferentes de fin de temporada son posibles en la conferencia?

SOLUCIÓN

El número de diferentes clasificaciones es

$$\begin{aligned} {}_6P_6 &= 6! \\ &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \end{aligned}$$ ❑

Regla 2: Conteo de permutaciones

El número de permutaciones de n objetos diferentes *tomados r a la vez* se denota mediante ${}_nP_r$, donde

$$ {}_nP_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}_{r\ factores} \qquad \textbf{(13.3)}$$

El fundamento lógico en que se basa la ecuación (13.3) se parece al de la ecuación (13.1). Sin embargo, una vez seleccionados $r - 1$ elementos, el número de las opciones diferentes para el r-ésimo elemento es $n - (r - 1)$, o $n - r + 1$.

Una formulación alternativa de la ecuación (13.3) se puede obtener al multiplicar el miembro derecho de la ecuación (13.3) por $(n - r)!/(n - r)!$ Por lo tanto,

$$\begin{aligned} {}_nP_r &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\cdot\frac{(n-r)!}{(n-r)!} \\ &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\frac{(n-r)(n-r-1)\cdots 1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 1} \end{aligned}$$

o bien

$$\boxed{{}_nP_r = \frac{n!}{(n - r)!}} \tag{13.4}$$

Ejemplo 15 Una persona desea hacer una apuesta donde se seleccionan los tres primeros caballos que ocuparán los tres primeros lugares al finalizar la carrera. Si en ella participan ocho caballos, ¿cuántas posibilidades existen para los tres primeros caballos (suponiendo que no haya empates)?

SOLUCIÓN

De acuerdo con la ecuación (13.3), el número de posibilidades es

$${}_8P_3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

o bien, conforme a la ecuación (13.4),

$$\begin{aligned} {}_8P_3 &= \frac{8!}{(8-3)!} \\ &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336 \end{aligned}$$

El fundamento lógico en que se basa este cálculo es que existen ocho posibilidades para el primer lugar. Con ese número dado, quedan siete posibilidades para el segundo lugar; y si se seleccionan los dos primeros lugares, habrá entonces seis opciones para el tercer lugar.

Ejemplo 16 A un candidato presidencial le gustaría visitar siete ciudades antes de las elecciones primarias. Sin embargo, sólo podrá visitar tres de ellas. ¿Cuántos itinerarios diferentes pueden estudiar él y sus ayudantes?

SOLUCIÓN

Puesto que el “orden de las visitas” es importante al momento de planear un itinerario, el número de itinerarios posibles es igual al de las permutaciones de siete ciudades tomadas tres a la vez, o

$$\begin{aligned} {}_7P_3 &= \frac{7!}{(7-3)!} \\ &= \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} \\ &= 7 \cdot 6 \cdot 5 \\ &= 210 \end{aligned}$$

❑

Ejercicio de práctica

En el ejemplo 16: *a*) suponga que se tienen ocho ciudades en vez de siete. ¿Cuántos itinerarios diferentes existen? *b*) Con el número original de siete ciudades suponga que el candidato desea visitar cuatro. ¿Cuántos itinerarios diferentes se tendrían? *Respuesta*: *a*) 336, *b*) 840.

Combinaciones

En las permutaciones, el interés se centra en conocer el número de maneras diferentes en que puede arreglarse un conjunto de elementos. Muchas veces se tiene interés en determinar la cantidad de formas en que es posible seleccionar un conjunto de elementos, sin que importe en absoluto el orden o arreglo de los mismos. Por ejemplo, si se deseara determinar el número de comités de tres personas que pueden formarse con seis candidatos. En este ejemplo, el comité compuesto por $\{A, B, C\}$ es el mismo que el integrado por $\{B, A, C\}$, donde A, B y C representan a tres de los candidatos. El orden de la selección no es importante al determinar el número de los diferentes comités.

Una ***combinación*** es un conjunto de elementos, sin que se preste atención al orden ni a su arreglo. Una combinación de ***r*** elementos escogidos en un conjunto de ***n*** elementos es un *subconjunto* del conjunto de n elementos. Pongamos el caso del conjunto de cuatro letras $\{A, B, C, D\}$. Supóngase estar interesado en calcular el número de combinaciones de estas cuatro letras cuando se toman tres a la vez.

Figura 13.10 Permutaciones de las letras $\{A, B, C, D\}$ tomadas tres a la vez.

ABC	*ACB*	*BAC*	*BCA*	*CAB*	*CBA*
ABD	*ADB*	*BAD*	*BDA*	*DAB*	*DBA*
ACD	*ADC*	*CAD*	*CDA*	*DAC*	*DCA*
BCD	*BDC*	*DBC*	*DCB*	*CDB*	*CBD*

Se comienza enumerando todas las permutaciones posibles de las cuatro letras cuando se toman tres a la vez. En la figura 13.10 se observan esas permutaciones. De acuerdo con la ecuación (13.4) debería haber, y de hecho hay, permutaciones distintas en la figura 13.10.

$$
\begin{aligned}
{}_4P_3 &= \frac{4!}{(4-3)!} \\
&= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} \\
&= 24
\end{aligned}
$$

Adviértase que cada renglón de la figura 13.10 representa las diferentes permutaciones de tres de las cuatro letras; es decir, dadas tres letras diferentes existen $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ arreglos de las tres letras. Puesto que una combinación de ellas prescinde del orden, en realidad cada renglón representa apenas una combinación. Por consiguiente, hay sólo cuatro combinaciones diferentes de las cuatro letras si se toman tres a la vez.

En general, la relación entre permutaciones y combinaciones es

$${}_nP_r = {}_nC_r \cdot r!$$

o, al despejar ${}_nC_r$,

$$\boldsymbol{{}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}} \qquad \textbf{(13.5)}$$

Al sustituir el miembro derecho de la ecuación (13.4) en la ecuación (13.5),

$${}_nC_r = \frac{n!/(n-r)!}{r!}$$

o bien:

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Regla para el conteo de combinaciones

El número de combinaciones diferentes de r elementos que pueden seleccionarse de n elementos distintos se denota más comúnmente por $\boldsymbol{\binom{n}{r}}$, y

$$\boldsymbol{\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}} \qquad \textbf{(13.6)}$$

Para regresar al ejemplo del comité, el número de combinaciones diferentes de seis personas tomadas tres a la vez es de

$$\begin{aligned}\binom{6}{3} &= \frac{6!}{3!(6-3)!}\\ &= \frac{\cancel{6}\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}{\cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}\\ &= 20\end{aligned}$$

Ejemplo 17 Los organizadores del “SuperBowl” están escogiendo a los árbitros del partido. Entre 12 árbitros elegibles, se seleccionarán 5. ¿Cuántos equipos diferentes de cinco árbitros pueden formarse con los 12?

SOLUCIÓN

El número de equipos de árbitros es:

$$\begin{aligned}\binom{12}{5} &= \frac{12!}{5!(12-5)!}\\ &= \frac{12!}{5!7!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot \cancel{7}\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{7}\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}\\ &= 792\end{aligned}$$

Ejercicio de práctica

Suponga que en el ejemplo del “SuperBowl” son elegibles 15 árbitros y se seleccionará a seis. ¿Cuántos equipos diferentes de árbitros pueden seleccionarse? *Respuesta*: 5 005.

Ejemplo 18

Si nos referimos al candidato presidencial del ejemplo 16, ¿cuántas combinaciones de tres ciudades podrían visitar él y su equipo de la campaña?

SOLUCIÓN

En este problema no es importante el *orden* de las visitas. Lo que se busca es determinar el número de diferentes conjuntos de tres ciudades que podrían tenerse en cuenta. Se trata de un problema de combinaciones en que

$$\begin{aligned}\binom{7}{3} &= \frac{7!}{3!(7-3)!}\\ &= \frac{7\cdot \cancel{6}\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}{\cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}\\ &= 35\end{aligned}$$

❑

Algunos problemas de conteo requieren combinaciones de los métodos de conteo, como se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 19

(Planeación nutricional) Los nutriólogos recomiendan que cada adulto consuma diariamente un mínimo de: *a*) cuatro porciones del grupo de lácteos; *b*) dos porciones del grupo de carnes; *c*) cuatro porciones del grupo de verduras y frutas, y *d*) cuatro porciones del grupo de pan y cereales. Supóngase que un cocinero tiene seis alimentos del grupo de lácteos, cinco del grupo de carnes, siete del grupo de verduras y frutas, y ocho del grupo de pan y cereales. Si no debe dar más de una ración de cada elemento durante el día, ¿cuántas agrupaciones diferentes de alimentos puede considerar para preparar un menú de un día?

SOLUCIÓN

El problema requiere utilizar la regla de conteo de combinaciones y el principio fundamental de conteo. Para encontrar la solución, primero determinamos el número de combinaciones de cada grupo de alimentos que pueden ofrecerse en un día cualquiera. Por ejemplo, el número de combinaciones diferentes de los alimentos pertenecientes al grupo de lácteos es

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1} \cdot 2 \cdot 1} = 15$$

De manera parecida, los números de las diferentes combinaciones de los otros tres alimentos son, respectivamente,

$$\begin{aligned}
&\text{(carnes)} && \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 10 \\
&\text{(verduras y frutas)} && \binom{7}{2} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{\cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 35 \\
&\text{(pan y cereales)} && \binom{8}{4} = \frac{8!}{4!(8-4)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{4 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}} = 70
\end{aligned}$$

Conocido el número de las diferentes opciones que pueden seleccionarse de cada grupo de alimentos, es posible servirse del principio fundamental de conteo para calcular el número total de los distintos grupos alimentarios.

$$\begin{aligned}
\text{Agrupaciones totales posibles de los alimentos} &= \binom{6}{4}\binom{5}{2}\binom{7}{2}\binom{8}{4} \\
&= (15)(10)(35)(70) \\
&= 367\,500
\end{aligned}$$

❑

Sección 13.2 Ejercicios de seguimiento

1. Un juego consiste en lanzar una moneda dos veces. Dibuje un diagrama de árbol que enumere todas las combinaciones posibles de los resultados del juego.

2. Un juego consiste en lanzar una moneda tres veces consecutivas. Dibuje un diagrama de árbol que enumere todas las combinaciones posibles de los resultados del juego.

3. **Control de emisiones** Una estación de inspección de automóviles revisa el nivel de emisiones contaminantes de los vehículos. Éstos pasan (P) o no pasan (NP) la inspección. Trace un árbol de decisión que enumere todos los posibles resultados que se obtienen con cinco inspecciones consecutivas de los automóviles.

4. **Perfil médico** Un proyecto de investigación del cáncer clasifica a las personas en cuatro categorías: hombres o mujeres; fumadores asiduos, fumadores moderados y no fumadores; programa de ejercicio regular o ausencia de un programa regular; exceso de peso o no exceso de peso. Trace un diagrama de árbol que enumere todas las clasificaciones posibles de personas.

Aplique el principio fundamental del conteo para resolver los ejercicios 5 a 8.

5. Una placa de licencia se compone de dos letras seguidas por tres números de un solo dígito. Determine el número de códigos diferentes de placas de licencia que pueden generarse.

6. **Admisiones en la universidad** La oficina de admisión de una universidad clasifica a los solicitantes en hombres o mujeres; en residentes del estado o residentes de otro estado; los que prefieren ciertas carreras que ofrece la universidad (ingeniería, administración de empresas, letras, pedagogía, farmacología); candidatos superiores al promedio, candidatos en el nivel promedio o solicitantes por debajo del promedio en las calificaciones de la prueba de aptitudes académicas, y petición de ayuda económica o no petición de ayuda económica. Determine el número de posibles clasificaciones de los solicitantes.

7. Un estudiante está planeando su programa para el otoño. Para los cinco cursos que está considerando hay tres posibles profesores de inglés, seis profesores de sociología, cuatro de matemáticas, ocho de historia y cinco de ciencias políticas. Determine el número de los distintos conjuntos de posibles profesores para el programa de otoño del estudiante.

8. Determine la cantidad de posibles números telefónicos de siete dígitos si los tres primeros no pueden ser cero y:

a) Puede emplearse cualquier dígito para el resto de los números.
b) El primer dígito debe ser impar, alternándose después entre pares e impares.
c) Todos los dígitos tienen que ser pares.
d) No puede repetirse ningún dígito.

Evalúe las siguientes expresiones factoriales.

9. $7!$

10. $9!$

11. $15!$

12. $(15 - 8)!$

13. $\dfrac{7!}{4!}$

14. $\dfrac{15!}{6!}$

15. $\dfrac{8! \cdot 5!}{6!}$

16. $\dfrac{15! \cdot 8!}{10!}$

17. $\dfrac{10!}{3! \cdot 6!}$

18. $\dfrac{10!}{8! \cdot 2!}$

19. $\dfrac{8!}{0! \cdot 5!}$

20. $\dfrac{9!}{3! \cdot 5!}$

En los ejercicios 21 a 28 evalúe cada símbolo.

21. ${}_6P_6$

22. ${}_7P_3$

23. ${}_8P_6$

24. ${}_9P_4$

25. $\binom{5}{5}$

26. $\binom{6}{4}$

27. $\binom{8}{4}$

28. $\binom{7}{3}$

29. Hay que poner diez caballos dentro de la jaula de arranque en una gran competencia hípica. ¿Cuántos arreglos de arranque pueden hacerse?

30. Un candidato político desea visitar ocho estados. ¿En cuántos órdenes puede hacerlo?

31. El candidato político del ejercicio 30 sólo tiene fondos y tiempo para visitar cuatro estados. ¿Cuántas combinaciones de ellos podrá visitar?

32. Una compañía de tarjetas de crédito emite tarjetas que contienen prefijos de tres letras como parte del número de tarjeta. El número de una tarjeta muestra es ABC1234.

a) Si cada letra del prefijo debe ser distinta, ¿cuántos prefijos son posibles?

b) Si cada uno de los cuatro números después del prefijo debe ser diferente, ¿cuántas secuencias de cuatro dígitos son posibles?

33. Se están considerando ocho astronautas para formar la tripulación del próximo vuelo. Si la tripulación constara de tres miembros, ¿cuántas combinaciones de astronautas pueden realizarse?

34. Un experto en la administración de carteras (portafolios) está analizando 30 acciones para invertir en ellas. Sólo se escogerán 15 acciones para incluirlas en una cartera. ¿Cuántas combinaciones de ellas pueden tenerse en cuenta?

35. Hay que seleccionar a cuatro personas para el consejo directivo de un hospital. Si se han seleccionado doce candidatos, ¿cuántos grupos de cuatro pueden escogerse para el consejo?

36. En un comité compuesto por diez personas, ¿en cuántas formas puede seleccionarse un presidente, un vicepresidente y un secretario?

37. Seis aerolíneas han presentado solicitudes para operar una nueva ruta internacional. Sólo dos de las compañías conseguirán permiso para hacerlo. ¿Cuántos conjuntos diferentes de aerolíneas es posible escoger?

38. **Investigación médica** Una gran fundación de investigación está estudiando la conveniencia de financiar un conjunto de proyectos de investigación médica. Se han presentado quince solicitudes, pero sólo se financiarán seis. ¿Cuántos conjuntos diferentes de proyectos podrá financiar?

39. Una mano de bridge consta de 13 naipes. ¿Cuántas manos diferentes pueden darse de un mazo compuesto por 52 naipes?

***40.** **Equipo de diseño** El presidente de una gran corporación ha decidido iniciar el desarrollo de un nuevo producto muy importante que le dará a la empresa una considerable ventaja competitiva. El presidente quiere asignar un equipo especial al diseño del producto, el cual estará integrado por tres ingenieros, un analista de investigación de mercados, un analista financiero y dos supervisores de producción. Para integrar el equipo se han considerado ocho ingenieros, cuatro analistas de investigación de mercados, seis analistas financieros y cinco supervisores de producción. ¿Cuántos equipos de diseño es posible formar?

*41. **Educación** El director del departamento de matemáticas en un plantel de enseñanza media quiere seleccionar a ocho estudiantes del último año, seis del penúltimo año, cinco del segundo año y cuatro del primer año para formar el equipo de matemáticas del plantel. De los alumnos, diez del último año, ocho del penúltimo año, ocho del segundo año y seis del primer año han hecho solicitudes para formar parte del equipo y fueron admitidos con base en las calificaciones obtenidas en matemáticas. ¿Cuántos equipos diferentes podría seleccionar el director de este grupo?

13.3 Conceptos básicos de la probabilidad

En esta sección se hará una introducción a la noción de la probabilidad y algunos conceptos fundamentales de ella.

Experimentos, resultados y eventos

El concepto de probabilidad se relaciona con ***procesos aleatorios***, denominados también ***experimentos aleatorios***. Un ***experimento aleatorio*** es un proceso que produce uno de varios ***resultados*** posibles. Los resultados posibles se conocen antes de la realización del experimento aleatorio, pero no se puede predecir con certeza cuál resultado en particular se producirá. Los experimentos aleatorios clásicos incluyen el lanzamiento de una moneda, el lanzamiento de un dado, la extracción de una carta en un mazo bien entremezclado y la selección de una bola en una urna que contenga cierto número de bolas. En la vida diaria y a nuestro alrededor existen muchos procesos aleatorios menos obvios. Algunos procesos de manufactura originan productos defectuosos en una forma aleatoria. También se ha dado el nombre de procesos aleatorios a los tiempos que transcurren entre la llegada de las llamadas telefónicas a una central telefónica, a los automóviles en las casetas de cobro y a los clientes de un supermercado. A la misma categoría aleatoria pertenece el proceso en virtud del cual se determina el sexo de un niño.

Cada repetición de un experimento puede concebirse como un ***ensayo*** **(*intento*)**. Cada ensayo tiene un resultado observable. Si en el experimento del lanzamiento de la moneda se supone que ésta no puede caer de canto, los dos resultados posibles de un ensayo son la ocurrencia (aparición) de una "cara" (uno de los lados) o bien la ocurrencia de una "cruz" (el otro de los lados). El conjunto que incluye todos los resultados posibles de un experimento recibe el nombre de ***espacio muestral***. El espacio muestral de un experimento es el conjunto de resultados S tal que cualquier realización del experimento (ensayo) producirá uno y sólo un elemento de S. A cada uno de los elementos de S se le llama ***resultado simple***.

En el ejemplo del lanzamiento de la moneda, el espacio muestral S se define como

$$S = \{\text{cara, cruz}\}$$

En un experimento que mida el tiempo transcurrido entre las llegadas de las llamadas telefónicas a una central telefónica, el espacio muestral podría definirse así

$$S = \{t \mid t \text{ se mide en segundos y } t \geq 0\}$$

En el experimento del lanzamiento de la moneda se tiene un ***espacio muestral finito*** porque existe un número finito de posibles resultados. En el experimento de las llamadas telefónicas hay un ***espacio muestral infinito*** porque existe un número infinito de resultados posibles.

En un experimento dado, los resultados a menudo se clasifican en ***eventos***. Un evento E de un experimento es un subconjunto del espacio muestral, como se aprecia en la figura 13.11. La forma de definir los eventos depende del conjunto de resultados para los cuales se calculan las probabilidades. En el experimento del lanzamiento de una moneda, seguramente los eventos y resultados serán definidos en forma idéntica, como se muestra en la figura 13.12. En ella hay una correspondencia uno a uno o biunívoca entre cada evento y cada resultado simple en el espacio muestral.

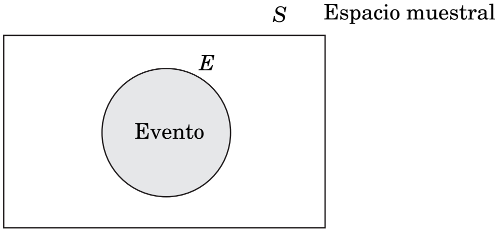


Figura 13.11 Un evento es un subconjunto del espacio muestral.

Figura 13.12 Mapeo de resultados/eventos para el experimento del lanzamiento de la moneda.

Resultado simple		**Evento simple**
O_1 : "cara"	⟷	E_1 : "cara", "la no ocurrencia de una cruz"
O_2 : "cruz"	⟷	E_2 : "cruz", "la no ocurrencia de una cara"

Si un evento E consta de sólo un resultado posible en S, recibe el nombre de ***evento simple***.

La relación entre un resultado y un evento puede ejemplificarse mejor al estudiar el experimento que incluye el tiempo transcurrido entre las llegadas de las llamadas telefónicas. Los eventos se definen de distinta manera según la finalidad del experimento. En la figura 13.13, el espacio muestral infinito ha sido transformado en un conjunto infinito de eventos, empleando para ello un mapeo de uno a uno de los resultados simples en eventos también simples. Para el mismo experimento, la figura 13.14 muestra un mapeo del espacio muestral infinito en dos eventos. De este modo, es posible que un evento pueda definirse de manera que abarque resultados múltiples.

Si un evento E consta de más de un resultado simple en S, se le llama ***evento compuesto***.

Ejemplo 20 Supóngase que un experimento consiste en seleccionar tres partes fabricadas en un proceso de producción y en observar si son *aceptables* (o sea, que cumplan con todas las especificaciones de producción) o *defectuosas* (no cumplen con todas las especificaciones).

a) Determine el espacio muestral S.

b) ¿Qué resultados se incluyen en el evento "exactamente dos partes aceptables"?

c) ¿Qué resultados se incluyen en el evento "por lo menos una parte defectuosa"?

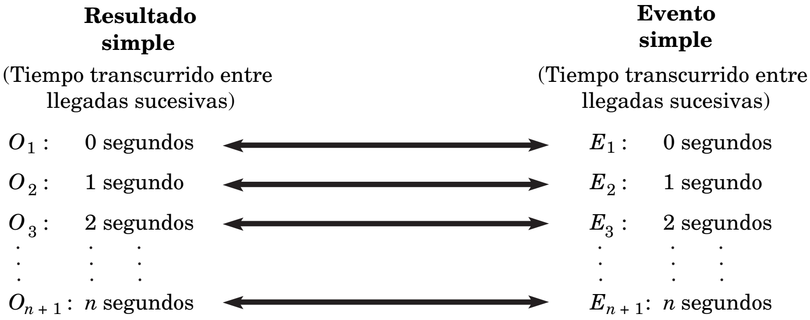


Figura 13.13 Mapeo de resultados/eventos para el experimento de las llamadas telefónicas.

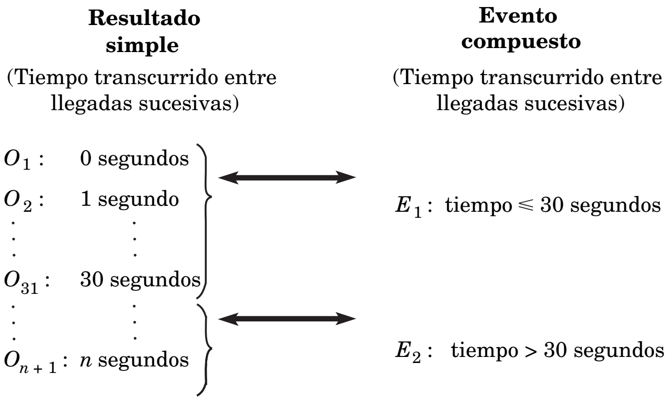


Figura 13.14 Mapeo de resultados/eventos para el experimento de las llamadas telefónicas.

SOLUCIÓN

a) La figura 13.15 es un diagrama de árbol que genera los resultados posibles de este experimento. La letra A denota una parte "aceptable" y la letra D una parte "defectuosa". Los posibles resultados del experimento se representan mediante el espacio solución

$$S = \{AAA, AAD, ADA, ADD, DAA, DAD, DDA, DDD\}$$

donde los elementos de S son los resultados simples del experimento.

b) El evento "exactamente dos partes aceptables" es el subconjunto de S

$$E_1 = \{AAD, ADA, DAA\}$$

Nótese que este evento es compuesto.

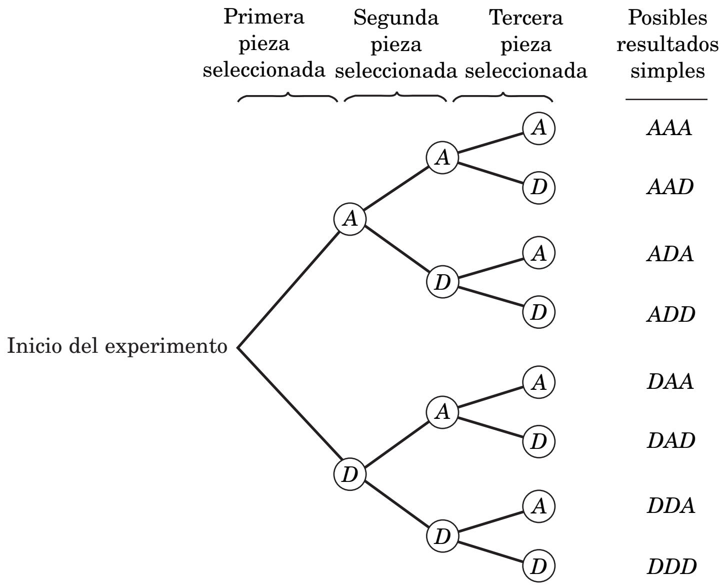


Figura 13.15 Diagrama de árbol para el ejemplo 20.

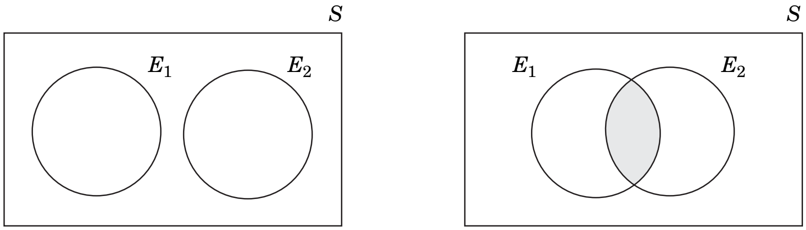
c) El evento “por lo menos una parte defectuosa” es un evento compuesto. Este evento incluye todos los resultados simples caracterizados por uno, dos o tres partes defectuosas. Es el subconjunto de S

$$E_2 = \{AAD, ADA, DAA, ADD, DAD, DDA, DDD\}$$ ❑

Definición: Eventos mutuamente excluyentes

Se dice que un conjunto de eventos es ***mutuamente excluyente*** si la ocurrencia de cualquiera de ellos excluye la posibilidad de que ocurra otro cualquiera. En concreto, los eventos $E_1, E_2, \ldots, E_n$ son mutuamente excluyentes si $E_i \cap E_j = \varnothing$ para toda i y j, con $i \neq j$.

En el lanzamiento de una moneda, dos resultados simples posibles son *cara* y *cruz*. Puesto que la ocurrencia de una cara excluye la posibilidad de cruz y a la inversa, los eventos “cara” y “cruz” son mutuamente excluyentes. Supóngase, en el lanzamiento de un dado, que dos eventos se definen como E_1 (“uno”) y E_2 (“un valor menor que tres”). E_1 y E_2 no son mutuamente excluyentes porque la aparición de un evento no necesariamente excluye la posibilidad del otro. En un solo ensayo o intento, el resultado “uno” implica que han ocurrido tanto E_1 como E_2. La figura 13.16 es una representación del diagrama de Venn de eventos mutuamente excluyentes y no mutuamente excluyentes en un espacio muestral S.



a)
Eventos mutuamente excluyentes
$E_1 \cap E_2 = \varnothing$

b)
Eventos no mutuamente excluyentes
$E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$

Figura 13.16

Ejemplo 21 Pongamos el caso de una encuesta donde se selecciona una muestra aleatoria de electores empadronados. En cada elector escogido, se apuntan sexo y afiliación a un partido político. Los eventos "demócrata" y "mujer" no son mutuamente excluyentes, ya que la selección de un demócrata no excluye la posibilidad de que se trate también de una mujer. Los dos eventos "hombre" y "mujer" serán mutuamente excluyentes, del mismo modo que "demócrata", "republicano" e "independiente". ❑

Definición: Eventos colectivamente exhaustivos

Se dice que un conjunto de eventos es ***colectivamente exhaustivo***, si su unión explica todos los resultados posibles de un experimento (es decir, su unión es el espacio muestral).

Los eventos "cara" (H) y "cruz" (T), que se obtienen al lanzar una moneda, son colectivamente exhaustivos puesto que su unión comprende todos los resultados posibles de un experimento. En un experimento que consista en lanzar una moneda dos veces, los eventos H_1H_2, H_1T_2 y T_1T_2 describen los resultados posibles. Este conjunto de eventos no es colectivamente exhaustivo, ya que su unión no incluye el resultado T_1H_2.

En el mismo experimento, el conjunto de eventos H_1H_2, H_1T_2, T_1T_2 y T_1H_2 es *a la vez* mutuamente excluyente y colectivamente exhaustivo.

Tabla 13.2

	Materia			
Sexo	**(*B*)** **Administración**	**(*L*)** **Letras**	**(*E*)** **Preingeniería**	**Total**
Hombre (M)	350	300	100	750
Mujer (F)	250	450	50	750
Total	600	750	150	1 500

Ejemplo 22 **(Admisiones en la universidad)** La tabla 13.2 indica algunas características del grupo de primer año en una universidad. Supóngase que se va a seleccionar a un alumno de manera aleatoria en el grupo. Los eventos del experimento pueden definirse en diversas formas. El espacio muestral *S* se compone de resultados simples que describen el sexo y la materia principal del alumno. Por lo tanto,

$$S = \{MB, ML, ME, FB, FL, FE\}$$

También se podrían definir los eventos por sexo o materia principal. Así, el evento "estudiante hombre" (*M*) es un evento compuesto que consta de los resultados simples *MB*, *ML* y *ME*, o

$$M = \{MB, ML, ME\}$$

De manera análoga, el evento "estudiante de ingeniería" (*E*) es el evento compuesto

$$E = \{ME, FE\}$$

Determine, en cada uno de los siguientes conjuntos de eventos, si son mutuamente excluyentes, colectivamente exhaustivos o ambas cosas.

a) $\{M, F\}$
b) $\{B, L, E\}$
c) $\{MB, ML, ME, B\}$

SOLUCIÓN

a) Los dos eventos: *M* (hombre) y *F* (mujer) son mutuamente excluyentes porque la ocurrencia de un estudiante de sexo masculino excluye la posibilidad de un estudiante de sexo femenino, y a la inversa. Los dos eventos son también colectivamente exhaustivos, pues todos los resultados en el espacio muestral pueden hacerse corresponder a esos eventos.
b) Los tres eventos: *B* (administración), *L* (letras) y *E* (preingeniería) son mutuamente excluyentes. Ello se debe a que la ocurrencia de una materia principal excluye la posibilidad de las otras dos materias principales. Los tres eventos son además colectivamente exhaustivos porque todos los resultados del espacio muestral pueden hacerse corresponder a esos eventos.
c) Los eventos *MB*, *ML*, *ME* y *B* no son mutuamente excluyentes, pues la ocurrencia de un hombre en administración de empresas (*MB*) no excluye la ocurrencia de una materia principal de administración (*B*). Estos eventos no son colectivamente exhaustivos, pues no incluyen a las mujeres cuya materia principal son las letras o la preingeniería. ❏

Ejercicio de práctica

Determine si los siguientes eventos son mutuamente excluyentes, colectivamente exhaustivos, o ambos casos.

a) $\{M, F, B, L, E\}$
b) $\{FB, FL, FE, M\}$
c) $\{FB, FL, FE, B, L\}$

Respuesta: *a*) No son mutuamente excluyentes pero son colectivamente exhaustivos; *b*) son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos; *c*) no son mutuamente excluyentes ni colectivamente exhaustivos.

Probabilidades

Aunque se pueden hacer conjeturas respecto del resultado de un experimento aleatorio, no se puede predecir con seguridad cuál resultado se presentará. Quizá se adivine si saldrá cara (*H*) o cruz (*T*), pero no se sabe con certidumbre. En cambio, en el caso de multitud de procesos aleatorios, se observa una regularidad a largo plazo. Según se mencionó antes, las expectativas a largo plazo cuando se arroja una moneda es que aproximadamente la mitad de los resultados corresponderán a cara y la otra a cruz. Cuando se lanza un dado, las expectativas a largo plazo son que cada cara caerá aproximadamente una sexta parte de las veces. Tales valores reflejan la expectativa de la ***frecuencia relativa*** de un evento. La frecuencia relativa de un evento es la proporción de las veces que cada evento ocurre. Se calcula dividiendo el número de veces ***m*** que se presente el evento entre las veces ***n*** que se lleva a cabo el experimento. ***La probabilidad de un evento puede concebirse como la frecuencia relativa m/n del evento a largo plazo***.

Si se conoce la naturaleza de la frecuencia relativa de un evento, puede enunciarse la siguiente regla de la probabilidad.

Regla 1

La probabilidad de un evento E, denotada por $P(E)$, es un número comprendido entre 0 y 1 incluso, o

$$0 \leq P(E) \leq 1 \tag{13.7}$$

Dos casos especiales de la ecuación (13.7) son $P(E) = 0$ y $P(E) = 1$. ***Si P(E) = 0, es seguro que el evento E no ocurra.*** Por ejemplo, si una moneda tiene dos lados con cara, P (cruz) = 0 en un solo lanzamiento de ella. ***Si P(E) = 1, es seguro que ocurra el evento E.*** Con la misma moneda, P (cara) = 1. Si $0 < P(E) < 1$, hay incertidumbre ante la realización del evento E. Por ejemplo, si $P(E) = 0.4$, puede afirmarse que existe una probabilidad de 40% de que ocurra el evento E.

Ejemplo 23

(Admisiones en la universidad, continuación) En la tabla 13.2 (del ejemplo 22) se incluyeron algunas características del grupo de primer año en una universidad. Suponga que un estudiante será escogido al azar (en forma aleatoria) del grupo de alumnos de primer año y que cada uno tiene las mismas posibilidades de que lo seleccionen. Aplicando el concepto de la probabilidad basado en la frecuencia relativa, es posible estimar la probabilidad de que el estudiante seleccionado reúna ciertas características. Por ejemplo, la probabilidad de que ese alumno seleccionado sea un hombre es

$$\begin{aligned} P(M) &= \frac{\text{número de hombres}}{\text{total de estudiantes de primer año}} \\ &= \frac{750}{1\,500} = .50 \end{aligned}$$

La probabilidad de que el alumno seleccionado lleve como materia principal la preingeniería es

$$P(E) = \frac{\text{número de estudiantes de preingeniería}}{\text{total de estudiantes de primer año}}$$
$$= \frac{150}{1\,500} = .10$$

La probabilidad de que el estudiante seleccionado sea una mujer que estudie la carrera de administración es

$$P(FB) = \frac{250}{1\,500} = .167$$

En la tabla 13.3 se resumen las probabilidades de los diversos eventos relacionados con la selección de un estudiante. Nótese que la suma de las probabilidades de los eventos M y F es igual a 1. De manera semejante, la suma de las probabilidades de los eventos B, L y E es 1.

Tabla 13.3

	Materia			
Sexo	**(*B*)** **Administración**	**(*L*)** **Letras**	**(*E*)** **Preingeniería**	**Total**
Hombre (*M*)	.233	.200	.067	.500
Mujer (*F*)	.167	.300	.033	.500
Total	.400	.500	.100	1.000

❑

PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR

¿Por qué las probabilidades para los dos diferentes conjuntos de eventos $\{M, F\}$ y $\{B, L, E\}$ dan un total de 1?

Las probabilidades son clasificables de diversas maneras. Una clasificación es la distinción entre ***probabilidades objetivas*** y ***subjetivas***. Las primeras están basadas en la experiencia histórica o en el conocimiento general que no admite la menor duda. Por ejemplo, las probabilidades asignadas a los eventos relacionados con el lanzamiento de una moneda o un dado se basan en una larga experiencia pasada y generalmente conocida. Otras probabilidades objetivas se asignan a partir de experimentos concretos. Por ejemplo, si se nos ha dicho que un dado está "cargado", un método de calcular las probabilidades de que caiga uno de los lados consiste en lanzar el dado muchas veces, llevando al mismo tiempo un control de la frecuencia relativa de cada cara.

Las probabilidades subjetivas son asignadas cuando se carece de experiencia histórica o pasada. Se basan en las experiencias e intuición del sujeto. En realidad son expresiones del juicio personal. Una probabilidad subjetiva sería la que el lector se asignaría con respecto a la obtención de una calificación de 10 en este curso de matemáticas aplicadas. Tal estimación reflejaría su valoración personal de factores como los siguientes: su aptitud en esta clase de cursos, su percepción del grado de dificultad de este curso y su valoración del profesor, así como de la forma en que él dirige el curso y evalúa el aprovechamiento.

Algunas reglas adicionales de la probabilidad

Regla 2

Si $P(E)$ representa la probabilidad de que ocurra un evento E, la probabilidad de que E no ocurra, denotada por $P(E')$, es

$$P(E') = 1 - P(E) \tag{13.8}$$

Si la probabilidad de que una empresa logre utilidades durante su primer año de operaciones se estima en 0.35, la probabilidad de que no logre utilidades durante el primer año es de $1 - 0.35 = 0.65$. Si se tiene un dado "legal", la probabilidad de que caiga un "uno" es $\frac{1}{6}$. La probabilidad de que no caiga un "uno" es igual a $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Regla 3

Si los eventos E_1 y E_2 son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que ocurra E_1 o E_2 es

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) \tag{13.9}$$

Ejemplo 24

(Obras públicas) El departamento de obras públicas de una localidad se está preparando para el invierno. Está planeando sus necesidades de sal y arena para dar mantenimiento a las carreteras durante las nevadas y después de ellas. El análisis de los inviernos pasados ha producido las probabilidades estimadas en la tabla 13.4 respecto del número previsto de grandes nevadas. ¿Qué probabilidad existe de que caigan tres o más nevadas considerables en el año entrante?

Tabla 13.4

n **(número de tormentas considerables)**	***P*(*n*)**
0	.10
1	.25
2	.30
3	.20
Más de 3	.15

SOLUCIÓN

Los eventos simples de la tabla 13.4, los cuales corresponden al evento compuesto “3 o más” grandes nevadas, son $n = 3$ y $n =$ más de 3. Esos dos eventos simples son mutuamente excluyentes. Por lo tanto, la probabilidad de tres o más grandes nevadas es

$$\begin{aligned} P(3 \text{ o más}) &= P(3) + P(\text{más de } 3) \\ &= 0.20 + 0.15 = 0.35 \end{aligned}$$ ❑

Regla 4

Dados n eventos mutuamente excluyentes $E_1, E_2, \ldots, E_n$, la probabilidad de que ocurran $E_1, E_2, \ldots,$ o E_n es

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n) \qquad \textbf{(13.10)}$$

Ejemplo 25 Teniendo presente la información del ejemplo 24, ¿cuál es la probabilidad de que haya menos de tres grandes nevadas?

SOLUCIÓN

Los eventos simples correspondientes a “menos de tres” nevadas son 0, 1 y 2 nevadas. Se trata de eventos simples mutuamente excluyentes, por lo cual se aplica la regla 4 y se obtiene

$$P(\text{menos de } 3) = P(0) + P(1) + P(2) = 0.10 + 0.25 + 0.30 = 0.65$$ ❑

NOTA Este problema podría haberse resuelto haciendo uso del resultado del ejemplo 24 y aplicando la regla 2. Es decir,

$$\begin{aligned} P(\text{menor que } 3) &= 1 - P(3 \text{ o más}) \\ &= 1 - 0.35 = 0.65 \end{aligned}$$

Cuando un conjunto de eventos no es mutuamente excluyente, la regla 3 debe modificarse para que refleje la posibilidad de que dos eventos puedan ocurrir al mismo tiempo.

Regla 5

La probabilidad de ocurrencia del evento E_1, del evento E_2, o tanto de E_1 como de E_2 es

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \qquad \textbf{(13.11)}$$

Nótese que el operador de intersección se utiliza para denotar la ocurrencia conjunta o bien simultánea de los eventos E_1 y E_2.

La regla 3 es el caso especial de la regla 5, en donde $P(E_1 \cap E_2) = 0$. Ello se debe a que se supone que E_1 y E_2 son mutuamente excluyentes en la regla 3, lo cual significa que los eventos nunca pueden tener lugar en forma simultánea.

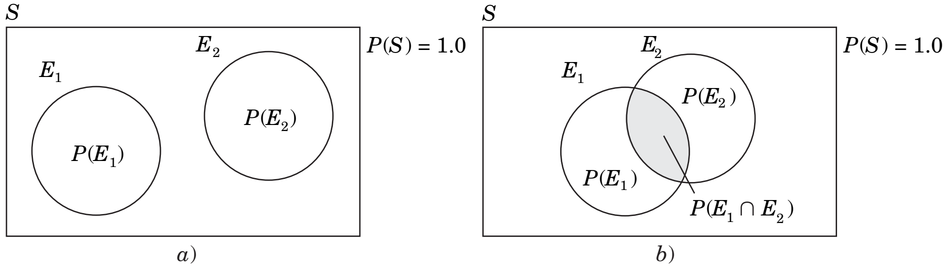


Figura 13.17 **Regla 3:** $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$
(Eventos mutuamente excluyentes) (Eventos no mutuamente excluyentes)

La figura 13.17 describe gráficamente estas reglas mediante los diagramas de Venn. En ellos, las áreas representan las probabilidades, considerando el hecho de que el área del espacio muestral S es 1.0.

Ejemplo 26 En un experimento que consiste en seleccionar aleatoriamente una baraja en un mazo de 52 naipes, los eventos "rey" y "espadas" no son mutuamente excluyentes. La probabilidad de escoger un rey, un naipe de espadas o un rey y un naipe con espadas a la vez se calcula aplicando la regla 5, así:

$$\begin{aligned} P(\text{rey} \cup \text{espada}) &= P(\text{rey}) + P(\text{espada}) - P(\text{rey} \cap \text{espada}) \\ &= P(\text{rey}) + P(\text{espada}) - P(\text{rey de espadas}) \\ &= \tfrac{4}{52} + \tfrac{13}{52} - \tfrac{1}{52} \\ &= \tfrac{16}{52} = \tfrac{4}{13} \end{aligned}$$

Nótese que P(rey $\cap$ espadas) debe restarse para compensar el conteo doble del evento (rey $\cap$ espadas). Cuando se calcula P(rey), queda incluido el rey de espadas entre los cuatro reyes de la baraja; y cuando se calcula P(espadas), el rey de espadas se incluye entre las 13 espadas de la baraja. Así pues, se ha realizado un conteo doble del rey de espadas, y hay que sustraer P(rey de espadas).

Ejercicio de práctica

En el ejemplo 26, ¿cuál es la probabilidad de seleccionar un naipe de "figura" (un rey, una reina o una sota) o un corazón? *Respuesta:* 22/52.

Ejemplo 27 **(Conservación de la energía)** Se entrevistó a 2 000 personas respecto de las políticas que podrían llevarse a cabo para conservar el petróleo. De ellas, 1 000 dijeron que estarían dispuestas a aceptar el racionamiento de la gasolina, 500 dijeron que un impuesto adicional de $0.25 por galón sería aceptable y 275 indicaron que estarían dispuestas a aceptar tanto el racionamiento como el impuesto adicional. Si se escoge a una persona de manera aleatoria en este grupo, ¿qué probabilidad habrá de que:

a) considere aceptable el impuesto adicional?
b) juzgue aceptable el impuesto adicional pero no el racionamiento de gasolina?
c) considere aceptable una o ambas alternativas?
d) juzgue inaceptables las dos?

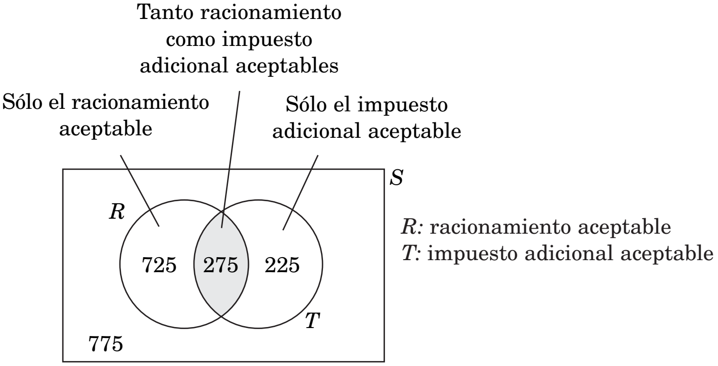


Figura 13.18

SOLUCIÓN

El diagrama de Venn es útil para sintetizar los resultados de la encuesta. En la figura 13.18 se incluye el diagrama de Venn relativo a la encuesta. Adviértase que las 275 personas que juzgan aceptables las dos políticas están representadas por la intersección de los conjuntos *R* y *T*. El grupo de 1 000 personas en el conjunto *R* consta de dos tipos de entrevistados: 275 que consideran aceptables ambas políticas y 725 para quienes es aceptable el racionamiento, no así el impuesto adicional. De manera parecida, en las 500 personas del conjunto *T* hay 275 que juzgan aceptables ambas políticas y 225 que aprueban el impuesto adicional pero no el racionamiento. Al sumar a las que aceptan una o ambas políticas, se obtiene un total de 1 225. Los entrevistados restantes (775) son aquellos que no aprueban ninguna de las dos políticas.

a) Puesto que 500 personas aceptaron el impuesto adicional, la probabilidad de que una persona la acepte es

$$P(T) = \frac{\substack{\text{número de personas} \\ \text{que aprueban el impuesto}}}{\substack{\text{número de personas} \\ \text{entrevistadas}}} = \frac{500}{2\,000} = .25$$

b) 225 personas manifestaron su aprobación por el impuesto adicional, no así por el racionamiento. Por consiguiente, la probabilidad de seleccionar a una de ellas es de 225/2 000 = 0.1125.

c) Podemos contestar esta parte del ejemplo en dos formas. La manera más sencilla consiste en sumar el número de entrevistados que aceptaron una o ambas políticas, y dividir el resultado entre el total, o

$$P(R \cup T) = \frac{725 + 275 + 225}{2\,000} = \frac{1\,225}{2\,000} = .6125$$

O bien podemos aplicar la regla 5.

$$P(R \cup T) = P(R) + P(T) - P(R \cap T)$$

Calculamos $P(T)$ en la parte *a.* Verifique que $P(R) = 0.50$ y que además $P(R \cap T) = 0.1375$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(R \cup T) &= .50 + .25 - .1375 \\ &= .6125 \end{aligned}$$

d) Haciendo uso del método de la frecuencia relativa, esta probabilidad es igual a 775/2 000 = 0.3875. O bien se puede utilizar la respuesta de la parte *c* como sigue:

$$\begin{aligned} P\left(\begin{matrix}\text{ninguna política}\\ \text{aceptable}\end{matrix}\right) &= P[(R \cup T)'] = 1 - P(R \cup T) \\ &= 1 - .6125 \\ &= .3875 \end{aligned}$$

❑

Sección 13.3 Ejercicios de seguimiento

1. **Vigilancia (monitoreo) de la contaminación** Un inspector de la calidad del agua está llevando a cabo un experimento en el que muestrea el agua de varios pozos, a fin de comprobar si presenta los niveles *aceptables* (*A*) o *inaceptables* (*U*) de los contaminantes. Suponga que el inspector va a inspeccionar tres pozos, uno después de otro, y que registra la calidad del agua en cada uno de ellos.
   a) Determine el espacio muestral *S* de este experimento.
   b) Construya un diagrama de árbol que enumere los resultados posibles.
   c) ¿Qué resultados simples quedan incluidos en el evento "exactamente dos pozos aceptables"?
   d) ¿Qué resultados simples quedan incluidos en el evento "por lo menos un pozo aceptable"?
2. **Reincidencia** Un investigador de justicia criminal está estudiando la tasa de reincidencia (cometer el mismo delito varias veces) en la corrupción de menores de edad. Está llevando a cabo un experimento en que examina el registro criminal de los condenados por haber cometido este delito. Si una persona ha sido condenada más de una vez, se le clasifica como "reincidente" (*R*). Si no ha sido condenada más de una vez, se le clasifica como "no reincidente" (*N*) en el

experimento. Si el investigador examina los registros de tres transgresores: *a*) determine el espacio muestral S del experimento, *b*) construya un diagrama de árbol que enumere los posibles resultados del experimento, *c*) determine el conjunto de resultados simples incluidos en el evento "dos o menos reincidentes" y *d*) determine el conjunto de resultados simples comprendidos en el evento "un reincidente por lo menos".

3. En la tabla 13.5 se indican algunas características de un grupo de 1 000 solicitantes de un puesto administrativo. Se les clasifica por sexo y por el grado académico más alto que hayan recibido. Supóngase que uno de ellos debe seleccionarse de manera aleatoria en un experimento. El espacio muestral S de este experimento se compone de resultados simples $S = \{MC, MH, MN, FC, FH, FN\}$.

a) Determine el conjunto de resultados simples que sirven para definir el evento compuesto "solicitante hombre" (M).

b) Determine el conjunto de resultados simples que sirven para definir el evento compuesto "el grado académico más alto del solicitante es el obtenido en la universidad" (C).

Tabla 13.5

	Grado más alto			
Sexo	**Grado universitario (*C*)**	**Diploma de enseñanza media (*H*)**	**Sin grado (*N*)**	**Total**
Hombre (M)	350	100	40	490
Mujer (F)	275	210	25	510
Total	625	310	65	1 000

4. En el ejercicio 3, determine para cada uno de los siguientes conjuntos de eventos si son mutuamente excluyentes, colectivamente exhaustivos, o ambos casos.

a) $\{M, F, H\}$

b) $\{C, H, N, M, F\}$

c) $\{MC, MH, MN, F\}$

d) $\{MC, FC, C, H, N\}$

e) $\{M, FC, FH\}$

5. En el ejercicio 3, suponga que se selecciona de modo aleatorio a un solicitante (todos tienen igual probabilidad de ser escogidos). ¿Cuál es la probabilidad de que el solicitante seleccionado: *a*) sea una mujer; *b*) posea un diploma de enseñanza media como su grado académico más alto; *c*) sea un hombre sin grado académico alguno; *d*) sea una mujer con un grado universitario?

6. En la tabla 13.6 se muestran algunas características de 10 000 personas de las que reciben préstamos de una gran institución financiera. Se les clasifica atendiendo al tipo de préstamo (personal o mercantil) y al grado de riesgo. Suponga que va a efectuarse un experimento en que se escoge en forma aleatoria la cuenta de una de las personas que obtienen préstamos. El espacio muestral S de este experimento consta de todos los resultados simples $S = \{PL, PA, PH, BL, BA, BH\}$.

a) Determine el conjunto de resultados simples con que se define el evento compuesto "préstamo personal" (P).

b) Determine el conjunto de resultados simples para definir el evento compuesto "préstamo de riesgo promedio" (A).

Tabla 13.6

	Riesgo de crédito			
Tipo de préstamo	**Bajo riesgo (*L*)**	**Riesgo promedio (*A*)**	**Riesgo alto (*H*)**	**Total**
Personal (*P*)	2 400	3 600	1 600	7 600
Mercantil (*B*)	650	950	800	2 400
Total	3 050	4 550	2 400	10 000

7. En el ejercicio 6 determine, para cada uno de los siguientes conjuntos de eventos, si son mutuamente excluyentes, colectivamente exhaustivos o ambas cosas a la vez.

a) $\{P, L, A, H\}$
b) $\{PL, BL, PA, BA, H\}$
c) $\{P, B, H\}$
d) $\{B, PL, PH, BL, BH\}$
e) $\{PL, BL, PA, BH\}$

8. En el ejercicio 6, suponga que se escoge de manera aleatoria una cuenta (cada una tiene igual probabilidad de que la escojan). ¿Qué probabilidades hay de que la cuenta escogida se encuentre: *a*) en la categoría de riesgo promedio; *b*) sea un préstamo personal; *c*) sea un préstamo mercantil en la categoría de alto riesgo, y *d*) sea un préstamo personal de poco riesgo?

9. **Alternativas de cuidado infantil** En 1987, la Oficina de Censos de Estados Unidos estimó que 9.1 millones de niños menores de cinco años requerían de atención o guarderías debido a que sus madres trabajaban. En la tabla 13.7 se señalan las alternativas de cuidado o atención a los lactantes y la estimación que la Oficina de Censos hace del número de niños de cada alternativa. Si se selecciona un niño o niña de este grupo de manera aleatoria, ¿cuál será la probabilidad de que: *a*) el niño sea atendido en su propio hogar; *b*) el niño vea por sí mismo, y *c*) el niño sea cuidado por la madre en el trabajo?

Tabla 13.7

Tipo de cuidado infantil	**Número de niños**
En otro hogar	3 239 600
Atención diurna/guardería infantil	2 220 400
Niños que ven por sí mismos	18 200
Cuidados maternos en el trabajo	809 900
Atención en el hogar del niño	2 720 900
Otro	91 000

10. **Envejecimiento de la población de Estados Unidos** Un estudio de la Oficina de Censos de Estados Unidos reveló que la edad promedio de la población está incrementándose. La Oficina estima que para el año 2000, habrá 105.6 millones de familias.

En la tabla 13.8 se indican los pronósticos respecto de la edad del jefe de la familia. Si en el año 2000 se seleccionó una familia en forma aleatoria, ¿cuál será la probabilidad de que el jefe de la familia tenga: *a*) 65 o más años de edad; *b*) entre 25 y 34 años; *c*) 35 años o más, y *d*) 45 años o sea más joven?

Tabla 13.8

Edad del jefe de familia	Número de familias
15-24	4 224 000
25-34	16 896 000
35-44	24 288 000
45-54	22 176 000
55-64	14 784 000
65 y mayores	23 232 000

11. **Cuidados intensivos para cardiacos** Con objeto de fundamentar su solicitud de una unidad de cuidados intensivos para cardiacos, la sala de urgencias de un gran hospital urbano recabó datos sobre el número de víctimas de ataques cardiacos a quienes ha atendido. En la tabla 13.9 se indican las probabilidades de que diferentes números de esos pacientes sean atendidos en la sala de urgencias durante un día normal. En un día cualquiera, ¿qué probabilidades hay de que: *a*) sean atendidos cinco o menos enfermos; *b*) cinco o más víctimas; *c*) no más de siete víctimas?

Tabla 13.9

Número de víctimas atendidas (n)	$P(n)$
Menor que 5	.08
5	.16
6	.30
7	.26
Mayor que 7	.20

12. **Protección contra incendios** El número de alarmas de incendios que se activan cada hora fluctúa en una ciudad en particular. Unos analistas han estimado la probabilidad de diferentes números de alarmas por hora, según se observa en la tabla 13.10. En una hora cualquiera, ¿qué probabilidades hay de que: *a*) se activen más de ocho alarmas; *b*) se activen entre ocho y 10 alarmas (inclusive); *c*) no se activen más de nueve alarmas?

Tabla 13.10

Número de alarmas activadas (n)	$P(n)$
Menor que 8	.16
8	.20
9	.24
10	.28
Mayor que 10	.12

13. Hay que sacar un naipe de manera aleatoria de un mazo bien entremezclado. ¿Qué probabilidad hay de que el naipe sea: *a*) un rey o una sota; *b*) un naipe con figura (sota, reina o rey); *c*) un 7 o espadas, y *d*) un naipe de figuras o un naipe rojo?

14. Se llevó a cabo una encuesta a 2 000 consumidores para investigar su conducta de compra en relación con dos refrescos de mucha venta. Se descubrió que, el mes pasado, 800 personas habían comprado la marca *A*, 300 habían comprado la marea *B* y 100 habían adquirido ambas marcas. Si en este grupo se selecciona de manera aleatoria a un consumidor (suponiendo que cada uno tenga iguales posibilidades de que lo seleccionen), ¿qué probabilidades hay de que esa persona: *a*) haya comprado la marca *A* en el mes pasado; *b*) haya comprado la marca *B* y no la marca *A*; *c*) haya comprado la marca *A*, la marca *B* o ambas, y *d*) no haya comprado ninguna de las dos marcas?

15. **Investigación sobre la vitamina C** En los últimos años ha surgido una gran controversia en torno a los posibles beneficios que aportan las dosis suplementarias de vitamina C. Según afirman los defensores de ella, las dosis suplementarias reducirán la frecuencia del resfriado común y de la influenza. A un grupo experimental de 3 000 personas se le administraron dosis suplementarias de vitamina C por un periodo de un año. En este periodo, se descubrió que 800 de ellas tuvieron uno o más resfriados, 250 sufrieron influenza y 150 tuvieron resfriados e influenza a la vez. Si de este grupo experimental se selecciona una persona en forma aleatoria (suponiendo una probabilidad idéntica de selección), ¿qué probabilidades hay de que una persona: *a*) haya sufrido uno o más resfriados, pero no influenza; *b*) haya sufrido resfriados e influenza; *c*) haya tenido uno o más resfriados pero no influenza, o bien haya sufrido influenza pero ningún resfriado, y *d*) no haya sufrido ni resfriados ni influenza?

16. El espacio muestral de un experimento consta de cinco eventos simples E_1, E_2, E_3, E_4 y E_5. Estos eventos son mutuamente excluyentes. Las probabilidades de ocurrencia de estos eventos son: $P(E_1) = 0.20$, $P(E_2) = 0.15$, $P(E_3) = 0.25$, $P(E_4) = 0.30$ y $P(E_5) = 0.10$. Para este experimento se pueden definir varios eventos compuestos. Éstos son

$$F = \{E_1, E_2, E_3\} \quad G = \{E_1, E_3, E_5\} \quad H = \{E_4, E_5\}$$

Determine: *a*) $P(F)$; *b*) $P(G)$; *c*) $P(H)$; *d*) $P(G')$; *e*) $P(F \cup G)$; *f*) $P(G \cup H)$; *g*) $P(F \cap H)$, y *h*) $P(F \cap G)$.

17. El espacio muestral de un experimento consta de cuatro eventos simples E_1, E_2, E_3 y E_4, los cuales son mutuamente excluyentes. Las probabilidades de realización de estos eventos son $P(E_1) = 0.2$, $P(E_2) = 0.1$, $P(E_3) = 0.4$ y $P(E_4) = 0.3$. Para este experimento pueden definirse varios eventos compuestos. Incluyendo

$$A = \{E_1, E_2, E_3\} \qquad B = \{E_2, E_4\} \qquad C = \{E_1, E_3, E_4\}$$

Determine entonces: *a*) $P(A)$; *b*) $P(A')$; *c*) $P(B)$; *d*) $P(C)$; *e*) $P(C')$; *f*) $P(A \cup B)$; *g*) $P(B \cup C)$, y *h*) $P(A \cap C)$.

13.4 Determinación de independencia y dependencia estadística

Independencia estadística

Además de las clasificaciones anteriores, los eventos pueden clasificarse en ***independientes*** o ***dependientes***.

Definición: Eventos independientes

Dos eventos son independientes si la ocurrencia o no ocurrencia de un evento de ninguna manera afecta a la posibilidad (o probabilidad) de ocurrencia del otro evento.

Los resultados de los lanzamientos consecutivos de una moneda legal constituyen un ejemplo de eventos independientes. El hecho de que salga cara o cruz en un lanzamiento cualquiera no influye de ningún modo en la probabilidad de que salga uno u otro lado en el siguiente lanzamiento o en los siguientes. La extracción de naipes de una baraja o de bolas de una urna *con reposición* es un experimento caracterizado por eventos independientes. *"Con reposición"* significa que el elemento seleccionado vuelve a ponerse en la baraja o en la urna antes de escoger el siguiente. En el caso de la baraja, la probabilidad de sacar un corazón en cada extracción es de $\frac{13}{52}$ a condición de que se reemplace en la baraja el naipe extraído antes.

Otro ejemplo de eventos que pueden ser estadísticamente independientes lo encontramos en la generación aleatoria de *productos aceptables* o *defectuosos*. En tal proceso, se supone que la probabilidad de generar una unidad aceptable (o defectuosa) permanezca inalterada durante un ensayo cualquiera, cualesquiera que hayan sido los resultados anteriores.

Con frecuencia se le da el nombre de **probabilidad marginal** *a la probabilidad simple de un evento*. La probabilidad marginal de que caiga la cara es 0.5 cuando se lanza una moneda legal. Si se supone una extracción aleatoria, la probabilidad marginal de escoger espadas en una baraja es de $\frac{13}{52}$. Muy a menudo se desea calcular la probabilidad de que dos o más eventos tengan lugar al mismo tiempo o en sucesión. Por ejemplo, quizá se quiera conocer la probabilidad de arrojar un par de dados y que salga un 5 en un dado y 2 en el otro; o bien tal vez se desee averiguar la probabilidad de que caiga cinco veces cara al lanzar cinco veces consecutivas una moneda. *La probabilidad de la ocurrencia simultánea de dos o más eventos recibe el nombre de* **probabilidad conjunta**.

Regla 6

La probabilidad conjunta de que dos eventos independientes E_1 y E_2 acontezcan al mismo tiempo o en sucesión es igual al producto de las probabilidades marginales de E_1 y E_2, o bien:

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)\,P(E_2) \tag{13.12}$$

Ejemplo 28 La probabilidad de que una máquina produzca una unidad defectuosa es 0.05. Se supone que el proceso de producción se caracteriza por la independencia estadística. En otras palabras, la probabilidad de que una unidad sea defectuosa es de 0.05, sin importar la calidad de las unidades anteriores. Suponga que queremos determinar la probabilidad de que sean defectuosas dos piezas consecutivas. Si el evento *D* representa la aparición de una unidad defectuosa, entonces conforme a la regla 6,

$$\begin{aligned} P(D_1 \cap D_2) &= P(D_1)P(D_2) \\ &= (.05)(.05) = .0025 \end{aligned}$$

Ejemplo 29 **(Recaudación de fondos)** Una universidad ha comenzado a servirse de telefonemas como el medio principal de solicitar donaciones entre los alumnos. El vicepresidente de desarrollo estima que la probabilidad de que un alumno, contactado por teléfono, haga una aportación es de 0.24. En dos contactos sucesivos, ¿cuál es la probabilidad de que:

a) el primer alumno a quien se contacte por teléfono dé un donativo y el segundo no?
b) el primero no dé un donativo y en cambio el segundo sí?
c) ambos hagan una aportación?
d) ninguno de los dos dé un donativo?

SOLUCIÓN

Si el evento *C* representa la ocurrencia de una contribución, el evento *C′* representa entonces la no ocurrencia de una aportación.

$$\begin{aligned} a)\ P(C_1 \cap C_2') &= P(C_1) \cdot P(C_2') \\ &= (.24)(1 - .24) \\ &= (.24)(.76) \\ &= .1824 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b)\ P(C_1' \cap C_2) &= P(C_1') \cdot P(C_2) \\ &= (.76)(.24) \\ &= .1824 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c)\ P(C_1 \cap C_2) &= P(C_1) \cdot P(C_2) \\ &= (.24)(.24) \\ &= .0576 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d)\ P(C_1' \cap C_2') &= P(C_1') \cdot P(C_2') \\ &= (.76)(.76) \\ &= .5776 \end{aligned}$$

❑

Ejercicio de práctica

Trace un diagrama de árbol para enumerar todos los posibles resultados en cuanto a la realización de dos contactos sucesivos con los alumnos. ¿Se enumeraron todos los posibles resultados en este ejemplo? Sume las cuatro probabilidades que se calcularon en él. ¿Tiene sentido el resultado?

Regla 7

La probabilidad conjunta de que se presenten n eventos independientes $E_1, E_2, \ldots, E_n$ al mismo tiempo o en sucesión es

$$E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) = P(E_1)P(E_2) \cdots P(E_n) \tag{13.13}$$

Ejemplo 30 **(Auditoría de la oficina de Hacienda; escenario de motivación)** La oficina de Hacienda de un país estima que la probabilidad de un error en las declaraciones del impuesto sobre la renta es de 0.4. Suponga que se efectúe un experimento en el cual tres declaraciones se seleccionan de manera aleatoria con fines de auditoría y se quieren determinar todos los resultados posibles y las probabilidades de dichos resultados.

Una herramienta de gran utilidad en problemas de esta índole es un ***árbol de probabilidad***. Se trata de un diagrama de árbol que enumera todos los resultados posibles de un experimento y las probabilidades de que se obtengan. En la figura 13.19 se ilustra el árbol de probabilidad para este experimento. Suponga que E_i representa el resultado "error" en el i-ésimo ensayo y N_i el resultado "ausencia de error en el i-ésimo ensayo".

En la primera declaración de impuestos seleccionada, los dos círculos indican las probabilidades marginales de los dos eventos simples posibles.

En la segunda declaración, los cuatro círculos representan las probabilidades conjuntas de los diferentes resultados posibles al elegir dos declaraciones. Si se supone que los resultados de las selecciones consecutivas (ensayos) son independientes, las probabilidades de los diferentes eventos conjuntos para las dos declaraciones seleccionadas pueden calcularse mediante la regla 6. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap N_2) &= P(E_1)P(N_2) \\ &= (.4)(.6) = .24 \end{aligned}$$

Para la tercera declaración, los ocho círculos indican las probabilidades conjuntas de los distintos resultados posibles cuando se escogen tres declaraciones. Estas probabilidades pueden calcularse aplicando la regla 7. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap N_2 \cap E_3) &= P(E_1)P(N_2)P(E_3 \\ &= (.4)(.6)(.4) = .096 \end{aligned}$$

En la figura 13.19 nótese que en cada ensayo la suma de las probabilidades conjuntas es 1. Ello obedece a que el conjunto de los eventos identificados es colectivamente exhaustivo *y* mutuamente excluyente. ❑

Ejercicio de práctica

Utilizando el árbol de probabilidad de la figura 13.19, determine la probabilidad de que: *a*) dos o tres declaraciones contengan errores y *b*) las tres declaraciones contengan por lo menos un error. *Respuesta*: *a*) 0.288 y *b*) 0.784.

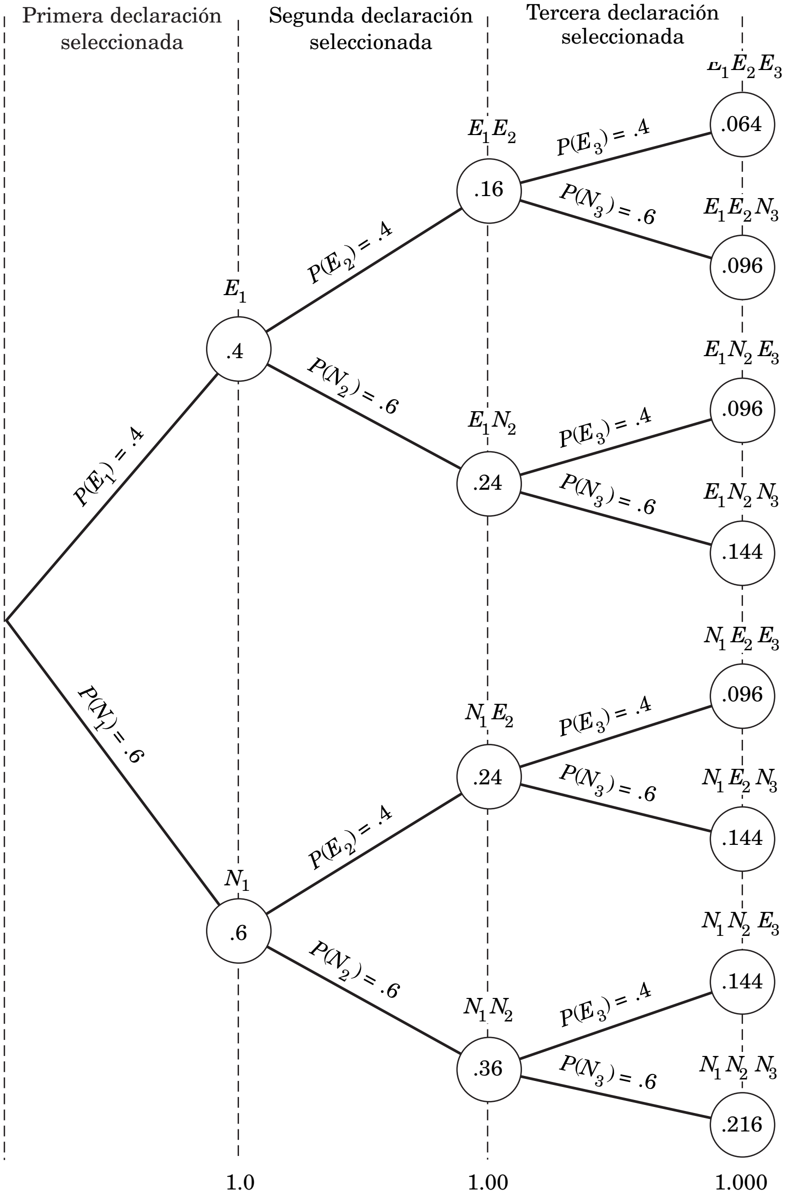


Figura 13.19 Árbol de probabilidad para el ejemplo de la auditoría de la oficina de Hacienda.

Además de las probabilidades marginal y conjunta, existe otro tipo de probabilidad: la ***probabilidad condicional***. *Así, la notación* $P(E_1|E_2)$ *representa la probabilidad condicional del evento* E_1*, suponiendo que haya tenido lugar el evento* E_2. La probabilidad de que caiga cara en el tercer lanzamiento de una moneda, si los dos primeros produjeron cara, es una probabilidad condicional.

Sin embargo, por definición, los eventos independientes tienen la propiedad de que la ocurrencia o no ocurrencia de un evento no influye en la probabilidad de otro.

Regla 8

Dados dos eventos independientes, E_1 y E_2, la probabilidad condicional del evento E_1 dado que el evento E_2 haya ocurrido es la probabilidad marginal de E_1, o

$$P(E_1 | E_2) = P(E_1) \tag{13.14}$$

La probabilidad condicional de que salga un seis al lanzar un dado es $\frac{1}{6}$, suponiendo que no haya salido ningún 6 en los últimos 20 lanzamientos. En el ejemplo de la oficina de Hacienda, la probabilidad de que la siguiente declaración de impuestos contenga un error es de .4, sin importar los resultados de las declaraciones anteriores que hayan sido examinadas.

Dependencia estadística

En contraste con el estado de independencia estadística, a muchos eventos se les caracteriza como ***estadísticamente dependientes***.

Definición: Eventos dependientes

Dos eventos son ***dependientes*** si la probabilidad de ocurrencia de un evento es afectada por la ocurrencia o no ocurrencia del otro evento.

Entre los ejemplos de experimentos que incluyen eventos dependientes figura la extracción de naipes de una baraja o de bolas de una urna *sin reposición*. Si se selecciona un naipe que no sea de corazones y si se conserva fuera de la baraja o mazo, la probabilidad de sacar un naipe de corazones en la siguiente ocasión no es la misma que en la primera extracción. Dados los siguientes eventos relacionados con las condiciones climatológicas,

Evento E_1 = nevará

Evento E_2 = la temperatura estará por debajo del punto de congelación

la probabilidad del evento E_1 es afectada por la ocurrencia o no ocurrencia del evento E_2. En los siguientes ejemplos se explica el cálculo de las probabilidades en condiciones de dependencia estadística.

Tabla 13.11

	Sin ejercicio (*NE*)	Algo de ejercicio (*SE*)	Ejercicio regular (*RE*)	Total
Cardiopatía (*HD*)	700	300	100	1 100
Ausencia de cardiopatía ($\overline{HD}$)	1 300	6 600	1 000	8 900
Total	2 000	6 900	1 100	10 000

Ejemplo 31

Una encuesta a nivel nacional sobre 10 000 hombres de edad madura arrojó los datos que aparecen en la tabla 13.11. Se piensa que los resultados de esta encuesta son representativos de los atributos particulares del hombre promedio de edad madura en ese país. Pueden estimarse las probabilidades referentes a la cardiopatía y a los hábitos de ejercicio físico basándose en las frecuencias relativas de ocurrencia en la encuesta. Por ejemplo, la probabilidad de que un hombre de edad madura no practique ejercicio físico es

$$\begin{aligned} P(NE) &= \frac{\text{número de entrevistados que no hacen ejercicio}}{\text{número de hombres entrevistados}} \\ &= \frac{2\,000}{10\,000} = .20 \end{aligned}$$

La probabilidad de que un hombre de edad madura sufra una cardiopatía es

$$\begin{aligned} P(HD) &= \frac{\text{número de entrevistados que sufren cardiopatía}}{\text{número de hombres entrevistados}} \\ &= \frac{1\,100}{10\,000} = .11 \end{aligned}$$

La probabilidad conjunta de que un hombre de edad madura haga ejercicio regularmente y sufra una cardiopatía es

$$P(HD \cap RE) = \frac{100}{10\,000} = .01$$

Suponga que desea conocer la probabilidad condicional de que un hombre sufra una cardiopatía, *dado que* no haga ejercicio físico.

La información *dada* centra la atención en la primera columna de la tabla 13.11, o sea en los encuestados que no realizan ejercicio físico. De los 2 000 hombres encuestados que no hacen ejercicio, 700 sufren una cardiopatía. Por lo tanto, la probabilidad condicional se calcula como

$$\begin{aligned} P(HD \mid NE) &= \frac{\begin{array}{c}\text{número de entrevistados que}\\ \text{no hacen ejercicio y sufren cardiopatía}\end{array}}{\text{número de entrevistados que no hacen ejercicio}} \\ &= \frac{700}{2\,000} = .35 \end{aligned}$$

La probabilidad condicional de que un hombre haga ejercicio regularmente, dado que sufra una cardiopatía, es

$$P(RE \mid HD) = \frac{\text{número de entrevistados que hacen ejercicio regularmente } y \text{ sufren de cardiopatía}}{\text{número de entrevistados que sufren de cardiopatía}}$$

$$= \frac{100}{1\,100} = .09$$

❑

Las probabilidades condicionales en situación de dependencia estadística pueden calcularse aplicando la siguiente regla.

Regla 9

La probabilidad condicional del evento E_1 si ocurre el evento E_2 es

$$P(E_1 \mid E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \qquad \textbf{(13.15)}$$

La probabilidad condicional se obtiene dividiendo la probabilidad conjunta de los eventos E_1 y E_2 entre la probabilidad marginal de E_2.

En forma indirecta, estábamos sirviéndonos de la ecuación (13.15) cuando calculamos las probabilidades condicionales en el ejemplo 31. Al aplicar la ecuación (13.15) en ese ejemplo, se obtiene

$$P(HD \mid NE) = \frac{P(HD \cap NE)}{P(NE)}$$

$$= \frac{700/10\,000}{2\,000/10\,000} = \frac{.07}{.20} = .35$$

y

$$P(RE \mid HD) = \frac{P(RE \cap HD)}{P(HD)}$$

$$= \frac{100/10\,000}{1\,100/10\,000} = \frac{.01}{.11} = .09$$

Ejemplo 32 Suponga que una persona escoge una carta en forma aleatoria de un mazo de 52 naipes y dice que extrajo un naipe con figuras rojas. La probabilidad de que la carta sea el rey de corazones, *suponiendo* que sea un naipe con figuras rojas, puede determinarse mediante la ecuación (13.15).

$$P(\text{rey de corazones} \mid \text{rojo}) = \frac{P(\text{rey de corazones} \cap \text{rojo})}{P(\text{rojo})}$$

$$= \frac{1/52}{26/52} = \frac{1}{26}$$

❑

Si ambos miembros de la ecuación (13.15) se multiplican por $P(E_2)$, la ecuación resultante da una expresión para calcular la probabilidad conjunta $P(E_1 \cap E_2)$, o

$$\boxed{P(E_1 \cap E_2) = P(E_2)P(E_1 \mid E_2)} \qquad \textbf{(13.16)}$$

Ejemplo 33 La probabilidad conjunta de seleccionar dos ases consecutivamente en un mazo sin reemplazar el primer naipe puede calcularse mediante la ecuación (13.16) en la forma siguiente

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2) &= P(\text{as en la primera extracción}) \cdot P(\text{as en la segunda extracción } \textit{dado} \text{ un as en la primera extracción}) \\ &= P(A_1)P(A_2 \mid A_1) \\ &= \tfrac{4}{52} \cdot \tfrac{3}{51} = \tfrac{12}{2\,652} \end{aligned}$$

Ejemplo 34 En un jarrón hay ocho bolas rojas, seis amarillas y seis azules. Hay que escoger del jarrón dos bolas en forma aleatoria. Suponga que cada una tenga iguales probabilidades de ser seleccionada y que la primera que se extraiga no se pondrá de nuevo en el jarrón.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bola sea roja y la segunda sea amarilla?
b) ¿Qué probabilidad hay de que ambas sean azules?
c) ¿Qué probabilidades existen de que ninguna de las dos sea roja?

SOLUCIÓN

Seleccionar bolas de un jarrón *sin reposición* es un experimento que se caracteriza por la dependencia estadística.

a) Usando la ecuación (13.16), proporcione:

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap Y_2) &= P(R_1) \cdot P(Y_2 \mid R_1) \\ &= \tfrac{8}{20} \cdot \tfrac{6}{19} = \tfrac{48}{380} = \tfrac{12}{95} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P(B_1 \cap B_2) &= P(B_1) \cdot P(B_2 \mid B_1) \\ &= \tfrac{6}{20} \cdot \tfrac{5}{19} = \tfrac{30}{380} = \tfrac{3}{38} \end{aligned}$$

c) Si con R'_j se representa el evento "selección de bolas no rojas en la *j*-ésima extracción",

$$\begin{aligned} P(R'_1 \cap R'_2) &= P(R'_1) \cdot P(R'_2 \mid R'_1) \\ &= \tfrac{12}{20} \cdot \tfrac{11}{19} = \tfrac{132}{380} = \tfrac{34}{95} \end{aligned}$$

Ejemplo 35 **(Actividades terroristas)** Un grupo de terroristas que opera en un país extranjero amenazó con destruir ciertos aviones si no se satisfacen sus demandas. Dicen haber puesto bombas en tres de 20 aviones que actualmente se encuentran en un aeropuerto muy importante. Se evacuó a todos los pasajeros y tripulaciones, y un escuadrón de especialistas en desactivar bombas está a punto de iniciar su búsqueda en los aviones. Es importante la probabilidad de que los tres primeros aviones en ser escudriñados sean los que tienen las bombas (los afectados).

Si A denota la selección de un avión afectado y N la selección de un avión no afectado, estamos interesados en $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$. La probabilidad de que los dos primeros aviones estén afectados se calcula así

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 \mid A_1)$$
$$= \tfrac{3}{20} \cdot \tfrac{2}{19} = \tfrac{6}{380} = \tfrac{3}{190}$$

La probabilidad de que los tres primeros aviones seleccionados sean los afectados se obtiene como

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1 \cap A_2) \cdot P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)$$
$$= \tfrac{3}{190} \cdot \tfrac{1}{18} = \tfrac{3}{3\,420}$$

❑

Ejercicio de práctica

¿Cuál es la probabilidad de que una selección aleatoria de cuatro aviones producirá el resultado $A_1\ N_2\ A_3\ A_4$? *Respuesta*: 102/116 280 = 1/1 140.

Ejemplo 36

(Simulación con el transbordador espacial) Mientras se preparaban los vuelos espaciales, una de las contingencias previstas fue la sustitución de los componentes defectuosos al estar en el espacio. Un escenario simulado sugería que de las 10 celdas de combustible de un tipo especial usado en una misión, tres se habían deteriorado durante el vuelo. Suponga que es imposible saber cuáles tres están defectuosas. La única manera de descubrirlas consiste en extraerlas y probarlas con equipo a bordo. Si las celdas se escogen de modo aleatorio: *a*) construya un árbol de probabilidad que resuma los posibles resultados obtenidos al seleccionar tres celdas y probarlas; *b*) ¿cuál es la probabilidad de que ninguna de ellas quede incluida en la muestra de tres? ¿De que una sea incluida? ¿De que dos sean incluidas? ¿Y de que las tres queden incluidas?

SOLUCIÓN

a) Si con D_j y N_j se representan los resultados defectuosos y no defectuosos de la *j*-ésima celda escogida, la figura 13.20 muestra el árbol de probabilidades que resume los posibles resultados que pueden conseguirse al seleccionar tres celdas. Nótese que los eventos descritos en el problema son estadísticamente dependientes. Adviértase también que la suma de las probabilidades referentes a todos los resultados asociados a cada ensayo es igual a uno. Por último, en un experimento que conste de tres ensayos (intentos) (tres celdas de combustible seleccionadas) existen ocho resultados posibles.

b) La probabilidad de que ninguna de las celdas defectuosas sea seleccionada corresponde al resultado $N_1\ N_2\ N_3$, que tiene una probabilidad de $\frac{210}{720}$. La probabilidad de seleccionar una celda defectuosa corresponde a los resultados $D_1\ N_2\ N_3$, $N_1\ D_2\ N_3$ y $N_1\ N_2\ D_3$. La suma de las probabilidades de estos resultados es $3(\frac{126}{720}) = (\frac{378}{720})$. La probabilidad de escoger dos celdas defectuosas corresponde al resultado $D_1\ D_2\ N_3$, $D_1\ N_2\ D_3$ y $N_1\ D_2\ D_3$. La suma de las probabilidades de esos resultados es $3(\frac{42}{720}) = \frac{126}{720}$. Por último, la probabilidad de descubrir las tres celdas defectuosas corresponde al resultado $D_1\ D_2\ D_3$, que tiene una probabilidad de $\frac{6}{720}$. ❑

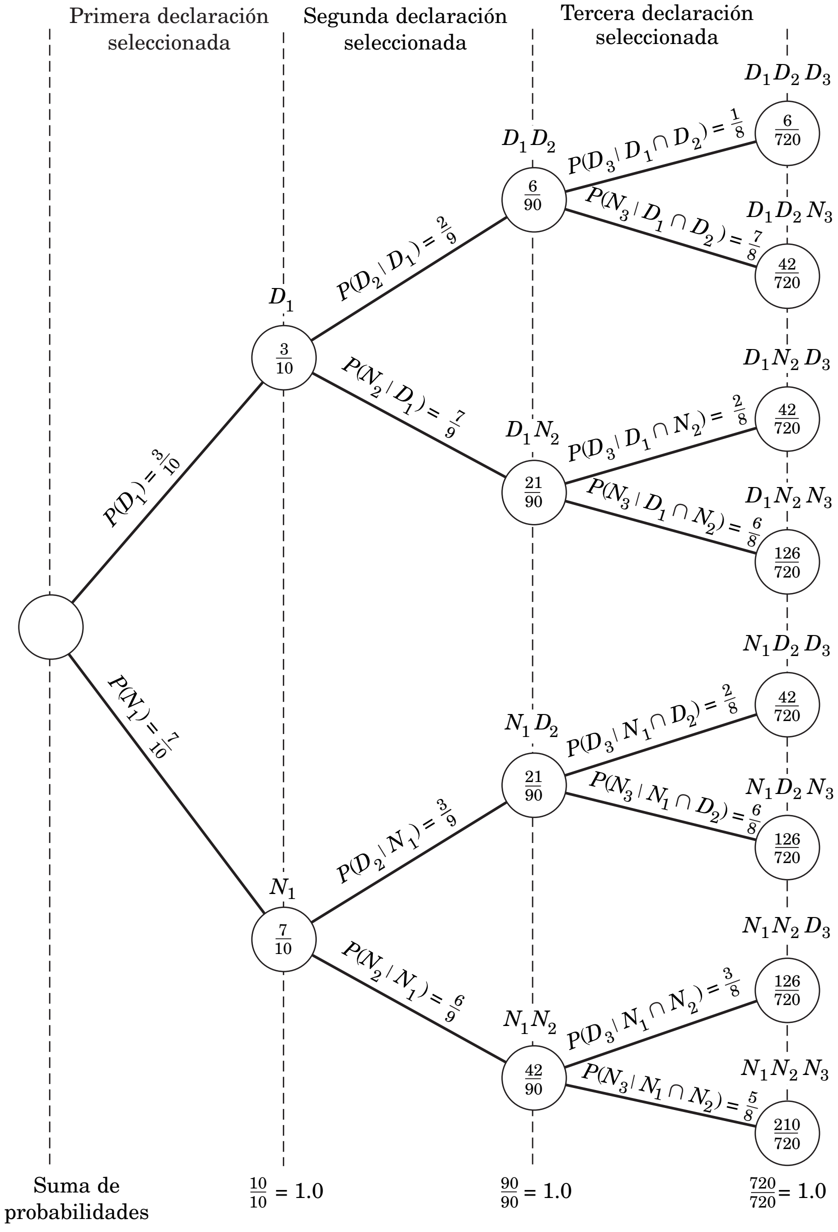


Figura 13.20 Árbol de probabilidad para el ejemplo del transbordador espacial.

Sección 13.4 Ejercicios de seguimiento

1. La probabilidad de que una máquina produzca una pieza defectuosa es de 0.15. Si el proceso se caracteriza por la independencia estadística, ¿cuál será la probabilidad de que: *a*) dos piezas consecutivas no estén defectuosas; *b*) las tres primeras no estén defectuosas y la cuarta lo esté; *c*) cinco piezas consecutivas no estén defectuosas?

2. Auditoría de Hacienda Una declaración de impuestos puede ser auditada por el gobierno federal, por el gobierno estatal o por ambos. La probabilidad de que una declaración individual sea auditada por el gobierno federal es de 0.03. La probabilidad de que sea auditada por el gobierno estatal es de 0.04. Suponga que las decisiones relativas a la auditoría se toman en forma independiente una de otra en los niveles federal y estatal.

a) ¿Qué probabilidades hay de que la auditoría la realicen ambas entidades?

b) ¿Cuál es la probabilidad de una auditoría estatal pero no de una auditoría federal?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no se efectúe la auditoría?

3. Una moneda se pesa de modo que $P(H) = 0.45$ y $P(T) = 0.55$. Construya un árbol de probabilidad que denote todos los resultados posibles si la moneda se lanza tres veces. ¿Qué probabilidades hay de que salgan dos cruces en tres lanzamientos? ¿Y de que salga la cara dos veces?

4. Cinco naipes se seleccionan en forma aleatoria de un mazo de 52 de éstos. Si los naipes extraídos no se reponen en el mazo, ¿qué probabilidades habrá de seleccionar un as, un rey, un as, una sota y un as en ese orden?

Tabla 13.12

	Respuesta			
Edad del entrevistado	**Muy probable**	**Probable**	**Improbable**	**Total**
20-29	850	1 700	500	3 050
30-39	700	1 100	450	2 250
40 y más de 40	600	600	1 500	2 700
Total	2 150	3 400	2 450	8 000

5. En la tabla 13.12 se resumen los resultados de una encuesta reciente dedicada a las actitudes ante la guerra nuclear. La pregunta que se formuló fue: "¿Qué posibilidades hay, en su opinión, de que estalle una guerra nuclear en los próximos 10 años?" Si se selecciona a un entrevistado en forma aleatoria en una muestra de 8 000 personas: ¿Cuáles son las siguientes probabilidades?

a) El entrevistado tiene 30 años de edad o más.

b) El entrevistado piensa que es "probable" una guerra nuclear.

c) El entrevistado tiene una edad que oscila entre 30 y 39 años, y cree que es "muy probable" una guerra nuclear.

d) El entrevistado tiene una edad que fluctúa entre 20 y 39 años, y piensa que una guerra nuclear es "improbable".

e) El entrevistado cree que una guerra nuclear es "improbable", pues su edad oscila entre 20 y 29 años.

f) El entrevistado tiene 40 años de edad o más, puesto que piensa que la guerra nuclear es "improbable".

6. Un participante en un juego de televisión ganó la oportunidad de obtener algunos premios. Se le muestran 10 cajas, cuatro de las cuales contienen premios. Si se le permite escoger cuatro de ellas, ¿qué probabilidades hay de que: *a*) cuatro premios sean seleccionados; *b*) no se seleccione ninguno, y *c*) las tres primeras cajas escogidas no contengan premios pero sí la cuarta?

7. En el ejercicio anterior, dibuje un árbol de probabilidad que resuma los resultados posibles cuando se seleccionan cuatro cajas de modo aleatorio y sus probabilidades asociadas. ¿Qué probabilidad hay de que al menos se gane un premio? Y, ¿exactamente uno?

8. Con los datos del ejemplo 34, construya un árbol de probabilidad que sintetice todos los resultados y sus probabilidades para la selección de dos bolas.

9. Suponiendo que se escojan naipes en forma aleatoria, y sin reposición, de un mazo normal de 52 barajas, determine la probabilidad de que: *a*) los dos primeros naipes sean corazones; *b*) el primero sea una espada, el segundo sea un trébol, el tercero un corazón y el cuarto un diamante; *c*) se seleccionen tres ases consecutivamente, y *d*) no haya ases en las primeras cuatro barajas.

10. Un grupo que va a graduarse consta de 52% de mujeres y 48% de varones. De los varones, 20% estudia ingeniería. Si a un graduado se le selecciona en forma aleatoria del grupo, ¿qué probabilidades hay de que sea un alumno de sexo masculino y estudie ingeniería? ¿Y de que sea un varón que estudie alguna otra materia?

Tabla 13.13

	Enfermedad actual			
	Cardiopatía	**Cáncer**	**Diabetes**	**Total**
Antecedentes familiares	880	440	380	1 700
Sin antecedentes familiares	920	760	620	2 300
Total	1 200	1 200	1 000	4 000

11. En la tabla 13.13 se resumen los resultados de una reciente encuesta médica. A personas que sufrían cardiopatía, cáncer o diabetes se les preguntó si en su familia había antecedentes de esas enfermedades. Si a una persona se le elige de manera aleatoria de esta muestra de 4 000, ¿qué probabilidades existen de que:

a) sufra cáncer?
b) tenga antecedentes familiares de su enfermedad en particular?
c) sufra cáncer pero no tenga antecedentes familiares de ese padecimiento?
d) sufra diabetes, si la persona seleccionada muestra antecedentes familiares de la enfermedad?
e) no tenga antecedentes familiares de la enfermedad, en caso de que sufra una cardiopatía?

Tabla 13.14

	Producto 1	**Producto 2**	**Producto 3**	**Total**
Aceptable	156	350	204	710
Inaceptable	24	40	26	90
Total	180	390	230	800

12. Una muestra de 800 piezas se ha seleccionado de tres líneas de productos y fue inspeccionada por el departamento de control de calidad. En la tabla 13.14 se resumen los resultados de la inspección. Si se escoge una parte en forma aleatoria en la muestra, ¿qué probabilidades hay de que:

a) la pieza sea del tipo de producto 1?
b) la pieza sea inaceptable?
c) la pieza sea una unidad aceptable del producto 3?

d) la pieza sea una unidad inaceptable del producto 1?

e) la pieza sea aceptable, si la que se selecciona es una unidad del producto 2?

f) la pieza sea el producto 1, si la parte seleccionada es aceptable?

g) la pieza sea el producto 3, si la parte seleccionada es inaceptable?

13. Un grupo de solicitantes de un trabajo de soldador está integrado por mujeres en un 30% y por varones en un 70%. De las mujeres, 60% tienen grados universitarios. De los varones, 40% poseen grados universitarios. ¿Qué probabilidades existen de que un solicitante seleccionado en forma aleatoria sea: *a*) una mujer con un grado universitario y *b*) un varón sin un grado universitario?

14. Suponga que E y F son eventos en los que $P(E) = 0.4$, $P(F) = 0.3$ y $P(E \cup F) = 0.6$. Determine: *a*) $P(E \cap F)$, *b*) $P(E|F)$, y *c*) $P(F|E)$.

15. Suponga que G y H sean eventos en que $P(G) = 0.25$, $P(H) = 0.45$ y $P(G \cup H) = 0.55$. Determine: *a*) $P(G \cap H)$, *b*) $P(G|H)$, y *c*) $P(H|G)$.

❑ TÉRMINOS Y CONCEPTOS CLAVE

rbol de probabilidad 628
complemento 591
conjunto 589
conjunto nulo (vacío) 591
conjunto universo 591
dependencia estadística 630
diagrama de árbol 598
diagrama de Venn 592
elemento 589
espacio muestral 609
espacio muestral finito 610
espacio muestral infinito 610
eventos colectivamente exhaustivos 613
eventos mutuamente exc1uyentes 612
experimento aleatorio 609
frecuencia relativa 615
igualdad de conjuntos 593
independencia estadística 626
intersección de conjuntos 594
método de enumeración 589
método de la propiedad descriptiva 590
notación factorial 600
principio fundamental del conteo 607
probabilidad 615
probabilidad condicional 629
probabilidad conjunta 626
probabilidad marginal 626
probabilidad objetiva 616
probabilidad subjetiva 616
resultados 609
subconjunto 592
unión de conjuntos 594

❑ FÓRMULAS IMPORTANTES

$${}_nP_n = n! \tag{13.2}$$

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) \tag{13.3}$$

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{13.4}$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{13.6}$$

$$0 \leq P(E) \leq 1 \tag{13.7}$$

$$P(E') = 1 - P(E) \tag{13.8}$$

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) \qquad \text{(mutuamente excluyente)} \tag{13.9}$$

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \cdots + P(E_n) \qquad \text{(mutuamente excluyente)} \tag{13.10}$$

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \tag{13.11}$$

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2) \qquad \text{(independencia)} \tag{13.12}$$

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) = P(E_1)P(E_2) \cdots P(E_n) \qquad \text{(independencia)} \tag{13.13}$$

$$P(E_1 | E_2) = P(E_1) \qquad \text{(independencia)} \tag{3.14}$$

$$P(E_1 | E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} \qquad \text{(dependencia)} \tag{13.15}$$

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2)P(E_1 | E_2) \tag{13.16}$$

❑ EJERCICIOS ADICIONALES

SECCIÓN 13.1

1. Redefina el conjunto A por el método de la propiedad descriptiva si:
a) $A = \{\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32\}$
b) $A = \{\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, 27, 81\}$
c) $A = \{.001, .01, .1, 1, 10, 100, 1\,000\}$
d) $A = \{1, 4, 27, 256, 3\,125\}$

2. Dados

$$\mathcal{U} = \{x | x \text{ es un entero mayor que } -8 \text{ pero menor que } +9\}$$

$$A = \{a | a \text{ es un entero positivo par menor que } 15\}$$

$$B = \{b | b \text{ es un entero impar mayor que } -5 \text{ pero menor que } +4\}$$

a) Defina A'.
b) Defina B'.

3. Si $\mathcal{U}$ está integrado por todos los estudiantes inscritos en los cursos en una universidad, A se compone de todos los estudiantes de sexo masculino, B de todos los alumnos de 35 años o más y C de todos los estudiantes de ingeniería: *a*) defina el conjunto A'; *b*) defina el conjunto B', y *c*) defina el conjunto C'.

4. Si $\mathcal{U}$ está constituido por las diferentes puntuaciones totales posibles al lanzar un par de dados y B' se compone de las puntuaciones de 3, 5 y 7, defina B.

5. Si

$$\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \qquad B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$A = \{1, 5, 9\} \qquad C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

defina todas las relaciones de subconjuntos que existan para estos conjuntos.

6. Dibuje un diagrama de Venn que represente todos los conjuntos en el ejercicio 5.

7. Diez residentes de una ciudad fueron entrevistados respecto del uso del transporte público en dicha ciudad. Se les preguntó si habían viajado en el tren subterráneo (*S*), en autobús (*B*) o en ninguno de los dos medios de transporte (*N*) durante el año pasado. Las respuestas fueron las siguientes:

Residente	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Respuesta	N	N	B	B, S	S	B, S	B, S	B, S	B	S

Dibuje un diagrama de Venn que muestre cómo contestó cada residente a la entrevista.

8. En los siguientes conjuntos, determine si hay conjuntos iguales.

$$A = \{x | x^3 + 6x^2 + 9x = 0\} \qquad B = \{x | x^2 + 3x = 0\}$$

$$C = \{-3, 0\} \qquad D = \{-3, 0, 3\}$$

9. En los conjuntos

$$\mathscr{U} = \{x | x \text{ es entero positivo menor que } 20\} \qquad A = \{5, 10, 15\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10\} \qquad C = \{1, 5, 9, 15, 17\}$$

encuentre:

a) $A \cap B$ *b*) $A \cup B \cup C$
c) $A' \cap B'$ *d*) $A' \cup C'$
e) $A \cap B \cap C$ *f*) $A' \cup B$
g) $A' \cap B$ *h*) $(A \cap B \cap C)'$

10. En la figura 13.21, los números representan la cantidad de elementos contenidos en los diversos subconjuntos. Determine:

a) $n(A)$ *b*) $n(A \cup B)$
c) $n(A \cup B \cup C)$ *d*) $n(\mathscr{U})$
e) $n(A' \cup B)$ *f*) $n(B' \cap C')$
g) $n(B \cap C)$ *h*) $n(A' \cap B' \cap C')$

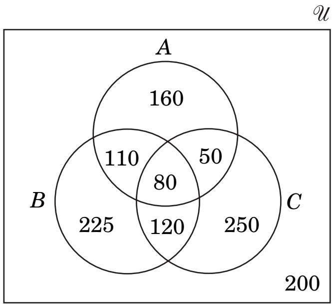


Figura 13.21

SECCIÓN 13.2

11. Un juego consiste en lanzar una moneda, para luego lanzar un dado. Trace un diagrama de árbol que enumere todos los posibles resultados del juego.

12. **Análisis del mercado accionario** Una compañía de corretaje analiza las tendencias del mercado y para ello selecciona muestras de acciones de varias industrias, además de que, basándose en el movimiento de los días anteriores, determina si *no hubo cambio* en el precio, si hubo una *disminución* de precio o bien un *incremento* de precio en la acción. Si se eligen dos acciones, dibuje un árbol de decisión que enumere todos los resultados posibles.

13. Un mayorista de automóviles usados tiene agentes que localizan los vehículos y los valoran con vistas a su compra y reventa. Los clasifican por tamaño (grandes, medianos, compactos y subcompactos), por años de uso (0 a 2 años, 2 a 4 años, 4 a 6 años y más de seis años), por kilometraje en relación con la edad del automóvil (muy grande, grande, promedio, menor al promedio) y estado de la carrocería (excelente, buena, regular y mala). Aplicando el principio fundamental del conteo, calcule el número de posibles clasificaciones de los automóviles.

14. El jefe del servicio de vinos de un restaurante muy elegante está preparándose para seleccionar vinos destinados a un banquete. Durante la noche se servirán cuatro vinos. Uno se servirá junto con el aperitivo. Se dispone de tres opciones para este vino. Se está estudiando la conveniencia de servir cuatro vinos con la ensalada. Se piensan emplear cinco vinos para el entremés y tres después del banquete. ¿Cuántas posibles combinaciones de vinos podrían considerarse para esta comida?

Evalúe las siguientes expresiones factoriales.

15. $\dfrac{10!}{3! \cdot 4!}$

16. $\dfrac{9!}{3! \cdot (6-4)!}$

17. $\dfrac{6!}{6! \cdot 0!}$

18. $\dfrac{8! \cdot 6!}{3! \cdot 4! \cdot 5!}$

19. $\dfrac{10!4!}{6!8!0!}$

20. $\dfrac{10!6!2!}{9!4!}$

21. $\dfrac{0!7!3!}{6!5!}$

22. $\dfrac{20!}{15!8!}$

23. ${}_8P_6 =$

24. ${}_6P_2 =$

25. ${}_7P_4 =$

26. ${}_8P_3 =$

27. ${}_6P_3 =$

28. ${}_8P_2 =$

29. $\dbinom{5}{2} =$

30. $\dbinom{6}{2} =$

31. $\dbinom{8}{5} =$

32. $\dbinom{7}{3} =$

33. $\dbinom{7}{2} =$

34. $\dbinom{8}{6} =$

35. Un entrenador de baloncesto se ha sentido frustrado por no encontrar a los cinco mejores jugadores para incluirlos en su alineación inicial. El equipo consta de 15 jugadores. Si se supone que cualquiera de ellos puede ser seleccionado para cualquiera de las cinco posiciones para la alineación inicial, ¿cuántas alineaciones diferentes pueden formarse?

36. Un candidato político desea visitar seis diferentes ciudades. ¿En cuántos órdenes distintos puede visitar las ciudades?

37. ¿Cuántos números telefónicos pueden marcarse con un código de área de tres dígitos y con un número regional de siete dígitos? (Suponga que cada dígito tiene 10 números posibles.)

38. Un vendedor de automóviles tiene ocho modelos diferentes. Puede mostrar sólo cuatro en la sala de exhibición. ¿Cuántas combinaciones de automóviles podrá seleccionar para la sala?

*__39.__ **Pruebas selectivas para los Juegos Olímpicos** El comité de selección de baloncesto para los Juegos Olímpicos redujo el equipo a 30 jugadores. El entrenador en jefe ha decidido que su equipo final de 12 jugadores estará integrado por tres centros, cinco atacantes y cuatro defensas. De los 30 jugadores restantes, ocho son centros, 13 son atacantes y nueve son defensas. ¿Cuántas escuadras diferentes de 12 jugadores pueden considerarse?

SECCIÓN 13.3

40. La tabla 13.15 contiene algunos datos reunidos sobre un grupo de 3 000 víctimas de robo, robo a casa-habitación o ambos tipos de delitos. A las víctimas se les clasifica como víctimas residenciales o comerciales y por el tipo de delito(s) cometidos. Suponga que se selecciona una víctima de manera aleatoria entre las 3 000. El espacio muestral S de este experimento se compone de los resultados simples $S = \{R/RV, R/BV, R/RB, B/RV, B/BV, B/RB\}$.

a) Determine el conjunto de resultados simples con que se definió el evento compuesto "víctima de robo en casa, solamente".

b) Determine el conjunto de resultados simples con que se definió el evento compuesto "víctima de robo en su casa o domicilio".

Tabla 13.15

	(*RV*) Víctima de robo	**(*BV*) Víctima de robo en casa**	**(*RB*) Víctima de robo y robo en casa**	**Total**
Residencia (*R*)	250	1 200	450	1 900
Negocio (*B*)	400	250	450	1 100
Total	650	1 450	900	3 000

41. En el ejercicio 40 determine, para cada uno de los siguientes conjuntos de eventos, si son mutuamente excluyentes, colectivamente exhaustivos o ambas cosas.

a) $\{R/RV, B/RV, BV, RB\}$

b) $\{B/RV, B/BV, B/RB, RV, BV\}$

c) $\{R, B, RV, RB\}$

d) $\{R/RV, B/RV, R/BV, RB\}$

42. En el ejercicio 40, suponga que una víctima se selecciona en forma aleatoria de este grupo. ¿Qué probabilidades hay de que sea: *a*) una víctima residencial; *b*) una víctima de robo solamente, y *c*) una víctima tanto de robo como de robo en su domicilio?

43. La probabilidad de que un solicitante sea admitido en una escuela para pilotos es de 0.3. Si se selecciona de manera aleatoria a tres solicitantes, ¿qué probabilidades existen de que: *a*) los tres sean admitidos; *b*) no se admita a ninguno, y *c*) se admita sólo a uno de ellos?

44. Un estudiante estima en 0.3 la probabilidad de obtener una A en un curso y en 0.4 la probabilidad de recibir una B. ¿Qué probabilidades hay de que: *a*) no reciba una A; *b*) no reciba una B, y *c*) no reciba ni una A ni una B?

45. Religiones en la Unión Soviética. La tabla 13.16 refleja las preferencias religiosas de las personas que vivían en la Unión Soviética a mediados del decenio de 1980.* Si un ciudadano soviético fuera seleccionado en forma aleatoria en ese tiempo, ¿qué probabilidades había de que dicha persona: *a*) fuera ateo o sin religión; *b*) practicara alguna forma de religión; *c*) fuera protestante, católico o judío, y *d*) no fuese musulmán?

Tabla 13.16

Preferencias religiosas	Número de personas, millones
Ortodoxos	84
Musulmanes	30
Protestantes	8
Católicos	5
Judíos	3
Otras religiones	1
Ateos o no religiosos	137

46. Una urna contiene ocho bolas con puntos verdes, 10 con franjas verdes, 12 con puntos azules y 10 con franjas azules. Si aleatoriamente se extrae una bola de la urna, ¿qué probabilidades existen de que la bola sea: *a*) verde o con franjas; *b*) con puntos, y *c*) azul o con puntos?

47. Clasificaciones de crédito. Una agencia de este tipo clasifica el estado de crédito de una persona como “excelente”, “bueno”, “regular” o “deficiente”. La probabilidad de que un individuo reciba una clasificación de excelente es de 0.20. La probabilidad de obtener una buena clasificación es de 0.35. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona: *a*) no reciba una clasificación de excelente; *b*) no obtenga por lo menos una clasificación de bueno, y *c*) reciba a lo mucho una clasificación de bueno?

48. Preferencias en hieleras para vino Se llevó a cabo una encuesta entre 2 400 consumidores, a fin de determinar su comportamiento de compra en relación con dos de las hieleras para vino de mayor demanda en el mercado. Se averiguó que, en el último verano, 600 habían adquirido la marca *A*, 400 habían comprado la marca *B* y 100 habían adquirido ambas marcas. Si en este grupo se escoge de manera aleatoria a una persona, ¿cuál será la probabilidad de que: *a*) haya comprado la marca *A*; *b*) haya adquirido la marca *A* pero no la marca *B*; *c*) haya comprado la marca *A,* la marca *B* o ambas; *d*) no haya adquirido ninguna de las dos marcas?

---

* Fuente: *World Christian Encyclopedia* (*Enciclopedia del Mundo Cristiano*).

49. **Producción de *home run*** En la tabla 13.17 se muestran algunos datos recabados por la oficina del comisionado de beisbol. En ella se incluyen los *home run* bateados en un partido y la probabilidad de que se logre ese número de *home run*. Si se escoge un partido en forma aleatoria, ¿qué probabilidades hay de que: *a*) no se bateen más de tres *home run*; *b*) se batee por lo menos un *home run*; *c*) se bateen menos de cinco *home run* y que, *d*) se bateen entre uno y tres *home run* (inclusive)?

Tabla 13.17

Home run/partido, (n)	$P(n)$
0	.12
1	.18
2	.26
3	.22
4	.12
Más de 4	.10

SECCIÓN 13.4

50. La probabilidad de que un cliente entre en una tienda determinada para efectuar una compra es de 0.40. Si dos clientes entran en ella, ¿cuál es la probabilidad: *a*) de que los dos hagan una compra; *b*) de que ninguno haga una compra, y *c*) de que exactamente uno de los dos haga una compra?

51. Se lanza un solo dado y cada uno de los lados tiene igual probabilidad de salir. ¿Qué probabilidades existen de que el 6 salga cuatro veces consecutivas?

52. En el ejercicio anterior, ¿qué probabilidad se tiene para que los cuatro lanzamientos produzcan el mismo resultado cada vez?

53. Se selecciona una bola en forma aleatoria de una urna que contiene tres bolas con franjas rojas, ocho bolas rojas sólidas, seis bolas con franjas amarillas, cuatro bolas amarillas sólidas y cuatro bolas con franjas azules.

a) ¿Qué probabilidades hay de que la bola sea amarilla, si tiene franjas?

b) ¿Qué probabilidades existen de que la bola tenga franjas, si es roja?

c) ¿Qué probabilidades hay de que la bola sea azul, si es de color sólido?

54. Las probabilidades de que el precio de una acción particular aumente durante un día de transacciones es de 0.4. Si la naturaleza del cambio de precio en una jornada cualquiera es independiente de lo que haya sucedido en días anteriores, ¿qué probabilidades hay de que el precio: *a*) aumente cuatro días seguidos; *b*) permanezca inalterado o disminuya tres días consecutivos, y *c*) aumente dos días en un periodo de 3 días?

55. Suponga que E y F sean eventos y que $P(E) = 0.2$, $P(F) = 0.5$ y que $P(E \cup F) = 0.60$. Determine: *a*) $P(E \cap F)$; *b*) $P(E|F)$, y *c*) $P(F|E)$.

❑ EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $B = \{-2, 0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ y $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, determine los conjuntos:

a) $A \cap B$

b) $A \cap B \cap C$

c) $A \cup B \cap C$

2. ¿Qué diferencia hay entre los estados de independencia y de dependencia estadística?

3. Un tendero tiene espacio para exhibir tres productos, pero cuenta con seis productos que le gustaría exhibir.

a) ¿Cuántos arreglos diferentes pueden hacerse con los tres productos?

b) ¿Cuántas combinaciones distintas pueden hacerse de los seis productos que pueden exhibir?

4. ¿Qué probabilidades hay de extraer tres naipes, sin reemplazo, de una baraja y sacar tres reyes?

5. Una urna contiene 18 bolas rojas, 14 bolas con franjas rojas, 16 bolas amarillas y 12 bolas con franjas amarillas.

a) Si una bola sacada de la urna tiene franjas, ¿qué probabilidad existe de que sea amarilla?

b) Si una bola extraída de la urna no tiene franjas, ¿qué probabilidad hay de que sea roja?

MINICASO

EL PROBLEMA DEL CUMPLEAÑOS

Una aplicación clásica de la teoría de la probabilidad relaciona la posibilidad, dentro de un grupo de personas, de que dos o más de ellas tengan el mismo cumpleaños. La probabilidad de que ello ocurra depende evidentemente del tamaño del grupo de personas que se considera. Cuanto mayor sea el grupo, más probabilidades habrá. Hagamos algunas suposiciones respecto de este problema. Suponga que existen 365 posibilidades de cumpleaños (sin tener en cuenta el año bisiesto) y que, para cierta persona, cualquiera de esos días puede ser su cumpleaños.

Si se quiere determinar la probabilidad de que dos o más personas de un grupo tengan el mismo cumpleaños, es más fácil calcular la de que no cumpla años el mismo día. Reflexione sobre ello unos momentos. El evento “dos o más personas tienen el mismo cumpleaños” consta de muchas posibilidades. Éstas han de explicar los eventos “tres o más”, “cuatro o más”, etc. Deben explicar, asimismo, los subconjuntos de personas que tienen el mismo cumpleaños (o sea, dos personas nacieron el 5 de junio y tres nacieron el 26 de abril). Por consiguiente, si puede calcularse la probabilidad *p* de que no haya dos personas que cumplan años el mismo día, la probabilidad deseada puede obtenerse como 1 – *p*.

En un grupo de *n* personas, seleccionado de manera aleatoria, el número de resultados de cumpleaños es

$$T = \overbrace{(365)\,(365)\,(365)\cdots(365)}^{n} = (365)^n$$

Si dentro de este grupo de *n* personas no hay dos que cumplan años el mismo día, habrá *n* fechas diferentes de cumpleaños. El número de resultados que satisfacen este evento se calcula como

$$O = (365)\,(364)\,(363)\cdots(365 - n + 1)$$

Así pues, la probabilidad de que en un grupo de personas no haya dos que cumplan años el mismo día es igual a

$$p = \frac{O}{T} = \frac{O = (365)\,(364)\,(363)\cdots(365 - n + 1)}{(365)^n}$$

Se pide:

a) Explicar el fundamento lógico del cálculo de *T*.

b) Explicar el fundamento lógico del cálculo de *O*.

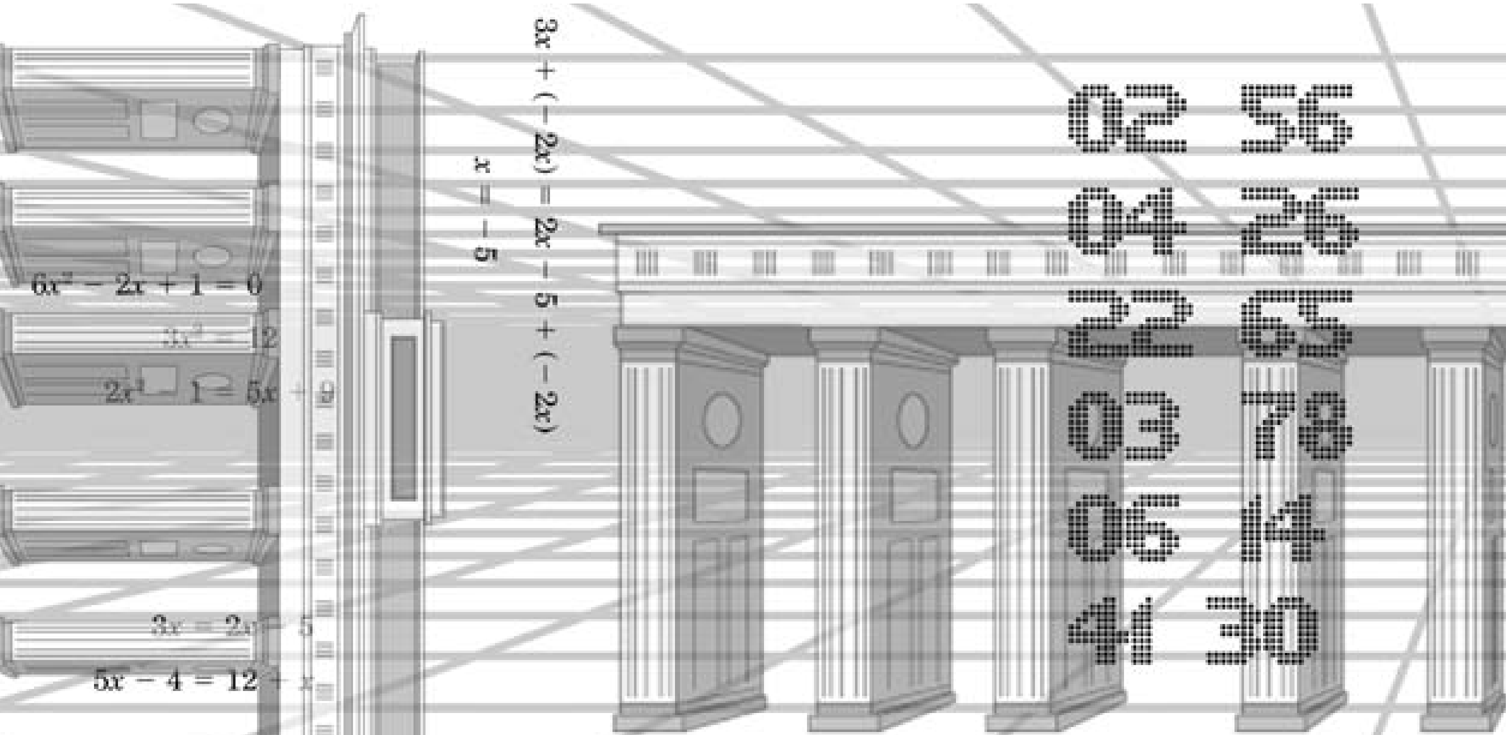
c) Calcu1ar la probabilidad de que dos o más personas tengan el mismo cumpleaños en un grupo de cinco personas elegidas de manera aleatoria.

d) Calcular la misma probabilidad para grupos de 10, 20, 30, 40 y 50 personas.

e) ¿Cuál es el grupo más pequeño de personas para el que la probabilidad de que dos o más de ellas cumplan años en el mismo día excede de 0.50? ¿O rebasa los 0.75?

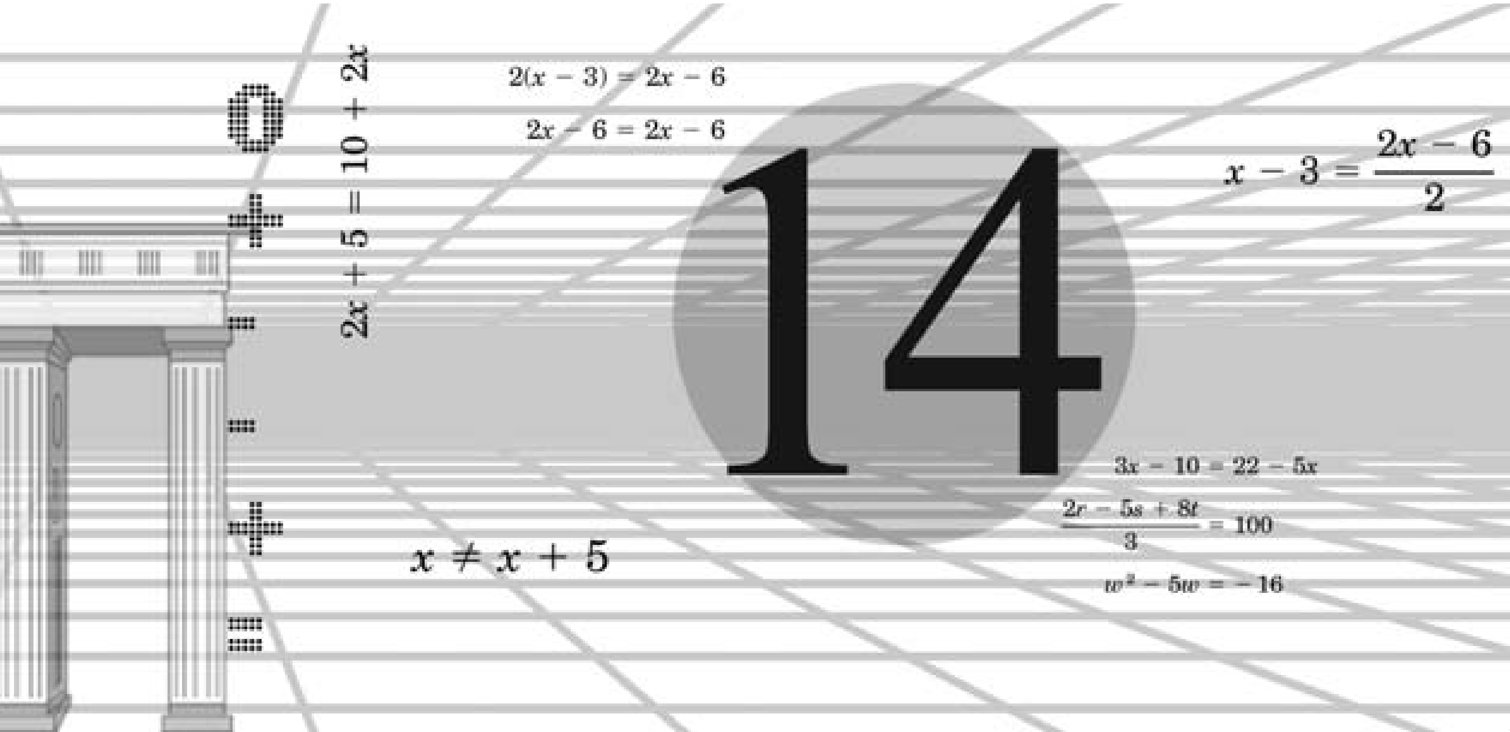
CAPÍTULO 14

Distribuciones de probabilidad



OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Introducir la noción de una variable aleatoria.
- Conseguir que el lector comprenda la distribución de la probabilidad y sus atributos.
- Familiarizar al lector con las características y uso de la distribución de la probabilidad binomial.
- Familiarizar al lector con las características y aplicación de la distribución de la probabilidad normal.



ESCENARIO DE MOTIVACIÓN: Crédito al consumidor

Una importante institución bancaria emite tarjetas de crédito bajo el nombre VISACARD. Ha determinado que, en promedio, 40% de todas las cuentas de tarjetas de crédito se liquidan por completo después de la facturación inicial. Es decir, para cualquier mes, 40% de todas las cuentas que presentaban nuevos cargos en su último estado de cuenta no incurrirán en cargos por intereses. En una muestra de seis cuentas seleccionada de forma aleatoria, se quiere determinar la probabilidad de que ninguna de las seis haya pagado cargos por intereses en sus últimos estados de cuenta (ejemplo 18).

Una rama de las matemáticas recibe el nombre de *estadística*. Ésta se ocupa de la obtención, organización, descripción y análisis de datos. En una aplicación, la finalidad de la estadística suele ser llegar a conclusiones que estén basadas en los datos obtenidos a partir del fenómeno de interés. En el presente capítulo se ofrece una breve introducción a la estadística. En las dos primeras secciones se desarrollarán las nociones de *variables aleatorias*, *distribuciones de frecuencias*, *distribuciones de probabilidad* y algunos atributos especiales de las distribuciones de probabilidad. En las dos últimas secciones se describen las dos distribuciones de probabilidad que más se emplean: las *distribuciones binomial* y *normal*.

14.1 Variables aleatorias y distribuciones de probabilidad

En esta primera sección se expondrán los conceptos de *variables aleatorias*, *distribuciones de frecuencias* y *distribuciones de probabilidad*.

Variables aleatorias

Ejemplo 1

(Administración de un banco de sangre) El director de un banco de sangre de la localidad está preocupado por la cantidad de sangre que se pierde a causa del deterioro. La sangre es un producto perecedero, y su vida útil es de 21 días en este banco. Todos los días el personal debe identificar las unidades de sangre que tengan más de 21 días y quitarlas de los estantes. El número de unidades que es preciso desechar fluctúa diariamente, dependiendo de las tasas de adquisición y de las del uso de sangre. Para conocer mejor el problema, el director quiere efectuar un experimento en el cual se lleve un registro diario del número de unidades extraídas del inventario. En el experimento, los sucesos simples son el número de unidades que se sacan todos los días del inventario. Si X representa esas unidades, el espacio de muestra constará de los valores 0, 1, 2, 3, . . . X es un ejemplo de una *variable aleatoria*, pues su valor fluctúa de modo impredecible. ❑

Definición: Variable aleatoria

Una *variable aleatoria* es una función que asigna un valor numérico a cada evento simple en un espacio de muestra.

Ejemplo 2

(Reconsideración del caso de la oficina de hacienda) En el ejemplo 30 del capítulo 13 (página 628) se estudió la probabilidad de que se cometiera un error en la declaración de impuestos. Se estimó que en una declaración escogida en forma aleatoria la probabilidad de error es de 0.4. En el ejemplo se ana-

Tabla 14.1

Eventos simples en *S*	Variable aleatoria (número de declaraciones que contienen errores) *X*	Probabilidad
EEE	3	(0.4)(0.4)(0.4) = 0.064
EEN	2	(0.4)(0.4)(0.6) = 0.096
ENE	2	(0.4)(0.6)(0.4) = 0.096
ENN	1	(0.4)(0.6)(0.6) = 0.144
NEE	2	(0.6)(0.4)(0.4) = 0.096
NEN	1	(0.6)(0.4)(0.6) = 0.144
NNE	1	(0.6)(0.6)(0.4) = 0.144
NNN	0	(0.6)(0.6)(0.6) = 0.216

lizó un experimento donde se seleccionaron de modo aleatorio tres experimentos y se examinaron en busca de errores. La figura 13.19 (página 629) describe el árbol de probabilidad de este experimento.

El espacio de muestra *S* del experimento se compone de un conjunto de eventos simples

$$S = \{EEE, EEN, ENE, ENN, NEE, NEN, NNE, NNN\}$$

donde cada evento simple representa un resultado posible del análisis de tres declaraciones de impuestos. La tabla 14.1 ofrece un resumen de los eventos junto con sus probabilidades de ocurrencia. En el experimento quizás haya menor interés por la serie de hallazgos sin error y mayor interés por el número de declaraciones que contienen error. Las que contienen error en una muestra de tres declaraciones son 0, 1, 2 o 3. Así pues, podría definirse una variable aleatoria *X* para el experimento, donde *X* representa la cantidad de declaraciones que contienen errores. La variable aleatoria *X* asigna a cada evento simple dentro del espacio de muestra un número: 0, 1, 2 o 3. Estas asignaciones se observan en la tabla 14.1. ❑

Si una variable aleatoria puede adoptar sólo un reducido número de valores bien diferenciados, se le da el nombre de ***variable aleatoria discreta***. Los resultados de un experimento que mida el número de unidades de la demanda diaria de un producto pueden ser representados mediante una variable aleatoria discreta. Y los resultados de un experimento que mida la cantidad de automóviles que pasan por una caseta de cobro cada hora pueden representarse del mismo modo.

Variable aleatoria continua es el nombre que recibe una variable aleatoria que puede asumir cualquiera de la infinidad de valores comprendidos dentro de un intervalo de números reales. En un experimento que selecciona en forma aleatoria a un grupo de personas y registra atributos como estatura o peso, los resultados pueden representarse mediante una variable aleatoria continua. Y lo mismo sucede en el caso de los resultados de un experimento en que se mida el tiempo que un transistor funcionará antes de que se deteriore por el uso.

Distribuciones de las frecuencias

Cuando se realizan experimentos y se hacen observaciones acerca de los valores de las variables aleatorias seleccionadas, se pueden estudiar los datos para determinar si es posible llegar a conclusiones significativas. Una herramienta de gran uso en tales estudios es la ***distribución***

de las frecuencias. Mediante ella se resume cada valor posible de una variable aleatoria, así como el número de ocurrencias, o la ***frecuencia*** para ese valor.

Ejemplo 3

(Administración de un banco de sangre, *continuación*) Considérese el caso del banco de sangre mencionado antes. Para entender mejor el problema del deterioro de la sangre, el director llevó a cabo un experimento en un periodo de 80 días. Al final de cada día se anotaba el *número de unidades que se eliminaban del inventario por haberse deteriorado*, representado por X. Ésta es la variable aleatoria del experimento. La tabla 14.2 es una distribución de las frecuencias que resume los resultados del experimento. Esta distribución de frecuencias muestra en forma adecuada los datos tabulados del experimento.

Tabla 14.2

Distribución de la frecuencia para el deterioro sanguíneo

Unidades extraídas del inventario (X)	Ocurrencias
0	2
1	6
2	8
3	8
4	10
5	16
6	14
7	10
8	6
	80

Luego de estudiar los datos, el director implantó un nuevo programa de administración de la sangre, introduciendo cambios en los programas destinados a obtener sangre y los procedimientos de intercambio de ese producto con otros bancos de sangre que participaban en una cooperativa regional de bancos de sangre. Con objeto de determinar si con las nuevas políticas se había logrado reducir las tasas de pérdida, se efectuó un experimento similar durante un periodo de 50 días. Los resultados se resumen en la distribución de la frecuencia de la tabla 14.3.

Tabla 14.3

Unidades extraídas del inventario (X)	Ocurrencias
0	3
1	5
2	8
3	12
4	9
5	5
6	4
7	3
8	1
	50

Tabla 14.4

Unidades extraídas del inventario (X)	Frecuencia relativa
0	2/80 = 0.025
1	6/80 = 0.075
2	8/80 = 0.100
3	8/80 = 0.100
4	10/80 = 0.125
5	16/80 = 0.200
6	14/80 = 0.175
7	10/80 = 0.125
8	6/80 = 0.075
	80/80 = 1.000

Tabla 14.5

Unidades extraídas del inventario (X)	Frecuencia relativa
0	3/50 = 0.060
1	5/50 = 0.100
2	8/50 = 0.160
3	12/50 = 0.240
4	9/50 = 0.180
5	5/50 = 0.100
6	4/50 = 0.080
7	3/50 = 0.060
8	1/50 = 0.020
	50/50 = 1.000

Aunque las tablas 14.2 y 14.3 contienen los datos reunidos respecto de la misma variable aleatoria, no es fácil comparar directamente los resultados de ambos experimentos debido a la diferente duración de ellos (80 y 50 días, respectivamente). A fin de hacer más comparables los datos, puede obtenerse en cada experimento la ***frecuencia relativa*** de cada valor de la variable aleatoria. Esto se hace dividiendo el número de ocurrencias (la frecuencia) entre el número total de observaciones del experimento. En las tablas 14.4 y 14.5 se incluyen los resultados de los experimentos en que se usan frecuencias relativas.

No nos detendremos a tratar de sacar conclusiones concernientes a los resultados de los dos experimentos. Una ojeada rápida dará la impresión de que, con las nuevas políticas, se podrían haber aminorado las pérdidas (basados en el experimento de 50 días de duración). En el presente análisis, lo que se pretende es dar ejemplos de la aplicación de las distribuciones de la frecuencia como herramientas para tabular y presentar los resultados de estudios de procesos aleatorios. ❑

Distribuciones de la probabilidad

Una ***distribución de la probabilidad*** es una lista completa de todos los valores posibles de una variable aleatoria junto con las probabilidades de cada uno. Si una variable aleatoria discreta X puede asumir n valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ que tengan las respectivas probabilidades

Tabla 14.6

Distribución de probabilidad discreta generalizada

Valor de la variable aleatoria ($X = x_i$)	Probabilidad $P(x_i)$
x_1	p_1
x_2	p_2
x_3	p_3
.	.
.	.
.	.
x_n	$\underline{p_n}$
	1.0

de ocurrencia $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, en la tabla 14.6 se indica la correspondiente **distribución de probabilidad discreta**. Puesto que todos los valores posibles de una variable aleatoria quedan incluidos en una distribución de la probabilidad, la suma de las probabilidades siempre será igual a 1. Las frecuencias relativas que se dan en las tablas 14.4 y 14.5 pueden interpretarse como probabilidades. En consecuencia, las dos tablas ofrecen ejemplos de dos distribuciones de la probabilidad.

Ejemplo 4

En el ejemplo 2 se analizó un experimento donde se seleccionaban en forma aleatoria y se examinaban tres declaraciones de impuestos, para determinar si contenían errores. En la tabla 14.1 se mostró la asignación de valores de la variable aleatoria a cada evento simple del espacio de muestra. Una vez conocidas las probabilidades de cada evento simple y hecha la definición de variable aleatoria, el siguiente paso lógico consiste en construir la correspondiente distribución de la probabilidad.

Los posibles valores de la variable aleatoria "número de declaraciones que contienen error" son 0, 1, 2 y 3. Para construir la distribución de la probabilidad, basta identificar todos los eventos simples relacionados con cada valor específico de la variable aleatoria y sumar las probabilidades de que los eventos alcancen la probabilidad de ese valor aleatorio. Así, los eventos simples asociados al valor $X = 2$ son *EEN*, *ENE* y *NEE*. Al sumar las probabilidades de estos tres eventos mutuamente excluyentes, como se muestra en la tabla 14.7, se llega a la conclusión de que $P(X = 2) = 0.288$. Si se aplica un proceso análogo a los otros valores de X, el resultado es la distribución de la probabilidad de la tabla 14.8.

Tabla 14.7

Eventos simples en *S*	Variable aleatoria (número de declaraciones con errores) X	Probabilidad	
EEE	3	0.064	
EEN	2	0.096	
ENE	2	0.096	$P(X = 2) = 0.288$
ENN	1	0.144	
NEE	2	0.096	
NEN	1	0.144	
NNE	1	0.144	
NNN	0	0.216	

Tabla 14.8

Distribución de probabilidad discreta del ejemplo de hacienda

Número de declaraciones con errores (X)	**Probabilidad $P(X)$**
0	0.216
1	0.432
2	0.288
3	0.064
	1.000

❑

Debieran considerarse las siguientes propiedades generales en relación con las distribuciones de probabilidad:

Propiedades de las distribuciones de probabilidad discreta

Dada una variable aleatoria discreta X que puede adoptar n valores $x_1, x_2, x_3,..., x_n$:

1. *Sólo una probabilidad* $P(X = x_i)$ *deberá asignarse a cada valor de la variable aleatoria.*
2. $0 \leq P(X = x_i) \leq 1$ *para toda* x_i.
3. $P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + ... + P(X = x_n) = 1.0$.

Histogramas

Los ***histogramas*** son una excelente representación gráfica de las distribuciones de frecuencias y de las distribuciones de probabilidad discreta. Un histograma puede ser un tipo de gráfica de barras que consta de un conjunto de rectángulos, uno para cada posible resultado o valor de la variable aleatoria. El ancho de los rectángulos es 1, y la altura es la probabilidad (o frecuencia relativa) del resultado particular. La figura 14.1 muestra histogramas de las dos distribuciones de probabilidad en el ejemplo del banco de sangre. Los histogramas proporcionan un perfil de las dos distribuciones y con ello facilitan la comparación de los resultados conseguidos en los dos experimentos. Sin realizar un análisis formal, los histogramas parecen sugerir que las políticas recién instituidas tal vez hayan contribuido a reducir las pérdidas atribuibles al deterioro o descomposición de la sangre.

Hay que hacer otra aclaración en cuanto a los histogramas. Cuando se usan para representar distribuciones de probabilidad discreta, el área de cada rectángulo es igual a la probabilidad de ocurrencia del valor correspondiente de la variable aleatoria. Ello se debe a que el ancho de un rectángulo es 1 y su altura es la probabilidad. Así pues, si se calcula el área de cada rectángulo y se suman las de todos ellos, el área total será de 1.0.

Ejemplo 5

(Filas de espera en el banco) A un banco de la localidad le preocupa el tiempo que los clientes deben esperar para que los atiendan los cajeros. Un estudio con 500 clientes dio origen a la distribución de probabilidad que aparece en la tabla 14.9. El tiempo de espera (en minutos) por cliente constituye la variable aleatoria.

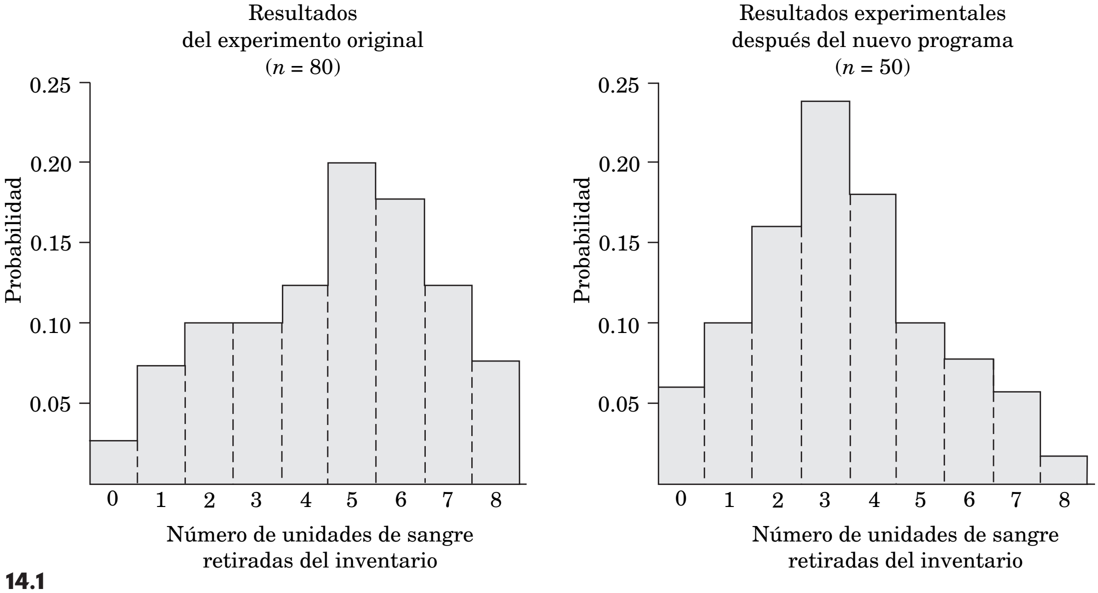


Figura 14.1

a) ¿Qué probabilidad hay de que un cliente espere a que lo atienda un cajero?

b) ¿Qué probabilidad existe de que un cliente espere menos de dos minutos? ¿Y más de tres minutos?

Tabla 14.9

Tiempo de espera, X, minutos	$P(X)$
0	0.32
1	0.24
2	0.18
3	0.12
4	0.09
5	0.05
	1.00

SOLUCIÓN

a)
$$\begin{aligned} P(\text{espera}) &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= 0.24 + 0.18 + 0.12 + 0.09 + 0.05 \\ &= 0.68 \end{aligned}$$

Este resultado se podría haber determinado así:

$$\begin{aligned} P(\text{espera}) &= 1 - P(\text{sin espera}) \\ &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - 0.32 \\ &= 0.68 \end{aligned}$$

b) $P(\text{espera} < 2 \text{ minutos}) = P(X = 0) + P(X = 1)$
$= 0.32 + 0.24$
$= 0.56$

$P(\text{espera} > 3 \text{ minutos}) = P(X = 4) + P(X = 5)$
$= 0.09 + 0.05$
$= 0.14$ ❑

Sección 14.1 Ejercicios de seguimiento

1. Dadas las siguientes variables aleatorias para una serie de experimentos, ¿cuáles son discretas y cuáles son continuas?
   - *a*) El peso de los alumnos de una escuela de enseñanza media.
   - *b*) El número de cigarros que se fuman diariamente.
   - *c*) La temperatura corporal de una persona en cierto momento.
   - *d*) La talla de un recién nacido.
   - *e*) El número de solicitudes de asistencia social que todos los días recibe una oficina.
   - *f*) La cantidad de agua que una comunidad consume al día.
   - *g*) El número de granos de arena que todos los días hay en una playa.
   - *h*) La vida útil de una batería tamaño "AA".
2. **Obras públicas** El director de obras públicas de una ciudad de Nueva Inglaterra ha verificado los registros del municipio para averiguar el número de nevadas que han caído en los últimos 50 años. La tabla 14.10 contiene una distribución de frecuencias que resume los resultados.
   - *a*) Construya la distribución de probabilidad para este estudio.
   - *b*) Dibuje un histograma para esta distribución.
   - *c*) ¿Qué probabilidad hay de que caigan más de dos grandes tormentas en un año determinado? ¿Y de que caigan tres o menos?

Tabla 14.10

Número de tormentas	Frecuencia
0	3
1	5
2	10
3	13
4	8
5	16
6	5
	60

3. **Protección contra incendios.** El jefe de bomberos de un pequeño departamento de voluntarios recopiló datos sobre el número de falsas alarmas que recibieron diariamente en los últimos 360 días. La tabla 14.11 presenta una distribución de frecuencias que sintetiza los resultados.
   - *a*) Construya la distribución de probabilidad para este estudio.
   - *b*) Dibuje un histograma de la distribución.
   - *c*) ¿Qué probabilidad hay de que en un día determinado haya menos de cuatro falsas alarmas? ¿Y de que haya tres o más?

Tabla 14.11

Número de alarmas falsas	Frecuencia
0	75
1	80
2	77
3	40
4	28
5	24
6	20
7	16
	360

4. **Control de calidad** Las series de producción para un producto en particular se realizan en tamaños de lote de 100 unidades. Cada unidad se inspecciona para cerciorarse de que no tenga defecto en absoluto. El número de unidades defectuosas por serie parece ser aleatoria. Un ingeniero de control de calidad ha reunido datos relativos a la cantidad de unidades defectuosas en las últimas 50 series de producción. En la tabla 14.12 se muestra una distribución de las frecuencias que resume los resultados.
   - *a*) Construya la distribución de la probabilidad para este estudio.
   - *b*) Dibuje un histograma de la distribución.
   - *c*) ¿Qué probabilidad hay de que una serie de producción dé por resultado menos de 10 unidades defectuosas? ¿Y que dé más de l0?

Tabla 14.12

Número de unidades defectuosas	Frecuencia
5	3
6	4
7	4
8	6
9	9
10	11
11	8
12	4
13	0
14	1
	50

5. **Manejo en estado de ebriedad** La policía de una localidad ha establecido un programa de retenes, con el propósito de verificar la sobriedad de los conductores. Los automóviles son seleccionados en forma aleatoria y se examinan en busca de signos de excesiva ingestión de bebidas alcohólicas. Si se sospecha que un conductor ha ingerido demasiado alcohol, se le aplican pruebas estándar de sobriedad. Al valorar la eficacia del programa, un teniente de policía recabó datos sobre las actividades en 150 retenes de calles. Quiere determinar el número de conductores a quienes se ha sorprendido en estado de ebriedad por cada bloqueo de calles. En la tabla 14.13 se resumen los resultados.

Tabla 14.13

Número de conductores ebrios	Frecuencia
0	8
1	20
2	26
3	28
4	26
5	16
6	14
7	10
8	2
	150

a) Construya la distribución de probabilidad de este estudio.
b) Dibuje un histograma de la distribución.
c) ¿Qué probabilidad hay de que un retén de calles identifique a conductores ebrios? ¿Y de que identifique cinco o más?

6. Construya la distribución de probabilidad discreta que corresponde al experimento de lanzar una moneda ferial tres veces. Suponga que la variable aleatoria X sea el número de veces que cae cara en tres lanzamientos. ¿Qué probabilidad hay de que dos o más veces caiga cara?

7. Construya una distribución de probabilidad discreta que corresponda al experimento de lanzar una sola vez un par de dados. Suponga que haya igual probabilidad de que caiga cada lado o cara del dado y que la variable aleatoria X sea la suma de puntos que aparecen en el par.

8. **Desempleo** Las estadísticas del desempleo en un estado occidental de la Unión Americana indican que 6% de las personas elegibles para trabajar carecen de empleo. Suponga que se lleva a cabo un experimento y en él se seleccionan en forma aleatoria tres personas y se apunta si tienen empleo o no. Si la variable aleatoria de este experimento se define como el número de desempleados: *a*) construya la distribución de probabilidad de este experimento y determine la probabilidad de que: *b*) ninguna de las tres estén desempleadas y *c*) dos o más estén desempleadas.

9. La tabla 14.14 es una distribución de probabilidad para la variable aleatoria X.
a) Determine la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X^2.
b) Determine la distribución de probabilidad de la variable aleatoria $X + 1$.

Tabla 14.14

X	$P(X)$
1	0.15
2	0.20
3	0.30
4	0.25
5	0.15

10. Suponiendo que una variable aleatoria pueda adoptar valores de 0, 1, 2 y 3, ¿cuáles de los siguientes casos satisfarán las condiciones para ser distribuciones de probabilidad?
a) $P(X = 0) = \frac{1}{6}, P(X = 1) = \frac{1}{3}, P(X = 2) = 0, P(X = 3) = \frac{1}{2}$
b) $P(X = 0) = 0.2, P(X = 1) = 0.3, P(X = 2) = 0.2, P(X = 3) = 0.1$
c) $P(X = 0) = 0.1, P(X = 1) = 0.25, P(X = 2) = 0.15, P(X = 3) = 0.2, P(X = 4) = 0.3$
d) $P(X = 0) = 0.18, P(X = 1) = 0.23, P(X = 2) = 0.26, P(X = 3) = 0.33$

14.2 Medidas de la tendencia central y variación

Dado un conjunto de datos reunidos durante algún experimento, con frecuencia se desea describirlos mediante una sola medida o número. El número que se escoja dependerá del atributo o cualidad particular que se quiera describir. En ciertos experimentos se querrá describir los extremos de los valores de los datos. En tales casos podría encontrarse el más pequeño, el mayor o ambos en el conjunto de datos. Por ejemplo, un estudio dedicado a los partos múltiples en ratones debido a la administración de un fármaco que aumente la fertilidad podría concentrarse en el número más alto de partos en un ratón cualquiera. En otro experimento, tal vez se desee conocer el total o la suma de los valores de un conjunto de datos. En un experimento que registre la cantidad de puntos encestados por Larry Bird o Michael Jordan en determinada temporada, se querrán describir los datos calculando el total de puntos conseguidos en la temporada.

La media

En la mayor parte de los experimentos se busca describir el centro, o parte media, del conjunto de datos. Se cuenta con varias medidas para describir ese atributo, y se les da el nombre de ***medidas de posición central*** o ***medidas de tendencia central***. Entre ellas, la ***media aritmética***, o más simplemente la ***media***, es la de mayor uso. En el lenguaje común se le conoce con el nombre de ***promedio***. ***La media*** ($\bar{x}$) ***de un conjunto de valores*** $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ***es la suma de los valores divididos entre el número total de valores (n) en el conjunto***, o bien

$$\boxed{(\bar{x}) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}} \qquad \textbf{(14.1)}$$

Ejemplo 6 Un estudiante ha realizado cinco exámenes en un curso de matemáticas en la universidad. Las calificaciones que obtuvo fueron 78, 96, 82, 72 y 92. La calificación media de esos exámenes es

$$\bar{x} = \frac{78 + 96 + 82 + 72 + 92}{5}$$

$$= \frac{420}{5} = 84.0$$

Nótese, en este ejemplo, que la media no es igual a ninguna de las calificaciones reales. Sin embargo, nos da una medida de la calificación “promedio” del estudiante en los cinco exámenes.

Ejemplo 7 La nómina quincenal de los 3 225 empleados de una gran compañía de manufactura es de $3 100 000. Determine el sueldo quincenal promedio de la empresa.

SOLUCIÓN

En este ejemplo no se dan las observaciones individuales (sueldos quincenales) de cada empleado. Sin embargo, se proporciona el total de las observaciones y el número de empleados. Por lo tanto, el sueldo quincenal promedio se calcula como

$$\bar{x} = \frac{\$3\,100\,000}{3\,225}$$

$$= \$961.24 \text{ (redondeado al centavo más cercano)}$$ ❑

Tratándose de grandes conjuntos de datos en que varios resultados se presentan con distinta frecuencia, se puede modificar la ecuación (14.1) y reducir así el número de cálculos. **Dado un conjunto de valores $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, que ocurren con las respectivas frecuencias, $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$, la media se calcula así:**

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + \cdots + x_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n}} \tag{14.2}$$

Ejemplo 8 En la tabla 14.2 (página 652) se indicó la distribución de frecuencias del experimento del banco de sangre que duró 80 días. Mediante la ecuación (14.2) puede determinarse el número medio de unidades que diariamente se extraen del inventario.

$$\bar{x} = \frac{(0)(2) + (1)(6) + (2)(8) + (3)(8) + (4)(10) + (5)(16) + (6)(14) + (7)(10) + (8)(6)}{2 + 6 + 8 + 8 + 10 + 16 + 14 + 10 + 6}$$

$$= \frac{368}{80}$$

$$= 4.6$$

En el experimento de 80 días de duración, el número promedio de unidades eliminadas del inventario por descomposición o deterioro fue de 4.6 al día. ❑

Ejercicio de práctica

Calcule la media para el siguiente conjunto de resultados.

Valor de x	*Frecuencia de la ocurrencia*
20	5
30	8
40	12
50	6

Respuesta: 36.129.

En un conjunto de datos, los valores extremos del mismo pueden ejercer profundo efecto en la media. Supóngase que cinco personas participaron en un pequeño torneo de golf y sus respectivas puntuaciones fueron 72, 76, 80, 78 y 140. La puntuación media del grupo es 89.2; sin embargo, la alta calificación de 140 produce un efecto significativo al momento de calcular la media. La puntuación media de los otros cuatro jugadores es 76.5. En grupos de datos como éste, conviene recurrir a otras clases de medidas para describir la posición central.

La mediana

Otra de las medidas de posición central es la ***mediana***. **Cuando el número total de datos individuales *es impar*, *la mediana es el valor del elemento medio cuando los datos individuales se disponen por orden creciente o decreciente.*** En el ejemplo del juego de golf, la puntuación mediana se obtiene colocando primero las puntuaciones en orden creciente (o decreciente). Como se aprecia, el elemento de la mitad es 78, y es la mediana del conjunto de datos.

$$72 \qquad 76 \qquad \boxed{78} \qquad 80 \qquad 140$$

Cuando el número total de datos individuales *es par*, la mediana es la media de los dos datos individuales que ocupan la posición intermedia dentro del conjunto de datos.

Ejemplo 9 **(La Sociedad Audubon)** Una filial local de esta sociedad dedicó el fin de semana a realizar una encuesta de población sobre una especie particular de aves. En ella participaron 20 miembros de la sociedad y sus observaciones totales confirmadas se incluyen a continuación, dispuestas por orden creciente de magnitud. Dado un número par de elementos individuales, los dos miembros de la mitad son los que ocupan las posiciones 10 y 11. En este conjunto de datos, los números en esas posiciones son "9" y "10". Hay nueve elementos individuales menores (o iguales) que "9", y existen nueve elementos individuales mayores que "10". Por consiguiente, la mediana es la media de esos dos elementos situados a la mitad, es decir, que resulta ser igual a (9 + 10)/2 = 9.5.

$$4,\ 5,\ 5,\ 6,\ 7,\ 7,\ 9,\ 9,\ 9,\ \boxed{9,\ 10,}\ 12,\ 13,\ 15,\ 15,\ 17,\ 20,\ 25,\ 26,\ 30$$ ❑

La moda

Otra medida que algunas veces se utiliza para describir la parte media de un conjunto de datos es la ***moda***. ***La moda es el valor de los datos que se presentan con la mayor frecuencia.*** La utilización de la moda como medida de posición central ofrece dos ventajas: 1) no exige cálculos y 2) puede servir para describir datos cuantitativos y cualitativos (por ejemplo, color, sexo y calificaciones literales en un curso).

Ejemplo 10 En el ejemplo anterior la moda es 9. Es decir, el número de observaciones que tuvo una frecuencia más alta fue el 9. Cuatro miembros de la Sociedad Audubon dijeron haber hecho nueve observaciones. La segunda frecuencia más alta fue dos y se relacionó con tres valores diferentes en el conjunto de datos: "5", "7" y "15".

Ejemplo 11 **(Conjuntos de datos cualitativos)** Una nueva aerolínea regional efectuó una encuesta entre sus primeros 20 000 pasajeros a fin de conseguir retroalimentación en cuanto al servicio que ofrece. A cada pasajero se le pidió valorar la calidad global del servicio. En la tabla 14.15 se da un resumen de las respuestas. Nótese que las respuestas en el experimento son de carácter cualitativo, no cuantitativo. No obstante, puede afirmarse que la moda, o "respuesta modal", en el experimento es "muy buena". Más pasajeros dieron esta respuesta más que ninguna de las otras.

Tabla 14.15

Respuestas	Entrevistados
Excelente	4 532
Muy bueno	8 849
Bueno	5 953
Deficiente	531
Muy malo	135

❑

Media de una distribución de probabilidad discreta

Media de una distribución de probabilidad discreta

Si una variable aleatoria discreta X puede adoptar n valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que tengan las respectivas probabilidades de ocurrencia $p_1, p_2, \ldots, p_n$, el *valor medio* μ de la variable aleatoria es

$$\mu = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n \qquad \textbf{(14.3)}$$

PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR

La ecuación (14.3) se deduce directamente de la ecuación (14.2). ¿Puede demostrar esto?

Ejemplo 12

Suponga que las tablas 14.4 y 14.5 (página 653) presentaron las distribuciones de probabilidad real para el número de unidades de sangre que se descomponen en un día determinado en el ejemplo del banco de sangre. Calcule las medias para estas dos distribuciones haciendo uso de la ecuación (14.3). Para la tabla 14.4,

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 0(0.025) + 1(0.075) + 2(0.100) + 3(0.100) + 4(0.125) + 5(0.200) + 6(0.175) + 7(0.125) + 8(0.075)\\ &= 4.60 \text{ unidades por día}\end{aligned}$$

Para la tabla 14.5,

$$\begin{aligned}\mu_2 &= 0(0.060) + 1(0.100) + 2(0.160) + 3(0.240) + 4(0.180) + 5(0.100) + 6(0.080) + 7(0.060) + 8(0.020)\\ &= 3.42 \text{ unidades por día}\end{aligned}$$

Así pues, antes de instituir el nuevo programa de la administración de sangre, el número medio de unidades de sangre deterioradas fue de 4.6 (el mismo valor que el calculado en el ejemplo 8). Después de implantar las nuevas políticas, la media fue de 3.42 unidades por día. En promedio, parece haberse tenido una disminución en el porcentaje de descomposición.

Ejemplo 13 **(Número telefónico para casos de drogadicción)** Una ciudad ha establecido una línea telefónica de atención a fin de ofrecer ayuda a quienes desean superar sus problemas de drogadicción. El director del programa reunió datos sobre la cantidad de llamadas recibidas cada día. La tabla 14.16 contiene la distribución de probabilidad de esta variable aleatoria. ¿Cuál es el número medio de llamadas por día?

SOLUCIÓN

Si se utiliza la ecuación (14.3), el número medio de llamadas por día es

$$\mu = 5(0.08) + 6(0.14) + 7(0.18) + 8(0.24) + 9(0.16) + 10(0.10) + 11(0.08) + 12(0.02)$$
$$= 7.98$$

Tabla 14.16

Llamadas por día (X)	$P(X)$
5	0.08
6	0.14
7	0.18
8	0.24
9	0.16
10	0.10
11	0.08
12	0.02
	1.00

❏

La desviación estándar

En las distribuciones de probabilidad, la media ofrece una medida de la posición central de los datos. Pero éste no es más que uno de los atributos del conjunto de datos. Con objeto de describir en forma más completa los datos, conviene estudiar otros atributos. Un atributo muy importante que no describe la media es la *dispersión* o variabilidad de los datos. Considérense las dos distribuciones de probabilidad de la tabla 14.17. Ambas tienen la misma media, $\mu = 50$. Sin embargo, la variación de los valores en las dos variables aleatorias es muy diferente.

Tabla 14.17

X_1	$P(X_1)$	X_2	$P(X_2)$
49	0.05	0	0.05
50	0.90	50	0.90
51	0.05	100	0.05

A fin de describir la variabilidad que existe en un conjunto de datos, puede recurrirse a alguna ***medida de variación***. Una manera de medir la variación en un conjunto de datos es señalar los extremos de la misma. El ***intervalo*** de un conjunto de datos es la diferencia entre los valores más grande y más pequeño del conjunto. Recuérdense ahora los cinco jugadores de golf y sus puntuaciones de 72, 76, 78, 80 y 140. La puntuación más baja del grupo fue 72 y la más alta 140. En consecuencia, el intervalo en este conjunto de datos es 140 – 72 = 68. Si se considera este resultado como una medida de la variación de las puntuaciones, se advierte una considerable variabilidad. En el conjunto de datos, la realidad es que cuatro de las puntuaciones muestran relativamente poca variación entre sí. La puntuación de 140 es atípica. Este ejemplo muestra que el intervalo es una medida fácil de calcular y entender. Sin embargo, no suministra información sobre los valores de los datos que se encuentran entre los extremos.

Una cualidad importante de una medida de variación es que deberá ser pequeña cuando los valores de los datos se agrupan estrechamente en torno a la media y deberán ser grandes cuando se dispersan de manera amplia alrededor de la media. Así pues, una manera de medir la variación podría ser determinar la distancia a que cada punto de datos se encuentra respecto de la media. Si el conjunto de datos consta de n elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y si la media de este conjunto de datos es $\bar{x}$, las distancias de n puntos de datos respecto de la media se representarían con $(x_1 - \bar{x}), (x_2 - \bar{x}), \ldots, (x_n - \bar{x})$. A estas diferencias se les llama ***desviaciones respecto de la media***. Si se suman estas desviaciones y se dividen entre n, el resultado será la ***desviación promedio respecto de la media***. Por desgracia, siempre resulta que la suma de las desviaciones respecto de la media es cero. (Véase el ejercicio de seguimiento 18.) La suma de todas las desviaciones positivas respecto de la media siempre es igual a la suma de las desviaciones negativas; en consecuencia, se compensan mutuamente. De ahí que la desviación promedio respecto de la media invariablemente sea cero. Por ello, no es una buena medida de variación.

Aun cuando la *suma* de las desviaciones respecto de la media sea cero, cada desviación *individual* es una medida útil de variación para esos datos individuales en particular. Si se toman las desviaciones individuales y se elevan al cuadrado, se puede obtener una medida útil de variación. Al elevarlas al cuadrado y al dividir el resultado entre n se obtiene la *media de los cuadrados de las desviaciones.* Y esa media suele recibir el nombre de ***varianza***. ***Si un conjunto de datos se compone de n elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, y la media de este conjunto es $\bar{x}$, la varianza del conjunto de datos será***

$$\boxed{\mathrm{Var}(x) = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}} \tag{14.4}$$

Debido a que se elevan al cuadrado las desviaciones respecto de la media a fin de obtener la varianza, esta medida de variación no refleja exactamente la magnitud verdadera de la variación en el conjunto de datos. Para corregir esto, puede definirse otra medida de la variación tomando la raíz cuadrada de la varianza. A esa medida de variación se le llama ***desviación estándar*** y se representa con la letra griega σ (sigma). Por lo tanto,

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(x)} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}} \tag{14.5}$$

La desviación estándar es la medida más común de variación para un conjunto de números aleatorios.

Ejemplo 14 En el ejemplo 6 se determinó la puntuación promedio de un estudiante que había realizado cinco exámenes durante un curso de matemáticas a nivel universitario. La puntuación promedio, si las calificaciones en los cinco exámenes fueron 78, 96, 82, 72 y 92, fue $\bar{x} = 84.0$. He aquí la varianza de este conjunto de datos:

$$\begin{aligned}\text{Var}(x) &= \frac{(78-84)^2+(96-84)^2+(82-84)^2+(72-84)^2+(92-84)^2}{5}\\ &= \frac{(-6)^2+(12)^2+(-2)^2+(-12)^2+(8)^2}{5}\\ &= \frac{36+144+4+144+64}{5}\\ &= \frac{392}{5} = 78.4\end{aligned}$$

La desviación estándar es igual a la raíz cuadrada de la varianza, o sea

$$\sigma = \sqrt{78.4} = 8.85$$ ❑

Hay algunas relaciones importantes que incluyen la desviación estándar y que pueden ser útiles para llegar a conclusiones respecto de un conjunto de datos. En particular, se explicará una de ellas en la sección 14.4. Si bien podría dedicarse mucho más tiempo a analizar ésta y otras medidas de variación, en este capítulo el tema central lo constituyen las distribuciones de probabilidad. Por eso, esta sección termina explicando la desviación estándar como una medida de variación para las distribuciones de probabilidad discreta.

Desviación estándar: Distribución de probabilidad discreta

Dada una variable aleatoria discreta X que pueda tomar n valores $x_1, x_2,\ldots, x_n$, con probabilidades respectivas de ocurrencia $p_1, p_2,\ldots, p_n$, la **desviación estándar** de la variable aleatoria con media μ es

$$\sigma = \sqrt{(x_1-\mu)^2p_1+(x_2-\mu)^2p_2+\cdots+(x_n-\mu)^2p_n} \qquad \textbf{(14.6)}$$

Ejemplo 15 A continuación se calcularán las desviaciones estándar de las dos distribuciones de la tabla 14.17. Para la primera distribución,

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{(49-50)^2(0.05)+(50-50)^2(0.90)+(51-50)^2(0.05)}\\ &= \sqrt{0.05+0+0.05} = \sqrt{0.10} = 0.3162\end{aligned}$$

para la segunda distribución,

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{(0-50)^2(0.05)+(50-50)^2(0.90)+(100-50)^2(0.05)}\\ &= \sqrt{125+0+125} = \sqrt{250} = 15.81\end{aligned}$$ ❑

Ejercicio de práctica

Calcule la desviación estándar de las distribuciones de probabilidad (tablas 14.4 y 14.5) en el ejemplo del banco de sangre. *Respuesta:* $\sigma_1 = 2.107$, $\sigma_2 = 1.919$.

Sección 14.2 Ejercicios de seguimiento

En los siguientes conjuntos de datos, calcule: *a*) la media, *b*) la mediana, *c*) la moda, *d*) el intervalo (rango) y *e*) la desviación estándar.

1. {20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200}
2. {5, 10, 40, 20, 35, 20, 50, 0, 5, 15, 25, 30, 20, 40, 45}
3. {30, 36, 28, 18, 42, 10, 20, 52}
4. {100, 500, 800, 400, 600, 500, 700, 800, 700, 400, 800, 200}
5. {60, 63, 45, 57, 75, 105, 15, 60, 40, 80}
6. {0, –25, 40, –20, 25, –40, 20, 0, 0}
7. Determine la media, la mediana y la moda para las siguientes distribuciones de frecuencia.

Valor de *X*	20	30	40	50	60
Frecuencia	8	12	10	16	6

8. Determine la media, la mediana y la moda para la siguiente distribución de frecuencias.

Valor de *X*	1 000	2 000	3 000	4 000	5 000
Frecuencia	20	15	10	25	10

9. **Control de incendios forestales** En la tabla 14.18 se resumen los datos de un experimento en que el departamento de control ambiental llevó un registro de los incendios forestales comunicados a las autoridades diariamente durante un periodo de 60 días. Determine la media, la mediana y la moda de estos datos e interprete el significado de cada una.

Tabla 14.18

Incendios forestales por día	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Frecuencia	10	8	6	6	5	9	7	5	4

10. **Ausentismo** A una empresaria le preocupa mucho el ausentismo de los empleados en su compañía. Las relaciones entre sindicato y empresa han sido tensas durante los últimos meses por la imposibilidad de llegar a un acuerdo respecto del nuevo contrato de los 50 empleados afiliados al sindicato. En la tabla 14.19 se sintetizan los datos que la compañía empresaria ha reunido sobre el ausentismo diario en los últimos 30 días laborales. Determine la media, la mediana y la moda de estos datos, e interprete el significado de esas medidas.

Tabla 14.19

Número de ausencias	4	5	6	7	8
Frecuencia	3	5	8	10	4

11. La tabla 14.20 presenta una distribución de probabilidad discreta relacionada con la demanda diaria de un producto.

a) Determine la media de la demanda diaria.

b) ¿Cuál es la desviación estándar de la demanda diaria?

Tabla 14.20

Número de demandas diarias (X)	**$P(X)$**
10	0.08
20	0.24
30	0.28
40	0.30
50	0.10
	1.00

12. Un producto manufacturado consta de cinco componentes eléctricos. Cada uno tiene vida útil limitada. La compañía sometió el producto a pruebas para medir la confiabilidad de los componentes. La tabla 14.21 es una distribución de la probabilidad donde la variable aleatoria X indica el número de componentes que tienen alguna falla en las primeras 100 horas de operación.

a) ¿Cuál es el número promedio de componentes que presentan fallas durante las primeras 100 horas de operación?

b) ¿Cuál es la desviación estándar de la variable aleatoria X?

c) Si el producto sigue funcionando en caso de que no tengan fallas más de dos componentes, ¿qué porcentaje de las partes manufacturadas seguirá operando en las primeras 100 horas?

Tabla 14.21

Número de componentes que fallan (X)	**$P(X)$**
0	0.05
1	0.09
2	0.22
3	0.32
4	0.20
5	0.12
	1.00

13. Calcule las respectivas medias y las desviaciones estándar de las dos distribuciones de la tabla 14.22.

Tabla 14.22

X_1	$P(X_1)$	X_2	$P(X_2)$
500	1	0	0.050
		100	0.125
		300	0.200
		500	0.250
		700	0.200
		900	0.125
		1 000	0.050
			1.000

14. En el ejercicio 2 de la sección 14.1 calcule: *a*) la media de grandes nevadas por año y *b*) la desviación estándar de distribución de la probabilidad.

15. En el ejercicio 3 de la sección 14.1, calcule: *a*) la media de alarmas falsas por día y *b*) la desviación estándar.

16. En el ejercicio 4 de la sección 14.1 calcule: *a*) la media de unidades defectuosas por serie de producción y *b*) la desviación estándar.

17. En el ejercicio 5 de la sección 14.1 calcule: *a*) la media de conductores en estado de ebriedad descubiertos en los retenes de calles y *b*) la desviación estándar.

***18.** En un conjunto de datos formado por n elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con la media $\bar{x}$, demuestre que la suma de la desviación respecto de la media es cero.

14.3 Distribución de la probabilidad binomial

En la presente sección se explica una de las distribuciones de probabilidad discreta de mayor uso: la ***distribución de la probabilidad binomial***. En primer lugar se da una explicación de las características de los procesos aleatorios que pueden representarse por medio de ella. Luego una descripción de la distribución binomial y de sus aplicaciones.

Procesos de Bernoulli

Muchos procesos aleatorios se caracterizan por ensayos en los que hay sólo dos resultados posibles mutuamente excluyentes. Las partes manufacturadas pueden muestrearse para determinar si tienen calidad *aceptable* o están *defectuosas*; el lanzamiento de una moneda puede producir *cara* o *cruz*; los pacientes que llegan a una sala de urgencias son clasificados como *varones* o *mujeres*; los cuestionarios enviados por correo a los posibles encuestados pueden clasificarse como *devueltos* o *no devueltos*, y las preguntas en una prueba de opción múltiple pueden evaluarse en función de si se contestó de modo *correcto* o *incorrecto*.

A menudo los dos resultados posibles en estos casos se caracterizan como “exitosos” o “no exitosos”. El hecho de que caiga cara al lanzar una moneda puede declararse un resultado exitoso. A pesar de todo, esta asignación de calificativos es completamente arbitraria. El hecho de que al lanzar la moneda caiga cruz podría calificarse como éxito con la misma facilidad y propiedad (según el lado de la moneda a la que estemos apostando).

Los experimentos aleatorios, como el lanzamiento de una moneda ferial son ejemplos de los ***procesos de Bernoulli***. Éstos presentan las siguientes características.

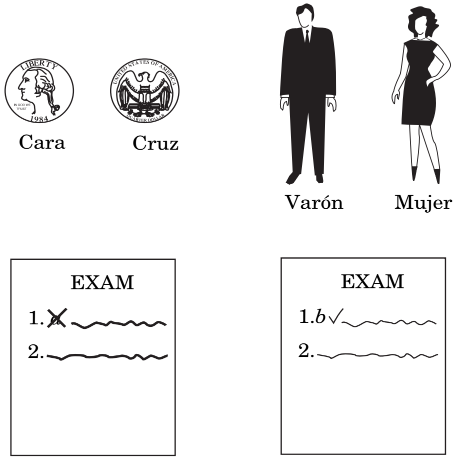
Características de los procesos de Bernoulli

I *Existen n ensayos independientes, cada uno de los cuales tiene dos posibles resultados,* **éxito** *o* **fracaso**.

II *La probabilidad de un éxito p permanece fija para cada ensayo.*

III *La probabilidad de un fracaso q permanece fija para cada ensayo y* $q = 1 - p$.

IV *La variable aleatoria X es el número total de éxitos en n ensayos.*


Cara Cruz

Varón Mujer

Incorrecto Correcto

Figura 14.2 Los procesos de Bernoulli están caracterizados por dos resultados mutuamente excluyentes.

Ejemplo 16 Suponga que un dado se lanza 25 veces. Un resultado exitoso es la ocurrencia de un 6. Éste es un ejemplo del proceso de Bernoulli. Si se supone que el dado es correcto, la probabilidad de éxito en cada ensayo es $\frac{1}{6}$, o sea $p = \frac{1}{6}$. Si la probabilidad de éxito es $\frac{1}{6}$, la de un fracaso q es $q = 1 - p = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. Los sucesivos lanzamientos de un dado son estadísticamente independientes. La variable aleatoria X es el número de veces que sale un 6 en 25 lanzamientos.

Ejemplo 17 En un proceso de manufactura se seleccionarán 100 piezas, y se considera que el proceso producirá piezas defectuosas en forma aleatoria y con una probabilidad de 0.05. El proceso se caracteriza por independencia estadística. La probabilidad de una pieza no defectuosa, cuya producción se considera un resultado exitoso, es $p = 0.95$. La probabilidad de un fracaso (pieza defectuosa) es $q = 1 - 0.95 = 0.05$. Para este experimento, la variable aleatoria X es la cantidad de piezas no defectuosas identificadas en 100 ensayos. ❑

Distribución binomial

Pongamos el ejemplo de un estudiante que esté realizando un examen con cinco preguntas de verdadero-falso. Suponga que la probabilidad de contestar acertadamente cualquiera de las preguntas es de 0.8. Suponga además que se desea conocer la probabilidad de que el estudiante conteste correctamente cuatro preguntas. Éste es un caso del proceso de Bernoulli en que la probabilidad de éxito en un intento cualquiera es $p = 0.8$, la probabilidad de fracaso es $q = 0.2$, el número de ensayos es $n = 5$ y la variable aleatoria X es el número de preguntas contestadas de manera correcta.

Una forma de contestar bien cuatro preguntas consiste en responder las primeras cuatro correctamente y la última en forma incorrecta; o dicho en función del éxito (S) o fracaso (F), la secuencia de resultados es $S_1S_2S_3S_4F_5$. Debido a la independencia, la probabilidad de este evento conjunto se calcula aplicando la regla 7 explicada en la sección 13.4, o sea

$$\begin{aligned} P(S_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap F_5) &= (0.8)\,(0.8)\,(0.8)\,(0.8)\,(0.2) \\ &= 0.08192 \end{aligned}$$

Otra manera de obtener cuatro respuestas es la secuencia $F_1S_2S_3S_4S_5$ y

$$P(F_1 \cap S_2 \cap S_3 \cap S_4 \cap S_5) = (0.2)\,(0.8)\,(0.8)\,(0.8)\,(0.8)$$
$$= 0.08192$$

que es la misma probabilidad calculada para el evento conjunto $S_1S_2S_3S_4F_5$. De hecho, hay cinco formas diferentes de contestar correctamente las cuatro preguntas; a saber: hay $S_1S_2S_3S_4F_5$, $S_1S_2S_3F_4S_5$, $S_1S_2F_3S_4S_5$, $S_1F_2S_3S_4S_5$ y $F_1S_2S_3S_4S_5$. Nótese que, al aplicar la regla 7 para calcular la probabilidad de cada una de las secuencias, la probabilidad de éxito, $p = 0.8$, será un factor de cuatro veces y la probabilidad de fracaso será un factor de una vez. La única diferencia estriba en el orden de multiplicación, el cual no ejerce efecto alguno sobre el producto. Así pues, la probabilidad de responder correctamente cuatro preguntas es

$$p(X = 4) = \left(\begin{array}{c}\text{número de formas diferentes en}\\ \text{que cuatro preguntas pueden}\\ \text{contestarse correctamente}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\text{probabilidad de responder}\\ \text{correctamente cuatro preguntas}\\ \text{de cinco en cualquier orden}\end{array}\right)$$
$$= 5(0.08192) = 0.4096$$

Otra manera de enumerar las formas distintas en que pueden ocurrir cuatro éxitos en cinco intentos consiste en reconocer que se trata de una pregunta de **combinaciones**. La cantidad de formas en las cuales los k éxitos pueden presentarse en n ensayos se obtiene aplicando la ecuación (13.6), o sea

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

El número de formas en que cuatro éxitos pueden ocurrir en cinco ensayos es

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!(5-4)!}$$
$$= \frac{5!}{4!\,1!} = 5$$

La ***distribución de la probabilidad binomial*** sirve, entre otras cosas, para representar experimentos que son procesos de Bernoulli. La siguiente regla de cálculo es indispensable para determinar las ***probabilidades binomiales***.

Cálculo de las probabilidades binomiales

Dado un proceso de Bernoulli donde la probabilidad de éxito en cualquier ensayo es igual a p y la probabilidad de un fracaso es igual a q, la probabilidad de k éxitos en n ensayos es de

$$P(k,n) = \binom{n}{k}\overbrace{(p \cdot p \cdot p \cdots p)}^{k\ factores}\overbrace{(q \cdot q \cdot q \cdots q)}^{n\,-\,k\ factores}$$

o bien
$$\boldsymbol{P(k,n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}} \qquad \textbf{(14.7)}$$

En la ecuación (14.7), el factor $\binom{n}{k}$ representa el número de formas en las que k éxitos pueden ocurrir en n ensayos y $p^k q^{n-k}$ representa la probabilidad de k éxitos en n ensayos, para cualquiera de estas formas.

Si se continúa con el ejemplo del examen, los posibles resultados del examen son cero, uno, dos, tres, cuatro o cinco respuestas correctas a las preguntas (éxitos). A continuación se calcularán las probabilidades de otros resultados. La probabilidad de cero éxitos (respuestas correctas) en cinco ensayos es

$$\begin{aligned} P(0, 5) &= \binom{5}{0}(0.8)^0(0.2)^5 \\ &= \frac{5!}{0!(5-0)!}(0.00032) = 1(0.00032) = 0.00032 \end{aligned}$$

La probabilidad de un éxito en cinco ensayos es

$$\begin{aligned} P(1, 5) &= \binom{5}{1}(0.8)^1(0.2)^4 \\ &= \frac{5!}{1!(5-1)!}(0.00128) = 5(0.00128) = 0.0064 \end{aligned}$$

La probabilidad de dos éxitos en cinco ensayos es

$$\begin{aligned} P(2, 5) &= \binom{5}{2}(0.8)^2(0.2)^3 \\ &= \frac{5!}{2!(5-2)!}(0.00512) = 10(0.00512) = 0.0512 \end{aligned}$$

La probabilidad de tres éxitos en cinco ensayos es

$$\begin{aligned} P(3, 5) &= \binom{5}{3}(0.8)^3(0.2)^2 \\ &= \frac{5!}{3!(5-3)!}(0.02048) = 10(0.02048) = 0.2048 \end{aligned}$$

La probabilidad de cinco éxitos en cinco ensayos es

$$\begin{aligned} P(5, 5) &= \binom{5}{5}(0.8)^5(0.2)^0 \\ &= \frac{5!}{0!(5-0)!}(0.32768) = 1(0.32768) = 0.32768 \end{aligned}$$

La tabla 14.23 es un resumen de la distribución de la probabilidad binomial para este experimento. Nótese que los eventos posibles de la variable aleatoria son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos. También, la suma de las probabilidades es 1.0.

La figura 14.3 incluye una representación de esta clase de distribución mediante un histograma. Cada barra corresponde a uno de los seis eventos, y la altura de la misma es igual a la probabilidad del evento.

Tabla 14.23 **Distribución binomial de los resultados del examen**

Número de éxitos (respuestas correctas en el examen) (*X*)	***P*(*X*)**
0	0.00032
1	0.00640
2	0.05120
3	0.20480
4	0.40960
5	0.32768
	1.00000

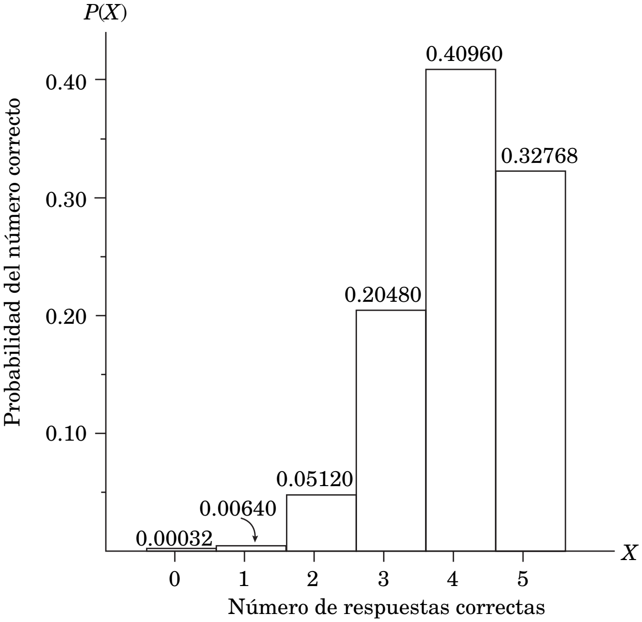


Figura 14.3 Representación de una distribución binomial mediante un histograma.

Ejemplo 18 **(Crédito al consumidor; escenario de motivación)** Un banco muy importante emite tarjetas de crédito con el nombre VISACARD. Se ha investigado que 40% de las cuentas de todas las tarjetas de crédito se liquida completamente después de la primera factura.

Es decir, para cualquier mes, 40% de las cuentas nunca presentan cargos por intereses. Si una muestra de seis cuentas se selecciona en forma aleatoria, estime la probabilidad de que ninguna de las seis tendrá cargos por intereses para su última factura.

SOLUCIÓN

Este experimento puede considerarse un proceso de Bernoulli donde una cuenta que no muestre cargos por intereses se clasifica como un éxito y las que sí los presenten se califican de fracaso. En este experimento, $p = 0.40$, $q = 0.60$ y $n = 6$.

La probabilidad de que ninguna de las seis cuentas seleccionadas tenga cargos por concepto de intereses es

$$P(0, 6) = \binom{6}{0}(0.4)^0(0.6)^6$$
$$= \frac{6!}{0!(6-0)!}(0.046656) = (1)(0.046656) = 0.046656$$

Ejemplo 19 **(Crédito al consumidor; *continuación*)** Construya la distribución binomial completa para el experimento de selección de seis cuentas de tarjetas de crédito al consumidor.

SOLUCIÓN

Completemos la distribución de la probabilidad aplicando la ecuación (14.7) para calcular las probabilidades de 1, 2, 3, 4, 5 y 6 cuentas sin cargos por concepto de intereses. La probabilidad de que exactamente una cuenta no muestre cargos por concepto de intereses es

$$P(1, 6) = \binom{6}{1}(0.4)^1(0.6)^5$$
$$= \frac{6!}{1!(6-1)!}(0.031104) = (6)(0.031104) = 0.186624$$

La probabilidad de que exactamente dos cuentas no muestren cargos por concepto de intereses es

$$P(2, 6) = \binom{6}{2}(0.4)^2(0.6)^4$$
$$= \frac{6!}{2!(6-2)!}(0.020736) = (15)(0.020736) = 0.31104$$

La probabilidad de que exactamente tres cuentas no muestren cargos por concepto de intereses es

$$P(3, 6) = \binom{6}{3}(0.4)^3(0.6)^3$$
$$= \frac{6!}{3!(6-3)!}(0.013824) = (20)(0.013824) = 0.27648$$

Al continuar este proceso, el resultado es la distribución de la probabilidad que aparece en la tabla 14.24. ❑

Ejercicio de práctica

En el ejemplo 19, ¿cuál es la probabilidad de que no más de tres cuentas no tengan cargos por concepto de intereses? ¿Y más de cuatro cuentas? *Respuestas*: 0.8208, 0.04096.

PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR

¿El proceso del ejemplo 36 del capítulo 13 (página 634) (la simulación del trasbordador espacial) es un proceso de Bernoulli? Explique su respuesta. ¿Por qué sí o por qué no?

Tabla 14.24

Distribución binomial para revisión de crédito al consumidor

Número de éxitos (cuentas que no han incurrido en cargos por concepto de intereses) (X)	**$P(X)$**
0	0.046656
1	0.186624
2	0.311040
3	0.276480
4	0.138240
5	0.036864
6	0.004096
	1.000000

Media y desviación estándar de la distribución binomial

Media de una distribución binomial

Ul valor medio μ para una distribución binomial está determinado por la ecuación

$$\mu = np \tag{14.8}$$

La ecuación (14.8) indica que el número promedio de éxitos en un proceso de Bernoulli es igual al producto del número de ensayos por la probabilidad de éxito de cada ensayo individual. Si una distribución binomial describe el número de caras que caen en 500 lanzamientos de una moneda, la media para este experimento es

$$\begin{aligned}\mu &= 500(0.5)\\ &= 250\end{aligned}$$

lo cual indica que, en promedio, cabe esperar que 250 veces caiga cara en 500 lanzamientos de una moneda.

Ejemplo 20

En los ejemplos 18 y 19, la probabilidad de que una cuenta no presente cargos por concepto de intereses fue de 0.4. En la selección de las seis cuentas, $n = 6$ y $p = 0.4$. La media para esta distribución binomial es

$$\begin{aligned}\mu &= 6(0.4)\\ &= 2.4\end{aligned}$$

Esto significa que, en promedio (a largo plazo), una selección de seis cuentas al azar hará que se identifique que 2.4 no ha incurrido en cargos por concepto de intereses.

Ejemplo 21

Ya antes se expuso un problema donde un estudiante estaba realizando un examen de verdadero-falso que incluye cinco preguntas. La probabilidad de contestar una pregunta cualquiera en forma correcta se estimó en 0.8. Para este proceso de Bernoulli, la media de las respuestas correctas es

$$\mu = 5(0.8) = 4.0$$

Este resultado indica que, si el estudiante hizo muchos exámenes con cinco preguntas que tengan la misma probabilidad de éxito, el número promedio de respuestas correctas sería de 4.0.

Si el número de preguntas en un examen es 36, la media de respuestas correctas es

$$\mu = 36(0.8) = 28.8$$ ❑

Desviación estándar de una distribución binomial

La desviación estándar de una distribución de la probabilidad binomial está determinada por la ecuación

$$\sigma = \sqrt{npq} \qquad \textbf{(14.9)}$$

En el ejemplo 19, $n = 6$ y $p = 0.4$. La desviación estándar es

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{6(0.4)(0.6)}\\ &= \sqrt{1.44} = 1.2\end{aligned}$$

Ejercicio de práctica

La tabla 14.25 es una extensión de la tabla 14.24 para el ejemplo de las tarjetas de crédito al consumidor. Haciendo uso de esta tabla y de las ecuaciones (14.3) y (14.6), calcule μ y σ. Compare sus resultados con los obtenidos empleando las ecuaciones (14.8) y (14.9).

Tabla 14.25

Número de éxitos (X)	**$P(X)$**	**$X \cdot P(X)$**	**$X - \mu$**	**$(X - \mu)^2$**	**$(X - \mu)^2 \cdot P(X)$**
0	0.046656				
1	0.186624				
2	0.311040				
3	0.276480				
4	0.138240				
5	0.036864				
6	0.004096				
	1.000000	$\mu =$ ____			$\sigma^2 =$ ________
					$\sigma =$ ________

Ejemplo 22 **(Confiabilidad del polígrafo)** Un fabricante de polígrafos (detectores de mentiras) afirma que sus máquinas pueden distinguir correctamente las verdaderas respuestas a las preguntas procedentes de respuestas falsas el 85% de las veces. Si se somete a pruebas la máquina que utiliza un conjunto de 50 preguntas, determine: *a*) la media de este proceso de Bernoulli y *b*) la desviación estándar.

SOLUCIÓN

En este proceso, $p = 0.85$ y $n = 50$.

a) La media de respuestas identificadas correctamente es

$$\mu = 50(0.85) = 42.5$$

b) La desviación estándar es

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{(50)(0.85)(0.15)}\\ &= \sqrt{6.375} = 2.52\end{aligned}$$ ❑

Sección 14.3 Ejercicios de seguimiento

1. Determine cuáles de las siguientes variables aleatorias no son variables en un proceso de Bernoulli.
   a) X = el número de caras en el lanzamiento de una moneda 20 veces
   b) X = la altura de 10 estudiantes seleccionados de modo aleatorio
   c) X = el número de seises que aparecen en cinco lanzamientos de un *par* de dados
   d) X = calificaciones logradas por 100 estudiantes en una prueba ordinaria
   e) X = el precio de cierre de una acción en 10 días seleccionados de manera aleatoria
   f) X = el número de pacientes que llegan cada hora a una sala de urgencias y que se observaron en 20 horas escogidas en forma aleatoria
   g) X = el número de alarmas falsas en una muestra de 10 alarmas donde la probabilidad de que una alarma sea falsa es de 0.18
2. Una moneda se lanzará cuatro veces. ¿Qué probabilidad existe de que la cara salga exactamente dos veces? ¿Cuatro veces? ¿Dos o más veces?
3. Un dado se lanzará cuatro veces. ¿Qué probabilidad hay de que el 1 salga exactamente dos veces? ¿Y de que salga menos de cuatro veces?
4. **Manejo en estado de ebriedad** En un país se ha determinado que de todos los accidentes de tránsito en que hay un muerto, en 70% se trata de situaciones en que por lo menos un conductor había ingerido bebidas alcohólicas. Si se selecciona en forma aleatoria una muestra de cuatro accidentes mortales, construya la distribución binomial en que la variable aleatoria X sea el número de accidentes en los cuales por lo menos un conductor había estado ingiriendo bebidas alcohólicas.
5. **Teleadictos televidentes** Se ha establecido que 80% de los hogares norteamericanos tiene por lo menos un equipo de televisión. Si se seleccionan cinco residencias al azar, construya la distribución binomial en que la variable aleatoria X sea el número de residencias con al menos un aparato televisor.
6. Una empresa que lleva a cabo encuestas por correo entre consumidores descubrió que 30% de las familias que reciben un cuestionario lo devuelven. En una encuesta de 10 familias, ¿qué probabilidades hay de que exactamente cinco lo devuelvan? ¿De que lo retornen exactamente seis familias? ¿Y diez familias?
7. Un estudiante realiza un examen de 10 preguntas con opción de verdadero-falso. No sabe nada del tema y opta por contestar al azar. Suponiendo que las preguntas sean independientes y que haya una probabilidad de 0.9 de responder bien cualquier pregunta, ¿qué probabilidades hay de que apruebe el examen (suponga que aprobar significa obtener siete o más aciertos)? Si el examen contiene 20 preguntas, ¿cambia la probabilidad de aprobar (14 preguntas o más contestadas correctamente)?
8. **Inmunización** Una vacuna contra la influenza ofrece eficacia de 95% en la creación de inmunidad. En una muestra aleatoria de cinco personas vacunadas que fueron expuestas a esta cepa de la influenza, ¿qué probabilidades existen de que ninguna de ellas contraiga la enfermedad?
9. Una urna contiene 4 bolas rojas, 2 bolas verdes y 4 bolas azules. Si se seleccionan aleatoriamente 10 bolas con reposición en cada extracción, ¿qué probabilidad hay de que se seleccionen exactamente cuatro bolas rojas? ¿Y de que se seleccionen exactamente dos bolas verdes?
10. Un proceso de manufactura produce piezas defectuosas en forma aleatoria y a una tasa de 8%. En una muestra de 10 piezas, ¿qué probabilidad hay de que se produzcan menos de dos defectuosas?
11. En el ejercicio 10, ¿cuál se espera que sea la media de piezas defectuosas? ¿Qué interpretación se da a ese valor? ¿Cuál es la desviación estándar en esta distribución?

12. En un hospital local, 48% de los recién nacidos son varones. En un día particular nacen cinco niños. ¿Qué probabilidades existen de que cuatro o más de ellos sean varones? ¿Cuál es la media de esta distribución cuando $n = 5$? ¿Cuál es la desviación estándar?
13. **Encuesta política** Para las próximas elecciones del senado de Estados Unidos, las encuestas de opinión indican que 50% de la población apoya al candidato demócrata, 40% apoya al candidato republicano y 10% se encuentra indeciso. Si se selecciona una muestra de cinco personas al azar, ¿cuál será la probabilidad de que al menos cuatro personas sean simpatizantes del candidato demócrata? ¿Y que menos de dos personas apoyen a este mismo candidato?
14. **Tabaquismo** Un hospital local lleva a cabo un programa experimental para ayudar a personas que desean dejar el hábito de fumar. Después de completar el programa, los participantes informan una tasa de éxitos de 60%. Si se selecciona una muestra aleatoria de cuatro participantes, ¿cuál es la probabilidad de que todos ellos hayan dejado de fumar? ¿Y de que por lo menos tres hayan dejado ese hábito?
15. **Recesión económica** Una encuesta de opinión reveló que 80% de las personas en un estado de Nueva Inglaterra consideran que el área está sufriendo recesión económica. Si se selecciona una muestra aleatoria de seis personas en ese estado, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente la mitad de ellas crea que existe dicha recesión?

14.4 Distribución de la probabilidad normal

En las distribuciones de probabilidad continua, el número de valores posibles de la variable aleatoria es infinito. En ellas, las probabilidades se asignan exclusivamente a intervalos de valores de la variable aleatoria. Para dar un ejemplo de ello, imagine la variable aleatoria X que representa las lluvias anuales en una región, medidas en pulgadas. El número de la posible precipitación pluvial es infinito. Por ejemplo, un valor posible de X es 24.000056 pulgadas. En un número infinito de valores posibles de X, la probabilidad de cada valor es sumamente pequeña. Por lo tanto, en las distribuciones de probabilidad continua no se hacen afirmaciones respecto de la probabilidad de que la variable aleatoria adopte un valor específico. Por lo contrario, casi siempre se hacen en cuanto a la probabilidad de que la variable aleatoria asuma un valor dentro de un intervalo definido. En el ejemplo de la precipitación pluvial, quizá se desee conocer la probabilidad de que la precipitación anual fluctúe entre 24 y 25 pulgadas.

En la presente sección se trata de una de las distribuciones continuas más conocidas y de mayor aplicación: la ***distribución de la probabilidad normal***.

Distribución de la probabilidad normal

Este tipo de distribución es uno de los más importantes en la teoría moderna de la probabilidad. La distribución de la probabilidad normal se representa mediante la clásica *curva en forma de campana*, llamada también ***curva normal***, que aparece en la figura 14.4.

La curva de la figura 14.4 es representativa de una familia de curvas en forma de campana que indican las distribuciones de probabilidad normal, todas ellas distintas en relación con su media y su desviación estándar. La figura 14.5 muestra las gráficas de dos distribuciones normales que tienen la misma media pero diferentes desviaciones estándar. La figura 14.6 ilustra las gráficas de dos distribuciones normales que tienen diferentes medias pero una misma desviación estándar.

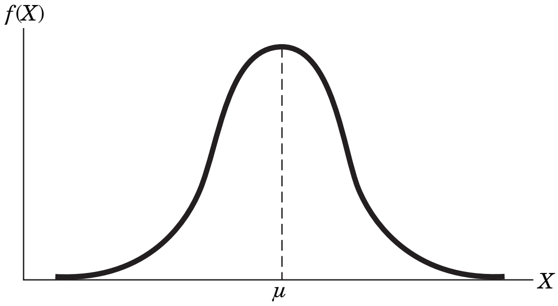


Figura 14.4 Curva normal.

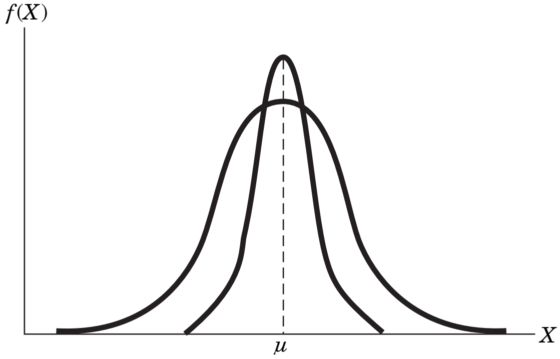


Figura 14.5 Distribuciones normales con medias iguales.

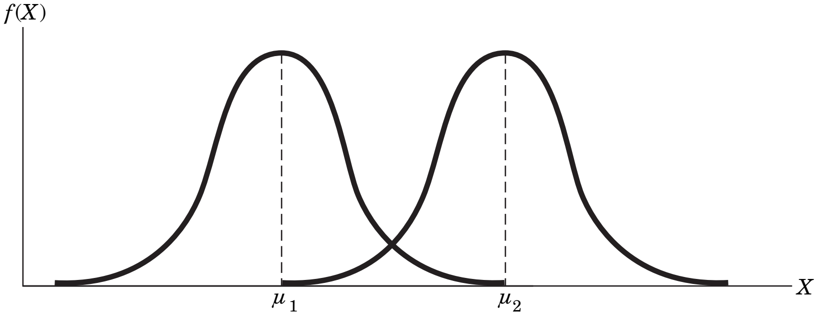


Figura 14.6 Distribuciones normales con desviaciones estándar iguales.

La curva normal es simétrica alrededor de una línea vertical imaginaria que pasa por la media μ. Esta simetría significa que la curva es la misma si el espectador recorre distancias iguales a la derecha e izquierda de la media. Las "colas" de la curva se van acercando cada vez más al eje horizontal sin tocarlo nunca, por mucho que el espectador se desplace a la derecha o la izquierda.

Las áreas bajo la curva que representan una distribución de la probabilidad son equivalentes a las probabilidades. Si el área total bajo una curva normal se considera igual a 1, la probabilidad de que la variable aleatoria asuma un valor entre a y b equivale al área situada debajo de la curva y limitada a la derecha e izquierda por las líneas verticales $X = a$ y $X = b$. Esto se muestra en la figura 14.7.

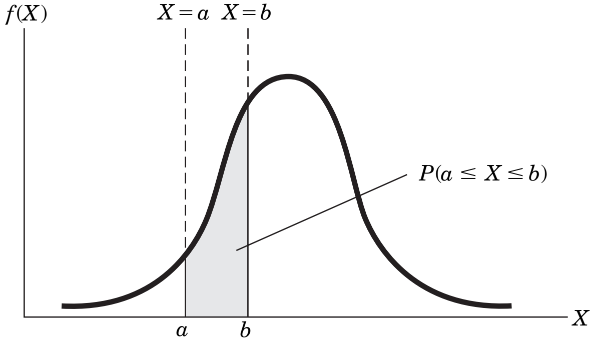


Figura 14.7 El área bajo la curva normal representa la probabilidad.

Pongamos el caso en que se observa que las calificaciones conseguidas en una prueba estandarizada de aptitudes está *normalmente distribuida* con una media de 70 y una desviación estándar de 7.5. Suponga que se quiere determinar la probabilidad de que un estudiante obtenga una calificación de 70 a 85 en la prueba. Con objeto de calcular esa probabilidad, se recurre a la utilísima propiedad de las distribuciones normales. *Cualquier distribución de la probabilidad normal con media μ y desviación estándar σ puede ser transformada en una* ***distribución normal estándar (unitaria)*** *equivalente que tenga una media igual a 0 y una desviación estándar de 1.* La transformación redefine cada valor de la variable aleatoria X en función de su distancia respecto de la media, *expresada como un múltiplo de la desviación estándar.*

La figura 14.8 ilustra esta transformación de X en función de otra variable z. Esta variable z expresa a X en términos de la distancia respecto de la media en múltiplos de la desviación estándar. Adviértase que los valores z a la derecha de la media son positivos y que los de la izquierda son negativos. Un valor de X que sea una desviación estándar a la derecha de la media se definirá en forma equivalente por un valor de z igual a 1. Un punto situado tres desviaciones estándar a la izquierda de la media se definirá de modo equivalente por un valor z de –3.

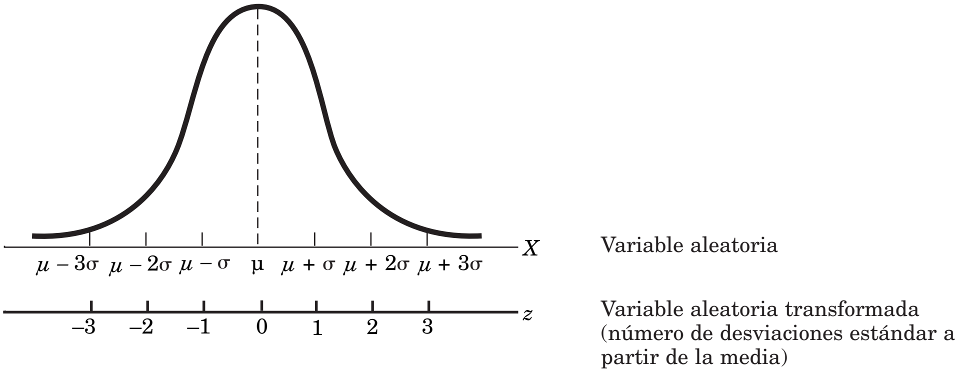


Figura 14.8 Transformación a la distribución normal estándar (unitaria).

Ejemplo 23 Dada una variable aleatoria X con $\mu = 10$ y $\sigma = 2$, existen las equivalencias siguientes entre valores específicos de X y los correspondientes valores de z.

X	z **(número de desviaciones estándar desde la media)**
0	–5.0
5	–2.5
8	–1.0
10	0
12	1.0
15	2.5
18	4.0

❑

La tabla 14.26 (de la siguiente página) contiene las áreas bajo la curva normal estándar. *Nótese que las áreas dadas son las que se encuentran debajo de las curvas entre la media y otro punto situado a z desviaciones estándar respecto de la media.* La curva normal es tal que 50% del área se encuentra a la izquierda de la media y 50% a la derecha. En otras palabras, existe una probabilidad de 50% de que el valor de la variable aleatoria X sea menor que la media y 50% de probabilidad de que sea mayor. La simetría de la curva normal indica que la tabla 14.26 puede emplearse para determinar las áreas comprendidas entre la media y otro punto, cuando el segundo punto se halla a la izquierda o la derecha de la media. Un valor z de 1 en la tabla 14.26 significa que el área debajo de la curva entre $z = 0$ y $z = 1$ es de 0.3413. *El área es la misma entre* $z = 0$ *y* $z = -1$. La figura 14.9 muestra esas áreas. Obsérvese, asimismo, que se puede hacer la afirmación de que el área bajo la curva normal estándar *entre* $z = -1$ *y* $z = 1$ es 0.6826.

Volvamos ahora al problema original concerniente a la prueba estandarizada de aptitudes. Se ha descubierto que las puntuaciones están normalmente distribuidas con una media de 70 y una desviación estándar de 7.5. El problema radicaba en determinar la probabilidad de que un estudiante seleccionado en forma aleatoria obtuviese una puntuación comprendida entre 70 y 85. Para determinar esta probabilidad, hay que transformar la distribución original en la distribución normal estándar.

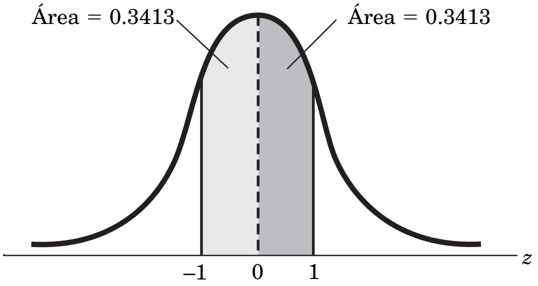


Figura 14.9

Tabla 14.26 **Área bajo la curva normal estándar**

	0.00	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2518	0.2549
0.7	0.2580	0.2612	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.49865	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

Y para ello es preciso identificar los valores de z para los valores pertinentes de X. La fórmula que permite convertir los valores de la variable aleatoria X en los valores equivalentes de z es

$$\boxed{z = \frac{X - \mu}{\sigma}} \qquad \textbf{(14.10)}$$

El valor z correspondiente a la media siempre es 0. Para ilustrarlo, el valor de z correspondiente a una calificación de 70 es

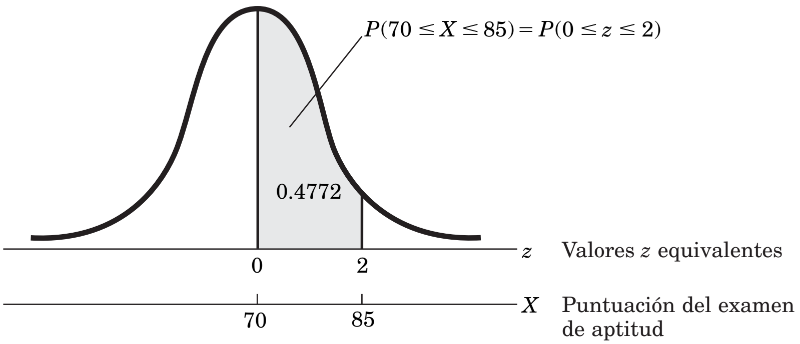


Figura 14.10

$$z = \frac{70 - 70}{7.5} = 0$$

El valor de z correspondiente a un valor X de 85 es

$$z = \frac{85 - 70}{7.5}$$

$$= \frac{15}{7.5} = 2$$

Esta media tiene una puntuación de 85 y se encuentra a dos desviaciones estándar arriba (a la derecha de) la puntuación promedio de 70.

Así pues, la probabilidad de que un estudiante logre puntuaciones entre 70 y 85 es igual al área debajo de la curva normal estándar entre $z = 0$ y $z = 2$. Esta área, que aparece en la figura 14.10, se obtiene directamente de la tabla 14.26 como 0.4772. En consecuencia, la probabilidad de que un estudiante logre una puntuación de 70 a 85 es 0.4772. En la figura 14.10, nótese que se trazó una escala equivalente de X debajo de la escala de z para mostrar el valor correspondiente de X. Ello no es necesario, pero sirve para recordar los valores pertinentes de la variable aleatoria X.

Supóngase que se quiere conocer la probabilidad de que un estudiante reciba calificaciones entre 0 y 85 en el examen. La probabilidad es igual a la de que z sea menor que 2 en la distribución normal estándar. La probabilidad es el área debajo de la curva normal

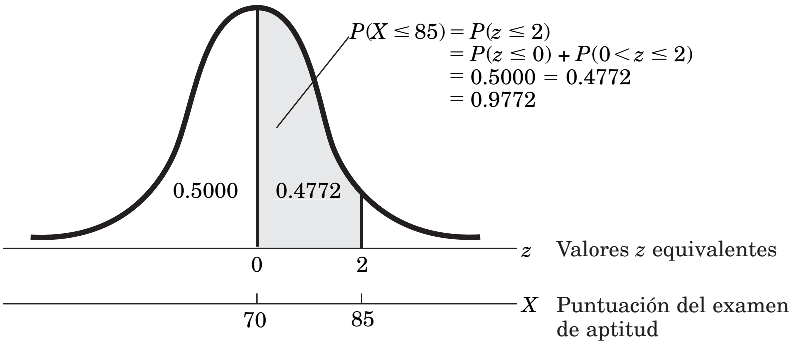


Figura 14.11

estándar, que se observa en la figura 14.11. Esta área consta de los 0.5000 a la izquierda de la media y de los 0.4772 que se identificaron antes, o sea

$$\begin{aligned} P(z \leq 2) &= P(z \leq 0) + P(0 < z \leq 2) \\ &= 0.5000 + 0.4772 = 0.9772 \end{aligned}$$

NOTA Para los problemas que requieren la identificación de las probabilidades para una variable normalmente distribuida, se recomienda mucho que se haga un esquema que identifique el área o áreas equivalentes bajo la curva normal estándar.

Ejemplo 24 Una encuesta reveló que el ingreso anual per cápita de los habitantes de un estado tiene una distribución normal con una media de \$9 800 y una desviación estándar de \$1 600. Si se selecciona una persona en forma aleatoria, ¿qué probabilidad hay de que sus ingresos anuales: *a*) sean mayores que \$5 000, *b*) mayores que \$12 200, *c*) fluctúen entre \$8 520 y \$12 200, y *d*) entre \$11 400 y \$13 000?

SOLUCIÓN

a) El valor de z correspondiente a un ingreso de \$5 000 es

$$\begin{aligned} z &= \frac{5\,000 - 9\,800}{1\,600} \\ &= \frac{-4\,800}{1\,600} = -3 \end{aligned}$$

Con base en la figura 14.12 es posible concluir que la probabilidad de que el sueldo de una persona sea mayor que \$5 000 es igual a la de que z sea mayor que –3 en la distribución normal estándar. Según la tabla 14.26

$$\begin{aligned} P(z > -3) &= P(-3 < z \leq 0) = P(z > 0) \\ &= 0.49865 + 0.5000 = 0.99865 \end{aligned}$$

b) El valor de z correspondiente a un ingreso de \$12 200 es

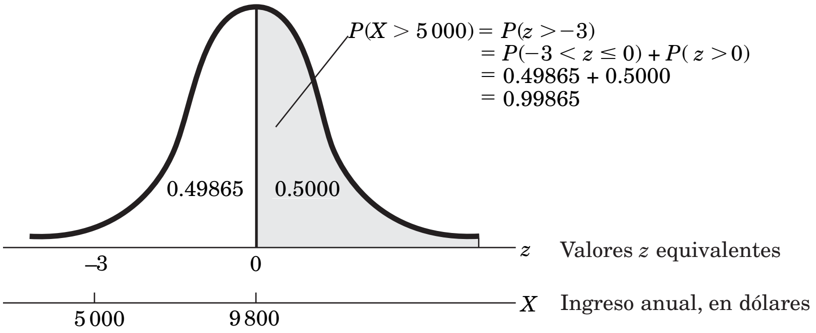


Figura 14.12

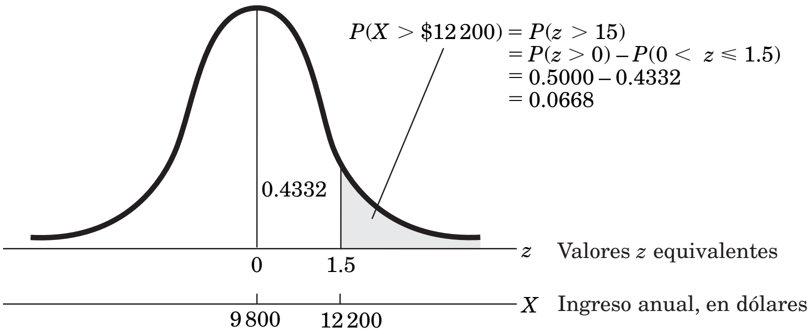


Figura 14.13

$$z = \frac{12200 - 9800}{1600}$$

$$= \frac{2400}{1600} = 1.5$$

A partir de la figura 14.13 se llega a la conclusión de que la probabilidad de que el sueldo de una persona sea mayor que \$12 200 es igual a la de que z sea mayor que 1.5. Según la tabla 14.26, puede determinarse que $P(0 < z \leq 1.5) = 0.4332$. Dado que

$$\begin{aligned} P(z > 0) &= 0.5000 \\ P(z > 1.5) &= P(z > 0) - P(0 < z \leq 1.5) \\ &= 0.5000 - 0.4332 = 0.0668 \end{aligned}$$

c) El valor de z correspondiente a un ingreso de \$8 520 es

$$z = \frac{8\,520 - 9\,800}{1\,600}$$

$$= \frac{-1\,280}{1\,600} = -0.8$$

Conforme a la figura 14.14, la probabilidad de que el sueldo de una persona fluctúe entre \$8 520 y \$12 200 es igual a la de que z esté comprendida entre –0.8 y 1.5, es decir,

$$\begin{aligned} P(-0.8 \leq z \leq 1.5) &= P(-0.8 \leq z < 0) + P(0 \leq z \leq 1.5) \\ &= 0.2881 + 0.4332 = 0.7213 \end{aligned}$$

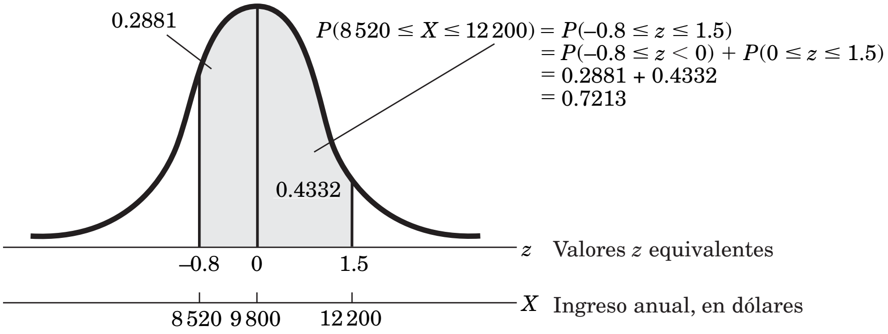


Figura 14.14

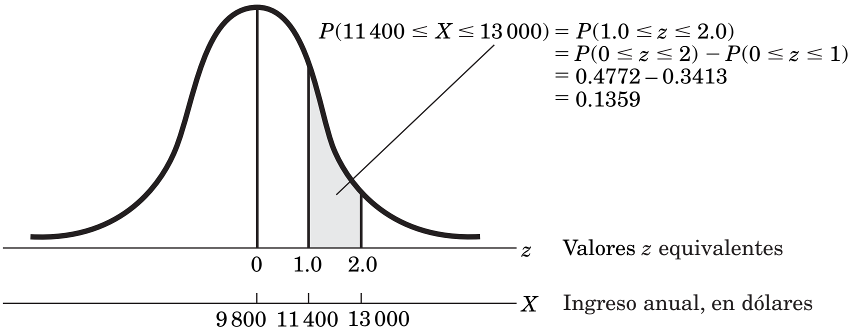


Figura 14.15 ❑

d) El valor de z correspondiente a un ingreso de $11 400 es

$$z = \frac{11\,450 - 9\,800}{1\,600}$$
$$= \frac{1\,600}{1\,600} = 1$$

El valor de z correspondiente a un ingreso de $13 000 es

$$z = \frac{13\,000 - 9\,800}{1\,600}$$
$$z = \frac{3\,200}{1\,600} = 2$$

De acuerdo con la figura 14.15, la probabilidad de que el sueldo de una persona se encuentre entre $11 400 y $13 000 es igual a la de que z esté comprendida entre 1 y 2. Para calcular esa probabilidad, hay que encontrar el área entre $z = 0$ y $z = 2$, restándole después el área entre $z = 0$ y $z = 1$. En otras palabras,

$$P(1 \le z \le 2) = P(0 \le z \le 2) - P(0 \le z \le 1)$$
$$= 0.4772 - 0.3413 = 0.1359$$

Ejercicio de práctica

En el ejemplo 24, ¿cuál es la probabilidad de que el ingreso anual de una persona sea: *a*) mayor que $8 200, *b*) menor que $15 800, y *c*) entre $9 000 y $13 000? *Respuesta*: *a*) 0.8413, *b*) 0.9878, y *c*) 0.6687.

Hay que hacer una aclaración respecto del uso de la tabla 14.26. Ya se señaló antes que, en el caso de variables continuas, la probabilidad de que ocurra un valor específico de la variable es 0. Es decir, para un punto cualquiera a,

$$P(X = a) = 0$$

Por lo tanto, para dos constantes cualesquiera $a < b$,

$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b)$$

La consecuencia o implicación práctica de lo anterior es que los valores de la tabla 14.26 representan las probabilidades de que z adopte valores entre dos puntos z_1 y z_2, donde los valores exactos de z_1 y z_2 pueden estar o no incluidos. En el ejemplo 24*a*, las probabilidades de que el sueldo de una persona sea mayor que \$5 000 o bien mayor o igual a esa cifra son iguales: 0.99865.

Una última observación respecto de las variables aleatorias con distribución normal es que, entre todos los posibles resultados de la variable aleatoria X, se prevé que aproximadamente 68% ocurrirá dentro de más o menos una desviación estándar respecto de la media (es decir, $\mu \pm 1\sigma$), se prevé que más o menos 95% ocurrirá dentro de dos desviaciones estándar respecto de la media ($\mu \pm 2\sigma$), y cerca de 99% dentro de tres desviaciones estándar respecto de la media ($\mu \pm 3\sigma$). Éste es un conjunto útil de propiedades cuando se intenta hacer generalizaciones sobre las variables aleatorias con distribución normal. Dichas propiedades se describen en la figura 14.16.

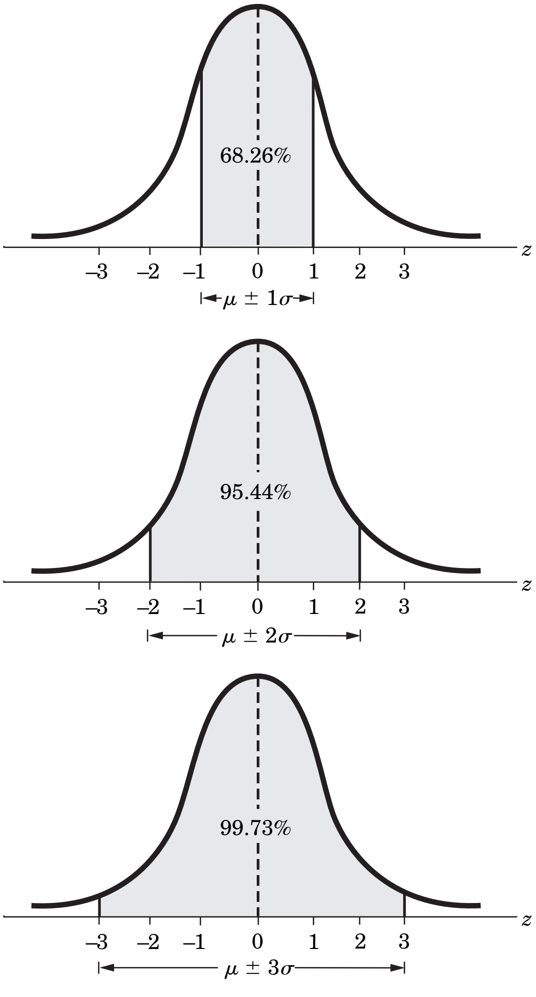


Figura 14.16 Propiedades de las variables aleatorias normalmente distribuidas.

Sección 14.4 Ejercicios de seguimiento

1. En una distribución normal donde $\mu = 50$ y $\sigma = 8$, determine los valores de z correspondientes a cada uno de los siguientes valores de la variable aleatoria respecto de la media: *a*) 56, *b*) 42, *c*) 66, *d*) 36 y *e*) 75.

2. En una distribución normal donde $\mu = 300$ y $\sigma = 60$, determine los valores de z correspondientes a los siguientes valores de la variable aleatoria respecto de la media: *a*) 320, *b*) 160, *c*) 365, *d*) 430 y *e*) 130.

3. Dada una distribución normal donde $\mu = 0.72$ y $\sigma = 0.08$, determine los valores de z correspondientes a cada uno de los valores siguientes de la variable aleatoria: *a*) 0.84, *b*) 0.62, *c*) 0.50, *d*) 0.90 y *e*) 0.48.

4. Dada una distribución normal donde $\mu = 18$ y $\sigma = 4.0$, determine los valores de z correspondientes a cada uno de los siguientes valores de la variable aleatoria: *a*) 25, *b*) 12.5, *c*) 22.5, *d*) 17.2 y *e*) 19.8.

5. Para la distribución normal estándar determine:

a) $P(z > 2.4)$ *b*) $P(z < 1.2)$

c) $P(0.8 < z < 3.0)$ *d*) $P(-2.3 \leq z \leq 2.8)$

6. Para la distribución normal estándar determine:

a) $P(z > -1.6)$ *b*) $P(z < +1.3)$

c) $P(-1.7 < z < 0.3)$ *d*) $P(-1.4 \leq z \leq 0.9)$

7. Para la distribución normal estándar determine:

a) $P(z > -0.25)$ *b*) $P(z \leq -0.4)$

c) $P(-1.5 < z < -0.6)$ *d*) $P(-1.3 \leq z \leq 0.45)$

8. Para la distribución normal estándar determine:

a) $P(0.8 < z < 1.35)$ *b*) $P(-1.35 < z < -1.25)$

c) $P(-0.7 \leq z \leq -0.25)$ *d*) $P(-0.45 < z < 0.05)$

9. Si se tiene una variable aleatoria *X* que tiene una distribución normal con una media de 15 y una desviación estándar de 2.5, determine:

a) $P(X \geq 11.8)$ *b*) $P(X \leq 17.8)$

c) $P(9.6 \leq X \leq 16.1)$ *d*) $P(8.6 \leq X \leq 10.9)$

10. Si hay una variable aleatoria *X* que tiene una distribución normal con media de 75 y desviación estándar de 5, determine:

a) $P(X \geq 80)$ *b*) $P(X < 78.5)$

c) $P(66 \leq X \leq 72.5)$ *d*) $P(80 < X < 88.5)$

11. Si hay una variable aleatoria *X* que tenga una distribución normal con media de 300 y desviación estándar de 20, determine:

a) $P(X \leq 255)$ *b*) $P(275 \leq X \leq 345)$

c) $P(316 \leq X \leq 346)$ *d*) $P(270 \leq X \leq 295)$

12. Si se tiene una variable aleatoria *X* que tiene una distribución normal con media de 160 y desviación estándar de 8, determine:

a) $P(X \leq 150)$ *b*) $P(148 \leq X \leq 154)$

c) $P(162 \leq X \leq 184)$ *d*) $P(154 \leq X \leq 172)$

13. **Pesos de los recién nacidos** El peso de los recién nacidos en un hospital muestra distribución normal con media de 3.5 kg y desviación estándar de 180 g. ¿Qué probabilidad existe de que un niño nacido en el hospital pese más de 3.6 kg? ¿Y de que pese menos de 3.1 kg?

14. Los ingresos anuales de los empleados de un estado de la Unión Americana presentan distribución normal con media de \$17 500 y desviación estándar de \$2 000. Si se escoge a un empleado de modo aleatorio, ¿qué probabilidad hay de que perciba más de \$16 000? ¿Menos de \$12 000? ¿Entre \$15 000 y \$20 000?

15. Un fabricante efectuó un estudio sobre la vida útil de determinado tipo de lámpara. El estudio llegó a la conclusión de que la vida útil, medida en horas, es una variable aleatoria con distribución normal. La vida útil media es de 650 horas, con desviación estándar de 100 horas. ¿Qué probabilidad hay de que la lámpara seleccionada al azar tenga una vida útil que oscile entre 500 y 800 horas? ¿Más de 900 horas?

16. Se ha comprobado que las puntuaciones obtenidas en una prueba de aptitudes a nivel nacional tienen distribución normal con media de 480 y desviación estándar de 75. ¿Qué probabilidad hay de que un estudiante, seleccionado de modo aleatorio, reciba una calificación comprendida entre 450 y 540? ¿Mayor que 600?

17. En una gran ciudad, el número de llamadas en que se solicita el servicio de la policía en un periodo de 24 horas parece ser aleatorio. Se ha descubierto que presentan distribución normal, con media de 225 y desviación estándar de 30. ¿Qué probabilidad hay de que, en un día escogido en forma aleatoria, las llamadas no lleguen a 300? ¿Sean más de 180?

18. Las ventas anuales (en dólares) por vendedor en una fábrica de máquinas copiadoras tienen distribución normal con media de \$480 000 y desviación estándar de \$40 000. Si se selecciona a uno de los vendedores en forma aleatoria, ¿qué probabilidades existen de que sus ventas anuales: *a*) excedan los \$600 000, *b*) fluctúen entre \$400 000 y \$500 000, *c*) sean menores que \$450 000 o *d*) oscilen entre \$540 000 y \$600 000?

19. **Acondicionamiento físico** Se ha aplicado una prueba de acondicionamiento físico a nivel nacional. Un elemento de la prueba midió la cantidad de planchas (“lagartijas”) que una persona podría hacer. En el caso de los estudiantes de último año, esos ejercicios de “lagartijas” presentaban distribución normal con una media de 12.5 y una desviación estándar de 5.0. Si se escoge en forma aleatoria a un estudiante del último año de enseñanza media, ¿qué probabilidad existe de que pueda hacer: *a*) más de 16 lagartijas, *b*) más de 20, *c*) entre 10 y 15, y *d*) menos de 25?

20. **Sismografía** Un sismólogo ha reunido datos en torno a la frecuencia de los terremotos en todo el mundo, en los cuales se miden los de 5.0 o más intensos en la escala de Richter. El sismólogo estima que el número de terremotos por año muestra una distribución normal con una media de 24 y desviación estándar de 4.0. En un año cualquiera, ¿qué probabilidad hay de que haya: *a*) más de 30 terremotos, *b*) menos de 18, *c*) más de 16 y *d*) entre 20 y 25 terremotos?

❑ TÉRMINOS Y CONCEPTOS CLAVE

curva normal 678
desviación estándar 665
distribución de la frecuencia 651
distribución de la probabilidad 653
distribución de la probabilidad binomial 669
distribución de la probabilidad normal 678
distribución de probabilidad discreta 654
distribución normal estándar (unitaria) 680
frecuencia 652
frecuencia relativa 653
histograma 655
intervalo (rango) 664
media 660
mediana 662
moda 662
procesos de Bernoulli 669
variable aleatoria 650
variable aleatoria continua 651
variable aleatoria discreta 651
varianza 665

FÓRMULAS IMPORTANTES

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} \tag{14.1}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + \cdots + x_n \cdot f_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n} \tag{14.2}$$

$$\mu = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n \tag{14.3}$$

$$\text{Var}(x) = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x}}{n} \tag{14.4}$$

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}(x)} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}} \tag{14.5}$$

$$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + (x_2 - \mu)^2 p_2 + \cdots + (x_n - \mu)^2 p_n} \tag{14.6}$$

$$P(k,n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \tag{14.7}$$

$$\mu = np \qquad \textbf{(binomial)} \tag{14.8}$$

$$\sigma = \sqrt{npq} \qquad \textbf{(binomial)} \tag{14.9}$$

$$z = \frac{X - \mu}{\sigma} \qquad \textbf{(normal)} \tag{14.10}$$

EJERCICIOS ADICIONALES

SECCIONES 14.1 Y 14.2

1. El número de automóviles que se venden cada día en una automotriz de la localidad al parecer fluctúa en forma aleatoria. El gerente de ventas reunió algunos datos en los últimos 150 días; en la tabla 14.27 se da un resumen de los resultados.

a) Construya la distribución de la probabilidad para este estudio.

b) Trace un histograma de esta distribución.

c) Calcule la media, la mediana, la moda y la desviación estándar.

d) ¿Qué probabilidades hay de que por lo menos un automóvil se venda en un día cualquiera? ¿De que se vendan más de cuatro? ¿De que se vendan menos de cinco?

Tabla 14.27

Automóviles vendidos por día	Frecuencia
0	24
1	32
2	40
3	20
4	12
5	9
6	6
7	4
8	3
	150

2. **Seguridad ocupacional** Una oficina de distrito de una organización de seguridad ocupacional recibe quejas concernientes a condiciones de trabajo potencialmente nocivas. El gerente de distrito ha recopilado algunos datos sobre la cantidad de quejas presentadas diariamente en el último año. La tabla 14.28 es un resumen de los datos.
   a) Construya la distribución de la probabilidad de este estudio.
   b) Dibuje un histograma de esta distribución.
   c) Calcule la media, la mediana, la moda y la desviación estándar.
   d) ¿Qué probabilidades hay de que más de 10 quejas sean presentadas en un día? ¿Y de que se hagan menos de 10?
3. **Epidemiología** El Centro para el Control de Enfermedades (CDC), en Atlanta, ha recabado datos sobre un tipo bastante raro de infección viral. La tabla 14.28 contiene un resumen de los datos referentes al número de casos nuevos comunicados diariamente al centro en los últimos 400 días.
   a) Construya la distribución de la probabilidad de este estudio.
   b) Trace un histograma para la distribución de la probabilidad.

Tabla 14.28

Quejas por día	Frecuencia
5	25
6	40
7	60
8	48
9	56
10	40
11	34
12	20
13	18
14	10
15	9

c) Calcule la media, la mediana, la moda y la desviación estándar.

d) ¿Qué probabilidad hay de que por lo menos se registre un nuevo caso en un día cualquiera? ¿Más de uno? ¿Menos de cinco?

Tabla 14.29

Nuevos casos registrados por día	Frecuencia
0	35
1	68
2	74
3	55
4	48
5	36
6	32
7	25
8	17
9	8
10	2

4. Construya la distribución de probabilidad discreta que corresponda al experimento de lanzar una moneda tres veces. Suponga que $P(H) = 0.7$ y que la variable aleatoria X sea el número de cruces (T) que salen en tres lanzamientos. ¿Qué probabilidad hay de que salga más de una cara? ¿Dos o más cruces?

5. Calcule la media y la desviación estándar de la distribución de probabilidad de la tabla 14.30.

Tabla 14.30

X	20	40	60	80	100
$P(X)$	0.12	0.32	0.26	0.18	0.12

6. Calcule la media y la desviación estándar de la distribución de probabilidad de la tabla 14.31.

Tabla 14.31

X	0	5	10	15	20	25
$P(X)$	0.04	0.18	0.30	0.25	0.17	0.06

7. Calcule la media y la desviación estándar de la distribución de probabilidad de la tabla 14.32.

Tabla 14.32

X	–10	–5	0	5	10
$P(X)$	0.20	0.30	0.15	0.05	0.30

8. Calcule la media y la desviación estándar de la distribución de probabilidad de la tabla 14.33.

Tabla 14.33

X	0	100	200	300	400
$P(X)$	0.30	0.10	0.05	0.35	0.20

9. **Retiro de automóviles** Un fabricante de automóviles ha anunciado que retirará los vehículos de 1990 por un defecto en el eje. Desde que se hizo el anuncio, un supervisor regional de servicio en una región del país lleva registros diarios del número de respuestas al anuncio. Construyó una distribución de probabilidad del número diario de respuestas. La distribución se observa en la tabla 14.34. *a*) Calcule e interprete la media de esta distribución y *b*) calcule la desviación estándar.

Tabla 14.34

Número de respuestas por día	0	1	2	3	4	5	6
Probabilidad	0.10	0.15	0.18	0.22	0.30	0.03	0.02

10. **Aparición de OVNIS** Una sociedad que investiga la supuesta aparición de objetos voladores no identificados (OVNIS) recabó datos relativos a la frecuencia de estos informes en todo Estados Unidos. La tabla 14.35 es una distribución de probabilidad del número de apariciones que se registran todos los días.

a) Calcule e interprete la media de esta distribución.

b) Calcule la desviación estándar.

Tabla 14.35

Número de reportes por día	0	1	2	3	4	5
Probabilidad	0.42	0.34	0.14	0.08	0.03	0.01

SECCIÓN 14.3

11. Una moneda se lanza cinco veces. ¿Qué probabilidad hay de que salgan exactamente tres caras? ¿Y de que no salga ninguna?

12. Un funcionario de las autopistas de cuota ha dado a conocer información según la cual 80% de los vehículos que las usan son automóviles. Suponga que las llegadas a la caseta de la autopista ocurren de modo aleatorio en relación con el tipo de vehículo. En una muestra aleatoria de ocho vehículos que llegan a ella, ¿qué probabilidades hay de que los ocho sean automóviles? ¿Y de que ninguno de ellos sea un automóvil?

13. Un funcionario aduanal de Estados Unidos estima que 30% de las personas que regresan de Europa no declaran todas las compras que están sujetas a impuesto. Si se selecciona a cinco viajeros de manera aleatoria después de regresar de Europa, determine las probabilidades de que cero, uno, dos, tres, cuatro o cinco de ellos no declaren todas las compras que hayan hecho, y que se encuentren sujetas a impuesto. Construya un histograma que resuma estos resultados.

14. Una prueba consta de 20 preguntas de opción verdadero/falso. Calcule la probabilidad de que un estudiante que conoce la respuesta correcta a 10 de ellas, pero que adivina las restantes lanzando una moneda, obtenga una puntuación de 90% o más en el examen. (Suponga una probabilidad de conjetura correcta = 0.6.)

15. Una oficina de hacienda ha averiguado que 60% de las declaraciones del impuesto sobre la renta contienen un error por lo menos. Si se selecciona en forma aleatoria una muestra de 10 declaraciones, ¿qué probabilidad existe de que exactamente ocho contengan un error por lo menos?

16. Un proceso de manufactura produce piezas defectuosas en forma aleatoria a una tasa de 12%. En una muestra de 10 piezas, ¿qué probabilidad hay de que se encuentren menos de dos piezas defectuosas?

17. En el ejercicio 16, ¿cuál es el número medio de piezas defectuosas que se espera descubrir en una muestra de 10? ¿Cuál es la interpretación de este valor? ¿Cuál es la desviación estándar de esta distribución?

18. Un proceso binomial se caracteriza por $p = 0.7$. En una muestra aleatoria de 500:
a) Determine la media para el experimento.
b) Determine la desviación estándar.

19. Un proceso binomial se caracteriza por $p = 0.10$. En una muestra aleatoria de 400:
a) Determine la media para el experimento.
b) Determine la desviación estándar.

20. Un proceso binomial se caracteriza por $p = 0.85$. En una muestra aleatoria de 150:
a) Determine la media para el experimento.
b) Determine la desviación estándar.

21. Un proceso binomial se caracteriza por $p = 0.6$. En una muestra aleatoria de 75:
a) Determine la media para el experimento.
b) Determine la desviación estándar.

22. En una pequeña universidad, se ha comprobado que 30% de los alumnos cuenta con alguna beca. Si se selecciona en forma aleatoria una muestra de 10 alumnos, ¿qué probabilidad hay de que más de nueve tengan algún tipo de beca? ¿Cuál es el número medio de los que cuentan con becas en una muestra de 500 estudiantes?

SECCIÓN 14.4

23. En la distribución normal estándar determine:

a) $P(z \leq 2.8)$
b) $P(-0.6 \leq z \leq 1.3)$
c) $P(-2.6 \leq z \leq -1.5)$
d) $P(0.24 \leq z \leq 2.26)$

24. En la distribución normal estándar determine:

a) $P(z \geq -0.28)$
b) $P(z \leq 0.86)$
c) $P(-1.04 \leq z \leq 0.76)$
d) $P(-0.88 \leq z \leq 2.16)$

25. En la distribución normal estándar determine:

a) $P(-0.24 \leq z \leq -0.10)$
b) $P(1.20 \leq z \leq 1.56)$
c) $P(-0.7 \leq z \leq 0.25)$
d) $P(-1.80 \leq z \leq -1.16)$

26. Dada una variable aleatoria X que tiene distribución normal con una media de 120 y desviación estándar 12, determine:

a) $P(X \geq 105)$ *b*) $P(X \leq 135)$
c) $P(112 \leq X \leq 117)$ *d*) $P(126 \leq X \leq 138)$

27. Dada una variable aleatoria X que tiene distribución normal con una media de 180 y desviación estándar 20, determine:

a) $P(X \geq 215)$ *b*) $P(X \geq 166)$
c) $P(160 \leq X \leq 170)$ *d*) $P(164 \leq X \leq 208)$

28. Dada una variable aleatoria X que tiene distribución normal con una media de 760 y desviación estándar 25, determine:

a) $P(730 \leq X)$ *b*) $P(700 \leq X \leq 710)$
c) $P(767.5 \leq X \leq 792.5)$ *d*) $P(X \leq 722.5)$

29. Pruebas para medir la presión arterial La presión arterial (diastólica) de un grupo de mujeres de 25 a 34 años de edad presenta distribución normal con una media de 82 mmHg y desviación estándar de 3 mmHg. Si se escoge en forma aleatoria a una de ellas, ¿qué probabilidad existe de que: *a*) la presión arterial diastólica fluctúe entre 77.5 y 85 mmHg, *b*) sea menor que 86.5 mmHg y *c*) sea mayor que 88 mmHg?

30. Admisiones a la facultad de derecho Los estudiantes que iniciaron un curso en la escuela de derecho obtienen un promedio de 680 en la prueba de aptitudes académicas, con desviación estándar de 40. Las puntuaciones obtenidas en este grupo también parecen tener distribución normal.

a) ¿Qué porcentaje del grupo tenderá a alcanzar una puntuación de 700 en la prueba? ¿Entre 720 y 750? ¿Mayor que 650? ¿Menor que 600?

b) Un estudiante tenía desviación estándar debajo de la media de la prueba. ¿Qué porcentaje de estos condiscípulos consiguió calificaciones menores que las de él?

31. Tabaquismo Un estudio reciente efectuado por el servicio de salud pública descubrió que los varones que fuman consumían en promedio 18 cigarrillos al día. El número de cigarrillos fumados diariamente presenta distribución normal con desviación estándar de 4. Si se selecciona en forma aleatoria a un fumador, ¿qué probabilidad hay de que fume: *a*) más de un paquete (20 cigarrillos) al día; *b*) menos de medio paquete al día, y *c*) menos de un paquete y medio?

32. Ahorros personales Un gran banco de inversión efectuó un estudio sobre los hábitos de inversión de individuos entre 35 y 44 años de edad durante 1990. Según el estudio, los ahorros anuales por persona mostraban distribución normal con media de $5 200 y desviación estándar de $800. Si una persona en este grupo de edades es seleccionada en forma aleatoria, ¿qué probabilidad hay de que en 1990 esa persona haya hecho ahorros: *a*) de más de $6 000; *b*) de menos de $4 000; *c*) entre $5 000 y $7 000, o *d*) menos de $5 000?

33. Donativos a obras de caridad El servicio de recaudación de impuestos analizó las declaraciones que incluían deducciones por aportaciones a obras de caridad de todos aquellos que incluyeron ese renglón en su declaración correspondiente a 1991. La oficina descubrió que las aportaciones declaradas por cada trabajador tenían distribución normal con una media de $840 y desviación estándar de $180. Si se escoge en forma aleatoria a un empleado, ¿qué probabilidad hay de que en 1991 ese individuo haya aportado: *a*) más de $1 020, *b*) menos de $435, *c*) entre $390 y $1 380 o *d*) más de $300?

34. Un proceso de manufactura produce una pieza metálica circular. Los diámetros de las piezas tienen, según se ha comprobado, distribución normal con media de 20 cm y desviación estándar de 0.05 cm. Si una pieza metálica se selecciona de modo aleatorio, ¿qué probabilidad existe de que tenga un diámetro entre 19.925 y 20.075 cm?

35. **Ligas mayores de béisbol** Los promedios de bateo en la liga nacional de Estados Unidos presentaron en un año una media de 0.275 y desviación estándar de 0.020. Si se escoge de modo aleatorio a un jugador, ¿qué probabilidad existe de que su promedio: *a*) sea mayor que 0.300, *b*) menor que 0.250, *c*) entre 0.280 y 0.320 y *d*) menos de 0.200 o mayor que 0.350?

❑ EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. En la siguiente distribución de probabilidad: *a*) calcule la media y la desviación estándar, y *b*) determine la probabilidad de que la variable aleatoria adopte un valor mayor que 210.

X	*P* (*X*)
200	0.06
210	0.16
220	0.24
230	0.04
240	0.26
250	0.24

2. Se ha determinado que 30% de las familias estadounidenses disfrutan de la televisión por cable. Si se seleccionan de modo aleatorio cuatro residencias, construya la distribución binomial donde la variable aleatoria X sea el número de residencias que tengan este tipo de televisión.

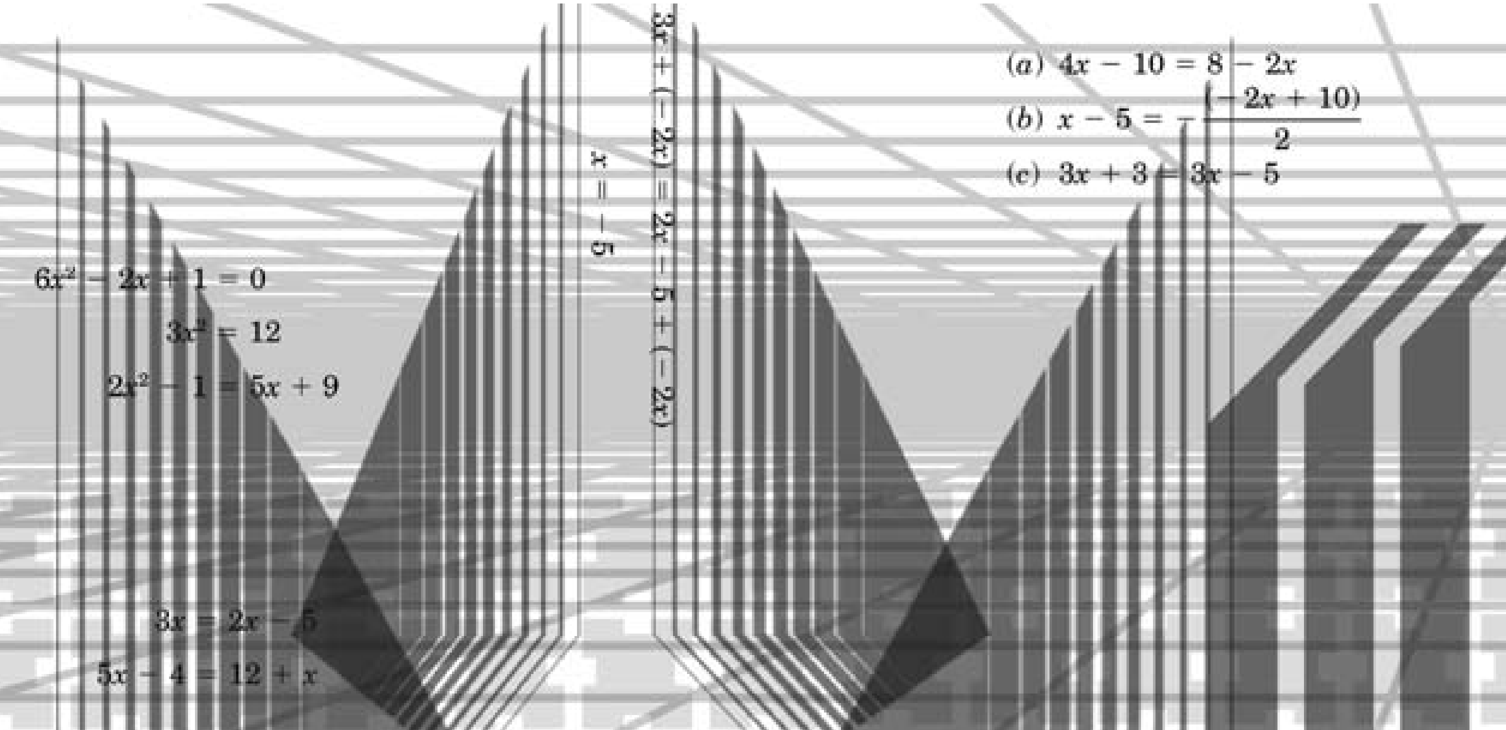
3. Un proceso de manufactura produce partes defectuosas en forma aleatoria a una tasa de 8%. En una muestra de 400 piezas, ¿cuál es el número medio de piezas defectuosas que se esperan? ¿Cuál es la desviación estándar de esta distribución?

4. Una moneda se lanza seis veces. ¿Qué probabilidad existe de que en los seis lanzamientos caiga exactamente cuatro veces cruz?

5. Una variable aleatoria X tiene distribución normal con media de 180 y desviación estándar de 40. Determine: *a*) $P(X \leq 162)$; *b*) $P(150 \leq X \leq 160)$ y *c*) $P(X \geq 204)$.

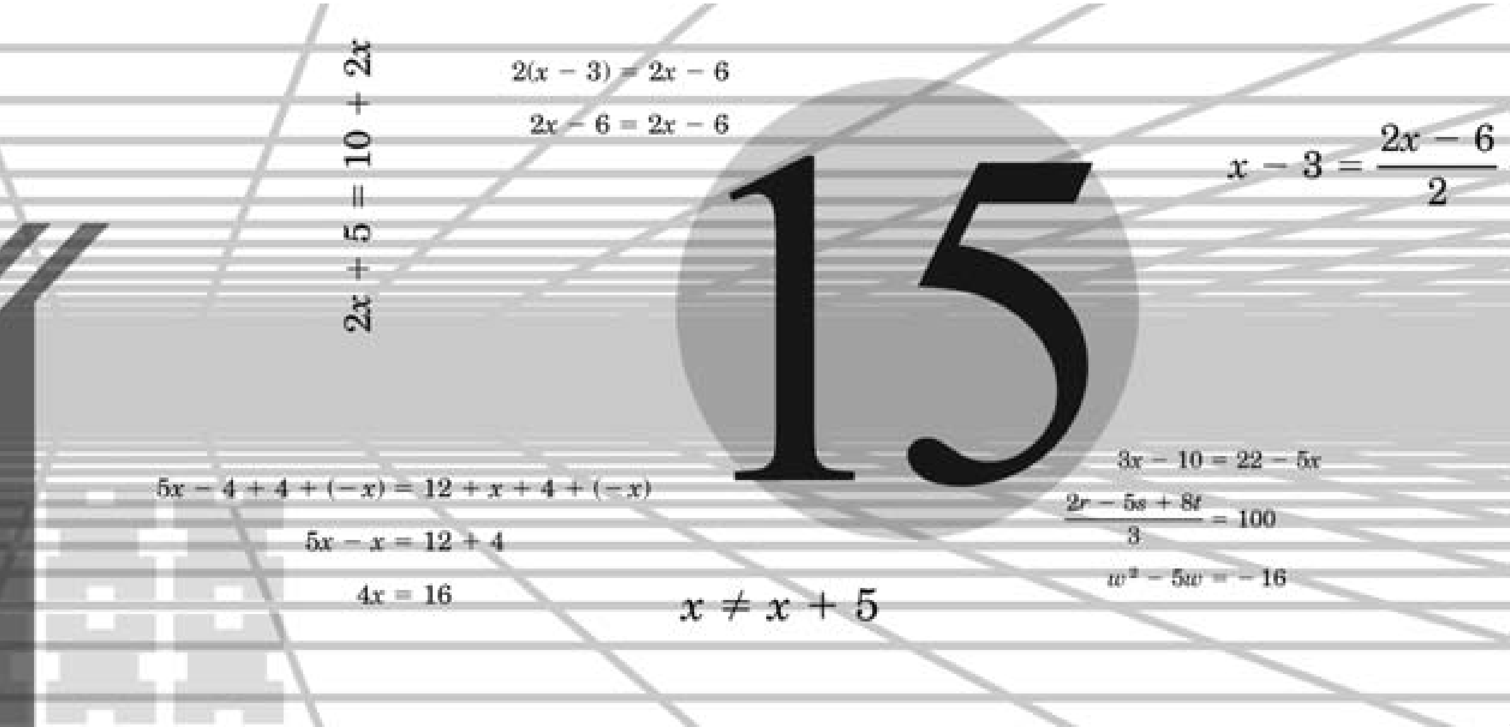
CAPÍTULO 15

Diferenciación



OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Dar una introducción de los conceptos de límites y continuidad.
- Lograr que el lector entienda la razón de cambio promedio.
- Lograr que el lector comprenda la derivada, incluyendo su cálculo e interpretación.
- Explicar algunas reglas de la diferenciación y ofrecer ejemplos de su uso.
- Dar una introducción a la naturaleza de las derivadas de orden superior y de su interpretación.



ESCENARIO DE MOTIVACIÓN: Seguimiento de una epidemia

Una epidemia de gripe se está diseminando a lo largo de un estado del medio oeste de Estados Unidos. Con base en epidemias semejantes que se han presentado en lo pasado, los epidemiólogos han formulado una función matemática que estima el número de personas que serán afectadas por la gripe. *Haciendo uso de la función de estimación, los oficiales del departamento de salud desean predecir los efectos de la epidemia, incluyendo la estimación de la tasa de afectación así como el número de personas que sean contagiadas con la gripe (ejemplo 55).*

Éste es el primero de seis capítulos que examinan el ***cálculo*** y su aplicación a la administración, la economía y otras esferas de la solución de problemas. Dos áreas fundamentales de estudio en el cálculo son el ***cálculo diferencial*** y el ***cálculo integral***. El primero se centra en las *razones de cambio* al analizar una situación. En forma gráfica, el cálculo diferencial resuelve el siguiente problema: *dada una función cuya gráfica es una curva suave y dado un punto en el dominio de la función, ¿cuál será la pendiente de la línea tangente respecto de la curva en este punto?* Más adelante en este capítulo se verá que esa “pendiente” expresa la razón de cambio instantánea de la función.

El cálculo integral incluye la suma de un tipo especial. Desde el punto de vista gráfico, los conceptos de *área* en dos dimensiones o de *volumen* en tres dimensiones son importantes en el cálculo integral. En dos dimensiones, el cálculo integral resuelve el siguiente problema: *dada una función cuya gráfica es una curva suave y dos puntos en el dominio de la función, ¿cuál es el área de la región acotada por la curva y el eje x entre los dos puntos?*

Este capítulo, los siguientes dos y el capítulo 20 analizarán el cálculo diferencial y sus aplicaciones. En el capítulo 18 se dará una introducción al cálculo integral y en el capítulo 19 se analizarán sus aplicaciones. El objetivo de estos capítulos es ofrecer un conocimiento de lo que es el cálculo y sus áreas de aplicación. Aunque se necesitarían varios semestres de estudio intensivo para entender la mayor parte de los puntos más finos del cálculo, lo que aquí se explica permitirá al lector entender las herramientas para efectuar análisis en niveles elementales.

En este capítulo se pretende sentar las bases para lo que se verá en los siguientes. En primer lugar, se describirán dos conceptos que son muy importantes en la teoría del cálculo diferencial: *límites* y *continuidad.* Este análisis se acompañará de un desarrollo intuitivo del concepto de la *derivada.* En el resto del capítulo se proporcionarán las herramientas con que se calculan las derivadas y también se darán ideas sobre la interpretación del significado de la derivada. Las demostraciones de las reglas de la diferenciación no se presentan en la parte principal del capítulo, pero se ofrecen algunas de ellas en el apéndice al final del mismo.

15.1 Límites

Dos conceptos muy importantes en la teoría del cálculo diferencial e integral son el ***límite de una función*** y la ***continuidad***. El concepto de límite se comenta en la presente sección. En la siguiente se extiende este tema y lleva al concepto de continuidad. Se recomienda al lector leer atentamente estas explicaciones, pues se trata de conceptos que muchas veces se entienden en forma equivocada.

Límites de las funciones

En el cálculo a menudo se desea conocer el valor límite de una función a medida que la variable independiente se aproxima a un número real específico. Este valor límite, cuando existe, recibe el nombre de ***límite***. La notación

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = L} \tag{15.1}$$

sirve para expresar los valores límites de una función. La ecuación (15.1) se lee "el límite de $f(x)$, a medida que x se aproxima al valor a, es igual a L". *Cuando se investiga un límite, en realidad se está preguntando si $f(x)$ se acerca a un valor específico L a medida que el valor de x se aproxima más y más hacia a.*

Se dispone de varios procedimientos para determinar el límite de una función. La tentación nos lleva a sustituir simplemente el valor $x = a$ en f y a determinar $f(a)$. En verdad se trata de una forma válida de determinar el límite de muchas funciones, pero no de todas.

Un método que puede aplicarse consiste en sustituir los valores de la variable independiente en la función, en tanto se observa el comportamiento de $f(x)$ a medida que el valor de x va aproximándose más y más hacia a. Un aspecto importante de este procedimiento es que el valor de la función se observa conforme el valor de a se aproxima desde ambos lados de a. La notación $\displaystyle\lim_{x \to a^-} f(x)$ representa el límite de $f(x)$ al aproximarse x hacia a desde la izquierda (***límite por la izquierda***) o desde abajo. La notación $\displaystyle\lim_{x \to a^+} f(x)$ representa el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima hacia a desde la derecha **(*límite por la derecha*)** o desde arriba. ***Si el valor de la función se aproxima al mismo número L conforme x se acerca hacia a desde ambas direcciones, entonces el límite es igual a L***. Esto se expresa con mayor precisión como sigue:

Prueba de la existencia de un límite

Si $\displaystyle\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ y $\displaystyle\lim_{x \to a^+} f(x) = L$, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Si los valores límite de $f(x)$ son diferentes cuando x se aproxima hacia a desde ambas direcciones, entonces la función no se aproxima a un límite conforme x se acerca hacia a. Los siguientes ejemplos muestran claramente esto.

Ejemplo 1

A fin de determinar el $\displaystyle\lim_{x \to 2} x^3$ (si es que existe), construyamos una tabla de valores supuestos para x y los valores correspondientes para $f(x)$. La tabla 15.1 contiene estos valores. Adviértase que el valor de $x = 2$ ha sido aproximado desde la izquierda y la derecha. Y desde una y otra dirección, $f(x)$ se acerca al mismo valor, 8. Puesto que

Tabla 15.1

Aproximación de $x = 2$ desde la izquierda

x	1	1.5	1.9	1.95	1.99	1.995	1.999
$f(x) = x^3$	1	3.375	6.858	7.415	7.881	7.94	7.988

Aproximación de $x = 2$ desde la derecha

x	3	2.5	2.1	2.05	2.01	2.005	2.001
$f(x) = x^3$	27	15.625	9.261	8.615	8.121	8.060	8.012

$$\lim_{x\to 2^-} x^3 = 8 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 2^+} x^3 = 8$$

entonces

$$\lim_{x\to 2} x^3 = 8$$

Obsérvese que este límite podría haberse determinado con sólo sustituir $x = 2$ en f.

La figura 15.1 confirma el resultado. Cuanto más se acerque x al valor de 2, más se aproxima a 8 el valor de $f(x)$.

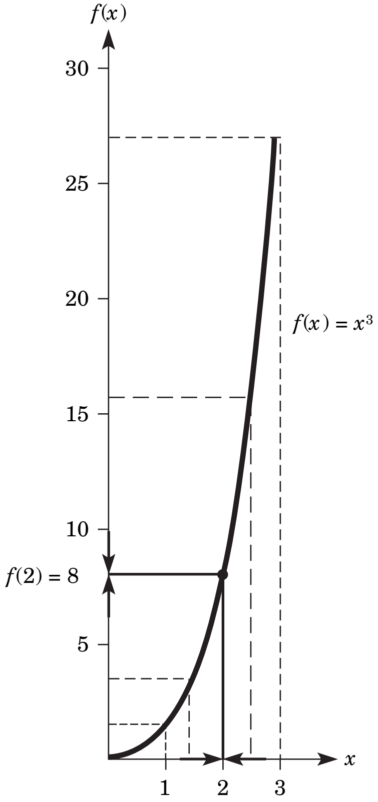


Figura 15.1 $\lim_{x\to 2^-} x^3 = \lim_{x\to 2^+} x^3 = 8$.

Tabla 15.2

Aproximación de $x = 4$ desde la izquierda						
x	3	3.5	3.8	3.9	3.95	3.99
$f(x) = 2x$	6.0	7.0	7.6	7.8	7.9	7.98

Aproximación de $x = 4$ desde la derecha						
x	5	4.5	4.3	4.1	4.05	4.01
$f(x) = 2x + 3$	13.0	12.0	11.6	11.2	11.1	11.2

Ejemplo 2 Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{cuando } x \leq 4 \\ 2x + 3 & \text{cuando } x > 4 \end{cases}$$

se determinará si existe $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$. Se elabora una tabla con los valores de $f(x)$ determinados a medida que x se aproxima al valor de 4 desde la izquierda y la derecha (tabla 15.2). Conforme x se aproxima al valor de 4 desde la izquierda, $f(x)$ se acerca al valor de 8, o

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = 8$$

Como x se aproxima a 4 desde la derecha, $f(x)$ se acerca al valor de 11, es decir

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = 11$$

Puesto que

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) \neq \lim_{x \to 4^+} f(x)$$

la función no se acerca al valor límite cuando $x \to 4$, y no existe $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$. La figura 15.2 muestra la gráfica de esta función. En el capítulo 4 se dijo que el círculo sólido (●) indicaba que $x = 4$ está incluida en el dominio del segmento de la línea inferior y que el círculo abierto (○) denotaba que $x = 4$

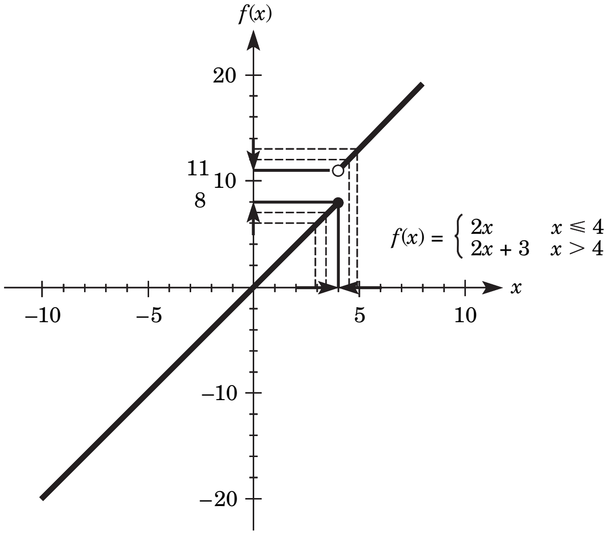


Figura 15.2 $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$.

no está incluida en el dominio del segmento de la línea superior. La interrupción de la función en $x = 4$ es la causa de que el límite no exista. Un punto importante en relación con esta función es que $f(x)$ no se aproxima al límite en el caso de otros valores que no sean $x = 4$.

Ejemplo 3 A continuación se determinará si existe $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$ si

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

El denominador es 0 cuando $x = 3$, de manera que se puede concluir que la función no está definida en este punto. Y sería tentador afirmar que no existe límite alguno cuando $x = 3$. Sin embargo, esta función sí se aproxima a un límite conforme x se acerca a 3, a pesar de que esta función no está definida en $x = 3$.

Tabla 15.3

Aproximación de $x = 3$ desde la izquierda

x	2	2.5	2.9	2.95	2.99
$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$	5.0	5.5	5.9	5.95	5.99

Aproximación de $x = 3$ desde la derecha

x	4	3.5	3.1	3.05	3.01
$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$	7.0	6.5	6.1	6.05	6.01

La tabla 15.3 contiene valores de $f(x)$ a medida que x se aproxima a 3 desde la izquierda y la derecha. Puesto que

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 6 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to 3^+} f(x) = 6$$

entonces

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

Aun cuando la función no está definida si $x = 3$, la función se aproxima al valor de 6 a medida que el valor de x se acerca más a 3. La figura 15.3 presenta la gráfica de la función.

Ejemplo 4 Un caso especial es el de los límites en un punto final en el dominio de una función. Considérese la función $f(x) = \sqrt{x}$. El dominio de esta función es $x \geq 0$. Si se está interesado en $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x}$, no se pueden determinar los límites por la izquierda y por la derecha. Puede determinarse $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x}$, pero no $\lim\limits_{x \to 0^-} \sqrt{x}$. *Nuestro interés se centrará siempre en determinar los límites dentro del dominio de una función.* En este ejemplo, el límite se determinará exclusivamente a partir del límite derecho. Puesto que $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$, entonces $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$. La figura 15.4 ilustra esta función. ❑

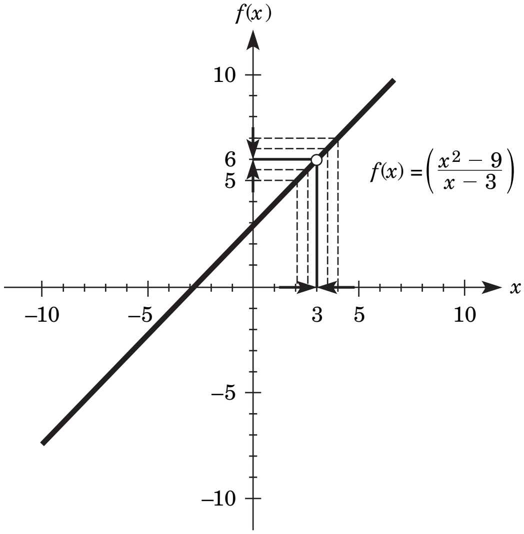


Figura 15.3

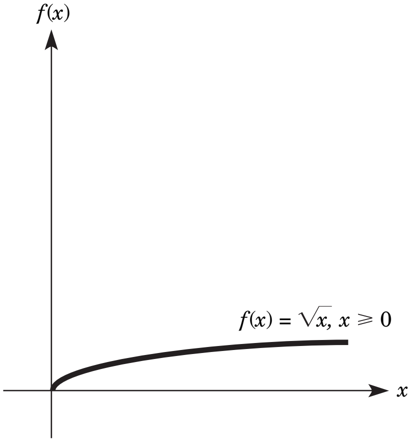


Figura 15.4

Un punto clave en el concepto de límite es que no se desea conocer el valor de f(x) **cuando** *x = a. Se requiere conocer el comportamiento de f(x) a medida que x se aproxima más y más al valor de a. Y la notación*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

significa que a medida que x se acerca hacia a, pero x ≠ a, f(x) se aproxima a L.

Sección 15.1 Ejercicios de seguimiento

1. Utilice la gráfica de la función de la figura 15.5 para determinar los límites indicados.

a) $\lim_{x \to -5^-} f(x)$ *b*) $\lim_{x \to -5^+} f(x)$ *c*) $\lim_{x \to -5} f(x)$

d) $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ *e*) $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ *f*) $\lim_{x \to 0} f(x)$

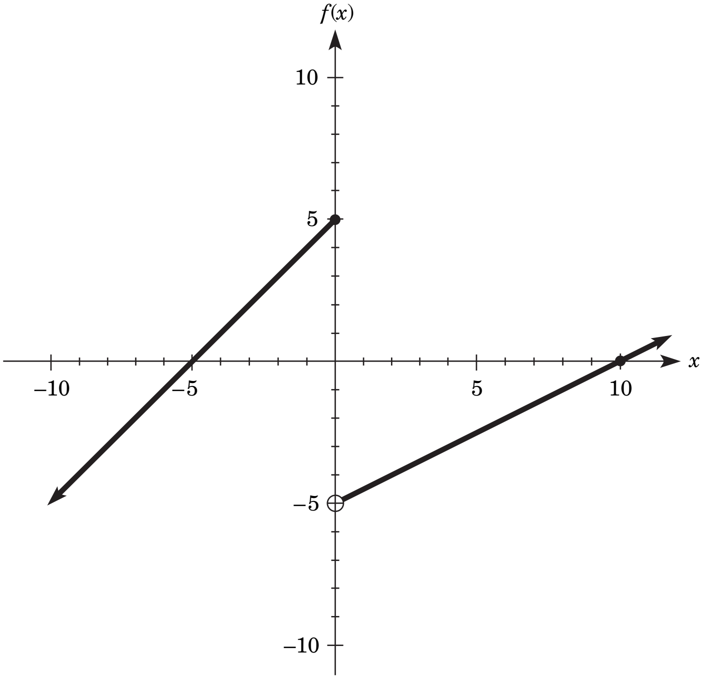


Figura 15.5

2. Utilice la gráfica de la función de la figura 15.6 para determinar los límites indicados.

a) $\operatorname*{lím}_{x \to 0^-} f(x)$ *b*) $\operatorname*{lím}_{x \to 0^+} f(x)$ *c*) $\operatorname*{lím}_{x \to 0} f(x)$

d) $\operatorname*{lím}_{x \to 3^-} f(x)$ *e*) $\operatorname*{lím}_{x \to 3^+} f(x)$ *f*) $\operatorname*{lím}_{x \to 3} f(x)$

g) $\operatorname*{lím}_{x \to -5} f(x)$ *h*) $\operatorname*{lím}_{x \to 1} f(x)$

3. Utilice la gráfica de la función de la figura 15.7 para determinar los límites indicados.

a) $\operatorname*{lím}_{x \to 1^-} f(x)$ *b*) $\operatorname*{lím}_{x \to 1^+} f(x)$ *c*) $\operatorname*{lím}_{x \to 1} f(x$

d) $\operatorname*{lím}_{x \to 0} f(x)$ *e*) $\operatorname*{lím}_{x \to 0^+} f(x)$ *f*) $\operatorname*{lím}_{x \to 0} f(x$

4. Utilice la gráfica de la función de la figura 15.8 para determinar los límites indicados.

a) $\operatorname*{lím}_{x \to -4^-} f(x)$ *b*) $\operatorname*{lím}_{x \to -4^+} f(x)$ *c*) $\operatorname*{lím}_{x \to -4} f(x)$

d) $\operatorname*{lím}_{x \to -2^-} f(x)$ *e*) $\operatorname*{lím}_{x \to -2^+} f(x)$ *f*) $\operatorname*{lím}_{x \to -2} f(x)$

g) $\operatorname*{lím}_{x \to 1^-} f(x)$ *h*) $\operatorname*{lím}_{x \to 1} f(x)$

Para los ejercicios siguientes, determine el límite (si existe) construyendo una tabla de valores para *f*(*x*) y examinando los límites de la izquierda y la derecha (donde sea apropiado).

5. $\operatorname*{lím}_{x \to 3} 2x^2$ **6.** $\operatorname*{lím}_{x \to -4} (5x + 15)$

7. $\operatorname*{lím}_{x \to 5} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{para } x < 5 \\ 20 - 2x & \text{para } x \geq 5 \end{cases}$

8. $\operatorname*{lím}_{x \to 5} f(x)$ donde $f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{para } x < 5 \\ 2 - x & \text{para } x \geq 5 \end{cases}$

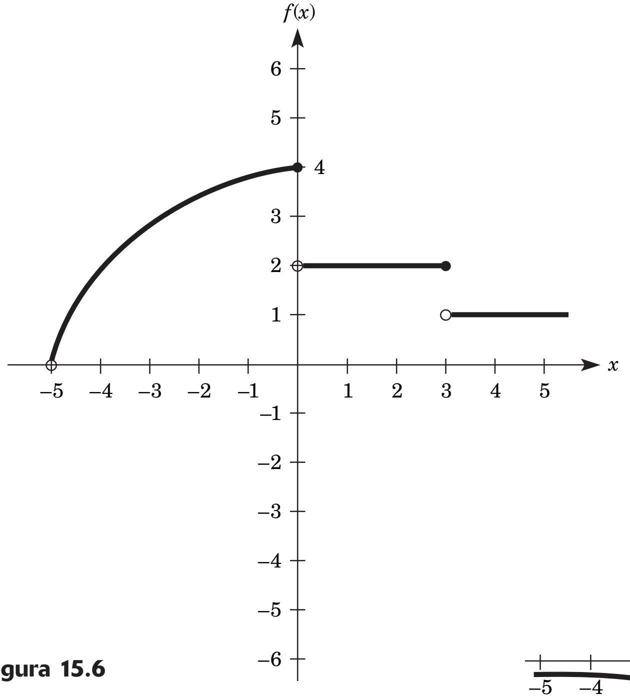


Figura 15.6

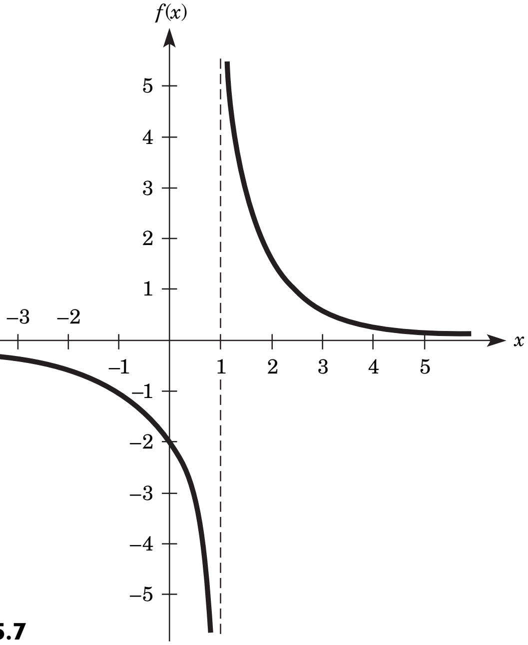


Figura 15.7

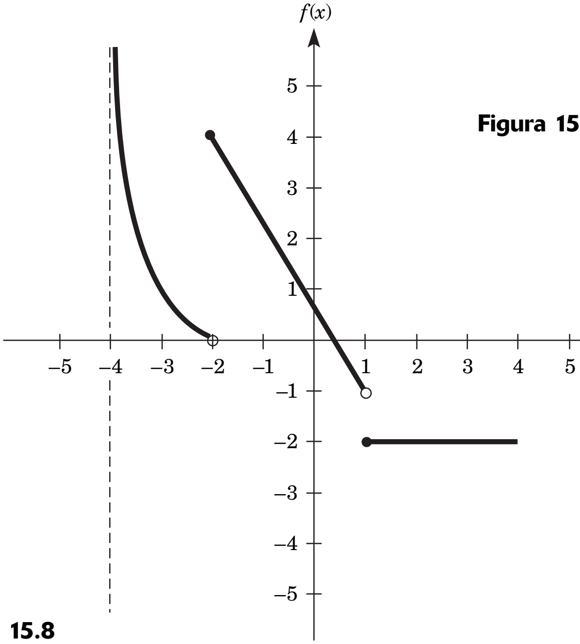


Figura 15.8

9. $\lim\limits_{x \to -1} g(x)$ donde $g(x) = \begin{cases} 5 - 2x & \text{para } x < -1 \\ 2x & \text{para } x \geq -1 \end{cases}$

10. $\lim\limits_{x \to 0} h(x)$ donde $h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } x < 0 \\ 0.5x^2 & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$

11. $\lim\limits_{x \to -3} (-2x^3)$

12. $\lim\limits_{x \to 4} (4x^2 - 5x + 1)$

13. $\lim\limits_{x \to 2} (-x^3)$

14. $\lim\limits_{x \to -2} (2x^3 - 16)$

15. $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{x^2 - 64}{x - 8}$

16. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{9 - x^2}{3 - x}$

17. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2 - 9x - 12}{3x + 3}$

18. $\lim\limits_{x \to -1/2} \dfrac{1 - x - 2x^2}{1 - 2x}$

19. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4}{x}$

20. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4}{x - 3}$

21. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{8}{x + 3}$

22. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{5}{4 - 2x}$

23. $\lim\limits_{x \to -7} \dfrac{x^2 - 49}{x + 7}$

24. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

25. $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}$

26. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 3x - 18}{x - 3}$

27. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 + 3x}{x + 3}$

28. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2 + 7x - 15}{x - 3}$

15.2 Propiedades de los límites y continuidad

Algunas propiedades de los límites

En la presente sección se analizan algunas propiedades de los límites, que son útiles para determinar el valor límite de una función. Pronto se verá que el proceso de determinación de los límites no siempre requiere una evaluación de *f*(*x*) en una serie de puntos a ambos lados de $x = a$.

Propiedad 1 Si $f(x) = c$, donde c es real,

$$\lim_{x \to a} (c) = c$$

Ejemplo 5

$$\lim_{x \to 3} 100 = 100$$

❑

Propiedad 2 Si $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo, entonces

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n$$

Ejemplo 6

$$\lim_{x \to -2} x^3 = (-2)^3 = -8$$

❑

Propiedad 3 Si $f(x)$ tiene un límite cuando $x \to a$ y c es real, entonces

$$\lim_{x \to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

Ejemplo 7

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 10} 5x^2 &= 5 \lim_{x \to 10} x^2 \\ &= 5(10)^2 = 500 \end{aligned}$$

❑

Propiedad 4 Si existen $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

Ejemplo 8

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -1} (x^5 - 10) &= \lim_{x \to -1} x^5 - \lim_{x \to -1} 10 \\ &= (-1)^5 - 10 = -1 - 10 = -11 \end{aligned}$$

❑

Propiedad 5 Si existen $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, entonces

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

Ejemplo 9

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 4} [(x^2 - 5)(x + 1)] &= \lim_{x \to 4} (x^2 - 5) \cdot \lim_{x \to 4} (x + 1) \\ &= [(4)^2 - 5][4 + 1] \\ &= [16 - 5][5] \\ &= 11(5) = 55 \end{aligned}$$

❑

Propiedad 6 Si existen $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to x} g(x)$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}, \qquad \textbf{siempre que } \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

Ejemplo 10

$$\lim_{x \to -5} \frac{x}{x^2 + 10} = \frac{\lim\limits_{x \to -5} x}{\lim\limits_{x \to -5} (x^2 + 10)}$$

$$= \frac{-5}{(-5)^2 + 10} = \frac{-5}{35} = \frac{-1}{7}$$

❑

Como se verá en los siguientes ejemplos, para evaluar un límite se requiere a menudo la aplicación de más de una de estas propiedades.

Ejemplo 11

$$\lim_{x \to -1} x^4 = (-1)^4 = 1 \qquad \textbf{(Propiedad 2)}$$

Ejemplo 12

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 5} (x^2 - x + 10) &= \lim_{x \to 5} x^2 - \lim_{x \to 5} x + \lim_{x \to 5} 10 && \textbf{(Propiedad 4)} \\ &= 5^2 - 5 + 10 && \textbf{(Propiedades 1 y 2)} \\ &= 30 \end{aligned}$$

Ejemplo 13

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -2} 5x^3 &= 5 \cdot \lim_{x \to -2} x^3 && \textbf{(Propiedad 3)} \\ &= (5)(-2)^3 && \textbf{(Propiedad 2)} \\ &= (5)(-8) = -40 \end{aligned}$$

Ejemplo 14

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} [(x^5 - 1)(x^3 + 4)] &= \lim_{x \to 0} (x^5 - 1) \cdot \lim_{x \to 0} (x^3 + 4) && \textbf{(Propiedad 5)} \\ &= (\lim_{x \to 0} x^5 - \lim_{x \to 0} 1)(\lim_{x \to 0} x^3 + \lim_{x \to 0} 4) && \textbf{(Propiedad 4)} \\ &= (0 - 1)(0 + 4) && \textbf{(Propiedades 1 y 2)} \\ &= (-1)(4) = -4 \end{aligned}$$

Ejemplo 15

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 1}{x^2} &= \frac{\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 1)}{\lim\limits_{x \to 2} x^2} && \textbf{(Propiedad 6)} \\ &= \frac{\lim\limits_{x \to 2} x^3 - \lim\limits_{x \to 2} 1}{\lim\limits_{x \to 2} x^2} && \textbf{(Propiedad 4)} \\ &= \frac{2^3 - 1}{2^2} = \frac{8 - 1}{4} = \frac{7}{4} && \textbf{(Propiedades 1 y 2)} \end{aligned}$$

❑

Las propiedades hacen bastante más fácil el proceso de evaluación de los límites para determinadas clases de funciones. Los límites de estos tipos de funciones pueden evaluarse por **sustitución** para determinar *f*(*a*). Para estas clases de funciones

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)} \qquad \textbf{(15.2)}$$

Las funciones polinomiales son una clase muy común de funciones para las cuales es válida la ecuación (15.2). Esta conclusión se deduce de las propiedades 1 a 4.

Ejemplo 16

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}(3x^2 - 4x + 10) &= f(-2)\\ &= 3(-2)^2 - 4(-2) + 10 = 12 + 8 + 10 = 30\end{aligned}$$

❑

En el ejemplo 3 se determinó

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

Aun cuando la función no se defina en $x = 3$, su valor se aproxima a 6 a medida que x se acerca a 3. Esta función es un ejemplo de una familia de funciones de "cociente" que pueden simplificarse por factorización.

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x^2 - 9}{x - 3}\\ &= \frac{(x + 3)(x - 3)}{x - 3}\\ &= x + 3, \qquad \text{para toda } x \neq 3\end{aligned}$$

Si bien $f(x) = [(x + 3)(x - 3)]/(x - 3)$ y $g(x) = x + 3$ *no* son la misma función, *son iguales siempre que se defina* $f(x)$. Como se aprecia en la figura 15.9, g y f se grafican como líneas idénticas exceptuando la presencia de un "hoyo" en $x = 3$ para la gráfica de f. Sin embargo, dado que no nos preocupa lo que sucede si f en $x = 3$, es posible determinar el comportamiento de f estudiando el de g.

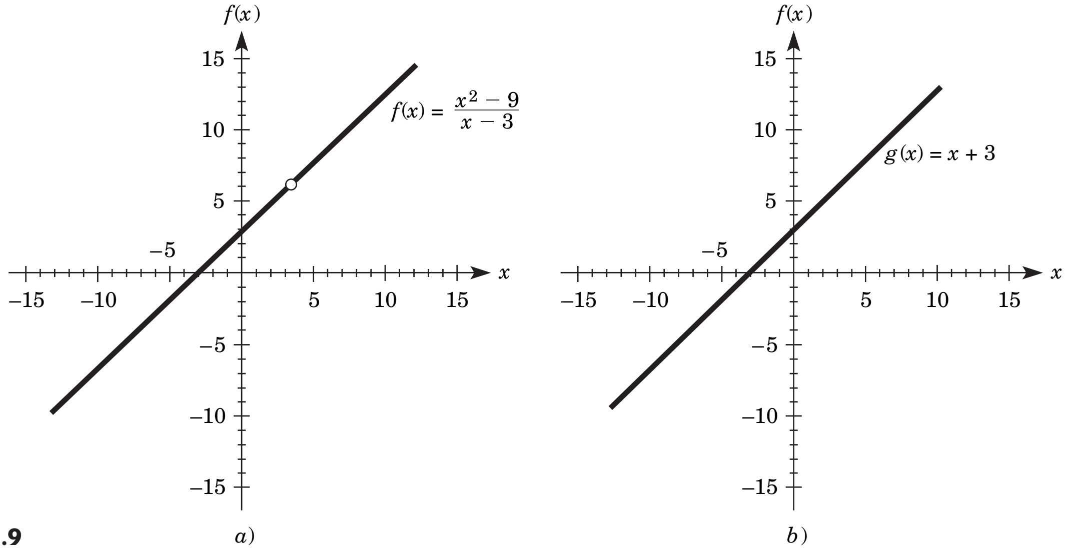


Figura 15.9

a) *b*)

Haciendo uso de g como una función equivalente de f, el procedimiento de sustitución para determinar el límite es válido. Es decir,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} &= \lim_{x\to 3}(x+3)\\ &= 3+3=6\end{aligned}$$

Ejemplo 17

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1}\frac{4x^2+x-3}{x+1} &= \lim_{x\to -1}\frac{(4x-3)(x+1)}{x+1}\\ &= \lim_{x\to -1}(4x-3)\\ &= 4(-1)-3=-7\end{aligned}$$

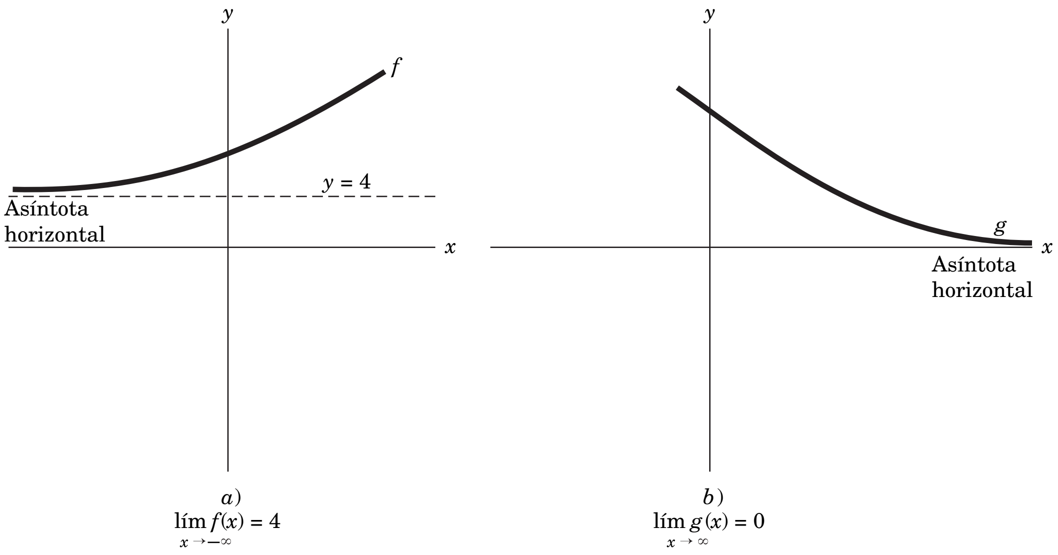
❑

Límites e infinito

A menudo se desea conocer el comportamiento de una función conforme aumenta la variable independiente sin límite alguno ("aproximándose" al infinito, tanto positivo como negativo). Examínense las dos funciones trazadas en la figura 15.10. En la figura 15.10*a*, al acercarse x al infinito negativo, $f(x)$ se aproxima al valor de 4 pero sin alcanzarlo nunca. Usando la notación de límites, se establece que

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 4$$

También puede afirmarse que $f(x)$ tiene una ***asíntota horizontal*** que es $y = 4$ conforme x se acerca a $-\infty$. También, esto significa que $f(x)$ se aproxima a un valor de 4, aunque sin alcanzarlo nunca, a medida que x se acerca a $-\infty$.



a) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 4$

b) $\lim_{x\to \infty} g(x) = 0$

Figura 15.10 Límites hacia el infinito.

De igual manera, en la figura 15.10*b*, *g* se acerca al eje *x* aunque sin tocarlo nunca, conforme *x* se aproxima a ∞. Este comportamiento puede formularse mediante la notación

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$$

Como en el caso de *f*, *g* tiene una asíntota horizontal de $y = 0$, al aproximarse *x* a ∞.

Una definición más formal de una asíntota horizontal es la siguiente.

Definición: Asíntota horizontal

La línea $y = a$ es una ***asíntota horizontal*** de la gráfica de *f* si y sólo si

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a$$

o

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$$

A continuación se analizará la evaluación de límites a medida que la variable independiente se aproxima al infinito positivo o negativo. Considérese

$$\lim_{x \to \infty} (1/x)$$

En la tabla 15.4 se ofrece la sustitución de los valores muestra de *x*. En esta tabla se observa que $\lim_{x \to \infty} (1/x) = 0$.

Tabla 15.4

x	1	10	100	1 000	10 000	100 000
$f(x) = 1/x$	1	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001

Considérese la evaluación de $\lim_{x \to \infty} (1/x^2)$. La tabla 15.5 contiene un resumen de los valores de la función para diversos valores de *x*. Una vez más, se advierte que $\lim_{x \to \infty} (1/x^2) = 0$. En comparación con $\lim_{x \to \infty} (1/x)$, elevar al cuadrado *x* en el denominador hace que se aproxime el límite a una razón más rápida.

Tabla 15.5

x	1	10	100	1 000	10 000
$f(x) = 1/x^2$	1	0.01	0.0001	0.00001	0.0000001

Ejemplo 18

Pongamos el caso de la evaluación de $\lim_{x \to \infty} (3x^2 + 5x)/(4x^2 - 5)$. *Una técnica con que se evalúa este límite es factorizar el término monomial de mayor grado, tanto en el numerador como en el denominador*. Al factorizar $3x^2$ en el numerador y $4x^2$ en el denominador se obtiene

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3x^2}{4x^2}\cdot\frac{\left(1+\dfrac{5x}{3x^2}\right)}{\left(1-\dfrac{5}{4x^2}\right)}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{3}{4}\cdot\frac{\left(1+\dfrac{5}{3x}\right)}{\left(1-\dfrac{5}{4x^2}\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{4}\left[\frac{(1+0)}{(1-0)}\right]$$

$$=\frac{3}{4}$$

Ejemplo 19 Considérese la evaluación de $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x^3-20x)/(3x^2+5)$. Al aplicar la misma técnica que en el ejemplo anterior, se factorizan $5x^3$ en el numerador y $3x^2$ en el denominador. Esto da

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{5x^3}{3x^2}\cdot\frac{\left(1-\dfrac{20x}{5x^3}\right)}{\left(1+\dfrac{5}{3x^2}\right)}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{5x}{3}\cdot\frac{\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right)}{\left(1+\dfrac{5}{3x^2}\right)}\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{5x}{3}\cdot\frac{(1-0)}{(1+0)}\right]$$

$$=-\infty$$

❑

Aunque tal vez esto no sea claro en los ejemplos presentados hasta ahora, el límite de una función racional al acercarse x al infinito positivo o negativo es simplemente *el límite del cociente del término monomial de mayor grado en el numerador y el término monomial de mayor grado en el denominador*. Eso se debe a que los términos de mayor grado en el numerador y denominador dominan a los otros términos al aproximarse x al infinito positivo o negativo. En el ejemplo 18 puede evaluarse el límite al determinar el comportamiento de $3x^2/4x^2$ a medida que $x\to\infty$. En el ejemplo 19, el límite se obtiene al evaluar el límite de $5x^3/3x^2$ como $x\to-\infty$.

A continuación este concepto se ilustra específicamente al evaluar

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4-2x^3+5x}{25+3x^2-7x^4}$$

Puesto que $4x^4$ y $-7x^4$ son los términos monomiales de mayor grado en el numerador y denominador, respectivamente, el límite puede evaluarse al determinar

$$\lim_{x\to\infty}(4x^4/-7x^4)=\lim_{x\to\infty}(4/-7)$$

$$=\frac{-4}{7}$$

Otra posibilidad de límite se da en la figura 15.11. En esta figura, $f(x)$ se vuelve arbitrariamente grande al aproximarse x al valor de a. En esta situación se afirma que f presenta una ***asíntota vertical*** de $x=a$ debido a que al acercarse x al valor de a, $f(x)$ crece sin lími-

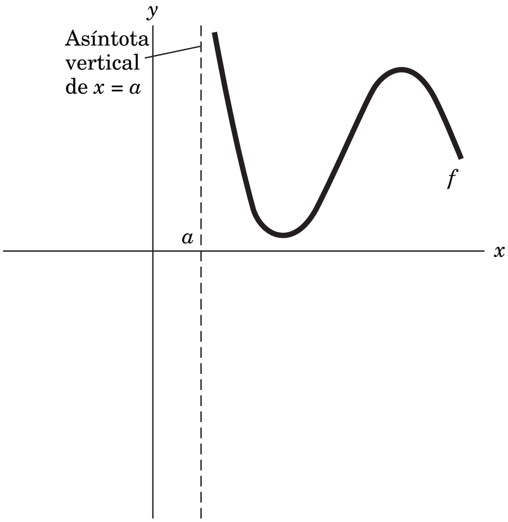


Figura 15.11 Asíntota vertical.

te. Desde el punto de vista visual, la ordenada de la curva que representa f crece sin límite alguno conforme la curva va aproximándose a la línea cuando $x = a$, pero sin tocarla nunca. He aquí una definición más formal de este fenómeno.

Definición: Asíntota vertical

La línea $x = a$ es una ***asíntota vertical*** de la gráfica de f si y sólo si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad (\text{o } -\infty)$$

o

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \qquad (\text{o } -\infty)$$

Ejemplo 20 Para evaluar $\lim_{x \to 0} (1/x^2)$, se toman los límites izquierdo y derecho al aproximarse x a 0. La tabla 15.6 contiene algunos valores selectos. Deberá llegarse a la conclusión de que $\lim_{x \to 0} (1/x^2) = \infty$. Desde el punto de vista gráfico, f tiene el aspecto de la figura 15.12. Adviértase que $f(x) = 1/x^2$ tiene una asíntota vertical de $x = 0$, además de asíntotas horizontales de $y = 0$.

Tabla 15.6

Aproximación de $x = 0$ desde la izquierda

x	-1	-0.5	-0.1	-0.01	-0.001
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	1	4	100	10 000	1 000 000

Aproximación de $x = 0$ desde la derecha

x	1	0.5	0.1	0.01	0.001
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	1	4	100	10 000	1 000 000

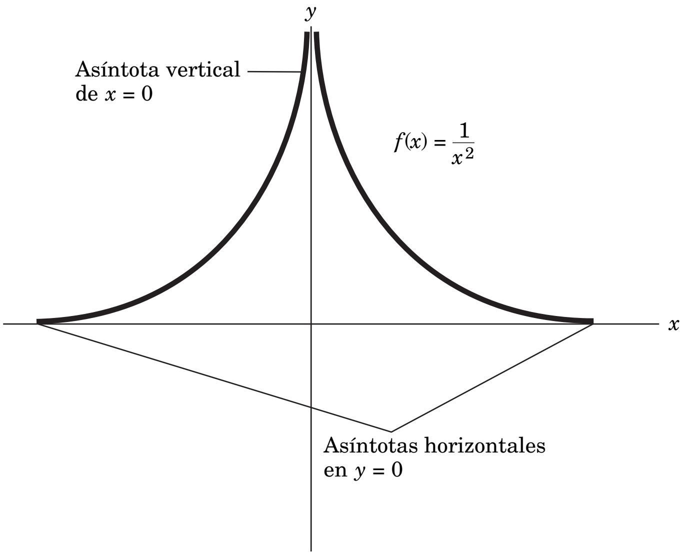


Figura 15.12 Asíntota horizontal en $y = 0$.

❑

NOTA Una conclusión de que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

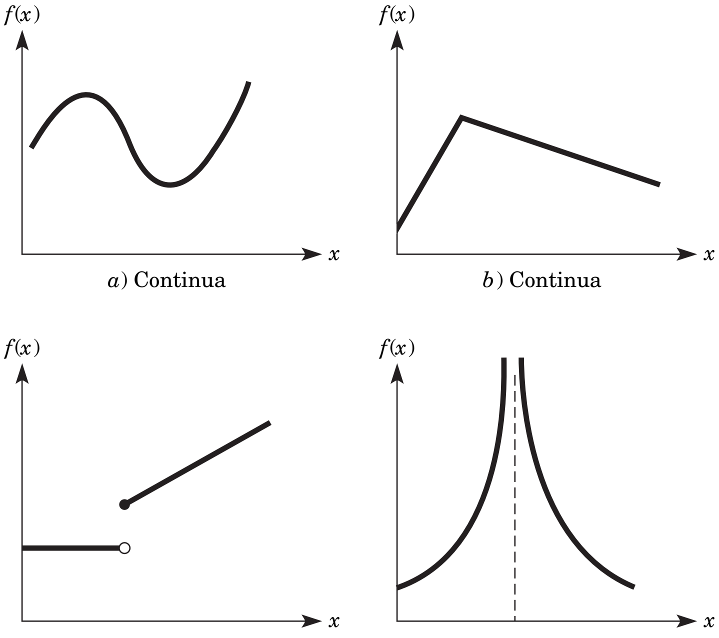
o

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

implica que *no existe un límite*; es decir, no existe un valor límite en los números reales para $f(x)$.

Continuidad

En un sentido informal, una función se describe como ***continua*** si puede graficarse sin levantar la pluma o el lápiz del papel (es decir, no tiene brechas, ni saltos, ni interrupciones). La mayor parte de las funciones que se examinarán en el cálculo serán funciones continuas. La figura 15.13 indica las gráficas de cuatro funciones distintas. Las descritas en la figura 15.13*a* y 15.13*b* son continuas porque pueden trazarse sin levantar el lápiz del papel. Las de las figuras 15.13*c* y 15.13*d* no son continuas a causa de las "interrupciones" de las funciones. Una función que no sea continua recibe el nombre de ***discontinua***. En seguida se da una definición más formal de la propiedad de la continuidad.



a) Continua *b*) Continua

c) Discontinua *d*) Discontinua

Figura 15.13 Evaluación de la continuidad.

Definición: Continuidad en un punto

Se dice que una función f es ***continua*** en $x = a$ si

1. *la función está definida en* $x = a$, *y*
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ **(15.3)**

Ejemplo 21 En el ejemplo 1 se determinó que para $f(x) = x^3$

$$\lim_{x \to 2} x^3 = 8$$

Puesto que $f(x) = x^3$ está defina cuando $x = 2$ y $\lim\limits_{x \to 2} x^3 = f(2) = 8$, se puede afirmar que la función $f(x) = x^3$ es continua en $x = 2$.

Ejemplo 22 En el ejemplo 3 se determinó que

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

Como $x = 3$ no se encuentra en el dominio de la función, $f(3)$ no está definida y puede afirmarse que la función $(x^2 - 9)/(x - 3)$ es *discontinua* cuando $x = 3$. ❑

Definición: Continuidad sobre un intervalo

La función f es continua sobre un intervalo $[a, b]$ si lo es en todos los puntos del intervalo.

Ejemplo 23 La función $f(x) = x^2 - 2x + 5$ es continua para cualquier x real, debido a que

1. *f está definida para todo número real, y*
2. $$\begin{aligned} \lim_{x \to a} (x^2 - 2x + 5) &= f(a) \\ &= a^2 - 2a + 5 \qquad \textit{para toda a real} \end{aligned}$$

Ejemplo 24 La función racional

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$$

no está definida cuando

$$x^3 - x = 0$$

o

$$x(x^2 - 1) = 0$$

o bien

$$x(x + 1)(x - 1) = 0$$

Puesto que el miembro izquierdo de la ecuación será 0 cuando $x = 0$, $x = -1$ o $x = +1$, la función es discontinua en esos tres valores. La figura 15.14 presenta una gráfica de la función. Obsérvese que esta función tiene asíntotas verticales descritas por las ecuaciones $x = 1$, $x = -1$, y $x = 0$.

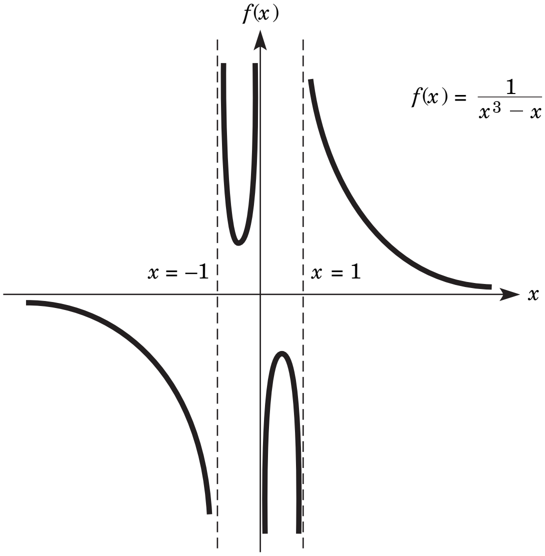


Figura 15.14 Discontinuidades en $x = 0, -1, 1$.

❑

Sección 15.2 Ejercicios de seguimiento

En los siguientes ejercicios encuentre el límite indicado.

1. $\lim_{x \to 0} (3x^2 - 5x + 3)$

2. $\lim_{x \to 2} (2x^3 - 10x)$

3. $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^3}{3} - 7x^2\right)$

4. $\lim_{x \to 3} \frac{2x - 8}{x + 4}$

5. $\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 + 3}{x^3 + 4x - 2}$

6. $\lim_{x \to -4} 250$

7. $\lim_{x \to 0} 175$

8. $\lim_{x \to -10} \frac{x^2 + 25}{x}$

9. $\lim_{x \to 1} (3x^3 + 2x^2 + x)$

10. $\lim_{x \to -2} (-x^4 + 8x^2)$

11. $\lim_{x \to -2} (-x^3 + 5x^2 + 10)$

12. $\lim_{x \to 2} (5x^3 + 10x^2)$

13. $\lim_{x \to 5} \left(\frac{4x - 20}{3x^2 - 7x + 5}\right)$

14. $\lim_{x \to -2} \left(\frac{10 + x^2}{5 - 8x + 2x^2}\right)$

15. $\lim_{x \to -3} (6x^3 + 2x)(5x - 10)$

16. $\lim_{x \to 5} \left[\left(\frac{x + 3}{x + 6}\right)(x^2 - 12)\right]$

17. $\lim_{x \to -4} \frac{x^2 + 8x - 14}{2x + 7}$

18. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x - 24}{x - 3}$

19. $\lim_{x \to -4} \frac{x^2 - 16}{x + 4}$

20. $\lim_{x \to -9} \frac{81 - x^2}{9 + x}$

21. $\lim_{x \to c} (4x^3 - 5x^2 + 10)$

22. $\lim_{x \to -d} (x^2 - 2x + 3)$

En los ejercicios siguientes, calcule el límite indicado y comente la existencia de asíntotas.

23. $\lim_{x \to \infty} \frac{4}{x^2}$

24. $\lim_{x \to -\infty} \frac{5x - 3}{x + 10}$

25. $\lim_{x \to \infty} \frac{-3x}{5x + 100}$

26. $\lim_{x \to -\infty} \frac{8x + 10}{-4x}$

27. $\lim_{x \to -\infty} 2x$

28. $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 3}{x - 4}$

29. $\lim_{x \to \infty} \frac{-8x}{4x + 1\,000}$

30. $\lim_{x \to -\infty} \frac{5x + 10\,000}{2x - 5\,000}$

31. $\lim_{x \to -\infty} \frac{100 - 3x^3}{-x^3}$

32. $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 - 500}{5\,000 - x^3}$

En los siguientes ejercicios, determine si existen discontinuidades y, en caso de haberlas, señale dónde se presentan.

33. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

34. $f(x) = \frac{1}{x + 2}$

35. $f(x) = \frac{x^4}{5}$

36. $f(x) = \frac{3x^2}{x + 5}$

37. $f(x) = \dfrac{1}{8 - 2x}$

38. $f(x) = |\,x\,|$

39. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x^2 + 4x - 21}$

40. $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 8x}$

41. $f(x) = \dfrac{4x - 3}{x^3 - x^2 - 6x}$

42. $f(x) = \dfrac{5/x}{2x^2 + 7x - 15}$

43. $f(x) = \dfrac{20}{x^2 - 3x - 10}$

44. $f(x) = \dfrac{4/x}{18 + 3x - x^2}$

45. $f(x) = \dfrac{10/(5 - x)}{4 - x^2}$

46. $f(x) = \dfrac{5/(3 - x)}{x^2 - 16}$

47. $f(x) = \dfrac{3x - 5}{x^4 - 27x}$

48. $f(x) = \dfrac{3/(x^2 - 1)}{2/(x^2 - 4)}$

15.3 Razón de cambio promedio

Razón de cambio promedio y pendiente

Como se dijo en el capítulo 2, la pendiente de una línea recta puede determinarse aplicando la fórmula de los dos puntos.

Fórmula de los dos puntos

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad \textbf{(15.4)}$$

La figura 15.15 ilustra la gráfica de una función lineal. En este tipo de funciones la pendiente es constante sobre el dominio de la función. La pendiente constituye una *medida exacta* de la razón de cambio del valor de y respecto del que se cambió en el valor de x. Si

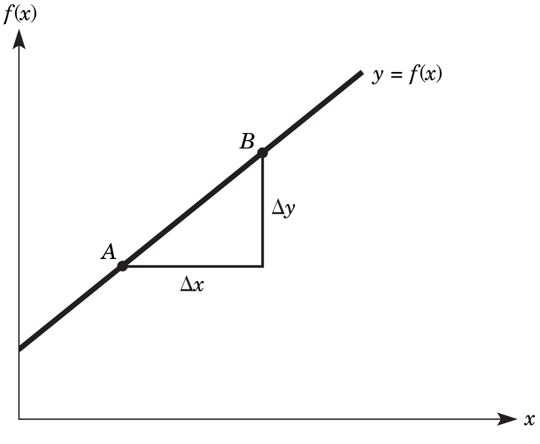


Figura 15.15 Función lineal con pendiente constante.

la función en la figura 15.15 representa una función lineal del costo y x denota el número de unidades producidas, la pendiente indica la razón a que se incrementa el costo total respecto de los cambios en el nivel de producción.

En las funciones no lineales, la razón de cambio en el valor de y en relación con un cambio de x no es constante. Sin embargo, una manera de describir parcialmente las funciones no lineales es por la ***razón de cambio promedio*** sobre algún intervalo.

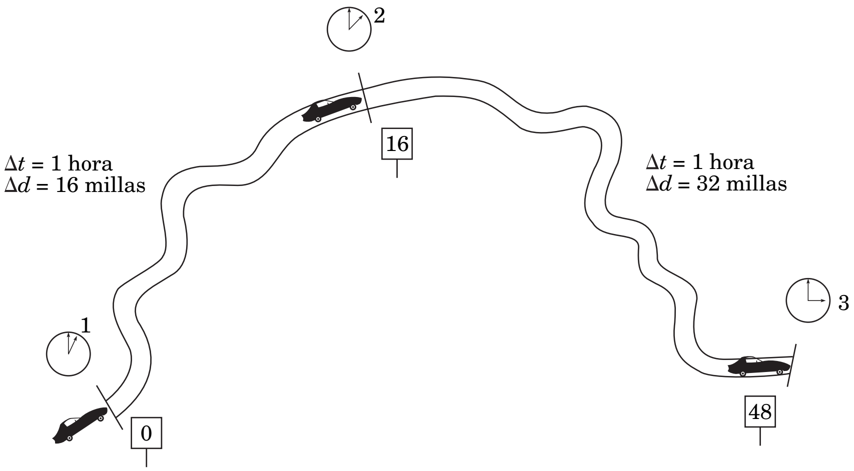
Ejemplo 25 Supóngase que una persona hace un viaje de placer en automóvil y que la distancia recorrida d puede describirse en función del tiempo t por medio de la función no lineal

$$d = f(t) = 8t^2 + 8t$$

donde d se mide en millas, t en horas y $0 \leq t \leq 5$. Durante este viaje de 5 horas, la velocidad del automóvil puede variar continuamente (por ejemplo, a causa de los semáforos, las paradas para descansar y otros factores).

Al cabo de una hora, la distancia total recorrida será

$$\begin{aligned} f(1) &= 8(1)^2 + 8(1) \\ &= 16 \text{ millas} \end{aligned}$$



La razón de cambio promedio en la distancia recorrida respecto del cambio en el tiempo durante un intervalo (conocida mejor con el nombre de ***velocidad promedio***) se calcula así

$$\frac{\text{Distancia recorrida}}{\text{Tiempo transcurrido}}$$

En la primera hora de viaje, la velocidad promedio es

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{16 - 0}{1} = 16 \text{ mph}$$

La distancia recorrida al cabo de dos horas será

$$\begin{aligned} f(2) &= 8(2)^2 + 8(2) \\ &= 32 + 16 = 48 \text{ millas} \end{aligned}$$

La distancia recorrida *durante* la segunda hora es

$$\begin{aligned} \Delta d &= f(2) - f(1) \\ &= 48 - 16 = 32 \text{ millas} \end{aligned}$$

La velocidad promedio *en la segunda hora* será

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{32}{1} = 32 \text{ mph}$$

La velocidad promedio para la segunda hora es distinta comparada con la alcanzada durante la primera hora.

La velocidad promedio *durante las dos primeras horas* es la distancia total recorrida en ese periodo, dividida entre el tiempo del viaje, o

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{48 - 0}{2} = 24 \text{ mph}$$ ❑

Ejercicio de práctica

¿Cuál es la velocidad promedio para todo el viaje de cinco horas? *Respuesta:* 48 mph.

Considere dos puntos, *A* y *B*, en la figura 15.16. La línea recta que une estos dos puntos en *f* recibe el nombre de ***línea secante***. En el punto *A* la variable independiente posee

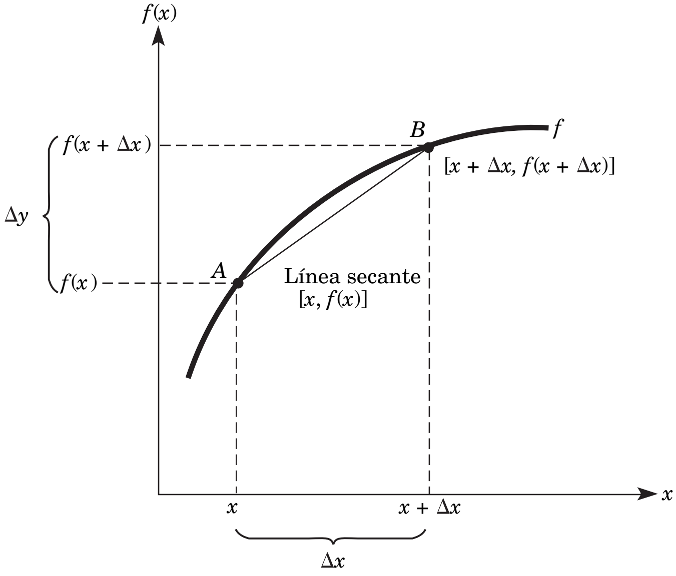


Figura 15.16 Línea secante *AB*.

un valor de x, y el valor correspondiente de la variable dependiente puede determinarse al evaluar $f(x)$. En el punto B, la variable independiente cambió su valor por $x + \Delta x$, y el valor correspondiente de la variable dependiente se calcula evaluando $f(x + \Delta x)$. Al pasar del punto A al punto B, el cambio del valor en x es $(x + \Delta x) - x$, o Δx. El cambio asociado en el valor de y es $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. La razón de estos cambios es

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \qquad \textbf{(15.5)}$$

A la ecuación (15.5) se le llama en ocasiones ***cociente de la diferencia***.

Definición: El cociente de la diferencia

Dados cualesquiera dos puntos en una función f con coordenadas $[x, f(x)]$ *y* $[(x + \Delta x), f(x + \Delta x)]$, *el cociente de la diferencia da una expresión general que representa*

I *la razón de cambio promedio en el valor de y respecto del cambio en x mientras se mueve desde* $[x, f(x)]$ *hasta* $[(x + \Delta x), f(x + \Delta x)]$;

II *la pendiente de la línea secante que conecta los dos puntos.*

Ejemplo 26

a) Encuentre la expresión general del cociente de la diferencia de la función $y = f(x) = x^2$.

b) Obtenga la pendiente de la línea que une $(-2, 4)$ y $(3, 9)$ usando la fórmula de los dos puntos.

c) Encuentre la pendiente del inciso *b*) mediante la expresión del cociente de la diferencia obtenido en el inciso *a*).

SOLUCIÓN

a) Dados dos puntos en la función $f(x) = x^2$ que tengan coordenadas $[x, f(x)]$ y $[(x + \Delta x, f(x + \Delta x)]$, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}\\ &= \frac{[x^2 + x(\Delta x) + x(\Delta x) + (\Delta x)^2] - x^2}{\Delta x}\\ &= \frac{[x^2 + 2x(\Delta x) + (\Delta x)^2] - x^2}{\Delta x}\\ &= \frac{2x(\Delta x) + (\Delta x)^2}{\Delta x}\end{aligned}$$

Al factorizar Δx en cada término del numerador y al cancelar con Δx en el denominador, queda

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}}\\ &= 2x + \Delta x \qquad \textbf{(15.6)}\end{aligned}$$

NOTA Cuando se calcula el cociente de la diferencia, la evaluación de $f(x + \Delta x)$ y $f(x)$ para una función específica causa grandísimas dificultades a los estudiantes. Si en esta función se nos pide encontrar $f(3)$, se sustituirá el valor de 3 en la función siempre que aparezca la variable independiente, o sea $f(3) = 3^2 = 9$. Cuando se nos pidió calcular $f(x + \Delta x)$ en este ejemplo, se sustituyó $x + \Delta x$ en la función cuando aparecía la variable independiente y se evaluó $(x + \Delta x)^2$. De manera análoga, cuando se determinó $f(x)$, se sustituía el valor x siempre que aparecía la variable independiente y se evaluó x^2. *Cuando se pida al lector determinar el cociente de la diferencia $f(x)$, invariablemente será la función específica con la que esté trabajando.*

b) Aplicando la fórmula de la pendiente de los dos puntos, se obtendrá

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)}\\ &= \frac{(3)^2 - (-2)^2}{5}\\ &= \frac{9 - 4}{5} = \frac{5}{5} = 1\end{aligned}$$

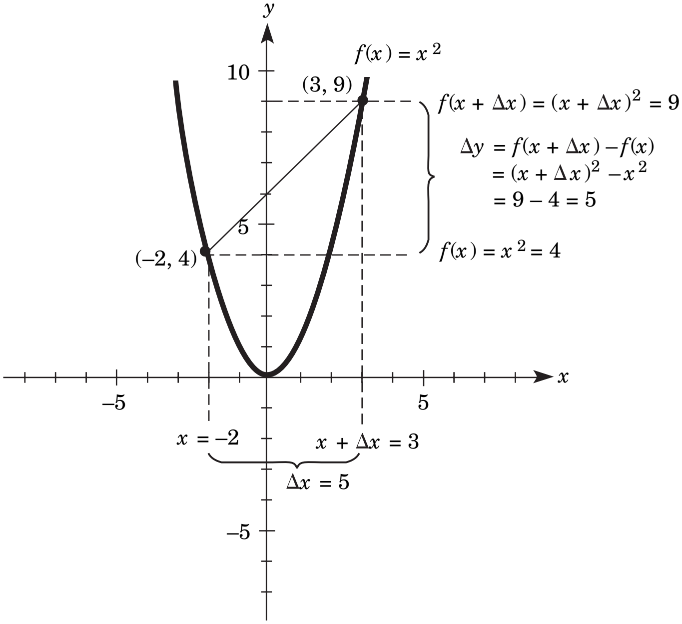


Figura 15.17

La pendiente de la secante que une $(-2, 4)$ y $(3, 9)$ sobre f es 1.

c) Como se muestra en la figura 15.17, supóngase que $(x, f(x))$ y $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ corresponden a los puntos $(-2, 4)$ y $(3, 9)$ en la función. Supóngase asimismo que x corresponde a la coordenada -2 y $x + \Delta x$ corresponde a la coordenada 3. Por lo tanto,

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] (\boxed{x}, f(x)) \arrow[d, dash, dashed] & (\boxed{x + \Delta x}, f(x + \Delta x)) \arrow[d, dash, dashed] \\ (\boxed{-2}, 4) & (\boxed{3}, 9) \end{tikzcd}$$

En consecuencia, $x = -2$

y $x + \Delta x = 3$

Por consiguiente, $(-2) + \Delta x = 3$

o bien $\Delta x = 5$

Este valor para Δx (el cambio en x) significa sencillamente que al desplazarse *desde* $(-2, 4)$ hasta $(3, 9)$, el valor de x se ha *incrementado* en cinco unidades.

Si se sustituyen los valores de $x = -2$ y $\Delta x = 5$ en la ecuación (15.6), el resultado es exactamente el mismo que se consiguió en el inciso *b*.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= 2x + \Delta x \\ &= 2(-2) + 5 = 1 \end{aligned}$$

☐

Ejercicio de práctica

Como al encontrar la pendiente de una línea que conecta dos puntos, el cociente de la diferencia [ecuación (15.5)] para dos puntos específicos en una función no es afectado por los puntos que se etiquetan como $[x, f(x)]$ y como $[(x + \Delta x), f(x + \Delta x)]$. En el último ejemplo, sea $x = 3$ y $(x + \Delta x) = -2$. Evalúe el cociente de la diferencia y compruebe si llega al mismo resultado que en el ejemplo.

Sección 15.3 Ejercicios de seguimiento

En cada una de las siguientes funciones, determine la razón de cambio promedio en el valor de y al pasar de $x = -1$ a $x = 2$.

1. $y = f(x) = 3x^2$

2. $y = f(x) = 5x^3$

3. $y = f(x) = x^2 - 2x + 3$

4. $y = f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$

5. $y = f(x) = x^2/(x + 4)$

6. $y = f(x) = x^3/2$

7. $y = f(x) = 2x^2 + 6x + 3$

8. $y = f(x) = 2x^2 - 8x + 10$

9. $y = f(x) = 4x^2 - 2x$

10. $y = f(x) = -x^2 + 2x + 4$

11. $y = f(x) = -5x^3$

12. $y = f(x) = 3x^3 + 4x - 5$

13. $y = f(x) = x^4$

14. $y = f(x) = x^4 - 10$

15. Se lanza una pelota al aire. Su altura puede describirse en función del tiempo conforme a la función

$$h(t) = -16t^2 + 128t$$

donde $h(t)$ es la altura medida en pies y t es el tiempo medido en segundos.

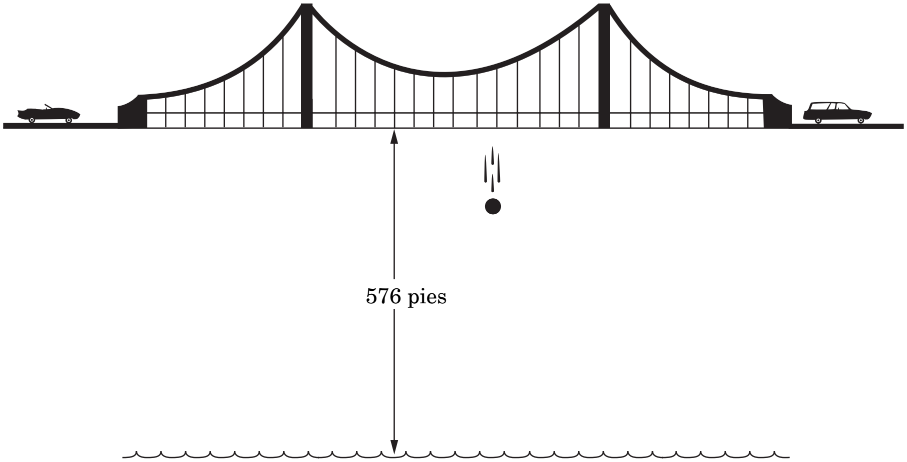
a) Determine la razón de cambio promedio en la altura entre $t = 0$ y $t = 2$. Entre $t = 0$ y $t = 4$. Entre $t = 0$ y $t = 8$.

b) ¿Cuánto tarda la pelota en caer al suelo ($h = 0$)?

16. Se deja caer un objeto desde un puente de 576 pies de alto. La altura del objeto se determina en función del tiempo (a partir del momento en que se deja caer) según la función

$$h(t) = 576 - 16t^2$$

donde $h(t)$ es la altura medida en pies y t es el tiempo medido en segundos.



a) Determine la razón de cambio promedio de altura entre $t = 0$ y $t = 1$. Entre $t = 0$ y $t = 2$. Entre $t = 0$ y $t = 4$.

b) ¿Cuánto tarda la pelota en caer al agua ($h = 0$)?

17. La tabla 15.7 indica las ventas anuales (en dólares) obtenidas por una compañía durante cierto periodo. ¿A qué razón promedio se incrementaron las ventas anuales entre 1988 y 1990? ¿Entre 1988 y 1989? ¿Entre 1989 y 1990? ¿Entre 1989 y 1991?

Tabla 15.7

Año	1988	1989	1990	1991
Ventas anuales (millones)	\$100.8	\$105.4	\$109.8	\$116.5

18. Asistencia al béisbol La asistencia anual a los juegos de béisbol profesional se ha ido elevando en los últimos años. Las cifras correspondientes a los años de 1987 a 1991 se dan en la tabla 15.8. Calcule la razón de cambio promedio en la asistencia anual entre 1987 y 1991, 1987 y 1990, y 1989 y 1991.

Tabla 15.8

Año	1987	1988	1989	1990	1991
Asistencia anual (millones)	63.1	64.8	66.0	67.8	69.0

19. **Crecimiento de la población minoritaria** Los hispanos son el grupo minoritario de más rápido crecimiento dentro de Estados Unidos. Si continúa la tendencia actual, se estima que la población de origen hispano superará a la de raza negra como el mayor grupo minoritario para el año 2005. La tabla 15.9 indica la estimación de la población de origen hispano en Estados Unidos (en millones) en los años recientes. Determine la razón de cambio promedio en la población hispana entre 1987 y 1989, 1988 y 1990, y 1987 y 1990.

Tabla 15.9

Año	**1987**	**1988**	**1989**	**1990**
Población	19.2	19.9	21.0	22.4

20. **Televisión de pago por evento** La televisión de pago por evento (PPV, *pay-per-view*) ha sido una creciente opción entre los televidentes. Con el PPV, los suscriptores de TV por cable contratan únicamente los eventos por cable que desean ver. Eventos especiales, como combates de boxeo por el campeonato del mundo o bien conciertos en vivo, son las principales ofertas de la modalidad de PPV. La figura 15.18 resume los ingresos totales para la industria durante los últimos cuatro años. Determine la razón de cambio promedio en los ingresos de PPV entre 1987 y 1989, y entre 1987 y 1990.

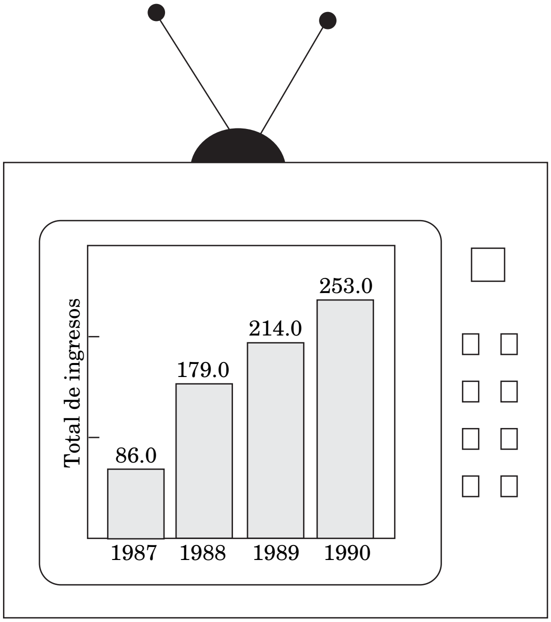


Figura 15.18 Ingresos por "pago por evento", en millones de $.

21. Una persona hace un viaje en automóvil. La distancia recorrida d (en millas) se describe en función del tiempo t (en horas):

$$d = f(t) = 5t^2 + 12t, \qquad \text{donde } 0 \leq t \leq 4$$

a) ¿Cuál es la velocidad promedio en la primera hora? ¿Y en la segunda hora?
b) ¿Cuál es la velocidad promedio durante el viaje de cuatro horas?

En los ejercicios 22 a 39: *a*) determine la expresión general del cociente de la diferencia y *b*) con ese cociente calcule la pendiente de la línea secante que une los puntos en $x = 1$ y en $x = 3$.

22. $y = f(x) = 4x^2 + 3$
23. $y = f(x) = x^2 + 3x$
24. $y = f(x) = 10x^2 + 20x$
25. $y = f(x) = 5$
26. $y = f(x) = -3x^2 + 8x + 10$
27. $y = f(x) = 5x^2 + 20x$
28. $y = f(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2x$
29. $y = f(x) = \dfrac{x^2}{3} + 5x$
30. $y = f(x) = ax^2 - bx$
31. $y = f(x) = mx^2 - n$
***32.** $y = f(x) = x^3$
***33.** $y = f(x) = -2x^3$
***34.** $y = f(x) = 1/x$
***35.** $y = f(x) = 5/x$
***36.** $y = f(x) = 2x^3 - 10$
***37.** $y = f(x) = -5x^3$
***38.** $y = f(x) = -4/x$
***39.** $y = f(x) = -6/x$

15.4 La derivada

En esta sección se expondrá el concepto de la ***derivada***. Es un concepto fundamental para entender lo que se dice aquí, por lo cual conviene estudiar detenidamente este material.

Razón de cambio instantánea

Hay que trazar una distinción entre los conceptos de ***razón de cambio promedio*** y ***razón de cambio instantánea***. El ejemplo 25 se refiere a una situación donde la distancia recorrida d se describió en función del tiempo t mediante la función

$$d = f(t) = 8t^2 + 8t, \quad \text{donde } 0 \leq t \leq 5$$

Suponga que se quiere determinar a qué velocidad está desplazándose el automóvil en el *instante* en que $t = 1$. Podría calcularse esta velocidad instantánea examinando la velocidad promedio durante los intervalos de tiempo cercanos a $t = 1$.

Por ejemplo, la velocidad promedio en la segunda hora (entre $t = 1$ y $t = 2$) puede determinarse así

$$\begin{aligned}\frac{\Delta d}{\Delta t} &= \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1}\\ &= \frac{[8(2^2) + 8(2)] - [8(1^2) + 8(1)]}{1} = \frac{48 - 16}{1} = 32 \text{ mph}\end{aligned}$$

La velocidad promedio entre $t = 1$ y $t = 1.5$ puede determinarse como

$$\begin{aligned}\frac{\Delta d}{\Delta t} &= \frac{f(1.5) - f(1)}{1.5 - 1}\\ &= \frac{[(1.5)^2 + 8(1.5)] - [8(1^2) + 8(1)]}{0.5} = \frac{30 - 16}{0.5} = 28 \text{ mph}\end{aligned}$$

La velocidad promedio entre $t = 1$ y $t = 1.1$ se calcula del modo siguiente

$$\begin{aligned}\frac{\Delta d}{\Delta t} &= \frac{f(1.1) - f(1)}{1.1 - 1}\\ &= \frac{[8(1.1)^2 + 8(1.1)] - [8(1^2) + 8(1)]}{0.1} = \frac{18.48 - 16}{0.1} = 24.8 \text{ mph}\end{aligned}$$

La velocidad promedio entre $t = 1$ y $t = 1.01$ se determina así

$$\begin{aligned}\frac{\Delta d}{\Delta t} &= \frac{f(1.01) - f(1)}{1.01 - 1}\\ &= \frac{[8(1.01)^2 + 8(1.01)] - [8(1^2) + 8(1)]}{0.01} = \frac{16.2408 - 16}{0.01} = 24.08 \text{ mph}\end{aligned}$$

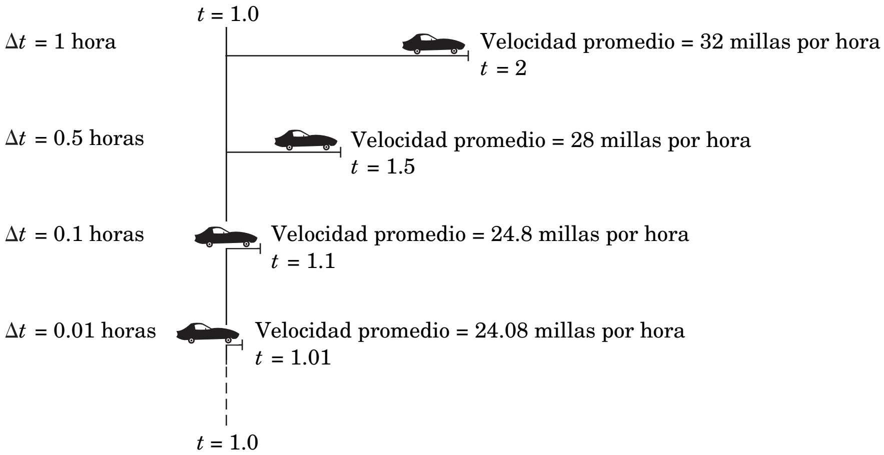


Figura 15.19

Como se muestra en la figura 15.19, estos cálculos han estado determinando la velocidad promedio en intervalos cada vez más cortos medidos *desde* $t = 1$. A medida que el intervalo se hace más corto (o al irse aproximando a 1 el segundo valor de t), la velocidad promedio $\Delta d/\Delta t$ va acercándose a un valor límite. Y la ***velocidad instantánea*** en $t = 1$ puede definirse como este valor límite. Para determinarlo se calculará

$$\begin{aligned}\lim_{t \to 1} \frac{f(t) - f(1)}{t - 1} &= \lim_{t \to 1} \frac{(8t^2 + 8t) - [8(1)^2 + 8(1)]}{t - 1}\\ &= \lim_{t \to 1} \frac{(8t^2 + 8t) - 16}{t - 1}\\ &= \lim_{t \to 1} \frac{8(t^2 + t - 2)}{t - 1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t \to 1} \frac{8(t+2)(t-1)}{t-1} \\
&= \lim_{t \to 1} 8(t+2) \\
&= 8 \lim_{t \to 1} (t+2) \\
&= 8(1+2) = 24
\end{aligned}
$$

De este modo, la velocidad *instantánea* del automóvil cuando $t = 1$ es de 24 millas por hora. Nótese que la velocidad promedio se mide en un intervalo de tiempo y que la velocidad instantánea se define para un punto determinado en el tiempo. La velocidad instantánea es una especie de "imagen" de lo que está sucediendo en un instante determinado.

Representación geométrica de la razón de cambio instantánea

La razón de cambio instantánea de una función continua puede representarse geométricamente mediante la pendiente de la línea tangente a la curva en el punto de interés.

Primero se determinará el significado de ***línea tangente***. Se examinará detenidamente la figura 15.20. *La línea tangente en A es la posición límite de la línea secante AB a medida que el punto B se va aproximando a A*. Adviértase que la posición de la línea secante

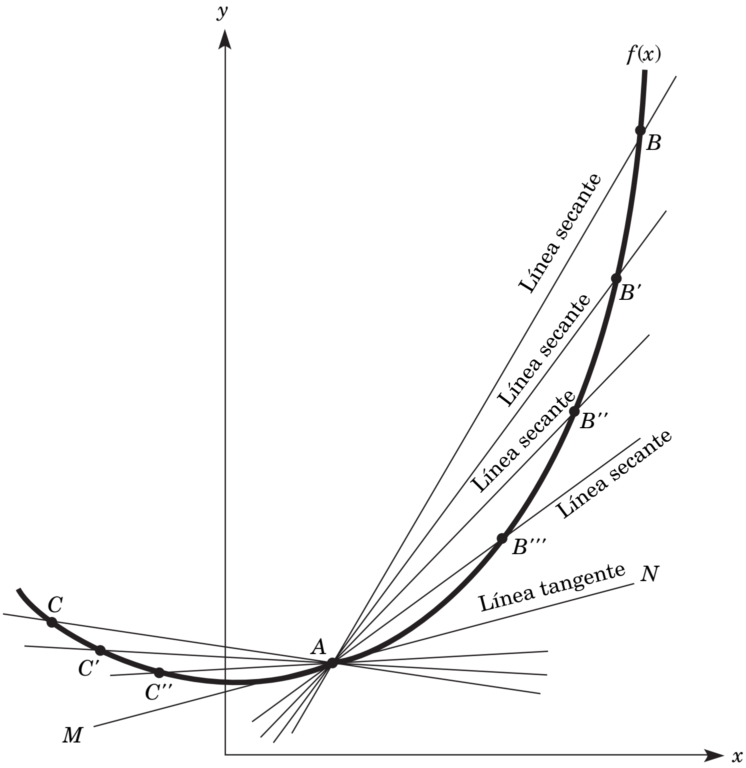


Figura 15.20

gira en el sentido de las manecillas del reloj al aproximarse B a A (AB, AB', AB'' y AB'''). La posición límite de AB es el segmento de la línea MN. Esta misma posición límite se produce sin importar si se aproxima a A con líneas secantes de la derecha o la izquierda de A. La secuencia de las líneas secantes AC, AC' y AC'' tiene la misma posición límite MN conforme C se traza más cerca de A. *Puesto que MN es la posición límite sin importar si la aproximación se hace desde la izquierda o la derecha, MN es la línea tangente en el punto A*.

No todas las funciones continuas presentan líneas tangentes únicas en cada punto de la función. Por ejemplo, la función $y = f(x) = \sqrt{|x|}$, que se ve en la figura 15.21, no posee una tangente en (0, 0). Las líneas secantes trazadas desde (0, 0) a los puntos de la izquierda o la derecha no convergen en la misma posición límite.

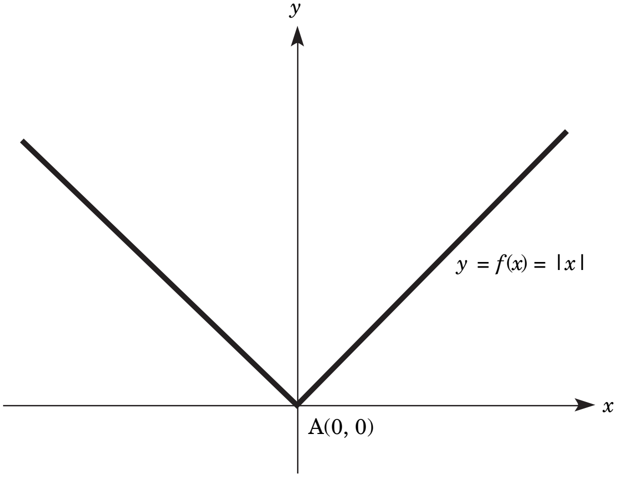


Figura 15.2 No hay línea tangente en el punto *A*.

Definición: Pendiente de la curva

La pendiente de una curva en $x = a$ es la pendiente de la línea tangente en $x = a$.

Más adelante se querrá determinar en especial la razón de cambio instantánea de las funciones. Dicha razón se representa con la pendiente de la línea tangente en el punto de interés, por lo cual hará falta un método para determinar esas pendientes de las líneas tangentes. En la figura 15.22 suponga que se desea calcular la pendiente de la línea tangente en A. Se cuenta con varias técnicas para ello. Si el lector fuera un excelente diseñador mecánico, podría construir una línea tangente en el punto A en papel milimétrico, leer en las coordenadas de las líneas en dos puntos cualesquiera y sustituir las coordenadas en la fórmula de los dos puntos.

Otro procedimiento consistiría en escoger otro punto B en la curva. Si se unen A y B con una línea secante, la pendiente del segmento de la línea AB se puede calcular y utilizar como una “aproximación” a la pendiente de MN. Es obvio que la pendiente de AB no constituye una buena aproximación. Sin embargo, refiriérase todavía a la figura 15.22.

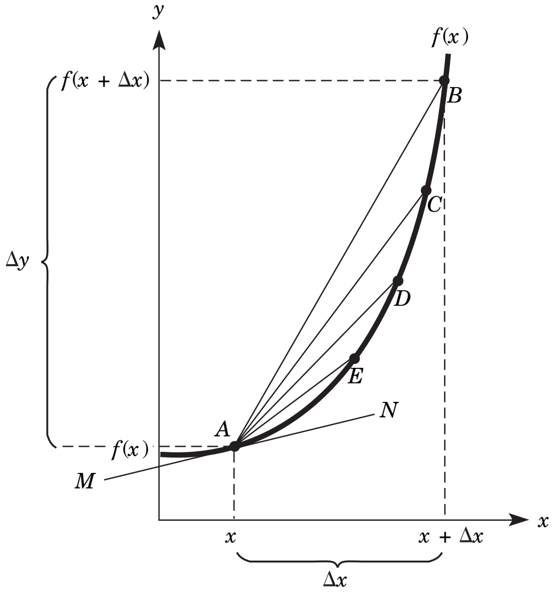


Figura 15.22

En el punto B, el valor de la variable independiente es $x + \Delta x$; la distancia entre A y B a lo largo del eje x es Δx. Haciendo uso del cociente de la diferencia, la pendiente de AB es

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}} \tag{15.5}$$

Ahora, observe lo que sucede con la aproximación si se escoge un segundo punto más cerca del punto A. Si se selecciona como segundo punto al punto C, la pendiente de la línea secante AC sigue siendo una aproximación deficiente, pero mejor que la de AB. Y si se observan las pendientes de AD y AE, se llegará a la conclusión de que la *aproximación mejora a medida que el segundo punto se escoge cada vez más cerca de A*. De hecho, al irse aproximando el valor de Δx a 0, la pendiente del diminuto segmento de línea que una A con el segundo punto se convierte en aproximación excelente. La pendiente exacta de la tangente puede determinarse al calcular el límite del cociente de la diferencia a medida que $\Delta x \to 0$.

Definición: La derivada

Dada una función de la forma $y = f(x)$, la ***derivada*** de la función es

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{15.7}$$

a condición de que tal límite exista.

Conviene señalar los siguientes puntos en relación con esta definición.

Comentarios acerca de la derivada

- **I** *La ecuación* (*15.7*) *es la expresión general para la derivada de la función f.*
- **II** *La derivada representa la* ***razón de cambio instantánea*** *en la variable dependiente, dado un cambio en la variable independiente. La notación dy/dx se utiliza para representar la razón de cambio* instantánea *en y con respecto de un cambio en x. La notación es distinta de lo que representa* $\Delta y/\Delta x$, *que es la razón de cambio promedio.*
- **III** *La derivada es una* ***expresión general para la pendiente*** *de la gráfica de f para cualquier punto en el dominio.*
- **IV** *Si el límite en la ecuación* (*15.7*) *no existe, la derivada tampoco existe.*

Aproximación del límite para encontrar la derivada

Encontrar la derivada (aproximación del límite)

- ☐ **Paso 1** Determine el cociente de la diferencia para *f* haciendo uso de la ecuación (15.5).
- ☐ **Paso 2** Encuentre el límite del cociente de la diferencia a medida que $\Delta x \rightarrow 0$ empleando la ecuación (15.7).

Los siguientes ejemplos ilustran la ***aproximación del límite*** en la determinación de la derivada.

Ejemplo 27 Encuentre la derivada de $f(x) = -5x + 9$.

SOLUCIÓN

La función $f(x) = -5x + 9$ es lineal con una pendiente de -5. Como la pendiente siempre es -5, deberá encontrarse que la derivada de *f* es -5.

☐ **Paso 1.** El cociente de la diferencia es

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\\ &= \frac{[-5(x+\Delta x)+9]-(-5x+9)}{\Delta x}\\ &= \frac{-5x-5\,\Delta x+9+5x-9}{\Delta x}\\ &= \frac{-5\,\Delta x}{\Delta x}\end{aligned}$$

o

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -5$$

❑ **Paso 2.** La derivada es el límite del cociente de la diferencia, o

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} (-5)\\ &= -5\end{aligned}$$

Así pues, la derivada es exactamente según se había previsto.

Ejemplo 28 Encuentre la derivada de $f(x) = x^2$.

SOLUCIÓN

❑ **Paso 1.** En el ejemplo 26 se observó que el cociente de la diferencia para $f(x) = x^2$ era

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

❑ **Paso 2.** La derivada es el límite del cociente de la diferencia, o

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x)$$

o

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

❑

Uso e interpretación de la derivada

Para determinar la razón de cambio instantánea (o, de forma equivalente, la pendiente) en cualquier punto de la gráfica de una función *f*, se sustituye el valor de la variable independiente en la expresión correspondiente a *dy/dx*. La derivada, evaluada en $x = c$, puede denotarse por $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=c}$ que se lee "la derivada de *y* respecto a *x* evaluada en $x = c$".

Ejemplo 29 Para la función $f(x) = x^2$:

a) Determine la razón de cambio instantánea en $f(x)$ cuando $x = -3$.
b) Determine la razón de cambio instantánea en $f(x)$ cuando $x = 0$.
c) Determine la razón de cambio instantánea en $f(x)$ cuando $x = +3$.

SOLUCIÓN

En el ejercicio 28 se determinó que $dy/dx = 2x$. Las respuestas a los incisos *a*) a *c*) se consiguen por sustitución en esta expresión.

a) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-3} = 2(-3) = -6$

b) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 2(0) = 0$

(*c*) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=3} = 2(3) = +6$ ❑

PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR

Del capítulo 6 se sabe que la función $y = x^2$ es cuadrática. Trace la función y confirme que los valores que se hallan en el ejemplo 29 parezcan razonables al representar la pendiente en $x = -3$, 0 y 3. La expresión para la derivada $dy/dx = 2x$ sugiere que a medida que x se hace más negativa, la pendiente se hace más negativa; y a medida que x se hace más positiva, la pendiente se vuelve más positiva. ¿Parece esto ser correcto a la luz de nuestro esquema?

Ejemplo 30 En la función $f(x) = -2x^2 + 3x - 10$:

a) Determine la derivada.

b) Determine la razón de cambio instantánea en $f(x)$ cuando $x = 5$.

c) Determine en qué parte de la función la pendiente es 0.

SOLUCIÓN

a) **Paso 1** El cociente de la diferencia de *f* es

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\\ &= \frac{[-2(x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x) - 10] - (-2x^2 + 3x - 10)}{\Delta x}\\ &= \frac{[-2(x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2) + 3x + 3\,\Delta x - 10] + 2x^2 - 3x + 10}{\Delta x}\\ &= \frac{-2x^2 - 4x\,\Delta x - 2\,\Delta x^2 + 3x + 3\,\Delta x - 10 + 2x^2 - 3x + 10}{\Delta x}\end{aligned}$$

Al simplificar el numerador se obtiene

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4x\,\Delta x - 2(\Delta x)^2 + 3\,\Delta x}{\Delta x}$$

Al factorizar Δx en el numerador y simplificarla nos queda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}(-4x - 2\,\Delta x + 3)}{\cancel{\Delta x}} = -4x - 2\,\Delta x + 3$$

Paso 2 La derivada de la función es

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}(-4x - 2\,\Delta x + 3)$$

o

$$\frac{dy}{dx} = -4x + 3$$

b) $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=5} = -4(5) + 3$$
$$= -17$$

c) La pendiente será 0 siempre que *dy/dx* = 0, o para esta función cuando $-4x + 3 = 0$. Al despejar *x* se obtiene

$$-4x = -3$$

o bien: $$x = \tfrac{3}{4}$$

El único punto donde la pendiente es 0 ocurre cuando $x = \frac{3}{4}$. ❑

Ejercicio de práctica

Verifique que $x = \frac{3}{4}$ es la coordenada *x* del vértice de la parábola que representa la función $f(x) = -2x^2 + 3x - 10$, empleando para ello la fórmula apropiada de la sección 6.2.

Si una función no es continua en un punto, no puede tener una derivada en ese punto. Sin embargo, algunas funciones son continuas y, pese a ello, hay algunos puntos dentro del dominio donde no existe la derivada.

Ejemplo 31 Examinemos $f(x) = |2x|$ que se muestran en la figura 15.23. Supóngase que se desea calcular la derivada de *f* cuando $x = 0$. Esto se puede determinar al evaluar la ecuación (15.7) en $x = 0$.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|2(0 + \Delta x)| - |2(0)|}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|2\,\Delta x|}{\Delta x}\end{aligned}$$

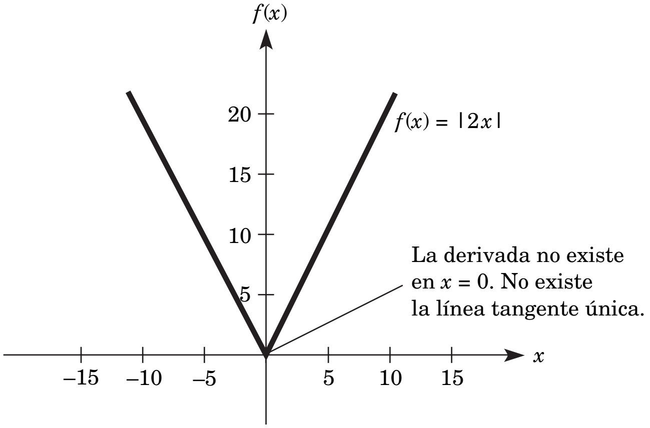


Figura 15.23

Tabla 15.10

Aproximación desde la izquierda

Δx	-1	-0.5	-0.01
$\dfrac{\lvert 2\,\Delta x\rvert}{\Delta x} = \dfrac{-2\,\Delta x}{\Delta x}$	-2	-2	-2

Aproximación desde la derecha

Δx	1	0.5	0.01
$\dfrac{\lvert 2\,\Delta x\rvert}{\Delta x} = \dfrac{2\,\Delta x}{\Delta x}$	2	2	2

La evaluación de los límites de la izquierda y la derecha da (la tabla 15.10 indica valores de muestra),

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\lvert 2\,\Delta x\rvert}{\Delta x} = -2 \qquad y \qquad \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\lvert 2\,\Delta x\rvert}{\Delta x} = 2$$

Puesto que esos dos límites no son iguales,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\lvert 2\,\Delta x\rvert}{\Delta x}$$

no existe. Por tanto, para la función $f(x) = |2x|$, que es continua a lo largo de su dominio, la derivada no existe *en el punto* $x = 0$. Nótese que no puede trazarse una línea tangente única en $x = 0$. ❑

Sección 15.4 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 24: *a*) determine la derivada de f por el método del límite y *b*) calcule la pendiente cuando $x = 1$ y $x = -2$.

1. $f(x) = 4x + 6$
2. $f(x) = -20$
3. $f(x) = 8x^2$
4. $f(x) = 5x^2$
5. $f(x) = 3x^2 - 5x$
6. $f(x) = 10x^2 - 8x$
7. $f(x) = x^2 - 3x + 5$
8. $f(x) = 15x^2 + 2x + 8$
9. $f(x) = -6x^2 + 3x - 1$
10. $f(x) = -3x^2 - 10x$
11. $f(x) = 20x^2 - 10$
12. $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + 6x$
13. $f(x) = ax + b$
14. $f(x) = -ax^2 + bx$
***15.** $f(x) = -2/x$
***16.** $f(x) = 4/x$
***17.** $f(x) = a/x$
***18.** $f(x) = 5/x^2$
***19.** $f(x) = -3/x$
***20.** $f(x) = 3x^3$
***21.** $f(x) = x^3/2$
***22.** $f(x) = 4/x^2$
***23.** $f(x) = x^3 + 3x^2$
***24.** $f(x) = x^4$

15.5 Diferenciación

El proceso de obtener una derivada recibe el nombre de ***diferenciación***. Por fortuna, el proceso no necesariamente tiene que ser tan laborioso como podría parecer cuando se aplicó el método del límite. Se dispone de un conjunto de reglas de la diferenciación para obtener las derivadas de muchas funciones comunes. Aunque hay muchas funciones para las cuales no existe la derivada, *aquí nos ocuparemos de las funciones que son diferenciables*.

Reglas de la diferenciación

Las reglas de diferenciación que se explican en la presente sección se desarrollaron usando el método del límite. Pueden ser muy complicadas las matemáticas que se aplican en la prueba de dichas reglas. Para nuestros propósitos bastará presentar las reglas sin demostración alguna. En el apéndice al final del capítulo se incluyen las demostraciones de algunas reglas de la diferenciación para el lector que desee consultarlas.

Las reglas de la diferenciación se aplican a funciones que poseen características estructurales específicas. Una regla establecerá que si una función muestra determinadas características, su derivada tendrá una forma resultante. A medida que el lector estudie las reglas, no olvide que cada función puede ser graficada y que la derivada es una expresión general de la pendiente de la función. Otra notación de dy/dx es hacer que $\boldsymbol{f'(x)}$ (léase **"*f* prima de *x*"**) represente la derivada de la función f en x. En otras palabras, si se tiene $f(x)$,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Esta notación se empleará al presentar las reglas.

Regla 1: Función constante

Si $f(x) = c$, donde c es una constante cualquiera

$$f'(x) = 0$$

Ejemplo 32

Examine la función constante $f(x) = 5$. Se aplica la regla 1, $f'(x) = 0$. Si el lector considera el aspecto gráfico de la función, el resultado le parecerá razonable. La gráfica de la función $f(x) = 5$ es una línea horizontal que cruza el eje y en $(0, 5)$. La pendiente en todos los puntos a lo largo de la función es 0. ❑

Regla 2: Regla de la potencia

Si $f(x) = x^n$, donde n es un número real,

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Ejemplo 33

Considérese la función $f(x) = x$. Esta función es la misma que $f(x) = x^1$. Al aplicar la regla 2 para encontrar la derivada, se sabe que $n = 1$ y que

$$\begin{aligned} f'(x) &= nx^{n-1} \\ &= 1\cdot x^{1-1} \\ &= x^0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Esto significa que para la función $f(x) = x$, la pendiente será 1 en todos los puntos. Conviene reconocer que $f(x) = x$ es una función lineal con pendiente de 1.

Ejemplo 34 Considere la función $f(x) = x^5$. Al aplicar la regla 2 para encontrar la derivada, se tiene que $n = 5$ y

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^{5-1} \\ &= 5x^4 \end{aligned}$$

Ejemplo 35 Pongamos el caso de la función $f(x) = 1/x^3$.

Recordatorio de álgebra

$$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

Al reescribir f como $f(x) = x^{-3}$, la derivada puede hallarse aplicando la regla 2. Puesto que $n = -3$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -3x^{-3-1} \\ &= -3x^{-4} \\ &= \frac{-3}{x^4} \end{aligned}$$

Ejemplo 36 Considere la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Recordatorio de álgebra

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$$

Al reescribir f como $f(x) = x^{2/3}$, de nueva cuenta se puede aplicar la regla 2. Ya que $n = \frac{2}{3}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{2}{3}x^{2/3-1} \\ &= \frac{2x^{-1/3}}{3} \\ &= \frac{2}{3x^{1/3}} \\ &= \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

❑

Ejercicio de práctica

Determine $f'(x)$ si: *a)* $f(x) = x^6$; *b)* $f(x) = 1/x^4$. *Respuesta: a)* $f'(x) = 6x^5$; *b)* $f'(x) = -4/x^5$.

Regla 3: Constante que multiplica a una función

Si $f(x) = c \cdot g(x)$, donde c es una constante y g es una función diferenciable,

$$f'(x) = c \cdot g'(x)$$

Ejemplo 37 Examínese la función $f(x) = 10x^2$. La aplicación de la regla 3 para encontrar la derivada, $c = 10$, $g(x) = x^2$ y

$$\begin{aligned} f'(x) &= c \cdot g'(x) \\ &= 10(2x) \\ &= 20x \end{aligned}$$

Ejemplo 38 Considérese la función $f(x) = -3/x$. Esta función puede reescribirse del modo siguiente:

$$f(x) = -3\left(\frac{1}{x}\right) = -3x^{-1}$$

La aplicación de las reglas 2 y 3 da

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-3)(-1)(x^{-1-1}) \\ &= 3x^{-2} \\ &= \frac{3}{x^2} \end{aligned}$$

❑

Regla 4: Suma o diferencia de funciones

Si $f(x) = u(x) \pm v(x)$, donde u y v son diferenciables,

$$f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$$

La regla 4 significa que la derivada de una función formada por la suma (diferencia) de dos o más funciones componentes es la suma (diferencia) de las derivadas de las funciones componentes.

Ejemplo 39 Analicemos la función $f(x) = x^2 - 5x$. De acuerdo con la regla 4, f puede expresarse como $f(x) = u(x) - v(x)$, donde

$$u(x) = x^2$$

y

$$v(x) = 5x$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) - v'(x) \\ &= 2x - 5 \end{aligned}$$

Ejemplo 40 Considérese la función $f(x) = 5x^4 - 8x^3 + 3x^2 - x + 50$. La derivada se encuentra al extender la regla 4 y al diferenciar cada término de $f(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5(4x^3) - 8(3x^2) + 3(2x) - 1 + 0 \\ &= 20x^3 - 24x^2 + 6x - 1 \end{aligned}$$

Ejercicio de práctica

Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = 8x^3 - 4x^2 + 3x - 10$. *Respuesta:* $f'(x) = 24x^2 - 8x + 3$.

Regla 5: Regla del producto

Si $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, donde u y v son diferenciables, entonces

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$$

En forma verbal, la derivada de un producto es igual a la primera función multiplicada por la derivada de la segunda función *más* la segunda función multiplicada por la derivada de la primera.

Ejemplo 41 Examínese la función $f(x) = (x^2 - 5)(x - x^3)$. Al aplicar la regla 5 se tiene $u(x) = x^2 - 5$ y $v(x) = x - x^3$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + v'(x)u(x) \\ &= (2x)(x - x^3) + (1 - 3x^2)(x^2 - 5) \\ &= 2x^2 - 2x^4 + x^2 - 5 - 3x^4 + 15x^2 \\ &= -5x^4 + 18x^2 - 5 \end{aligned}$$

Ejemplo 42 En el ejemplo anterior, la función pudo haber sido reescrita en la forma equivalente

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 5)(x - x^3) \\ &= x^3 - x^5 - 5x + 5x^3 \\ &= -x^5 + 6x^3 - 5x \end{aligned}$$

La obtención de la derivada de esta forma de la función no exige utilizar la regla 5. La derivada es

$$f'(x) = -5x^4 + 18x^2 - 5$$

que es el mismo resultado conseguido antes. ❑

NOTA Como con los dos ejemplos anteriores, muchas funciones pueden ser manipuladas algebraicamente y pueden ser convertidas en una forma equivalente. Esto puede ser de utilidad por dos motivos. En ***primer lugar***, reescribir una función en una forma equivalente permite emplear las reglas de la derivada que son más eficientes o fáciles de recordar. En ***segundo lugar***, la obtención de la derivada de la función original y de la forma equivalente de la función proporciona una verificación de la respuesta.

Ejercicio de práctica

Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = (x^3 - 2x^5)(x^4 - 3x^2 + 10)$. *Respuesta:* $f'(x) = -18x^8 + 49x^6 - 115x^4 + 30x^2$.

Regla 6: Regla del cociente

Si $f(x) = u(x)/v(x)$, donde u y v son diferenciables, y $v(x) \neq 0$, entonces

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}}$$

Verbalmente, la derivada de un cociente equivale al denominador multiplicado por la derivada del numerador *menos* el numerador por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador.

Ejemplo 43 En el ejemplo 35 se utilizó la regla de la potencia para determinar que la derivada de $f(x) = 1/x^3$ es $f'(x) = -3/x^4$. Dado que f tiene la forma de un cociente, como método alternativo puede aplicarse la regla 6. Si $u(x) = 1$ y $v(x) = x^3$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{x^3(0) - (1)(3x^2)}{(x^3)^2} \\ &= \frac{-3x^2}{x^6} \\ &= \frac{-3}{x^4} \end{aligned}$$

Ejemplo 44 Considérese la función $f(x) = (3x^2 - 5)/(1 - x^3)$. La aplicación de la regla 6 con $u(x) = 3x^2 - 5$ y $v(x) = (1 - x^3)$, nos da

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1 - x^3)(6x) - (3x^2 - 5)(-3x^2)}{(1 - x^3)^2} \\ &= \frac{6x - 6x^4 + 9x^4 - 15x^2}{(1 - x^3)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{3x^4 - 15x^2 + 6x}{(1 - x^3)^2}$$

❑

Ejercicio de práctica

Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = \dfrac{10 - x}{x^2 + 1}$. *Respuesta:* $f'(x) = (x^2 - 20x - 1)/(x^2 + 1)^2$.

Sección 15.5 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 38, encuentre la expresión para $f'(x)$.

1. $f(x) = 140$
2. $f(x) = -55$
3. $f(x) = 0.55$
4. $f(x) = 4x^0$
5. $f(x) = x^3 - 4x$
6. $f(x) = -3x/4 + 9$
7. $f(x) = 2x^5$
8. $f(x) = -x/3$
9. $f(x) = \sqrt[5]{x^3}$
10. $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$
11. $f(x) = \sqrt{x^5}$
12. $f(x) = \sqrt[3]{x^7}$
13. $f(x) = x^{10}$
14. $f(x) = x^{5/3}$
15. $f(x) = \dfrac{x^6}{3} - 2x$
16. $f(x) = \dfrac{x^4}{2} - 3x^2 + 10$
17. $f(x) = \dfrac{x^3}{2} - 100$
18. $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$
19. $f(x) = 5/x^2$
20. $f(x) = 3/5x^3$
21. $f(x) = -10/x^4$
22. $f(x) = \sqrt{2}/x^3$
23. $f(x) = x - 1/\sqrt{x}$
24. $f(x) = 1/\sqrt[6]{x^5}$
25. $f(x) = 2/\sqrt[3]{x}$
26. $f(x) = 1/6\sqrt[3]{x}$
27. $f(x) = (x^3 - 2x)(x^5 + 6x^2)$
28. $f(x) = \left(\dfrac{x^2}{2} - 10\right)(x^3 - 2x^2 + 1)$
29. $f(x) = (x^3 - x + 3)(x^6 - 10x^4)$
30. $f(x) = (2 - x - 3x^4)(10 + x - 4x^3)$
31. $f(x) = (6x^2 - 2x + 1)(x^3/4 + 5)$
32. $f(x) = [(x + 3)/2][x^2 - 4x + 9]$
33. $f(x) = x/(1 - x^2)$
34. $f(x) = 4x/(6x^2 - 5)$
35. $f(x) = (10 - x)/(x^2 + 2)$
36. $f(x) = 3x^5/(x^2 - 2x + 1)$
37. $f(x) = 1/(4x^5 - 3x^2 + 1)$
38. $f(x) = (-x^3 + 1)/(x^5 - 20)$

En los ejercicios 39 a 48: *a*) calcule $f'(2)$ y *b*) determine los valores de x para los cuales $f'(x) = 0$.

39. $f(x) = 10x - 5$
40. $f(x) = 8x^2 - 12x + 1$
41. $f(x) = x^3/3 - 6x + 8$
42. $f(x) = 16x^4/4 - x$
43. $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$
44. $f(x) = -1/x$
45. $f(x) = x^2/(1 - x^2)$
46. $f(x) = x^2 - 16x + 5$
47. $f(x) = -x^3/3 + 9x$
48. $f(x) = -x/(x - 5)$

15.6 Reglas adicionales de la diferenciación

En esta sección se presentan algunas reglas adicionales de la diferenciación que se añadirán a las reglas de la sección 15.5.

Regla 7: Potencia de una función

Si $f(x) = [u(x)]^n$, donde u es una función diferenciable y n es un número real, entonces

$$\boldsymbol{f'(x) = n \cdot [u(x)]^{n-1} \cdot u'(x)}$$

Esta regla se asemeja mucho a la de la potencia (regla 2). En efecto, la regla de la potencia constituye el caso especial de esta regla donde $u(x)$ es x. Cuando $u(x) = x$, $u'(x) = 1$ y al aplicar la regla 7, se obtiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= n(x)^{n-1}(1) \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

Ejemplo 45 Examínese la función $f(x) = \sqrt{7x^4 - 5x - 9}$. La función f se puede reescribir como $f(x) = (7x^4 - 5x - 9)^{1/2}$. En esta forma, se aplica la regla donde $u(x) = 7x^4 - 5x - 9$. La aplicación de la regla 7 nos da,

$$\begin{aligned} f'(x) &= n[u(x)]^{n-1} \cdot u'(x) \\ &= \tfrac{1}{2}(7x^4 - 5x - 9)^{(1/2)-1}(28x^3 - 5) \\ &= (14x^3 - \tfrac{5}{2})(7x^4 - 5x - 9)^{-1/2} \end{aligned}$$

que puede reescribirse así

$$f'(x) = \frac{14x^3 - \frac{5}{2}}{(7x^4 - 5x - 9)^{1/2}}$$

o bien

$$f'(x) = \frac{14x^3 - \frac{5}{2}}{\sqrt{7x^4 - 5x - 9}}$$

Ejemplo 46 Considérese la función

$$f(x) = \left(\frac{3x}{1 - x^2}\right)^5$$

Esta función presenta la forma señalada en la regla 7, donde u es la función racional $3x/(1 - x^2)$. Al aplicar la regla 7 [adviértase que la regla 6 debe emplearse para hallar $u'(x)$] se obtiene,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5\left(\frac{3x}{1 - x^2}\right)^4 \frac{(1 - x^2)(3) - (3x)(-2x)}{(1 - x^2)^2} \\ &= 5\left(\frac{3x}{1 - x^2}\right)^4 \frac{3 - 3x^2 + 6x^2}{(1 - x^2)^2} \\ &= 5\left(\frac{3x}{1 - x^2}\right)^4 \frac{3 + 3x^2}{(1 - x^2)^2} \end{aligned}$$

❑

Ejercicio de práctica

Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = (3x^2 - 5x + 8)^{10}$. *Respuesta:* $f'(x) = (60x - 50)(3x^2 - 5x + 8)^9$.

Regla 8: Funciones exponenciales de base *e*

Si $f(x) = e^{u(x)}$, donde u es una función diferenciable, entonces

$$\boldsymbol{f'(x) = u'(x)e^{u(x)}}$$

Ejemplo 47 Considérese $f(x) = e^x$. Aplicando la regla 8, el exponente $u(x) = x$, y así

$$\begin{aligned} f\ (x) &= u'(x)e^{u(x)} \\ &= 1e^x \\ &= e^x \end{aligned}$$

Este resultado es único en cuanto a que *la función* e^x *y su derivada son idénticas*. Es decir, $f(x) = f'(x) = e^x$. En forma gráfica, la interpretación es que, para cualquier valor de x, la pendiente de la gráfica de $f(x) = e^x$ es exactamente igual al valor de la función.

Ejemplo 48 Considérese $f(x) = e^{-x2+2x}$. Aplicando la regla 8,

$$f'(x) = (-2x + 2)e^{-x^2+2x}$$

❑

Ejercicio de práctica

Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = 10e^{5x^2-4x}$. *Respuesta:* $f'(x) = (100x - 40)\, e^{5x^2-4x}$.

Regla 9: Funciones de logaritmos naturales

Si $f(x) = \ln u(x)$, donde u es una función diferenciable, entonces

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}}$$

Ejemplo 49 Considérese la función

$$f(x) = \ln x$$

Si se hace que $u(x) = x$ y se aplica la regla 9,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)}{u(x)} \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Ejemplo 50 Considérese $f(x) = \ln(5x^2 - 2x + 1)$. Aplicando la regla 9,

$$u(x) = 5x^2 - 2x + 1$$

y $$f'(x) = \frac{10x - 2}{5x^2 - 2x + 1}$$

❑

Ejercicio de práctica

Encuentre $f'(x)$ si $f(x) = \ln(4x^2 - 16x)$. *Respuesta:* $f'(x) = (8x - 16)/(4x^2 - 16x)$.

Regla de la cadena

La regla 7 (potencia de una función) se explicó brevemente y sin prestarle la atención que merece. La regla 7 es un caso especial de la más general *regla de la cadena*.

Regla 10: Regla de la cadena

Si $y = f(u)$ es una función diferenciable y $u = g(x)$ también es una función diferenciable, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Recuerde que en el capítulo 4 se estudiaron las funciones compuestas: aquellas cuyo valor depende de otras funciones. La regla de la cadena se aplica en concreto a las funciones compuestas. Póngase el caso de dos funciones

$$y = f(u) = 20 - 3u$$

y $$u = g(x) = 5x - 4$$

Nótese que el valor de y depende en definitiva de x. Esto se comprueba observando que si x aumenta en 1 unidad, u se incrementa en 5 unidades. Y un aumento de 5 unidades en u da origen a un *decremento* de (3)(5) = 15 unidades en y. Si se desea averiguar cómo el valor de y responde ante los cambios de x, se puede aplicar la regla de la cadena. Puesto que

$$\frac{dy}{du} = -3$$

y $$\frac{du}{dx} = 5$$

entonces $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (-3)(5)$$

$$= -15$$

Ejemplo 51 Dadas $y = f(u) = u^2 - 2u + 1$ y $u = g(x) = x^2 - 1$,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= (2u - 2)(2x)\end{aligned}$$

Se puede reescribir dy/dx estrictamente en términos de x con sólo sustituir $u = x^2 - 1$. Esto da

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= [2(x^2 - 1) - 2](2x) \\ &= (2x^2 - 4)(2x) \\ &= 4x^3 - 8x\end{aligned}$$

Con la regla 7 se aproximaría este problema reformulando primero $f(u)$ en términos de x. Es decir, puesto que $u = x^2 - 1$

$$\begin{aligned}y &= u^2 - 2u + 1 \\ &= (x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1) + 1\end{aligned}$$

La expresión de dy/dx se obtiene directamente como

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 2(x^2 - 1)(2x) - 4x \\ &= 4x^3 - 4x - 4x \\ &= 4x^3 - 8x\end{aligned}$$

que es el mismo resultado.

Ejemplo 52 Dada $y = f(u) = u^3 - 5u$, donde $u = g(x) = x^4 + 3x$,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= (3u^2 - 5)(4x^3 + 3)\end{aligned}$$

Al reescribir esto en función de x se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= [3(x^4 + 3x)^2 - 5](4x^3 + 3) \\ &= [3(x^8 + 6x^5 + 9x^2) - 5](4x^3 + 3) \\ &= (3x^8 + 18x^5 + 27x^2 - 5)(4x^3 + 3) \\ &= 12x^{11} + 72x^8 + 108x^5 - 20x^3 + 9x^8 + 54x^5 \\ &\quad + 81x^2 - 15 \\ &= 12x^{11} + 81x^8 + 162x^5 - 20x^3 + 81x^2 - 15\end{aligned}$$

❑

Ejercicio de práctica

Dado $y = f(u) = u^3 + 3u$ y $u = g(x) = x + 3$, encuentre dy/dx. *Respuesta:* $dy/dx = 3(x+3)^2 + 3 = 3x^2 + 18x + 30$.

Sección 15.6 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 38, determine $f'(x)$.

1. $f(x) = (1 - 4x^3)^5$

2. $f(x) = (7x^2 - 3x + 1)^3$

3. $f(x) = (x^3 - 2x + 5)^4$

4. $f(x) = (5x^3 + 1)^4$

5. $f(x) = \sqrt{1 - 5x^3}$

6. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 2x + 5}$

7. $f(x) = 1/\sqrt{x^2 - 1}$

8. $f(x) = \sqrt{1/(x^2 + 9)}$

9. $f(x) = e^x$

10. $f(x) = e^{x^3}$

11. $f(x) = 10e^{x^2}$

12. $f(x) = -5e^{x/2}$

13. $f(x) = (5e^x)^3$

14. $f(x) = 3x^2e^x$

15. $f(x) = 4xe^{x^2}$

16. $f(x) = (e^x - 5)^4$

17. $f(x) = e^{x^2 - 2x + 5}$

18. $f(x) = 10e^{x^3 - 2x}$

19. $f(x) = e^x/x$

20. $f(x) = 2x^2/e^x$

21. $f(x) = (e^x)^3$

22. $f(x) = \sqrt{e^{2x}}$

23. $f(x) = \ln(5x)$

24. $f(x) = \ln(x/2)$

25. $f(x) = \ln(x^2 - 3)$

26. $f(x) = \ln(x^3 - 2x^2 + 5)$

27. $f(x) = x^2 \ln x$

28. $f(x) = (x + 3) \ln x^2$

29. $f(x) = \dfrac{10x}{\ln x}$

30. $f(x) = (\ln x)^3$

31. $f(x) = \dfrac{x - 1}{\ln 3x}$

32. $f(x) = (5x - \ln x)^5$

33. $f(x) = \dfrac{\ln x}{e^{x^2}}$

34. $f(x) = \dfrac{e^{x^2+1}}{\ln(x + 1)}$

35. $f(x) = \sqrt{(x - 1)^5(6x - 5)}$

36. $f(x) = \sqrt[3]{\left(\dfrac{x^2}{5x - 1}\right)^2}$

37. $f(x) = (6x - 2)\sqrt{x^2 - 5x + 3}$

38. $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{(1 - x^3)^5x^3}{(9 - 2x^2)}}$

En los ejercicios siguientes, encuentre dy/dx.

39. $y = f(u) = 5u + 3$ y $u = g(x) = -3x + 10$

40. $y = f(u) = u^2 - 5$ y $u = g(x) = 10x - 3$

41. $y = f(u) = u^2 - 2u + 1$ y $u = g(x) = x^2$

42. $y = f(u) = u^3$ y $u = g(x) = x^2 + 3x + 1$

43. $y = f(u) = 10 - 5u^3$ y $u = g(x) = -x + x^3$

44. $y = f(u) = u^4 - u^2 + 1$ y $u = g(x) = x^2 - 4$

45. $y = f(u) = \sqrt{u}$ y $u = g(x) = x^2/2$

46. $y = f(u) = \sqrt{u^2 - 1}$ y $u = g(x) = x^4$

47. $y = f(u) = (u - 3)^5$ y $u = g(x) = x^2 - 2x$

48. $y = f(u) = \sqrt{u^3}$ y $u = g(x) = \sqrt{x}$

49. $y = f(u) = e^u$ y $u = g(x) = 2x^2 - 5x$

50. $y = f(u) = e^{u^2}$ y $u = g(x) = x^2 - 5$

51. $y = f(u) = \ln(5u - 3)$ y $u = g(x) = 4x^3 - 3x^2$

52. $y = f(u) = 10 \ln(15 - u^3)$ y $u = g(x) = x^2 - 2x + 5$

Para los ejercicios 53 a 64: *a*) encuentre $f'(2)$ y *b*) determine los valores de x para los cuales $f'(x) = 0$.

53. $f(x) = (5x^2 - 10)^6$	**54.** $f(x) = (2x - 8)^5$
55. $f(x) = \sqrt{x^2 + 21}$	**56.** $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$
57. $f(x) = e^{-x}$	**58.** $f(x) = e^x$
59. $f(x) = xe^{-x}$	**60.** $f(x) = xe^x$
61. $f(x) = \ln x - x$	**62.** $f(x) = \ln 30x - 3x$
63. $f(x) = \ln 2x - 2x$	**64.** $f(x) = \ln x - x^2/2$

15.7 Interpretación de la razón de cambio instantánea

Anteriormente se estableció que la derivada puede utilizarse para determinar la razón de cambio instantánea.

Ejemplo 53 En el ejemplo 25, la función

$$d = f(t) = 8t^2 + 8t$$

describió la distancia (en millas) que recorre un automóvil en función del tiempo (en horas). La velocidad instantánea del automóvil en cualquier instante se calcula al evaluar la derivada en ese valor de t. Para determinar la velocidad instantánea si $t = 3$, la derivada

$$f'(t) = 16t + 8$$

ha de evaluarse cuando $t = 3$, o

$$\begin{aligned} f'(3) &= 16(3) + 8 \\ &= 56 \text{ mph} \end{aligned}$$

Ejemplo 54 Se deja caer un objeto desde un peñasco situado a 1 296 pies de altura. La altura del objeto se describe en función del tiempo. La función es

$$h = f(t) = -16t^2 + 1\,296$$

donde h representa la altura en pies y t el tiempo medido en segundos, que es contado desde el momento en que se deja caer el objeto.

a) ¿A qué distancia caerá el objeto en dos segundos?
b) ¿Cuál es la velocidad instantánea del objeto cuando $t = 2$?
c) ¿Cuál es su velocidad en el momento de caer al suelo?

SOLUCIÓN

a) El cambio de la altura es

$$\begin{aligned} \Delta h &= f(2) - f(0) \\ &= [-16(2)^2 + 1\,296] - [-16(0)^2 + 1\,296] \\ &= (-64 + 1\,296) - 1\,296 = -64 \end{aligned}$$

Así pues, el objeto *cae* 64 pies durante los primeros dos segundos.

b) Puesto que $f'(t) = -32t$, el objeto tendrá una velocidad de

$$\begin{aligned} f'(2) &= -32(2) \\ &= -64 \text{ pies/segundo} \end{aligned}$$

cuando $t = 2$. El signo de menos denota la dirección de la velocidad (hacia abajo).

c) A fin de determinar la velocidad del objeto cuando cae al suelo, es preciso saber *cuándo* llegará al suelo. Y lo hará cuando $h = 0$, o cuando

$$-16t^2 + 1\,296 = 0$$

Si resolvemos para t,

$$t^2 = \frac{1\,296}{16} = 81$$

y $t = \pm 9$. Como una raíz negativa carece de sentido, puede llegarse a la conclusión de que el objeto tocará el suelo al cabo de nueve segundos. En ese momento la velocidad será de

$$\begin{aligned} f'(9) &= 32(9) \\ &= 288 \text{ pies/s} \end{aligned}$$

Ejemplo 55

(Seguimiento de una epidemia: escenario de motivación) Una epidemia de gripe está propagándose por un estado del medio oeste de Estados Unidos. Con base en epidemias semejantes que se han presentado con anterioridad, los epidemiólogos han formulado una función matemática con la que estiman el número de personas que se contagiarán con la epidemia. En concreto, la función es

$$n = f(t) = -0.3t^3 + 10t^2 + 300t + 250$$

donde *n representa el número de personas afectadas, t es igual al tiempo, medido en días, desde la detección inicial hecha por los oficiales del departamento de salubridad*, y el dominio relevante (restringido) es de $0 \leq t \leq 30$.

Si se hace uso de la función de estimación:

a) ¿Qué interpretación puede darse a $f(0)$?

b) ¿Cuántas personas se espera que contraigan la enfermedad al cabo de 10 días? ¿Y al cabo de 20 días?

c) ¿Cuál es la razón promedio a la que se espera que esta epidemia se propague entre $t = 10$ y $t = 20$?

d) ¿Cuál es la razón instantánea a la que se espera que la enfermedad se propague cuando $t = 11$? ¿Y cuando $t = 12$?

e) ¿Qué interpretación se sugiere por los resultados en el inciso *d*?

SOLUCIÓN

a) $f(0)$ se interpretaría como el número estimado de personas que hayan contraído la enfermedad en el momento de la detección inicial de la misma por los oficiales del departamento de salud. De acuerdo con esta función, aproximadamente 250 personas se habrían visto afectadas.

b)

$$\begin{aligned} f(10) &= -0.3(10)^3 + 10(10)^2 + 300(10) + 250 \\ &= -300 + 1\,000 + 3\,000 + 250 \\ &= 3\,950 \text{ personas} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(20) &= -0.3(20)^3 + 10(20)^2 + 300(20) + 250 \\ &= -2\,400 + 4\,000 + 6\,000 + 250 \\ &= 7\,850 \text{ personas} \end{aligned}$$

c)
$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = \frac{f(20) - f(10)}{20 - 10} = \frac{7\,850 - 3\,950}{10} = \frac{3\,900}{10} = 390 \text{ personas/día}$$

d) La razón instantánea a la que la epidemia se propaga se estima mediante $f'(t)$.

$$f'(t) = -0.9t^2 + 20t + 300$$

Cuando $t = 11$,

$$\begin{aligned} f'(11) &= -0.9(11)^2 + 20(11) + 300 \\ &= -108.9 + 220 + 300 \\ &= 411.1 \text{ personas/día} \end{aligned}$$

Cuando $t = 12$,

$$\begin{aligned} f'(12) &= -0.9(12)^2 + 20(12) + 300 \\ &= -129.6 + 240 + 300 \\ &= 410.4 \text{ personas/día} \end{aligned}$$

e) El resultado en el inciso *d*) sugiere que la razón a la que se contagian las personas por esta enfermedad ha disminuido entre los días 11 y el 12. ❑

Ejemplo 56 **(Proceso de crecimiento exponencial)** Los procesos de crecimiento exponencial se presentaron en el capítulo 7. La función generalizada para el crecimiento exponencial se introdujo en la ecuación (7.9) como

$$V = f(t) = V_0 e^{kt}$$

Se indicó que estos procesos están caracterizados por una razón de crecimiento de porcentaje constante. Para verificar esto, se encuentra la derivada

$$f'(t) = V_0(k)e^{kt}$$

que puede escribirse como

$$f'(t) = kV_0 e^{kt}$$

La derivada representa la razón de cambio instantánea en el valor *V* respecto de un cambio en *t*. La *razón de cambio porcentual* se calcularía mediante la razón

$$\boxed{\frac{\text{Razón de cambio instantánea}}{\text{Valor de la función}} = \frac{f'(t)}{f(t)}}$$

Para esta función,

$$\begin{aligned} \frac{f'(t)}{f(t)} &= \frac{kV_0 e^{kt}}{V_0 e^{kt}} \\ &= k \end{aligned}$$

Esto confirma que para una función de crecimiento exponencial de la forma de la ecuación (7.9), k representa la razón porcentual de crecimiento. Dado que k es una constante, la razón porcentual de crecimiento es la misma para todos los valores de t. ❑

Sección 15.7 Ejercicios de seguimiento

1. La función $h = f(t) = 2.5t^3$, donde $0 \leq t \leq 30$, describe la altura h (en cientos de pies) de un misil t segundos después de haber sido lanzado.

a) ¿Cuál es la velocidad promedio durante el intervalo $0 \leq t \leq 10$?
b) ¿Cuál es la velocidad instantánea cuando $t = 10$? ¿Y cuando $t = 20$?

2. Un objeto es lanzado desde el nivel del suelo con una velocidad inicial de 256 pies por segundo. La función que describe la altura h de la pelota es

$$h = f(t) = 256t - 16t^2$$

donde h se mide en pies y t es el tiempo medido en segundos desde que se arrojó la pelota.

a) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando $t = 1$ s?
b) ¿Cuándo retornará la pelota al suelo?
c) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando alcanza el suelo?

3. Una pelota se deja caer desde el techo de un edificio de 256 pies de altura. La altura de la pelota se describe con la función

$$h = f(t) = -16t^2 + 256$$

donde h denota la altura en pies y t el tiempo medido en segundos desde el momento en que se deja caer la pelota.

a) ¿Cuál es la velocidad promedio durante el intervalo $1 \leq t \leq 2$?
b) ¿Cuál es la velocidad instantánea cuando $t = 3$?
c) ¿Cuál es la velocidad de la pelota en el momento de llegar al suelo?

4. **Control de epidemias** Una epidemia está propagándose por un estado del oeste de Estados Unidos. Los oficiales de salud estiman que el número de personas que se contagiarán es una función del tiempo transcurrido desde que se detectó la epidemia. En concreto, la función es

$$n = f(t) = 300t^2 - 20t^2$$

donde n representa el número de personas y $0 \leq t \leq 60$, medido en días.

a) ¿Cuántas personas se espera que contraigan la enfermedad al cabo de 10 días? ¿Y al cabo de 30 días?
b) ¿Cuál es la razón promedio que se espera a que la epidemia se propague entre $t = 10$ y $t = 30$?
c) ¿Cuál es la razón instantánea que se espera a que la enfermedad se propague cuando $t = 20$?

5. **Crecimiento de la población** La población de un país está estimada por la función

$$P = 125e^{0.035t}$$

donde P es igual a la población (en millones) y t es igual al tiempo medido en años desde 1990.

a) ¿Cuál es la población esperada para el año 2000?

b) Determine la expresión para la razón de cambio instantánea en la población.

c) ¿Cuál es la razón de cambio instantánea que se espera para la población en el año 2000?

6. Apreciación de la inversión Una pieza única de arte ha sido valuada hace unos años. La función

$$V = 1.5e^{0.06t}$$

estima el valor V de la obra de arte (medido en millones de dólares) como una función del tiempo t, medido en años desde 1986.

a) ¿Cuál es el valor estimado para el año 1996? ¿Y para el año 2000?

b) Determine la expresión general para la razón de cambio instantánea en el valor de la obra de arte.

c) ¿A qué razón se espera que se incremente el valor de la obra de arte en el año 2000?

7. Especies en peligro de extinción La población de una rara especie de la vida silvestre está disminuyendo. La función

$$P = 75\ 000e^{-0.025t}$$

estima la población P de la especie como una función del tiempo, medido en años desde 1980.

a) ¿Cuál es la población esperada para el año 1996?

b) Determine la expresión general para la razón de cambio instantánea en la población.

c) ¿A qué razón se espera que disminuya la población en el año 1996?

8. Depreciación de los activos El valor de un activo en particular se encuentra estimado por la función

$$V = 240\ 000e^{-0.04t}$$

donde V es el valor del activo y t es la edad del activo, medido en años.

a) ¿Cuál es el valor esperado del activo para cuando tenga cuatro años?

b) Determine la expresión general para la razón de cambio instantánea en el valor del activo.

c) ¿Cuál es la razón de cambio que se espera para cuando el activo tenga 10 años?

15.8 Derivadas de orden superior

Dada una función f, existen otras derivadas susceptibles de definición. En la presente sección se analizan estas ***derivadas de orden superior*** y su interpretación.

La segunda derivada

La derivada f' de la función f a menudo recibe el nombre de ***primera derivada*** de la función. El adjetivo *primera* sirve para distinguir esta derivada de las otras relacionadas con una función. El ***orden*** de la misma es 1.

La ***segunda derivada*** $\boldsymbol{f''}$ de una función es la derivada de la primera. En x, se denota por $\boldsymbol{d^2y/dx^2}$ o bien $\boldsymbol{f''(x)}$. La segunda derivada se determina aplicando las mismas reglas de la diferenciación que se usarán para calcular la primera derivada.

Tabla 15.11

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
x^5	$5x^4$	$20x^3$
$x^2 - 3x + 10$	$2x - 3$	2
$mx + b$	m	0
$x^3 - 2x^2 + 5x$	$3x^2 - 4x + 5$	$6x - 4$
$x^{3/2}$	$\frac{3}{2}x^{1/2}$	$\frac{3}{4}x^{-1/2}$
e^x	e^x	e^x
$\ln x$	$1/x$	$-1/x^2$

En la tabla 15.11 se incluye el cálculo de la primera y segunda derivadas de diversas funciones.

Del mismo modo que la primera derivada es una medida de la razón de cambio instantánea en el valor de y respecto del que se opera en x, también la *segunda derivada* constituye una medida de la razón de cambio instantánea en el valor de la primera derivada respecto de la que se produce en x. Descrito esto en forma diferente, puede afirmarse que la segunda derivada es una *medida de la razón de cambio instantánea en la pendiente respecto del que se da en x.*

Considérese detenidamente la función $f(x) = -x^2$. La primera y segunda derivadas de esa función son

$$f'(x) = -2x \qquad f''(x) = -2$$

La figura 15.24 muestra las gráficas de f, f' y f''.

La función f es una parábola cóncava hacia abajo con el vértice en (0, 0). La pendiente de la tangente es positiva a la izquierda del vértice, pero se torna *menos positiva* conforme x se aproxima a 0. A la derecha del vértice, la pendiente de la tangente es negativa y se torna *más negativa* (disminuye) conforme x aumenta. La gráfica de f' indica el valor de la pendiente en cualquier punto de f. Nótese que los valores de $f'(x)$ son positivos, pero que se vuelven menos positivos al irse acercando x a 0 desde la izquierda. Y $f'(x)$ se hace más y más negativa a medida que el valor de x se vuelve más positivo. Así pues, la gráfica de f' es compatible con nuestras observaciones de la gráfica de f.

La segunda derivada es una medida de la razón de cambio instantánea en la primera derivada o en la pendiente de la gráfica de una función. Dado que $f''(x) = -2$, esto significa que la razón de cambio en la primera derivada es constante en toda la función. Más exactamente, $f''(x) = -2$ indica que en cualquier parte de la función la pendiente *está dis-*

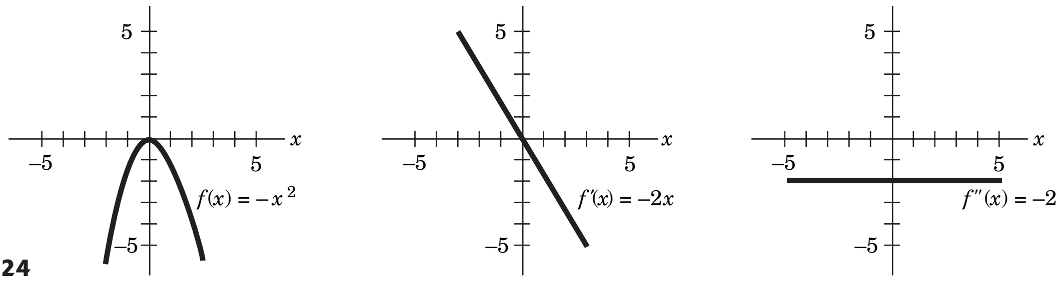


Figura 15.24

minuyendo a una razón instantánea de dos unidades por cada unidad que aumente x. Nótese que la gráfica de f' es una función lineal con una pendiente de -2.

En algunos ejemplos anteriores del capítulo se analizaron funciones que presentan la forma $d = f(t)$, donde d representa la distancia recorrida después del tiempo t. Se llegó entonces a la conclusión de que la velocidad instantánea en cualquier tiempo t estaba representada por la primera derivada $f'(t)$. La segunda derivada de este tipo de función $f''(t)$ ofrece una medida de la razón de cambio instantánea *en la velocidad* respecto de un cambio en el tiempo. Esta segunda derivada, medida en unidades de distancia por unidad de tiempo al cuadrado (por ejemplo, pies/s^2 o km/h^2), representa la ***aceleración*** instantánea de un objeto. Si

$$d = f(t) = t^3 - 2t^2 + 3t$$

la expresión que representa la ***velocidad instantánea*** será

$$f'(t) = 3t^2 - 4t + 3$$

y la expresión que representa la ***aceleración instantánea*** será

$$f''(t) = 6t - 4$$

Tercera derivada y derivadas de orden superior

Pueden determinarse otras derivadas para las funciones. Todas ellas son menos fáciles de entender desde un punto de vista intuitivo. No obstante, serán útiles más adelante y poseen un valor determinado en niveles más altos del análisis matemático.

Definición: Derivada de *n*-ésimo orden

La **derivada de *n*-ésimo orden** de f, denotada por $f^{(n)}$, se encuentra al diferenciar la derivada de orden $n - 1$. Es decir, en x,

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}[f^{(n-1)}(x)]$$

Ejemplo 57 Dada

$$f(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 - 3x^3 + x^2 - x + 1$$

las derivadas de f son

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 6x^5 - 10x^4 + 4x^3 - 9x^2 + 2x - 1\\
f''(x) &= 30x^4 - 40x^3 + 12x^2 - 18x + 2\\
f'''(x) &= 120x^3 - 120x^2 + 24x - 18\\
f^{(4)}(x) &= 360x^2 - 240x + 24\\
f^{(5)}(x) &= 720x - 240\\
f^{(6)}(x) &= 720\\
f^{(7)}(x) &= 0
\end{aligned}$$

Todas las demás derivadas de orden superior serán también 0. ❑

NOTA Para funciones polinomiales de *grado n*, la primera derivada es una función polinomial de grado $n - 1$. Cada derivada sucesiva es una función polinomial de un grado menor que la derivada anterior (hasta que el grado de una derivada sea igual a 0).

Sección 15.8 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 30: *a*) encuentre $f'(x)$ y $f''(x)$; *b*) evalúe $f'(1)$ y $f''(1)$, y *c*) exprese con palabras el significado de $f'(1)$ y de $f''(1)$.

1. $f(x) = 15$
2. $f(x) = 24 - 10x$
3. $f(x) = 4x^2 - x + 5$
4. $f(x) = x^2 - 15x + 10$
5. $f(x) = 5x^3$
6. $f(x) = 7x^3 - 2x^2 + 5x + 1$
7. $f(x) = x^4/4 - x^3/3 + 10x$
8. $f(x) = x^5/5 - x^3/3 + 100$
9. $f(x) = 1/x$
10. $f(x) = (x^2 - 2)^5$
11. $f(x) = 3x^5 - 2x^3$
12. $f(x) = 5x^4 - 10x^2$
13. $f(x) = 2/x^2$
14. $f(x) = -4/x^3$
15. $f(x) = (x - 5)^4$
16. $f(x) = (5 - 2x)^3$
17. $f(x) = \sqrt{x + 1}$
18. $f(x) = \sqrt{10 - 2x}$
19. $f(x) = e^{2x}$
20. $f(x) = e^{10-2x}$
21. $f(x) = e^{x^2}$
22. $f(x) = e^{x^2/2}$
23. $f(x) = \ln 2x$
24. $f(x) = \ln 4x$
25. $f(x) = \ln(x^2 - 5)$
26. $f(x) = \ln(x^3 + 4)$
27. $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$
28. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$
29. $f(x) = e^x \ln x$
30. $f(x) = e^{2x} \ln x$

31. La altura de un objeto que se deja caer desde una altura de 1 000 pies se describe mediante la función

$$h = 1\,000 - 16t^2$$

donde h se mide en pies y t en segundos.
a) ¿Cuál es la velocidad cuando $t = 4$?
b) ¿Cuál es la aceleración si $t = 4$?

32. La altura de un objeto que se deja caer desde una altura de 1 200 pies se describe mediante la función

$$h = 1\,200 - 16t^2$$

donde h se mide en pies y t en segundos.
a) ¿Cuál es la velocidad cuando $t = 3$? ¿Y cuando $t = 5$?
b) ¿Cuál es la aceleración si $t = 3$? ¿Y si $t = 5$?

33. Se lanza hacia arriba una pelota desde el techo de un edificio de 600 pies de alto y alcanzará una altura de h pies al cabo de t segundos, según se describe mediante la función

$$h = f(t) = -16t^2 + 50t + 600$$

a) ¿Cuál es la altura de la pelota después de 3 s?

b) ¿Cuál es la velocidad de la pelota al cabo de 3 s? (Un signo negativo indica dirección hacia abajo.)

c) ¿Cuál es la aceleración de la pelota cuando $t = 0$? ¿Cuando $t = 5$?

34. Se lanza hacia arriba una pelota desde el techo de un edificio de 750 pies de alto y alcanzará una altura de *h* pies al cabo de *t* segundos, según se describe mediante la función

$$h = f(t) = -16t^2 + 50t + 750$$

a) ¿Cuál es la altura de la pelota después de 5 s?

b) ¿Cuál es la velocidad de la pelota al cabo de 5 s? (Un signo negativo indica dirección hacia abajo.)

c) ¿Cuál es la aceleración de la pelota cuando $t = 0$? ¿Cuando $t = 5$?

En los ejercicios 35 a 50, determine todas las derivadas de orden superior.

35. $f(x) = 16x^3 - 4x^2$
36. $f(x) = 2\,500$
37. $f(x) = mx + b$
38. $f(x) = -x/4 + 10$
39. $f(x) = x^5 - 5x^4 - 30x^2$
40. $f(x) = (x - 10)^3$
41. $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
42. $f(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2)$
43. $f(x) = 10x^4 - 2x^3 + 3$
44. $f(x) = -x^5 + 3x^2$
45. $f(x) = (ax + b)^3$
46. $f(x) = (cx - d)^4$
47. $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3$
48. $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3}$
49. $f(x) = e^x$
50. $f(x) = e^{-x}$

TÉRMINOS Y CONCEPTOS CLAVE

asíntota horizontal	**712**
asíntota vertical	**715**
cociente de la diferencia	**723**
continuidad	**700**
derivada	**728**
derivada de *n*-ésimo orden	**755**
derivadas de orden superior	**753**
diferenciación	**738**
límite de una función	**700**
línea secante	**722**
línea tangente	**730**
pendiente de la curva	**731**
razón de cambio instantánea	**728**
razón de cambio promedio	**721**
regla de la cadena	**746**
segunda derivada	**753**

FÓRMULAS IMPORTANTES

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ **Cociente de la diferencia** **(15.5)**

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ **La derivada** **(15.7)**

Reglas de la diferenciación

1. Si $f(x) = c, f'(x) = 0$ **(Función constante)**

2. **Si $f(x) = x^n, f'(x) = nx^{n-1}$ (Regla de la potencia)**
3. **Si $f(x) = c \cdot g(x),\ f'(x) = c \cdot g'(x)$ (Constante por una función)**
4. **Si $f(x) = u(x) \pm v(x), f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$ (Suma o diferencia)**
5. **Si $f(x) = u(x)v(x), f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$ (Regla del producto)**
6. **Si $f(x) = u(x)/v(x), f'(x) = \dfrac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$ (Regla del cociente)**
7. **Si $f(x) = [u(x)]^n, f'(x) = n[u(x)]^{n-1}u'(x)$ (Potencia de una función)**
8. **Si $f(x) = e^{u(x)}, f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$ (Funciones exponenciales de base e)**
9. **Si $f(x) = \ln u(x), f'(x) = u'(x)/u(x)$ (Funciones de logaritmo natural)**
10. **$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ (Regla de la cadena)**

❑ EJERCICIOS ADICIONALES

SECCIÓN 15.1

1. Utilice la gráfica de la función de la figura 15.25 para determinar los límites indicados.

a) $\lim_{x \to -4^-} f(x)$ *b*) $\lim_{x \to -4^+} f(x)$ *c*) $\lim_{x \to -4} f(x)$

d) $\lim_{x \to -2^-} f(x)$ *e*) $\lim_{x \to -2^+} f(x)$ *f*) $\lim_{x \to -2} f(x)$

g) $\lim_{x \to 2} f(x)$ *h*) $\lim_{x \to 1} f(x)$

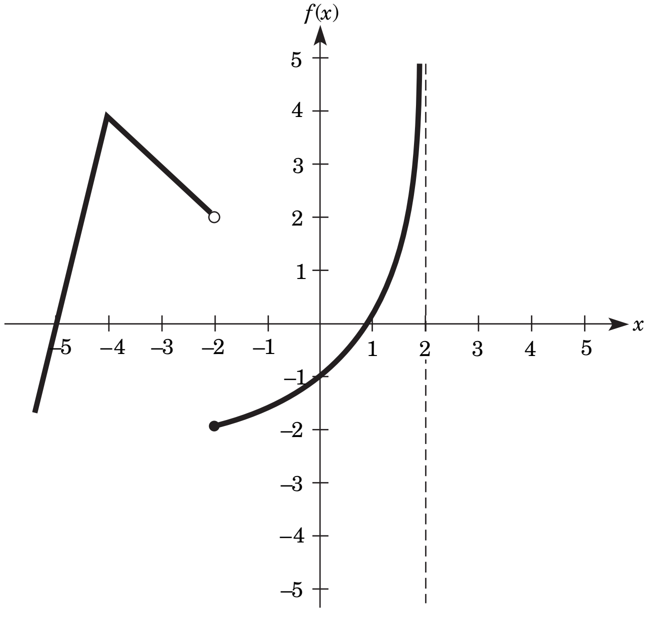


Figura 15.25

2. Utilice la gráfica de la función de la figura 15.26 para determinar los límites indicados.

a) $\lim_{x \to \infty} f(x)$ *b*) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ *c*) $\lim_{x \to -1^-} f(x)$

d) $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ *e*) $\lim_{x \to -1} f(x)$

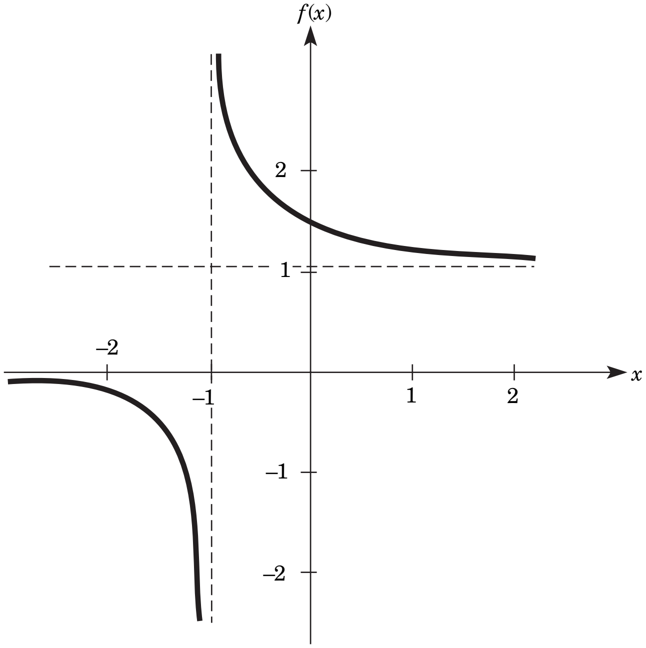


Figura 15.26

SECCIÓN 15.2

En los siguientes ejercicios, encuentre el límite indicado, si existe.

3. $\lim\limits_{x \to 3} \left[x^2 \left(4x - 2 + \dfrac{1}{x} \right) \right]$

4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^5 - 2x + 6}{x^4 - 6x}$

5. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{2x^2 + 7x - 15}{x + 5}$

6. $\lim\limits_{x \to -1} (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

7. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 3}{x + 3}$

8. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x^2 + x - 15}{x + 3}$

9. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x - 5}$

10. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-x^2 + 1}{x + 1}$

11. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 - x + 7}$

12. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x + 1}{x}$

13. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x - 5}{-x + 3}$

14. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1/x}{1/2x}$

En los siguientes ejercicios, determine si existen discontinuidades y, si es así, dónde se presentan.

15. $f(x) = x^7/(x^2 - 1)$

16. $f(x) = (x^2 - 9)/(16 - x^4)$

17. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

18. $f(x) = (x^2 - 9)/(64 - x^3)$

19. $f(x) = \begin{cases} 2/x^2 & \text{si } x \neq 6 \\ 10 & \text{si } x = 6 \end{cases}$

20. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{si } x > 5 \\ -x^2 & \text{si } x \leq 5 \end{cases}$

21. $f(x) = 25x^2/(24 - 8x)$
22. $f(x) = (3 - x)/(x^2 - 3x + 2)$
23. $f(x) = 1/(x^2 + 4)$
24. $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)/(x^2 + 6)$

SECCIÓN 15.3

Para cada una de las siguientes funciones, determine la razón de cambio promedio en el valor de y al desplazarse desde $x = 1$ hasta $x = 4$.

25. $y = f(x) = x^2 + 2x - 3$
26. $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
27. $y = f(x) = (x - 1)/(1 - x^2)$
28. $y = f(x) = -x^3$
29. $y = f(x) = 4x^2 - 2x + 5$
30. $y = f(x) = 30x^2 - 10x$
31. $y = f(x) = 4x^3 - 2x^2$
32. $y = f(x) = -5x^3 + 2x^2 - 8$
33. $y = f(x) = -x^4$
34. $y = f(x) = 1/x^2$
35. La población de una ciudad se ha incrementado anualmente de la manera en que se indica en la tabla siguiente.

Año	**Población, en millones**
1986	2.55
1987	2.70
1988	2.80
1989	2.88
1990	2.90
1991	3.01

¿A qué razón promedio la población cambió entre 1986 y 1991? ¿Y entre 1987 y 1990?

Para los siguientes ejercicios: *a*) determine la expresión general para el cociente de la diferencia, y *b*) utilice el cociente de la diferencia para calcular la pendiente de la secante que conecta los puntos en $x = 1$ y $x = 3$.

36. $f(x) = -5x^2 + 2x$
37. $f(x) = -3/x$
38. $f(x) = 10$
39. $f(x) = 2x + 7$
40. $f(x) = 3x^2 + x + 50$
41. $f(x) = x^2/3$
42. $f(x) = 20x^2 + 6x + 25$
43. $f(x) = -3x^2 + 4x + 1$
44. $f(x) = 3x^3$
45. $f(x) = -7x^3 + 5$
***46.** $f(x) = x^3 - 1$
***47.** $f(x) = 10/x$
***48.** $f(x) = ax + b$
***49.** $f(x) = ax^2 + bx + c$

SECCIÓN 15.4

Para las siguientes funciones: *a*) encuentre la derivada haciendo uso del método del límite, y *b*) determine cualquier valor de x para el cual la pendiente sea igual a 0.

50. $f(x) = -3x^2 + 6x$
51. $f(x) = -3/x$

52. $f(x) = cx^2$

53. $f(x) = -4x^2 - 2x$

***54.** $f(x) = x^4$

***55.** $f(x) = x^4 - 4x$

56. $f(x) = (x^3/3) - 9x - 10$

57. $f(x) = (x^3/3) - 16x + 45$

58. $f(x) = -10x^2 + 40x$

59. $f(x) = ax^2 + bx$

SECCIÓN 15.5

Para los siguientes ejercicios, encuentre $f'(x)$.

60. $f(x) = \frac{11}{15}$

61. $f(x) = 25x^2 + 15x$

62. $f(x) = 3\left(x + \frac{4}{x}\right)$

63. $f(x) = 15x^2/(1 - x^2)$

64. $f(x) = 24x^4 - 15x^3 + 100$

65. $f(x) = 5x^4/3 + 2x^3$

66. $f(x) = \sqrt{x^7}$

67. $f(x) = x^2/(4 - x^3)$

68. $f(x) = \dfrac{5}{x^4 - 8}$

69. $f(x) = \dfrac{x - 3x^2}{x^3 + 3x}$

70. $f(x) = \dfrac{x^2 - 10x}{x^3 + 5x^2 - x}$

71. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

72. $f(x) = x^2/\sqrt{x}$

73. $f(x) = (x - 7)(x^3 - 3x^2 + 2x)$

74. $f(x) = (10 - x^5)(x^6 - 2x^3 + x)$

75. $f(x) = (5 - x + 3x^2)(x^8 + 5x^3 - 10$

SECCIÓN 15.6

Para los siguientes ejercicios, encuentre $f'(x)$.

76. $f(x) = (x^3 + 4)^4$

77. $f(x) = (5x^2 - 10x)^5$

78. $f(x) = (4x^3 - 3x^2 - 2x)^6$

79. $f(x) = (8 - x^3)^{3/2}$

80. $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2 + 10}$

81. $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 6}$

82. $f(x) = 1/\sqrt{10 - x^3}$

83. $f(x) = 1/\sqrt[3]{x^2 - 5x}$

84. $f(x) = e^{x^3 - 2x}/2$

85. $f(x) = 10e^{x^2 - 2x}$

86. $f(x) = 5x^2 e^{x^2}$

87. $f(x) = 2xe^{-x}$

88. $f(x) = 2e^{3x}/x^2$

89. $f(x) = x^2/4e^x$

90. $f(x) = (e^{3x+1} - 5)^6$

91. $f(x) = (1 - e^{x^3})^5$

92. $f(x) = (a - be^{-x})^c$

93. $f(x) = x^5/e^{2x}$

94. $f(x) = \ln(ax^3 + bx^2 + cx + d)$

95. $f(x) = \ln bx^4$

96. $f(x) = \ln(4 - 2x)$

97. $f(x) = \ln 9x$

98. $f(x) = x^3 \ln x$

99. $f(x) = x^2 \ln(x - 5)$

100. $f(x) = [\ln(x^2 + 1)]^4$

101. $f(x) = (\ln x)^3$

***102.** $f(x) = [(x - 5)\sqrt{x + 4}]/(1 - x)$

***103.** $f(x) = [(x^2 + 3)/(4 - x)]^3$

***104.** $f(x) = [x\sqrt{x^2+7}]^{1/2}$

***105.** $f(x) = [(x^2)^3]^4/(x^3)^2$

106. $f(x) = (x^3 - 3x^2)/\ln(x-5)$

107. $f(x) = (x/\ln x)^5$

108. $f(x) = x^4 \ln(2x^3+4)$

109. $f(x) = \ln(5x^2 - 2x)$

Para los siguientes ejercicios, encuentre *dy*/*dx*.

110. $y = f(u) = u^3 - 4$ y $u = g(x) = x^3 + 3$

111. $y = f(u) = (2u+3)^2$ y $u = g(x) = x^2 - 3x$

112. $y = f(u) = u^{1/3}$ y $u = g(x) = x^2 - 5$

113. $y = f(u) = \dfrac{6u-1}{2-u^2}$ y $u = g(x) = x^2 + 2$

114. $y = f(u) = \sqrt{u^2 - 5u}$ y $u = g(x) = \dfrac{4}{x}$

SECCIÓN 15.7

115. Se lanza hacia arriba una pelota desde el techo de un edificio de 900 pies de alto. La pelota alcanzará una altura de *h* pies al cabo de *t* segundos, según se describe con la función

$$h = f(t) = -16t^2 + 80t + 900$$

a) ¿Cuál es la altura de la pelota después de 4 s?
b) ¿Cuál es la velocidad de la pelota al cabo de 4 s?
c) ¿Cuál es la aceleración de la pelota cuando $t = 0$? ¿Cuando $t = 4$?

116. Se lanza un objeto desde la tierra con una velocidad inicial de 512 pies por segundo. La función que describe la altura de la pelota es

$$h = f(t) = 512t - 16t^2$$

donde *h* se mide en pies y *t* es el tiempo medido en segundos desde que la pelota se lanza.
a) ¿Cuál es la velocidad de la pelota en $t = 2$ s?
b) ¿Cuándo retornará la pelota a la tierra?
c) ¿Cuál es la velocidad de la pelota en el instante en que toca la tierra?

117. **Crecimiento de la población** La población de una ciudad es estimada por la función

$$P = f(t) = 1.2e^{0.045t}$$

donde *P* es igual a la población (en millones) y *t* es igual al tiempo medido en años desde 1988.
a) ¿Cuál es la población esperada para 1995?
b) Determine la expresión para la razón de cambio instantánea en la población.
c) ¿A qué razón se espera que la población cambie en 1995?

118. **Devaluación de los bienes raíces** Después de un rápido incremento en los valores de las residencias durante mediados de la década de 1980, los valores de los bienes raíces en el noreste comenzaron a decaer en 1990. La función

$$V = f(t) = 140\,000e^{-0.002t}$$

es una función que estima el valor promedio V (en $) de una residencia unifamiliar en un municipio en particular, donde t es igual al tiempo medido en meses *desde* el primero de enero de 1990.

a) ¿Cuál es el valor promedio estimado para el primero de julio de 1990? ¿Y para el primero de enero de 1992?

b) Determine la expresión general para la razón de cambio instantánea en el valor promedio de una residencia unifamiliar en este municipio.

c) ¿A qué razón cambia el valor el primero de enero de 1991?

❑ EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. Determine:

a) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{500}{(2x - 1)/x}$

2. Determine si existen discontinuidades en f y, de ser así, dónde ocurren si

$$f(x) = \frac{x^2 - 25}{4x^2 - 2x + 5}$$

3. Determine dy/dx usando el método del límite si

$$f(x) = -3x^2 - 2x$$

4. Encuentre $f'(x)$ si

a) $f(x) = 6/\sqrt[5]{x^4}$

b) $f(x) = 7x^6 - 8x^5 + 3x^3 + 90$

c) $f(x) = (18 + x)/(x^3 + 8)^3$

d) $f(x) = x^2 e^{4x}$

e) $f(x) = \ln(5x^3 - x^2)$

f) $f(x) = (e^x \ln x)^4$

5. Si se tiene $f(x) = 15x^2 - 90x - 35$, determine las localizaciones de cualquiera de los puntos en la gráfica de $f(x)$, donde la pendiente es $= 0$.

6. Obtenga todas las derivadas de orden superior de f si

$$f(x) = \frac{5x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + 6x^2 + 10x$$

7. Encuentre dy/dx si

$$y = f(u) = u^4 + 3u \qquad \text{y} \qquad u = g(x) = x^2 + 10$$

APÉNDICE: Demostración de algunas reglas de la diferenciación

La primera demostración es "parcial" en cuanto demuestra la regla 2 donde n es un entero positivo. La demostración de esta regla para calcular los otros valores de n rebasa el ámbito de este libro.

Regla 2 modificada

Si $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$.

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n \\ f(x + \Delta x) &= (x + \Delta x)^n \\ f(x + \Delta x) - f(x) &= (x + \Delta x)^n - x^n \end{aligned}$$

Por el *teorema binomial*, para $n =$ un entero positivo,

$$(x + \Delta x)^n = x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + (\Delta x)^n$$

Sustituyendo en $f(x + \Delta x) - f(x)$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) - f(x) = x^n + nx^{n-1}(\Delta x) + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 \\ + \cdots + (\Delta x)^n - x^n \end{aligned}$$

Si se divide entre Δx y se toma el límite cuando $\Delta x \to 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[x^n + nx^{n-1}\,\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 \right. \\ &\qquad \left. + \cdots + (\Delta x)^n - x^n \right] \Big/ \Delta x \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}(\Delta x) \right. \\ &\qquad \left. + \cdots + (\Delta x)^{n-1} \right] \end{aligned}$$

o bien: $f'(x) = nx^{n-1}$

Regla 3

Si $f(x) = c \cdot g(x)$, donde c es una constante y g es una función diferenciable, entonces $f'(x) = c \cdot g'(x)$

DEMOSTRACIÓN

$$\begin{aligned} f(x) &= c \cdot g(x) \\ f(x + \Delta x) &= c \cdot g(x + \Delta x) \\ f(x + \Delta x) - f(x) &= c \cdot g(x + \Delta x) - c \cdot g(x) \\ &= c[g(x + \Delta x) - g(x)] \\ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{c[g(x + \Delta x) - g(x)]}{\Delta x} \\ &= c\,\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} c\,\frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

o bien: $$f'(x) = c \cdot g'(x)$$

Regla 4

Si $f(x) = u(x) \pm v(x)$, donde u y v son diferenciables, entonces $f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$. La demostración que se presenta es para la "suma" de $u(x)$ y $v(x)$.

DEMOSTRACIÓN

$$f(x) = u(x) + v(x)$$

$$f(x + \Delta x) = u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = [u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)] - [u(x) + v(x)]$$

$$\begin{aligned}\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{[u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)] - [u(x) + v(x)]}{\Delta x} \\ &= \left[\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right] \\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right] \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}\end{aligned}$$

o bien: $$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Regla 5

Si $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, donde u y v son diferenciables, entonces

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$$

DEMOSTRACIÓN

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$f(x + \Delta x) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x)$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x)$$

Sumando y restando la cantidad $u(x + \Delta x) \cdot v(x)$ al miembro derecho se obtiene

$$\begin{aligned}f(x + \Delta x) - f(x) &= u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x + \Delta x) \cdot v(x) \\ &\quad + u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x)v(x) \\ &= u(x + \Delta x)[v(x + \Delta x) - v(x)] \\ &\quad + v(x)[u(x + \Delta x) - u(x)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{u(x + \Delta x)[v(x + \Delta x) - v(x)] + v(x)[u(x + \Delta x) - u(x)]}{\Delta x} \\ &= u(x + \Delta x)\frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x} + v(x)\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}\end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} u(x + \Delta x)\frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} v(x) \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} u(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x + \Delta x) - v(x)}{\Delta x}$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} v(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

o

$$\begin{aligned} f'(x) &= u(x) \cdot v'(x) + v(x) \cdot u'(x) \\ &= v'(x) \cdot u(x) + u'(x) \cdot v(x) \end{aligned}$$

Regla 6

Si $f(x) = u(x)/v(x)$, donde u y v son diferenciables, y $v(x) \neq 0$, entonces

$$f'(x) = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

DEMOSTRACIÓN

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f(x + \Delta x) = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)}$$

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}$$

lo que puede reescribirse como

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)}$$

Sumando y restando la cantidad $[u(x)v(x)]/[v(x + \Delta x)v(x)]$ se obtiene

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) - f(x) &= \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} \\ &\quad + \frac{u(x) \cdot v(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} - \frac{u(x) \cdot v(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} \end{aligned}$$

Al reacomodar términos se llega a

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) - f(x) &= \frac{u(x + \Delta x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v(x) - v(x + \Delta x) \cdot u(x) + u(x) \cdot v(x)}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} \\ &= \frac{v(x)[u(x + \Delta x) - u(x)] - u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)]}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} \end{aligned}$$

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{v(x)[u(x + \Delta x) - u(x)] - u(x)[v(x + \Delta x) - v(x)]}{v(x + \Delta x) \cdot v(x)} \Bigg/ \Delta x$$

$$= \frac{v(x)\,\dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} - u(x)\,\dfrac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)\,\dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} - u(x)\,\dfrac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)\cdot v(x)}$$

$$= \frac{\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0} v(x)\cdot \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x\to 0} u(x)\cdot \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}}{\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x)\cdot \lim_{\Delta x\to 0} v(x)}$$

o bien:

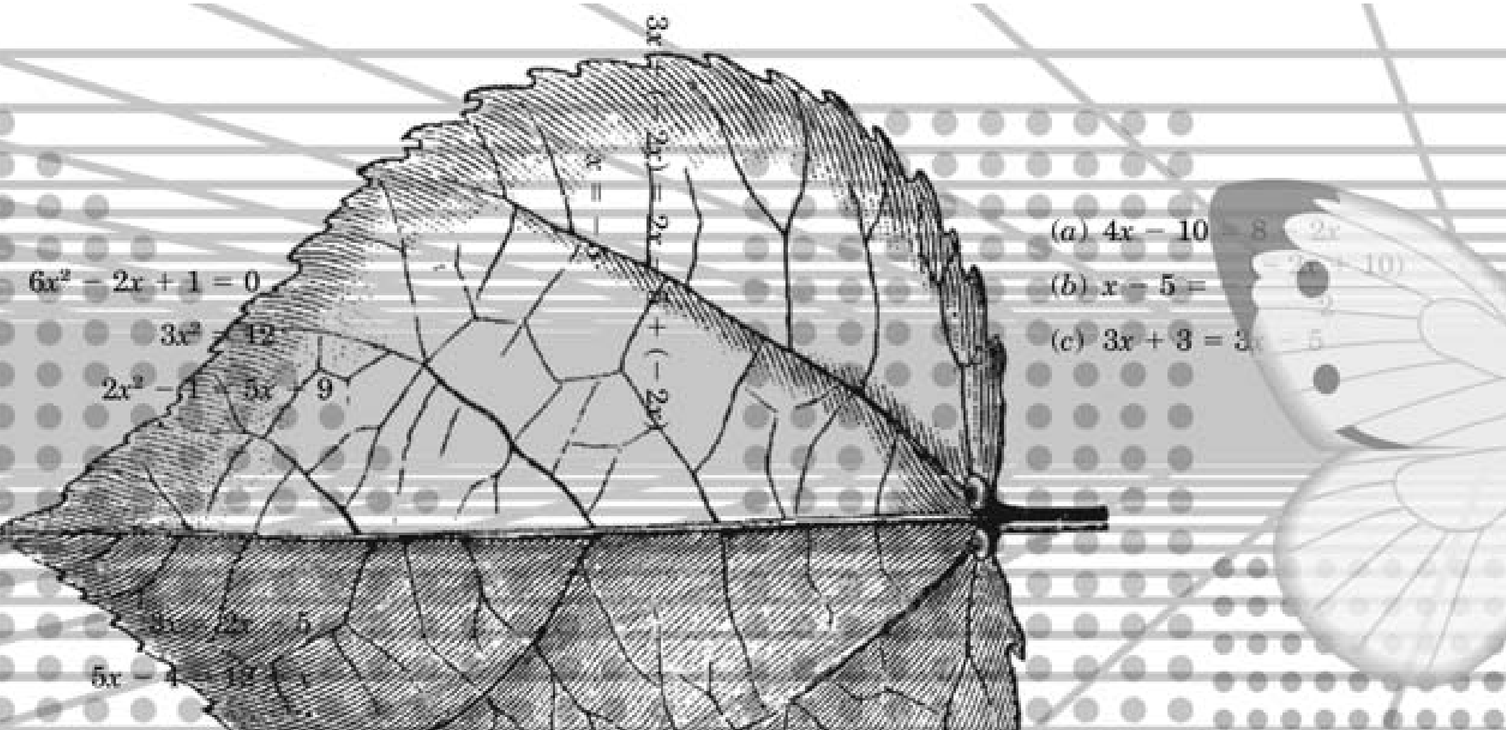
$$f'(x) = \frac{v(x)\cdot u\ (x) - u(x)\cdot v\ (x)}{v(x)\cdot v(x)}$$

$$= \frac{v(x)\cdot u'(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

❑

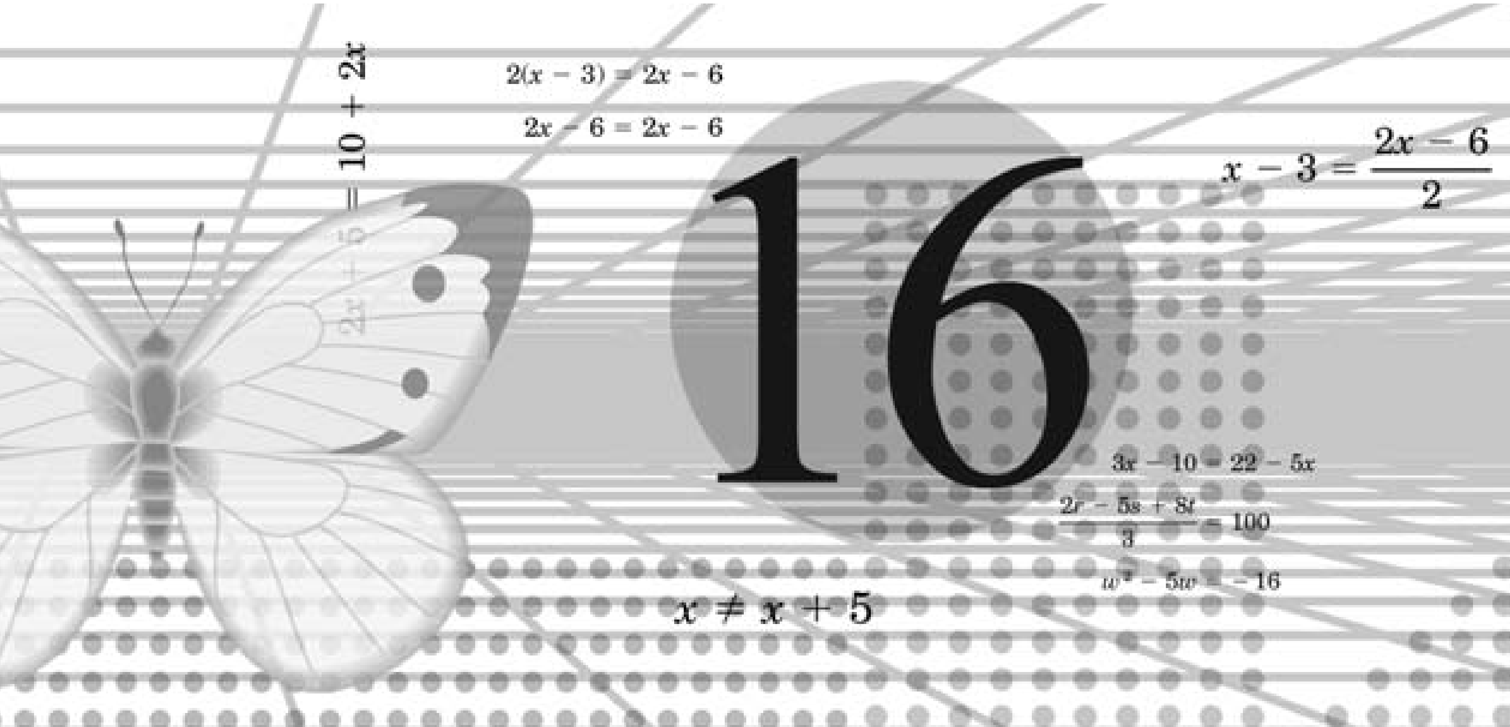
CAPÍTULO 16

Optimización: metodología



OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Mejorar el conocimiento del significado de la primera y segunda derivadas.
- Reforzar la compresión de la naturaleza de la concavidad.
- Ofrecer una metodología para determinar las condiciones de optimización de las funciones matemáticas.
- Dar ejemplos de los métodos para el trazado de la forma general de las funciones matemáticas.
- Dar ejemplos de las diversas aplicaciones de los procedimientos de optimización.



ESCENARIO DE MOTIVACIÓN

El cálculo diferencial proporciona una gran idea respecto del comportamiento de las funciones matemáticas. Es particularmente útil al estimar la representación gráfica de una función en dos dimensiones. Esto contrasta con los métodos de "fuerza bruta" del trazado de funciones que se analizaron en el capítulo 4. Se desea ilustrar esta particularidad del cálculo diferencial al trazar la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{8x^3}{3} + 8x^2$$

(ejemplo 17).

En el presente capítulo se ampliarán las herramientas descritas en el capítulo 15. Se mejorará la comprensión de la primera y la segunda derivadas. Se verá cómo utilizarlas para describir el comportamiento de las funciones matemáticas. Uno de los principales objetivos del capítulo consiste en desarrollar un método con el cual determinar dónde una función alcanza sus valores máximos o mínimos. Se demostrará cómo estos procedimientos de **optimización** basados en el cálculo facilitan el trazado de gráficas de las funciones.

16.1 Derivadas: interpretaciones adicionales

En esta sección se seguirá ampliando el conocimiento de las derivadas.

La primera derivada

Según se mencionó en el capítulo anterior, la primera derivada representa la razón de cambio instantánea en $f(x)$ respecto de un cambio en x.

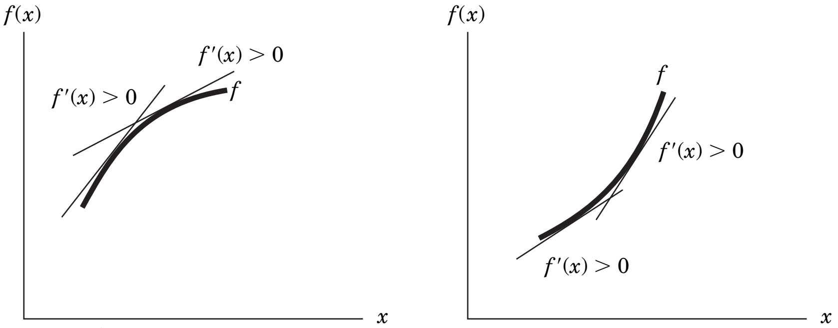
Definición: Función creciente

Se dice que la función f es una ***función creciente*** en un intervalo I si para cualquier x_1 y x_2 dentro del intervalo, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) < f(x_2)$.*

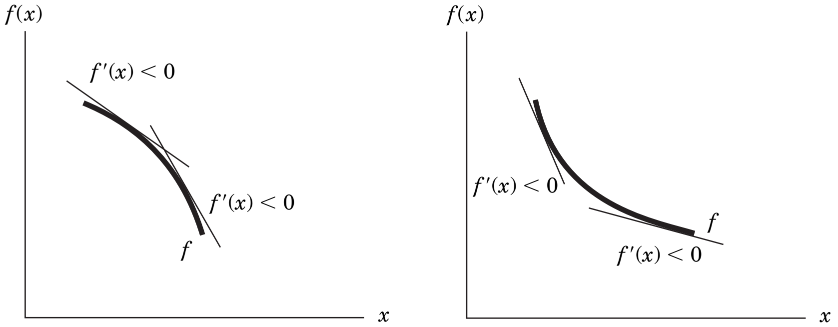
Las funciones crecientes también pueden identificarse por las condiciones de la pendiente. ***Si la primera derivada de f es positiva en todo un intervalo, entonces la pendiente será positiva y f será una función creciente en el intervalo.*** Es decir, en cualquier punto del intervalo, un ligero incremento en el valor de x se acompañará de un aumento en el valor de $f(x)$. Las curvas en las figuras 16.1*a* y 16.1*b* son las gráficas de funciones crecientes de x debido a que la pendiente de la tangente es positiva en cualquier punto.

---

* Técnicamente hablando, éstas son definiciones para funciones *estrictamente* crecientes (decrecientes).



a) Función creciente *b*) Función creciente



c) Función decreciente *d*) Función decreciente

Figura 16.1 Relación entre $f'(x)$ y las funciones crecientes/decrecientes.

Definición: Función decreciente

Se dice que la función f es una ***función decreciente*** en un intervalo I si para cualquier x_1 y x_2 dentro del intervalo, $x_1 < x_2$ implica que $f(x_1) > f(x_2)$.*

Como en el caso de las funciones crecientes, las decrecientes son identificables por las condiciones de la pendiente de la tangente. ***Si la primera derivada de f es negativa a lo largo de todo un intervalo, entonces la pendiente será negativa y f será una función decreciente en el intervalo.*** Es decir, en cualquier punto del intervalo, un aumento ligero en el valor de x se acompañará de una disminución en el valor de $f(x)$. Las curvas en las figuras 16.1*c* y *d* son las gráficas de las funciones decrecientes de x.

NOTA Si una función está aumentando (disminuyendo) en un intervalo, la función está aumentando (disminuyendo) en todos los puntos dentro del intervalo.

---

* Técnicamente hablando, éstas son definiciones para funciones *estrictamente* crecientes (decrecientes).

Ejemplo 1 Dado $f(x) = 5x^2 - 20x + 3$, determine los intervalos en que f puede describirse como: *a*) una función creciente; *b*) una función decreciente y *c*) ni creciente ni decreciente.

SOLUCIÓN

Para determinar si f es creciente o decreciente, primero habrá que calcular f':

$$f'(x) = 10x - 20$$

f será una función creciente cuando $f'(x) > 0$, o cuando

$$10x - 20 > 0$$

o $$10x > 20$$

o bien $$x > 2$$

f será una función decreciente cuando $f'(x) < 0$, o cuando

$$10x - 20 < 0$$

o $$10x < 20$$

o bien $$x < 2$$

f no será creciente ni decreciente cuando $f'(x) = 0$, o cuando

$$10x - 20 = 0$$

o $$10x = 20$$

o bien $$x = 2$$

En resumen, f es una función decreciente cuando $x < 2$, no es ni creciente ni decreciente cuando $x = 2$ y es una función creciente cuando $x > 2$. Trace la gráfica de f para comprobar si estas conclusiones parecen razonables. ❑

La segunda derivada $f''(x)$ es una medida de la razón de cambio instantánea en $f'(x)$ respecto de un cambio en x. Dicho de otra manera, indica la tasa a la cual la pendiente de la función está cambiando en relación con el cambio en x, sin importar si la pendiente de la función esté aumentando o disminuyendo en un instante determinado.

Si $f''(x)$ es negativa en un intervalo I de f, la primera derivada estará disminuyendo en I. En una gráfica, la pendiente está disminuyendo de valor en el intervalo. Si $f''(x)$ es positiva en un intervalo I de f, la primera derivada estará aumentando en I. Desde el punto de vista gráfico, la pendiente estará creciendo en ese intervalo.

Examínese detenidamente la figura 16.2. Construya mentalmente líneas tangentes o ponga un borde recto en la curva para representar la línea tangente en varios puntos. A lo largo de la curva de A a B la pendiente es ligeramente negativa cerca de A y se torna más negativa al acercarnos a B. En efecto, la pendiente de una línea tangente pasa de un valor de 0 en A a su valor más negativo en el punto B. Así pues, la pendiente estará disminuyendo

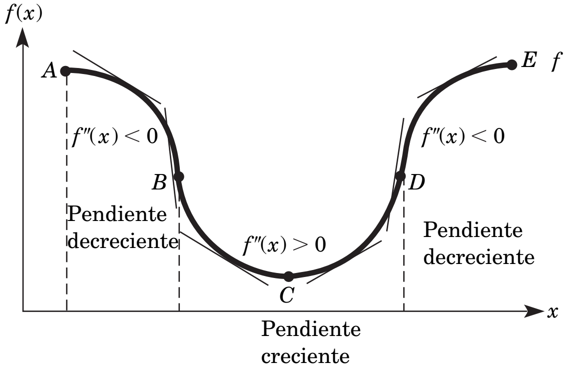


Figura 16.2 Relación entre $f''(x)$ y la pendiente creciente/decreciente $[f'(x)]$.

de valor en el intervalo comprendido entre A y B, y cabe esperar que $f''(x)$ sea negativa en este intervalo [es decir, $f''(x) < 0$].

Una vez alcanzado su valor más negativo en el punto B, la pendiente sigue siendo negativa en el intervalo entre B y C, pero va haciéndose cada vez menos negativa, hasta que finalmente es 0 en C. Si la pendiente toma valores que están tornándose menos negativos (por ejemplo, $-5, -4, -3, -2, -1, 0$), estará *aumentando* de valor. Por lo tanto, cabe suponer que $f''(x)$ sea positiva en este intervalo [es decir, que $f''(x) > 0$].

Entre C y D la pendiente se vuelve cada vez más positiva, tomando su máximo valor positivo en D. La pendiente está aumentando de valor en este intervalo, por lo cual cabría esperar que $f''(x)$ sea positiva.

Entre D y E la pendiente sigue siendo positiva, pero cada vez se vuelve menos positiva, hasta que finalmente es 0 en E. Si la pendiente está adoptando valores que son positivos pero cada vez más pequeños (por ejemplo, 5, 4, 3, 2, 1, 0), cabe esperar que $f''(x)$ sea negativa en el intervalo.

En la figura 16.3 se sintetizan las condiciones de la primera y la segunda derivadas para las cuatro regiones de la función. Tales relaciones pueden ser difíciles de entender. Estudie detenidamente esas figuras y vuelva a realizar el razonamiento lógico si es necesario.

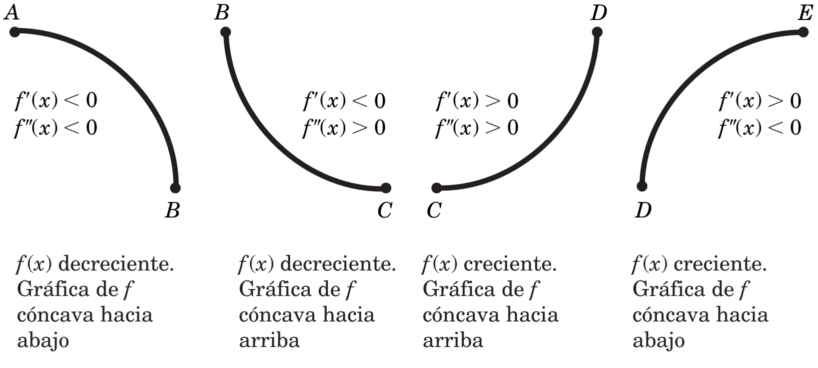


Figura 16.3 Características conjuntas para $f'(x)$ y $f''(x)$.

Concavidad y puntos de inflexión

En el capítulo 6 se hizo una breve introducción del concepto de concavidad. A continuación se da una definición más formal de concavidad.

Definición: Concavidad

La gráfica de una función f es ***cóncava hacia arriba (hacia abajo)*** en un intervalo si f' aumenta (disminuye) en todo ese intervalo.

La definición sugiere que la gráfica de una función es cóncava hacia arriba en un intervalo si la pendiente *aumenta* a lo largo de todo ese intervalo. Para cualquier punto dentro del intervalo, *la curva que representa a f se hallará arriba de la línea tangente trazada en el punto*. De manera análoga, la gráfica de una función es cóncava hacia abajo en un intervalo si la pendiente *decrece* a lo largo de todo ese intervalo. Para cualquier punto dentro del intervalo, *la curva que representa a f se encontrará debajo de la línea tangente trazada en el punto*.

En la figura 16.4, la gráfica de f es *cóncava hacia abajo* entre A y B, y es *cóncava hacia arriba* entre B y C. Nótese que entre A y B la curva se encuentra debajo de sus líneas tangentes y que entre B y C la curva está arriba de ellas. El punto B es donde la concavidad deja de ser cóncava hacia abajo y empieza a ser cóncava hacia arriba. El punto donde la concavidad cambia se denomina ***punto de inflexión***. Por consiguiente, el punto B es un punto de inflexión.

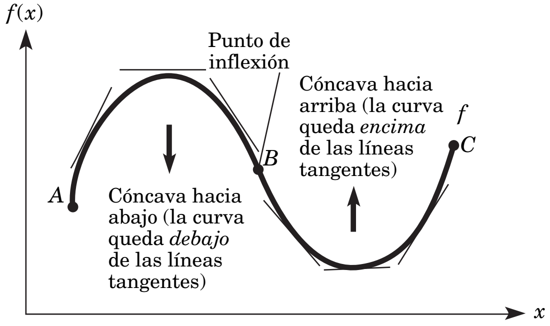


Figura 16.4 Representación de las condiciones de concavidad.

Entre la segunda derivada y la concavidad de la gráfica de una función se dan relaciones que serán de gran valor más adelante en este capítulo. He aquí las relaciones:

Relaciones entre la segunda derivada y la concavidad

I *Si $f''(x) < 0$ en un intervalo $a \leq x \leq b$, la gráfica de f será cóncava hacia abajo en ese intervalo. Para cualquier punto $x = c$ dentro del intervalo, se dice que f es cóncava hacia abajo en $[c, f(c)]$.*

> **II** *Si $f''(x) > 0$ en cualquier intervalo $a \leq x \leq b$, la gráfica de f será cóncava hacia arriba en ese intervalo. Para cualquier punto $x = c$ dentro del intervalo, se dice que f es cóncava hacia arriba en $[c, f(c)]$.*
>
> **III** *Si $f''(x) = 0$ en cualquier punto $x = c$ en el dominio de f, no puede sacarse conclusión alguna sobre la concavidad en $[c, f(c)]$.*

¡Hay que tener mucho cuidado para no invertir el fundamento lógico de las relaciones que acabamos de señalar! En virtud de la relación III *no pueden* hacerse afirmaciones sobre el signo de la segunda derivada si se conoce la concavidad de la gráfica de una función. Por ejemplo, *no se puede afirmar que si la gráfica de una función es cóncava hacia abajo cuando $x = a$, $f''(a) < 0$.*

Ejemplo 2

Para determinar la concavidad de la gráfica de la función cuadrática generalizada $f(x) = ax^2 + bx + c$, se hallarán la primera y la segunda derivadas.

$$f'(x) = 2ax + b \quad \text{y} \quad f''(x) = 2a$$

Si $a > 0$, entonces $f''(x) = 2a > 0$. De acuerdo con la relación II, la gráfica de f es cóncava hacia arriba siempre que $a > 0$. Si $a < 0$, entonces $f''(x) = 2a < 0$. Según la relación I, la gráfica de f es cóncava hacia abajo siempre que $a < 0$. Esto concuerda perfectamente con lo dicho en el capítulo 6, donde se llegó a la conclusión de que si $a > 0$, la gráfica de f es una parábola cóncava hacia arriba. Y si $a < 0$, f se grafica como una parábola que es cóncava hacia abajo.

Ejemplo 3

En $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$, determínese la concavidad de la gráfica de f en $x = -2$ y $x = 3$.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

y

$$f''(x) = 6x - 4$$

La evaluación de $f''(x)$ cuando $x = -2$ da

$$f''(-2) = 6(-2) - 4 = -16$$

Puesto que $f''(-2) < 0$, la gráfica de f será cóncava hacia abajo cuando $x = -2$. Para determinar la concavidad si $x = 3$, se obtiene

$$f''(3) = 6(3) - 4 = 14$$

Dado que $f''(3) > 0$, la gráfica de f será cóncava hacia arriba cuando $x = 3$.

Ejemplo 4

Determine la concavidad de la gráfica de $f(x) = x^4$ en $x = 0$.

SOLUCIÓN

$$f'(x) = 4x^3$$

$$f''(x) = 12x^2$$

$$f''(0) = 12(0)^2 = 0$$

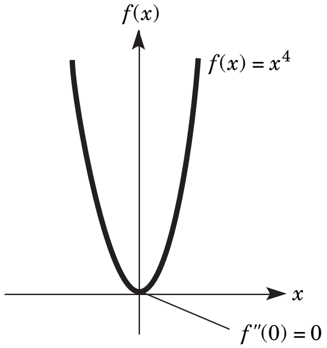


Figura 16.5 Ninguna conclusión sobre la concavidad.

De acuerdo con la relación III, no es posible hacer afirmación alguna sobre la concavidad cuando $x = 0$. Sin embargo, al sustituir un número suficiente de valores de x en f y al graficar esos pares ordenados, se advierte que f presenta la forma que aparece en la figura 16.5. Y a partir de esta figura es obvio que la gráfica es cóncava hacia arriba si $x = 0$. ❑

Prueba para localizar puntos de inflexión

I *Calcule todos los puntos donde* $f''(a) = 0$.
II *Si* $f''(x)$ *cambia de signo cuando pasa por* $x = a$, *hay un punto de inflexión en* $x = a$.

Una condición necesaria (algo que debe ser verdadero) para que exista un punto de inflexión en $x = a$ *es que* $f''(a) = 0$. Es decir, al calcular todos los valores de x para los cuales $f''(x) = 0$, se encontrarán las *posiciones candidatas* de los puntos de inflexión.* La *condición* $f''(a) = 0$ no garantiza que exista un punto de inflexión cuando $x = a$. (Véase el ejemplo 4.) El paso II confirma si una posición candidata es un punto de inflexión.

La esencia de la prueba anterior consiste en seleccionar puntos situados ligeramente a la izquierda y a la derecha de $x = a$ y en determinar si la concavidad es distinta en ambos lados. Si $f''(x)$ es positiva a la izquierda y negativa a la derecha o viceversa, hay un *cambio* en la concavidad cuando pasa a través de $x = a$. Así, existe un punto de inflexión cuando $x = a$.

Ejemplo 5

En el ejemplo 4, $f''(0) = 0$ implica que $x = 0$ es una posición candidata para un punto de inflexión (**paso I**).

❑ **Paso II.** Para verificar que *no* existe un punto de inflexión si $x = 0$ para $f(x) = x^4$, se evalúa $f''(x)$ a la izquierda en $x = -0.1$ y a la derecha cuando $x = +0.1$.

---

* Otros candidatos para puntos de inflexión ocurren donde $f''(x)$ es discontinua. Pero en este libro no encontraremos esos candidatos.

$$\begin{aligned} f''(-0.1) &= 12(-0.1)^2 \\ &= 0.12 > 0 \end{aligned}$$

y
$$\begin{aligned} f''(+0.1) &= 12(+0.1)^2 \\ &= 0.12 > 0 \end{aligned}$$

Puesto que la segunda derivada tiene el mismo signo a la izquierda y a la derecha de $x = 0$, entonces no hay punto de inflexión en $x = 0$.

Ejemplo 6 Para determinar la localización o localizaciones de todos los puntos de inflexión en la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{2} + x^2 + 10$$

encontramos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4x^3}{12} - \frac{3x^2}{2} + 2x \\ &= \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \end{aligned}$$

y
$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{3x^2}{3} - \frac{6x}{2} + 2 \\ &= x^2 - 3x + 2 \end{aligned}$$

❑ **Paso I.** $f''(x)$ se iguala a 0 a fin de calcular las posiciones candidatas:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

o bien
$$(x - 1)(x - 2) = 0$$

Por lo tanto, $f''(x) = 0$ cuando $x = 1$ y $x = 2$.

❑ **Paso II.** Para $x = 1$, $f''(x)$ se evalúa a la izquierda y a la derecha de $x = 1$ cuando $x = 0.9$ y $x = 1.1$.

$$\begin{aligned} f''(0.9) &= (0.9)^2 - 3(0.9) + 2 \\ &= 0.81 - 2.7 + 2 \\ &= 0.11 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(1.1) &= (1.1)^2 - 3(1.1) + 2 \\ &= 1.21 - 3.3 + 2 \\ &= -0.09 < 0 \end{aligned}$$

Puesto que el signo de $f''(x)$ cambia, existe un punto de inflexión en $x = 1$. Cuando los valores de $x = 1.9$ y $x = 2.1$ se escogen para evaluar $f''(x)$ a la izquierda y a la derecha de $x = 2$.

$$f''(1.9) = -0.09 < 0$$

$$f''(2.1) = 0.11 > 0$$

Puesto que $f''(x)$ cambia de signo, se llega a la conclusión de que un punto de inflexión existe cuando $x = 2$. ❑

Ejercicio de práctica

Determine las posiciones de cualquier punto de inflexión en la gráfica de $f(x) = x^3/3 + x^2 - 8x$. *Respuesta*: Punto de inflexión en $x = -1$.

Ejemplo 7 **(Seguimiento de una epidemia: reinspección)** El escenario de motivación del capítulo 15 analizó la propagación de una epidemia de gripe. La función

$$n = f(t) = -0.3t^3 + 10t^2 + 300t + 250$$

se empleó para estimar el número de personas afectadas por la gripe, n, como una función del número de días desde la detección inicial de la epidemia por oficiales del departamento de salud, t. Determine cualquier punto de inflexión e interprete su significado en esta aplicación.

SOLUCIÓN

❑ **Paso I.**

$$f'(t) = -0.9t^2 + 20t + 300$$

$$f''(t) = -1.8t + 20$$

Si se establece $f''(t) = 0$ se obtiene un candidato para un punto de inflexión en $t = 11.11$.

❑ **Paso II.** Debido a que $f''(11) = 0.2$ y $f''(12) = -1.6$, el signo de $f''(t)$ cambia cuando pasa a través de la posición del candidato. Por ello existe para la función.

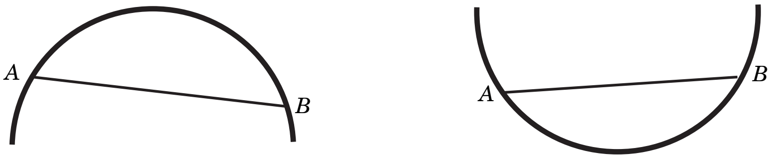
❑ **Interpretación.** El punto de inflexión puede interpretarse como la representación del punto en el tiempo cuando decrece la tasa a la que se contagian las personas con gripe. Antes de $t = 11.11$, se contagian personas adicionales *con una tasa creciente*. Después de $t = 11.11$, se contagian personas adicionales, pero *con una tasa decreciente*. ❑

Concavidad desde una perspectiva diferente

Se utilizarán las expresiones *cóncava hacia arriba* y *cóncava hacia abajo* para describir el atributo de curvatura al que se da el nombre de concavidad. Pueden emplearse otros términos para describir esta cualidad. Por ejemplo, algunos escritores distinguen entre ***funciones estrictamente cóncavas*** y ***funciones estrictamente convexas***.

Definición: Función estrictamente cóncava (convexa)

Una función estrictamente cóncava (convexa) posee la siguiente propiedad gráfica: si dos puntos cualesquiera A y B se encuentran en la curva que representa la función, si los dos puntos están unidos por una recta, todo el segmento AB se hallará debajo (arriba) de la curva excepto en los puntos A y B.



Estrictamente cóncava

Estrictamente convexa

Cóncava

Convexa

Figura 16.6 Funciones cóncavas y convexas.

Esta definición puede ampliarse un poco para definir una ***función cóncava*** y una ***función convexa*** [en contraste con las funciones *estrictamente* cóncavas (convexas)]. Si se deja que el segmento de *AB* se encuentre debajo (arriba) de la curva, *o en la curva*, a la función se le llama cóncava (convexa). La figura 16.6 ilustra estas definiciones.

Sección 16.1 Ejercicios de seguimiento

En cada una de las siguientes funciones: *a*) determine si *f* está aumentando o disminuyendo cuando $x = 1$. Determine los valores de *x* para los cuales *f* es: *b*) una función creciente, *c*) una función decreciente y *d*) ni creciente ni decreciente.

1. $f(x) = 20 - 4x$
2. $f(x) = 15x + 16$
3. $f(x) = x^2 - 3x + 20$
4. $f(x) = 3x^2 + 12x + 9$
5. $f(x) = x^3/3 + x^2/2$
6. $f(x) = x^3/3 + x^2/2 - 6x$
7. $f(x) = x^4 + 2x^2$
8. $f(x) = 3x^5$
9. $f(x) = (x + 3)^{3/2}$
10. $f(x) = 3x^2/(x^2 - 1)$
11. $f(x) = -x^2 + 4x + 15$
12. $f(x) = -2x^2 + 20x + 3$
13. $f(x) = 5x^2 + 40x + 50$
14. $f(x) = 3x^2/2 - 9x + 5$
15. $f(x) = (x - 4)^{3/2}$
16. $f(x) = (x - 5)^4$
17. $f(x) = (2x - 10)^5$
18. $f(x) = (8x + 24)^8$
19. $f(x) = \dfrac{(4x + 20)^9}{4}$
20. $f(x) = (2x + 18)^7$

En cada una de las siguientes funciones, use $f''(x)$ para determinar las condiciones de concavidad cuando $x = -2$ y $x = +1$.

21. $f(x) = -3x^2 + 2x - 3$
22. $f(x) = x^3 + 12x + 1$
23. $f(x) = x^2 - 4x + 9$
24. $f(x) = -x^2 + 5x$
25. $f(x) = \sqrt{x^2 + 10}$
26. $f(x) = (x + 1)^3$

27. $f(x) = x^2 + 3x^3$
28. $f(x) = x^2/(1 + x)$
29. $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 10x$
30. $f(x) = x^4 + 2x^3 - 10x^2$
31. $f(x) = x^3/3 - x^2/2 + 10x$
32. $f(x) = 5x^3/3 + 3x^2/2 - 5x + 25$
33. $f(x) = (x^2 - 1)^3$
34. $f(x) = (20 - 3x)^5$
35. $f(x) = (3x^2 + 2)^4$
36. $f(x) = (2x - 8)^4$
37. $f(x) = \sqrt{4x - 10}$
38. $f(x) = x^3/(1 - x)$
39. $f(x) = e^x$
40. $f(x) = e^{-x}$
41. $f(x) = \ln x$
42. $f(x) = -\ln x$

Si $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$, determine los valores de x para los cuales f es: *a*) creciente, *b*) decreciente, *c*) cóncava hacia arriba y *d*) cóncava hacia abajo, si:

***43.** $f(x) = ax + b$
***44.** $f(x) = b - ax$
***45.** $f(x) = ax^2 + bx + c$
***46.** $f(x) = -ax^2 - bx - c$
***47.** $f(x) = ax^3$
***48.** $f(x) = ax^4$

En cada una de las siguientes funciones identifique las localizaciones de los puntos de inflexión que haya.

49. $f(x) = x^3 - 9x^2$
50. $f(x) = -x^3 + 24x^2$
51. $f(x) = x^4/12 - x^3/3 - 7.5x^2$
52. $f(x) = (3 - x)^4$
53. $f(x) = (x - 5)^3$
54. $f(x) = x^5/20 - x^3/6$
55. $f(x) = -10x^4 + 100$
56. $f(x) = (x - 1)/x$
57. $f(x) = x^3 + 6x^2 - 18$
58. $f(x) = -x^3 - 30x^2$
59. $f(x) = x^4/12 + x^3/6 - 3x^2$
60. $f(x) = x^4/12 + 7x^3/6 + 5x^2$
61. $f(x) = x^4/4 - 9x^2/2 + 100$
62. $f(x) = x^6/30 - 4x^2/2$
63. $f(x) = (3x - 12)^{5/2}$
64. $f(x) = (2x - 8)^{7/2}$
65. $f(x) = (x - 5)^5$
66. $f(x) = (x + 2)^4$
67. $f(x) = e^x$
68. $f(x) = e^{-x}$
69. $f(x) = \ln x$
70. $f(x) = -\ln x$

71. En la función de la figura 16.7, indique los valores de x para los cuales f es: *a*) creciente, *b*) decreciente y *c*) ni creciente ni decreciente.

72. En la función que aparece en la figura 16.7, indique los valores de x para los cuales f es: *a*) cóncava hacia arriba, *b*) cóncava hacia abajo, *c*) de concavidad cambiante, *d*) cóncava y *e*) convexa.

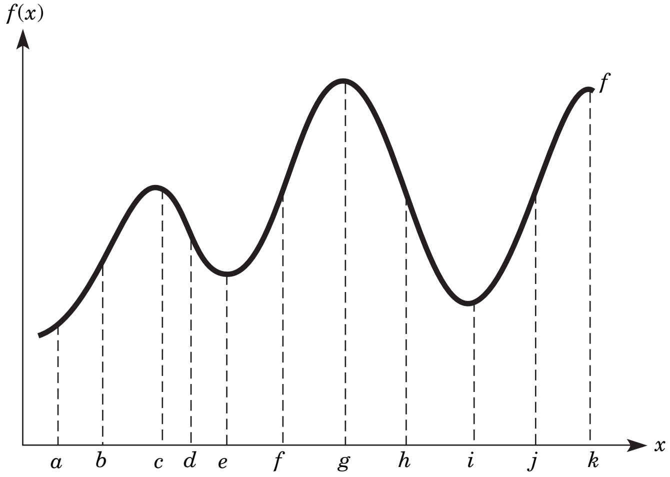


Figura 16.7

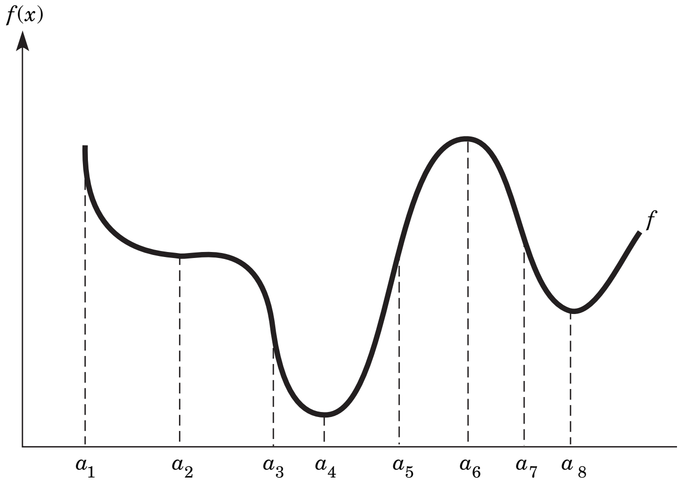


Figura 16.8

73. Dada la función mostrada en la figura 16.7, indique los valores de x para los cuales f está: *a*) incrementándose a una tasa creciente, *b*) incrementándose a una tasa decreciente, *c*) disminuyendo a una tasa decreciente, y *d*) disminuyendo a una tasa creciente.

74. En la función de la figura 16.8, indique los valores de x para los cuales f es: *a*) creciente, *b*) decreciente y *c*) ni creciente ni decreciente.

75. En la función que aparece en la figura 16.8, indique los valores de x para los cuales f es: *a*) cóncava hacia arriba, *b*) cóncava hacia abajo, *c*) de concavidad cambiante, *d*) cóncava y *e*) convexa.

76. Dada la función mostrada en la figura 16.8, indique los valores de x para los cuales f está: *a*) incrementándose a una tasa creciente, *b*) incrementándose a una tasa decreciente, *c*) disminuyendo a una tasa decreciente y *d*) disminuyendo a una tasa creciente.

16.2 Identificación de los máximos y mínimos

En la presente sección se estudiarán las funciones con el propósito de localizar los valores máximo y mínimo.

Extremos relativos

Definición: Máximo relativo

Si f se define en un intervalo (b, c) que contenga $x = a$, se dice que f alcanza un ***máximo relativo (local)*** en $x = a$, si $f(a) \geq f(x)$ para todas las x dentro del intervalo (b, c).

Definición: Mínimo relativo

Si f se define en un intervalo (b, c) que contenga $x = a$, se dice que f alcanza un ***mínimo relativo (local)*** en $x = a$, si $f(a) \leq f(x)$ para todas las x dentro del intervalo (b, c).

Ambas definiciones se centran en el valor de $f(x)$ dentro de un intervalo. Un máximo relativo se refiere a un punto donde el valor de $f(x)$ es mayor que los valores para los puntos

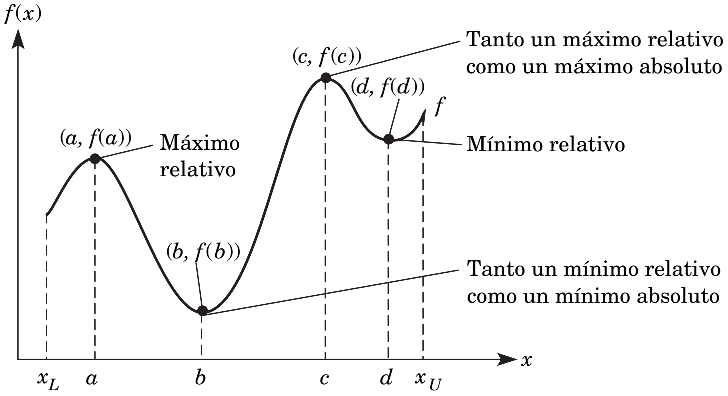


Figura 16.9 Extremos relativos.

cercanos. Un mínimo relativo designa un punto donde el valor de $f(x)$ es menor que los valores para los puntos cercanos. Si se emplean estas definiciones y se examina detenidamente la figura 16.9, se verá que f posee ***máximos relativos*** en $x = a$ y $x = c$. De manera análoga, f posee ***mínimos relativos*** en $x = b$ y $x = d$. En forma conjunta, se da el nombre de ***extremos relativos*** a unos y otros valores.

Definición: Máximo absoluto

Se dice que una función f alcanza un ***máximo absoluto*** en $x = a$ si $f(a) > f(x)$ para cualquier x en el dominio de f.

Definición: Mínimo absoluto

Se dice que una función f alcanza un ***mínimo absoluto*** en $x = a$ si $f(a) < f(x)$ para cualquier x en el dominio de f.

Si se consulta de nuevo la figura 16.9, $f(x)$ llega a un máximo absoluto en $x = c$. Y alcanza el mínimo absoluto cuando $x = b$. Conviene señalar que un *punto en la gráfica de una función puede ser a la vez un máximo (mínimo) relativo y un máximo (mínimo) absoluto*.

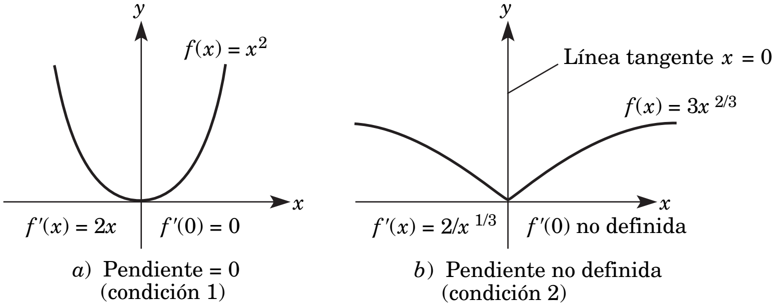
Puntos críticos

Interesan de manera especial los máximos y mínimos relativos. Será muy importante saber identificarlos y distinguirlos.

Condiciones necesarias para los máximos (mínimos) relativos

Dada la función f, las condiciones necesarias para la existencia de un máximo o mínimo relativo en $x = a$ (con a contenido en el dominio de f) son:

I *$f'(a) = 0$, o*
II *$f'(a)$ no está definida.*



a) Pendiente = 0 (condición 1)

b) Pendiente no definida (condición 2)

Figura 16.10 Puntos críticos.

Los puntos que satisfacen cualquiera de las dos condiciones de la definición anterior son *candidatos* para los máximos (mínimos) relativos. A esos puntos suele llamárseles ***puntos críticos***. Los puntos que cumplen con la condición 1 son los de la gráfica de f, donde la pendiente es 0. Los puntos que cumplen con la condición 2 se ejemplifican por discontinuidades en f o por puntos donde no puede evaluarse $f'(x)$. Se da el nombre de ***valores críticos*** a los valores de x que están dentro del dominio de f y que satisfacen la condición 1 o 2. Estos valores se denotan con (x^*) a fin de distinguirlos de otros valores de x. Si se tiene un valor crítico de f, el punto crítico correspondiente es $[x^*, f(x^*)]$.

La figura 16.10 muestra las gráficas de dos funciones que tienen puntos críticos en (0, 0). En la función $f(x) = x^2$, que aparece en la figura 16.10*a*, $f'(x) = 2x$ y un valor crítico ocurre cuando $x = 0$ (condición 1), donde la función tiene un mínimo relativo.

Para la función $f(x) = 3x^{2/3}$, $f'(x) = 2/x^{1/3}$. Nótese que la condición 1 nunca puede satisfacerse por no haber puntos donde la pendiente de la tangente sea 0. Sin embargo, existe un valor crítico de $x = 0$ conforme a la condición 2. La derivada no está definida (la línea tangente es la vertical $x = 0$ para la cual la pendiente está indefinida). Pero $f(0)$ está definida y el punto crítico (0, 0) es un mínimo relativo, como se advierte en la figura 16.10*b*.

Ejemplo 8

Con objeto de determinar la localización o localizaciones de los puntos críticos en la gráfica de

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + 100$$

se calcula la derivada f'.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2}{3} - \frac{2x}{2} - 6 \\ &= x^2 - x - 6 \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ cuando

$$x^2 - x - 6 = 0$$

o bien:

$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

Cuando los dos factores se hacen iguales a 0, dos valores críticos serán $x = 3$ y $x = -2$. Cuando se sustituyen esos valores en f, los puntos críticos resultantes son $(-2, 107\frac{1}{3})$ y $(3, 86\frac{1}{2})$.

La única afirmación que puede hacerse respecto del comportamiento de f en esos puntos es que la pendiente es 0. Y además en ninguna otra parte de la gráfica de f la pendiente es igual a 0. Se requieren más pruebas para determinar si hay un máximo o un mínimo relativo cuando $x = 3$ y $x = -2$. ❑

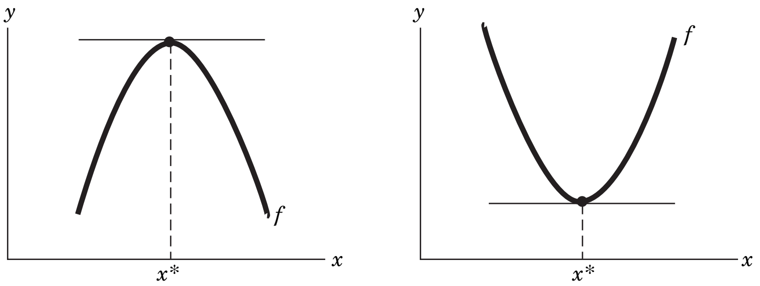
Ejercicio de práctica

Determine las localizaciones de cualquier punto crítico en la gráfica de $f(x) = x^3/3 + x^2 - 8x$. *Respuesta*: Puntos críticos en $(-4, 26\frac{2}{3})$ y $(2, -9\frac{1}{3})$.

PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR

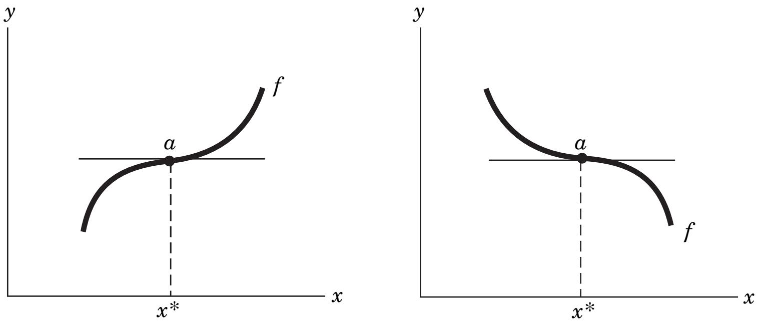
¿Qué comentarios pueden hacerse acerca de la existencia de puntos críticos en las funciones constantes [por ejemplo; $f(x) = 10$]?

La figura 16.11 ilustra diferentes posibilidades de puntos críticos donde $f'(x) = 0$. Las figuras 16.11*a* y *b* muestran puntos de los máximos y mínimos relativos, en tanto que las figuras 16.11*c* y *d* incluyen dos tipos de puntos de inflexión. En la figura 16.11*c*, la gráfica de la función presenta una pendiente de 0 en el punto *a*, y además está dejando de ser cóncava hacia abajo y empieza a ser cóncava hacia arriba. En la figura 16.11*d*, la gráfica tiene una pendiente de 0 y está realizando la transición de la concavidad hacia arriba a la concavidad hacia abajo.



a) Máximo relativo

b) Mínimo relativo



c) Punto de inflexión

d) Punto de inflexión

Figura 16.11 Puntos críticos donde $f'(x) = 0$.

Cualquier punto crítico donde $f'(x) = 0$ será un máximo relativo, un mínimo relativo o un punto de inflexión.

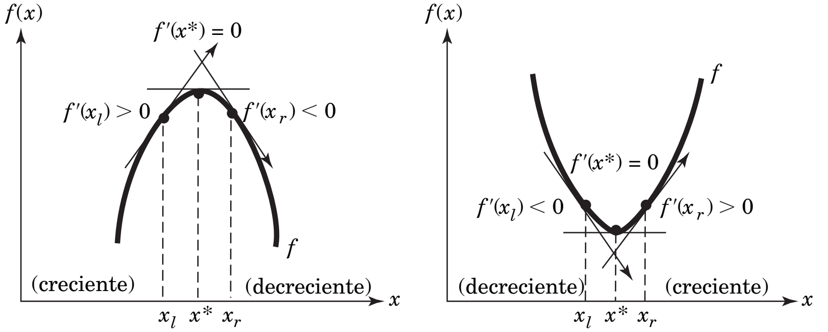
PUNTOS PARA PENSAR Y ANALIZAR

Para funciones polinomiales f de grado n, el número más grande posible de puntos críticos donde $f'(x) = 0$ es $n - 1$. De este modo, una función f de grado 5 puede tener *como máximo* cuatro puntos con pendiente igual a cero. ¿Por qué ocurre esto?

Prueba de la primera derivada

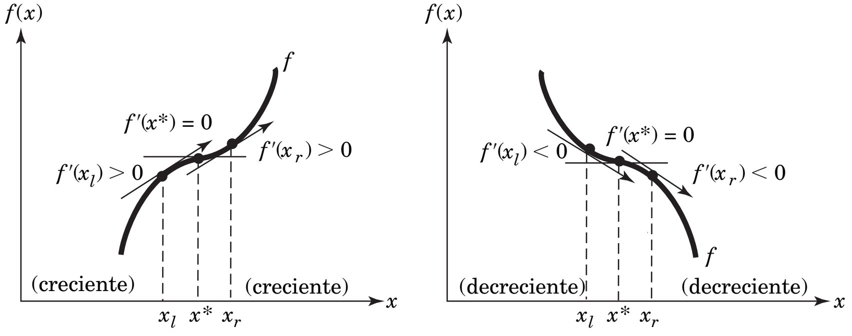
Cuando se desee localizar puntos de los máximos o mínimos relativos, el primer paso consiste en encontrar todos los puntos críticos en la gráfica de la función. Un punto crítico puede ser un máximo o mínimo relativo o bien un punto de inflexión, por lo cual hay que idear una prueba que los distinga. Se cuenta con varias pruebas. Una de ellas, fácil de entender intuitivamente, es la ***prueba de la primera derivada***.

Después de que se encuentran las posiciones de los puntos críticos, esta prueba de la primera derivada exige un examen de las condiciones de pendiente a la izquierda y derecha del punto crítico. En la figura 16.12 se ilustran las cuatro posibilidades del punto crítico junto con sus condiciones de pendiente a ambos lados de x^*.



a) Máximo relativo

b) Mínimo relativo



c) Punto de inflexión

d) Punto de inflexión

Figura 16.12 Prueba de la primera derivada.

Para un máximo relativo, la pendiente será positiva a la izquierda (x_l) y negativa a la derecha (x_r). Para un mínimo relativo la pendiente es negativa a la izquierda y positiva a la derecha. Para los puntos de inflexión, la pendiente tiene el mismo signo a la izquierda o la derecha del punto crítico.

A continuación se da otra manera de describir la prueba.

1. *Para un máximo relativo, el valor de la función es creciente a la izquierda y decreciente a la derecha.*
2. *En el caso de un mínimo relativo, el valor de la función es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha.*
3. *Para los puntos de inflexión, el valor de la función es creciente tanto a la izquierda como a la derecha o decreciente a ambos lados.*

En seguida se ofrece un resumen de la prueba de la primera derivada.

Prueba de la primera derivada

I *Localice todos los valores críticos de x^*.*

II *Para cualquier valor crítico x^*, determine el valor de $f'(x)$ a la izquierda (x_l) y a la derecha (x_r) de x^*.*

a) Si $f'(x_l) > 0$ y $f'(x_r) < 0$, habrá un máximo relativo de f en $[x^*, f(x^*)]$.

b) Si $f'(x_l) < 0$ y $f'(x_r) > 0$, existirá un mínimo relativo de f en $[x^*, f(x^*)]$.

c) Si $f'(x)$ tiene el mismo signo en x_l y x_r, existe un punto de inflexión en $[x^*, f(x^*)]$.

Ejemplo 9

Determine la localización o localizaciones de cualquier punto crítico en la gráfica de $f(x) = 2x^2 - 12x - 10$, así como su naturaleza.

SOLUCIÓN

La primera derivada es

$$f'(x) = 4x - 12$$

Cuando se hace la primera derivada igual a 0,

$$4x - 12 = 0$$

o

$$4x = 12$$

y hay un valor crítico cuando

$$x = 3$$

Puesto que $f(3) = 2(3^2) - 12(3) - 10 = -28$, un punto crítico se encuentra en $(3, -28)$.

Para probar el punto crítico, se selecciona $x_l = 2.9$ y $x_r = 3.1$.

$$\begin{aligned} f'(2.9) &= 4(2.9) - 12 \\ &= 11.6 - 12 = -0.4 \end{aligned}$$

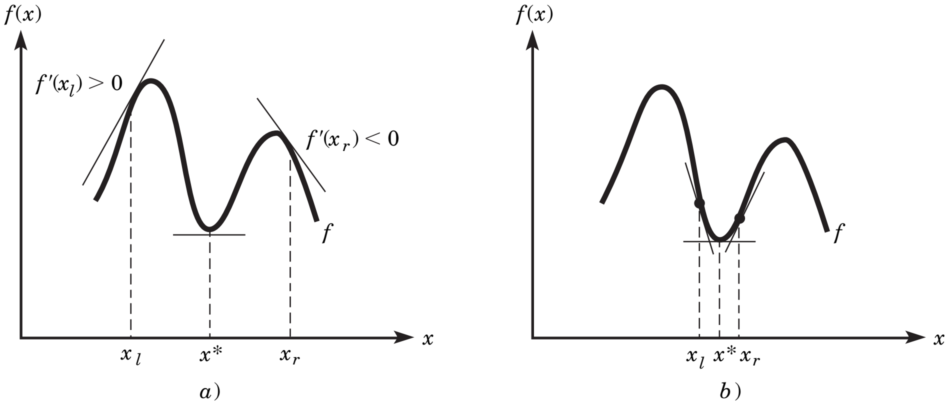
$$\begin{aligned} f'(3.1) &= 4(3.1) - 12 \\ &= 12.4 - 12 = +0.4 \end{aligned}$$

Debido a que la primera derivada es negativa (−0.4) a la izquierda de $x = 3$ y positiva (+0.4) a la derecha, el punto (3, −28) será un mínimo relativo en *f* (nótese que *f* es una función cuadrática cuya gráfica es una parábola cóncava hacia arriba). ❑

NOTA

ADVERTENCIA

Cuando se seleccionan x_l y x_r hay que estar bastante cerca del valor crítico x^*. Si nos alejamos demasiado a la izquierda o a la derecha, puede llegarse a un resultado erróneo, como en la figura 16.13, donde un mínimo relativo podría considerarse como un máximo relativo. Hay un poco de libertad en la selección de x_l y x_r. Sin embargo, cuando exista más de un punto crítico x_l y x_r habrán de escogerse de modo que caigan entre el valor crítico que se examina y cualquier valor crítico adyacente.



Conclusión errónea:
máximo relativo en x^*

Conclusión correcta:
mínimo relativo en x^*

Figura 16.13 Selección de x_l y x_r para la prueba de la primera derivada.

Ejemplo 10 En el ejemplo 8 se determinó que la gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + 100$$

tiene puntos críticos en $(3, 86\tfrac{1}{2})$ y $(-2, 107\tfrac{1}{3})$. Para determinar la naturaleza de estos puntos críticos se examina la primera derivada

$$f'(x) = x^2 - x - 6$$

Al probar el punto crítico cuando $x = 3$, se selecciona $x_l = 2$ y $x_r = 4$.

$$\begin{aligned} f'(2) &= (2)^2 - 2 - 6 \\ &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(4) &= (4)^2 - 4 - 6 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Puesto que $f'(x)$ es negativa (f es decreciente) a la izquierda de $x = 3$ y positiva (f es creciente) a la derecha, se presentará un mínimo relativo para f cuando $x = 3$.

Al probar el punto crítico en $x = -2$, se escogerá $x_l = -3$ y $x_r = -1$.

$$\begin{aligned} f'(-3) &= (-3)^2 - (-3) - 6 \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(-1) &= (-1)^2 - (-1) - 6 \\ &= -4 \end{aligned}$$

Puesto que $f'(x)$ es positiva (f está aumentando) a la izquierda de $x = -2$ y es negativa (f está disminuyendo) a la derecha, se presenta un máximo relativo para $f(x)$ cuando $x = -2$.

Ejemplo 11

La prueba de la primera derivada también es válida para los puntos críticos en que $f'(x)$ no está definida. Examínese la función $f(x) = 3x^{2/3}$, cuya gráfica aparece en la figura 16.10*b*. Para esta función, $f'(x) = 2/x^{1/3}$. Puesto que $f'(x)$ no está definida cuando $x = 0$, existirá un valor crítico conforme a la condición 2. Como $f(0) = 3(0)^{2/3} = 0$, hay un punto crítico en (0, 0). Al utilizar la prueba de la primera derivada, se selecciona $x_l = -1$ y $x_r = 1$.

$$f'(-1) = \frac{2}{\sqrt[3]{-1}} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$f'(1) = \frac{2}{\sqrt[3]{1}} = \frac{2}{1} = 2$$

Dado que $f'(x)$ es negativa a la izquierda de $x = 0$ y positiva a la derecha, el mínimo relativo ocurre en el punto crítico (0, 0). ❑

Ejercicio de práctica

En el ejercicio de práctica de la página 784 se identificaron los puntos críticos de $(-4, 26\frac{2}{3})$ y $(2, -9\frac{1}{3})$ para la función $f(x) = x^3/3 + x^2 - 8x$. Determine la naturaleza de estos puntos críticos haciendo uso de la prueba de la primera derivada. *Respuesta*: máximo relativo en $(-4, 26\frac{2}{3})$ y mínimo relativo en $(2, -9\frac{1}{3})$.

Prueba de la segunda derivada

La prueba más expedita de los puntos críticos donde $f'(x) = 0$ es la ***prueba de la segunda derivada***. En un sentido intuitivo, esta prueba trata de determinar la concavidad de la función en un punto crítico $[x^*, f(x^*)]$.

En la sección 16.1 se llegó a la conclusión de que si $f''(x) < 0$ es un punto de la gráfica de f, la curva será *cóncava hacia abajo* en ese punto. Por lo tanto, la prueba de la segunda derivada sugiere la obtención del valor de $f''(x^*)$. Pero tiene mayor interés el *signo* de $f''(x^*)$. Si $f''(x^*) > 0$, se sabe que no sólo la pendiente es 0 en x^*, sino que la función f es cóncava hacia arriba en x^*. Si ahora se consultan las cuatro posibilidades del punto crítico en la figura 16.11, sólo una es cóncava hacia arriba en x^*, y ése es el mínimo relativo de la figura 16.11*b*.

Si $f''(x^*) < 0$, la función será cóncava hacia abajo en x^*. Y al examinar de nuevo la figura 16.11 se observa que sólo el punto crítico acompañado de condiciones de concavidad hacia abajo es el máximo relativo en la figura 16.11*a*.

Según se señaló en la sección 16.1, si $f''(x^*) = 0$, no es posible sacar conclusión alguna acerca de la concavidad en $[x^*, f(x^*)]$. Se requiere otra prueba como la de la primera derivada para precisar la naturaleza de estos puntos críticos determinados. He aquí un resumen de la prueba de la segunda derivada.

Prueba de la segunda derivada

I *Encuentre todos los valores críticos x^*, tales que $f'(x^*) = 0$.*

II *Para cualquier valor crítico x^*, determine el valor de $f''(x^*)$.*

- *a) Si $f''(x^*) > 0$, la función será cóncava hacia arriba en x^* y habrá un **mínimo relativo** para f en $[x^*, f(x^*)]$.*
- *b) Si $f''(x^*) < 0$, la función será cóncava hacia abajo en x^* y habrá un **máximo relativo** para f en $[x^*, f(x^*)]$.*
- *c) Si $f''(x^*) = 0$, no puede obtenerse una conclusión respecto de la concavidad en x^* ni respecto de la naturaleza del punto crítico. Se necesita otra prueba como la de la primera derivada.*

Ejemplo 12 Examine detenidamente la siguiente función en busca de puntos críticos y determine su naturaleza.

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 20$$

SOLUCIÓN

Deberá reconocerse esta función como una función cuadrática cuya gráfica es una parábola cóncava hacia abajo. También deberá haber un punto crítico que es un máximo relativo. Para confirmar esto, se calcula la primera derivada.

$$f'(x) = -3x + 6$$

Si se hace $f'(x)$ igual a 0,

$$\begin{aligned} -3x + 6 &= 0 \\ -3x &= -6 \end{aligned}$$

y se tiene un valor crítico cuando

$$x = 2$$

El valor de $f(x)$ cuando $x = 2$ será

$$f(2) = -\tfrac{3}{2}(2^2) + 6(2) - 20$$
$$= -6 + 12 - 20 = -14$$

El único punto crítico ocurre en $(2, -14)$.

Haciendo uso de la prueba de la segunda derivada, se obtiene

$$f''(x) = -3$$

y $$f''(2) = -3 < 0$$

Puesto que la segunda derivada es negativa en $x = 2$, puede extraerse la conclusión de que la gráfica de f es cóncava hacia abajo en este punto, y el punto crítico será un máximo relativo. En la figura 16.14 se ofrece una gráfica de la función.

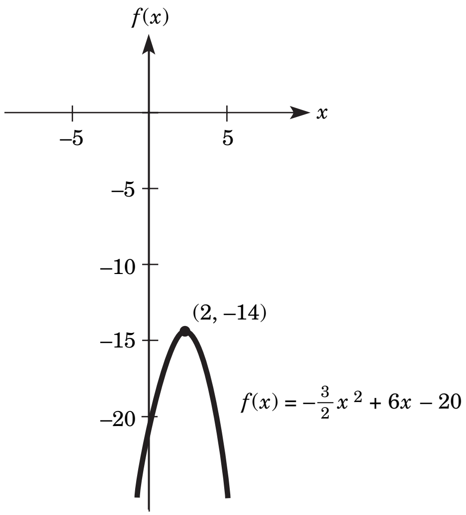


Figura 16.14 Máximo relativo en $(2, -14)$.

Ejemplo 13 Examine la siguiente función en busca de puntos críticos y determine su naturaleza.

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}$$

SOLUCIÓN

Si se identifica f',

$$f'(x) = \frac{4x^3}{4} - \frac{18x}{2}$$
$$= x^3 - 9x$$

$f'(x)$ se hace igual a 0 cuando

$$x^3 - 9x = 0$$
$$x(x^2 - 9) = 0$$

o cuando
$$x(x + 3)(x - 3) = 0$$

Si los tres factores se hacen igual a 0, se obtienen los valores críticos cuando

$$x = 0 \qquad x = -3 \qquad x = 3$$

Luego de sustituir estos valores críticos en f, se afirma que los puntos críticos aparecen en la gráfica de f en (0, 0), (−3, −81/4) y (3, −81/4).

La segunda derivada será

$$f''(x) = 3x^2 - 9$$

Para probar el punto crítico (0, 0),

$$\begin{aligned} f''(0) &= 3(0^2) - 9 \\ &= -9 < 0 \end{aligned}$$

Puesto que $f''(0)$ es negativa, la función será cóncava hacia abajo en $x = 0$ y se presentará un *máximo relativo* en (0, 0). Para probar el punto crítico (−3, −81/4).

$$\begin{aligned} f''(-3) &= 3(-3)^2 - 9 \\ &= 27 - 9 = 18 > 0 \end{aligned}$$

La gráfica de f es cóncava hacia arriba cuando $x = -3$ y un *mínimo relativo* se presenta en (−3, −81/4).

Para probar el punto crítico (3, −81/4),

$$\begin{aligned} f''(3) &= 3(3^2) - 9 \\ &= 27 - 9 = 18 > 0 \end{aligned}$$

La gráfica de f es cóncava hacia arriba cuando $x = 3$ y un *mínimo relativo* ocurre en (3, −81/4).

Para resumir, los mínimos relativos ocurren en f en los puntos (−3, −81/4) y (3, −81/4); y un máximo relativo se presenta en (0, 0). La figura 16.15 es un bosquejo de la gráfica de f. ❑

Ejercicio de práctica

En el ejercicio de práctica de la página 788, se solicitó determinar la naturaleza de dos puntos críticos haciendo uso de la prueba de la primera derivada. Utilice la prueba de la segunda derivada para confirmar estos resultados.

Ejemplo 14 Examine la siguiente función en busca de cualquier punto crítico y determine su naturaleza.

$$f(x) = -10\,000e^{-0.03x} - 120x + 10\,000$$

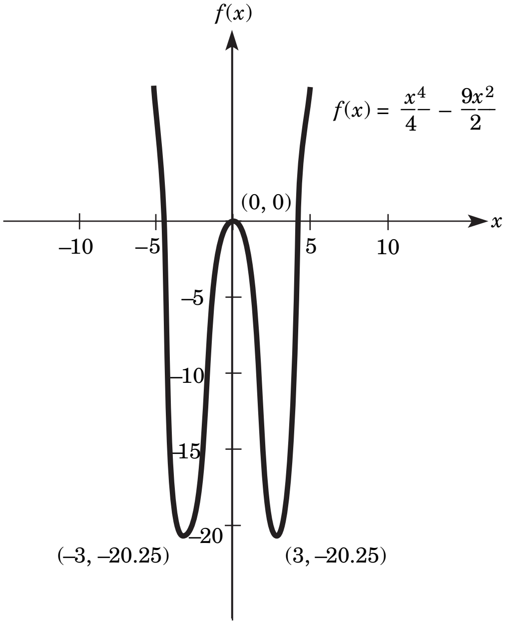


Figura 16.15

SOLUCIÓN

Si se enccuentra f' y se iguala a 0,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -10\,000(-0.03)e^{-0.03x} - 120 \\ &= 300e^{-0.03x} - 120 \\ 300e^{-0.03x} - 120 &= 0 \\ \text{cuando} \qquad 300e^{-0.03x} &= 120 \\ \text{o cuando} \qquad e^{-0.03x} &= \tfrac{120}{300} = 0.4 \end{aligned}$$

Resolviendo para x, se toma el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación.

$$-0.03x = \ln 0.4$$

Por lo tanto, $\quad -0.03x = -0.9163$

cuando $\quad x = -0.9163/-0.03$

Ocurre un valor crítico cuando $\quad x = 30.54$

El único punto crítico se presenta cuando $\quad x = 30.54$

Continuando con la prueba de la segunda derivada, se obtiene

$$\begin{aligned} f''(x) &= 300(-0.03)e^{-0.03x} \\ &= -9e^{-0.03x} \\ f''(30.54) &= -9e^{-0.03(30.54)} \\ &= -9e^{-0.9162} \\ &= -9(0.4) \\ &= -3.6 < 0 \end{aligned}$$

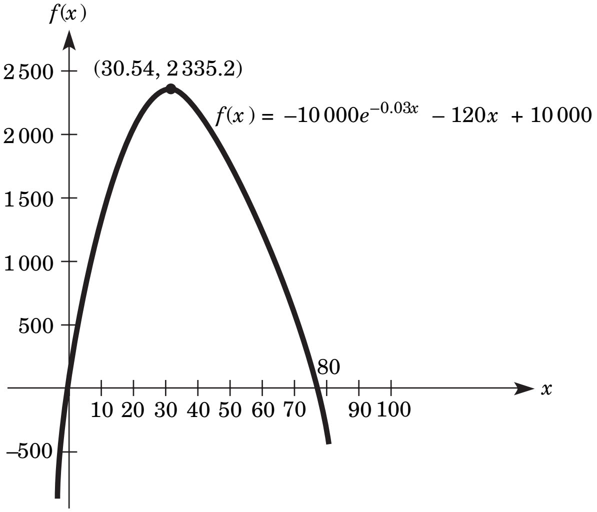


Figura 16.16

Por consiguiente, se presenta un *máximo relativo* cuando $x = 30.54$. El valor correspondiente para $f(x)$ es

$$\begin{aligned} f(30.54) &= -10\,000e^{-0.03(30.54)} - 120(30.54) + 10\,000 \\ &= -10\,000(0.4) - 3\,664.8 + 10\,000 = 2\,335.2 \end{aligned}$$

El máximo relativo se presenta en (30.54, 2 335.2). La figura 16.16 muestra una gráfica de la función. ❑

Cuando falla la prueba de la segunda derivada

Si $f''(x^*) = 0$, la segunda derivada no permite sacar conclusión alguna sobre el comportamiento de f en x^*. Examinemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 15 Estudie la siguiente función en busca de puntos críticos y determine su naturaleza.

$$f(x) = -x^5$$

SOLUCIÓN

$$f'(x) = -5x^4$$

Al hacer f' igual a 0,

$$-5x^4 = 0$$

cuando $$x = 0$$

Así pues, existe un valor crítico de f cuando $x = 0$ y habrá un punto crítico en (0, 0). Y continuando con la prueba de la segunda derivada, se obtiene

$$f''(x) = -20x^3$$

En $x = 0$

$$\begin{aligned} f''(0) &= -20(0)^3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Empleando la prueba de la segunda derivada, no se obtiene conclusión alguna respecto de la naturaleza del punto crítico. Puede utilizarse la prueba de la primera derivada para determinar la naturaleza del punto crítico. Si $x_l = -1$ y $x_r = 1$, entonces

$$\begin{aligned} f'(-1) &= -5(-1)^4 \\ &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= -5(1)^4 \\ &= -5 \end{aligned}$$

Puesto que $f'(-1)$ y $f''(1)$ son negativas, en $x = 0$ se presenta un punto de inflexión. En la figura 16.17 se da un bosquejo de la gráfica de la función.

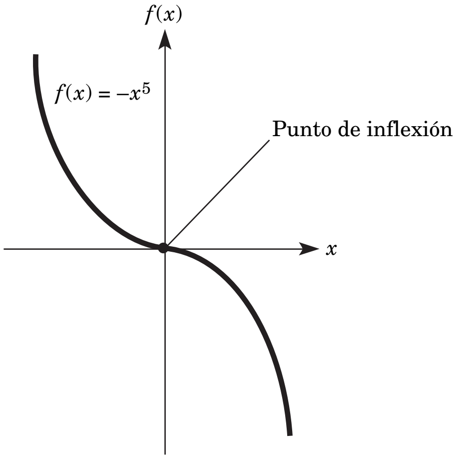


Figura 16.17 ❑

Prueba de la derivada de orden superior (opcional)

Se dispone de varios métodos para llegar a una conclusión acerca de la naturaleza de un punto crítico cuando falla la prueba de la segunda derivada. Uno eficiente, aunque no fácil de comprender intuitivamente, es la ***prueba de la derivada de orden superior***. Con ella siempre se conseguirán resultados concluyentes.

> ### Prueba de la derivada de orden superior
>
> 1. *Dado un punto crítico $[x^*, f(x^*)]$ en f, encuentre la derivada de orden más bajo cuyo valor sea distinto de cero en el valor crítico x^*. Denote esta derivada como $f^{(n)}(x)$, donde n es el orden de la derivada.*

> **II** *Si el orden n de esta derivada es par,* $f(x^*)$ *es un* ***máximo relativo*** *si* $f^{(n)}(x^*) < 0$*, y un* ***mínimo relativo*** *si* $f^{(n)}(x^*) > 0$.
>
> **III** *Si el orden n de esta derivada es* ***impar****, el punto crítico es un* ***punto de inflexión****.*

Ejemplo 16 Identifique los puntos críticos y determine su naturaleza si

$$f(x) = (x - 2)^4$$

SOLUCIÓN

Primero calcule f'.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4(x-2)^3\,(1) \\ &= 4(x-2)^3 \end{aligned}$$

Si se hace f' igual a 0

$$4(x-2)^3 = 0$$

cuando $x = 2$

En este valor crítico

$$\begin{aligned} f(2) &= (2-2)^4 \\ &= (0)^4 = 0 \end{aligned}$$

Así pues, ocurre un punto crítico en (2, 0).

Para determinar la naturaleza del punto crítico, la segunda derivada es

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4(3)(x-2)^2 \\ &= 12(x-2)^2 \end{aligned}$$

Al hacer la evaluación de f'' en el valor crítico se obtiene,

$$\begin{aligned} f''(2) &= 12(2-2)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

No hay una conclusión que se base en la prueba de la segunda derivada. Si se sigue empleando la prueba de la derivada de orden superior, la tercera derivada será

$$f'''(x) = 24(x-2)$$

y $f'''(2) = 24(2-2) = 0$

Puesto que $f'''(2) = 0$, no existe una conclusión que se base en la tercera derivada.

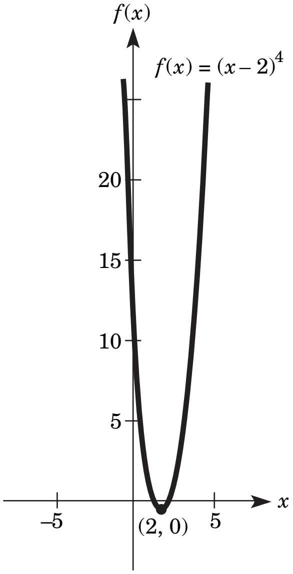


Figura 16.18

La cuarta derivada es

$$f^{(4)}(x) = 24$$

y

$$f^{(4)}(2) = 24$$

Ésta es la derivada de más bajo orden y no es igual a 0 cuando $x = 2$. Puesto que el orden de la derivada ($n = 4$) es par, existe un máximo o mínimo relativo en (2, 0). Para determinar cuál es el caso, se observa el signo de $f^{(4)}(2)$. Como $f^{(4)}(2) > 0$, puede concluirse que hay un mínimo relativo en (2, 0). La figura 16.18 contiene una gráfica de la función. ❑

NOTA La prueba de la segunda derivada es en realidad un caso especial de la prueba de la derivada de orden superior: el caso en que la derivada de orden más bajo distinta de cero es la segunda derivada ($n = 2$).

Ejercicio de práctica

Aplique la prueba de la derivada de orden superior para determinar la naturaleza del punto crítico en el ejemplo 15.

Sección 16.2 Ejercicios de seguimiento

En cada una de las siguientes funciones determine la posición de todos los puntos críticos, así como su naturaleza.

1. $f(x) = 3x^2 - 48x + 100$
2. $f(x) = x^3/3 - 5x^2 + 16x + 100$
3. $f(x) = -10x^3 + 5$
4. $f(x) = x^2 - 8x + 4$

5. $f(x) = x^3/3 - 2.5x^2 + 4x$
6. $f(x) = 5x^3 - 20$
7. $f(x) = 3x^4/4 - 75x^2/2$
8. $f(x) = -x^4/4 + 9x^2/2$
9. $f(x) = -5x^5 - 10$
10. $f(x) = x^5 - 2$
11. $f(x) = -x^2/2 + 6x + 3$
12. $f(x) = -6x^2 - 36x + 10$
13. $f(x) = 4x^2/15 + 4$
14. $f(x) = -x^3/10$
15. $f(x) = 2x^3/3 - x^2/2 - 10x$
16. $f(x) = x^3/3 + 8x^2 + 60x$
17. $f(x) = 4x^5/5 - 324x$
18. $f(x) = -2x^5/5 + 32x$
19. $f(x) = x^3/6 + 2x^2$
20. $f(x) = x^3/3 + x^2/2 - 20x$
21. $f(x) = -2x^2 + x^4/4$
22. $f(x) = -x^4/4 + 8x^2 + 5$
23. $f(x) = 2x^5/5 - x^4/4 - 5x^3$
24. $f(x) = x^5/5 + 3x^4/4 - 4x^3/3$
25. $f(x) = x^5/5 - x$
26. $f(x) = -2x^3 + 10.5x^2 + 12x$
27. $f(x) = x^6/6 - x^2/2 + 2$
28. $f(x) = 4x^3/3 - 6x^2$
29. $f(x) = (x + 10)^4$
30. $f(x) = (2x + 9)^3$
31. $f(x) = -(4x + 2)^3$
32. $f(x) = (2x - 8)^3$
33. $f(x) = -(2x^2 - 8)^4$
34. $f(x) = (x^2 - 16)^3$
35. $f(x) = e^x$
36. $f(x) = e^{-x}$
37. $f(x) = 500e^{-0.10x} + 50x$
38. $f(x) = -45e^{-0.2x} - 18x + 10$
39. $f(x) = e^{2x-5}$
40. $f(x) = -100e^{-0.25x} - 50x$
41. $f(x) = xe^{-x}$
42. $f(x) = -80e^{-0.10x} - 40x$
43. $f(x) = 40e^{-0.05x} + 6x - 10$
44. $f(x) = 20e^{-0.05x} + 4x - 3$
45. $f(x) = 10 + \ln x$
46. $f(x) = \ln x - 0.5x$
47. $f(x) = \ln(x^2 + 1) - x$
48. $f(x) = \ln x - x^2/4$
49. $f(x) = 4x \ln x$
50. $f(x) = x^2 \ln x$
51. $f(x) = \ln 5x - 10x$
52. $f(x) = \ln 24x - x^3$
53. $f(x) = x^2 + x - \ln x$
54. $f(x) = 0.5x^2 + 7x - 30 \ln x$
***55.** $f(x) = x/(x^2 + 1)$
***56.** $f(x) = x(x + 2)^3$
***57.** $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a > 0, b < 0, c > 0$
***58.** $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a < 0, b < 0, c < 0$

***59.** **Prueba de la ecuación original** En la última sección se mencionó que se dispone de otras técnicas para determinar la naturaleza de los puntos críticos. Una de ellas consiste en comparar el valor de $f(x^*)$ con los de $f(x)$ precisamente a la izquierda y la derecha de x^*. Examine detenidamente la figura 16.11 y establezca un conjunto de reglas que permitan distinguir entre las posibilidades de los cuatro puntos críticos.

***60.** Compare las eficiencias relativas asociadas a la realización de la prueba de la ecuación original y la prueba de la primera derivada de los puntos críticos.

***61.** Compare las eficiencias relativas relacionadas con la realización de las pruebas de la primera derivada, la segunda derivada y la derivada de orden superior de los puntos críticos.

***62.** **Cuando falla la prueba de la segunda derivada: una alternativa** Dado un valor crítico determinado cuando $f'(x) = 0$ y la falla de la prueba de la segunda derivada para obtener una conclusión, establezca un conjunto de reglas que lleven a una conclusión basada en la comprobación de las condiciones de concavidad a la izquierda y derecha del valor crítico.

16.3 Trazado de curvas

El trazado de funciones se facilita con la información adquirida en este capítulo. Podemos hacernos una idea de la forma general de la gráfica de una función sin determinar ni trazar numerosos pares ordenados. En la presente sección se explican algunas de las claves fundamentales de la forma de la gráfica de una función y se dan ejemplos de procedimientos para trazar curvas.

Puntos de datos clave

Al determinar la forma general de la gráfica de una función, son fundamentales los siguientes atributos:

- ☐ Máximos y mínimos relativos
- ☐ Puntos de inflexión
- ☐ Intersecciones con los ejes *x* y *y*
- ☐ Dirección final

Esto se ejemplifica mediante la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x + 5$$

1. Máximos y mínimos relativos Para localizar los extremos relativos en *f* se calcula la primera derivada

$$f'(x) = x^2 - 8x + 12$$

Haciendo f' igual a 0 se obtiene

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

o bien
$$(x - 2)(x - 6) = 0$$

Los valores críticos se presentan en $x = 2$ y $x = 6$. Si esos valores se sustituyen en *f*,

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{2^3}{3} - 4(2^2) + 12(2) + 5 \\ &= \tfrac{8}{3} - 16 + 24 + 5 = 15\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

y
$$\begin{aligned} f(6) &= \frac{6^3}{3} - 4(6^2) + 12(6) + 5 \\ &= 72 - 144 + 72 + 5 = 5 \end{aligned}$$

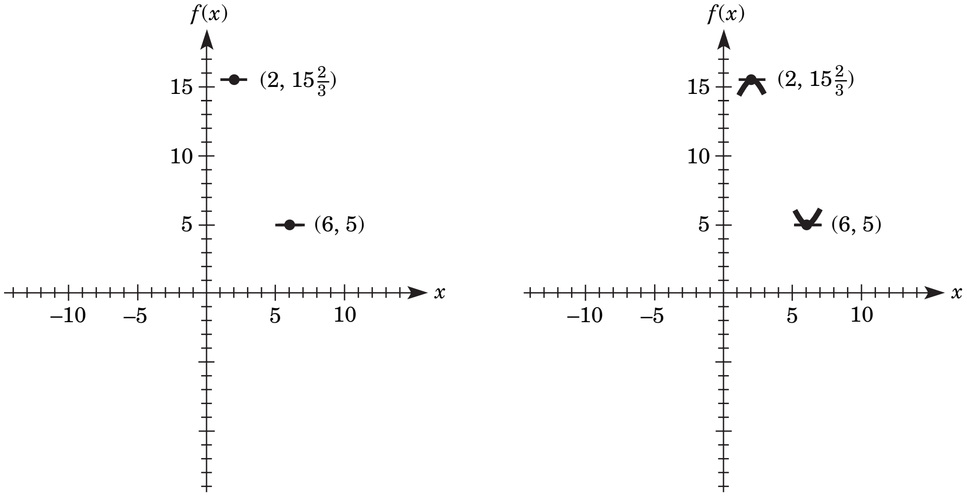
De este modo, existen puntos críticos en $(2, 15\frac{2}{3})$ y $(6, 5)$. Una gráfica permite conocer que en estos puntos existen condiciones de pendiente cero, según se advierte en la figura 16.19*a*.

La segunda derivada de *f* es

$$f''(x) = 2x - 8$$

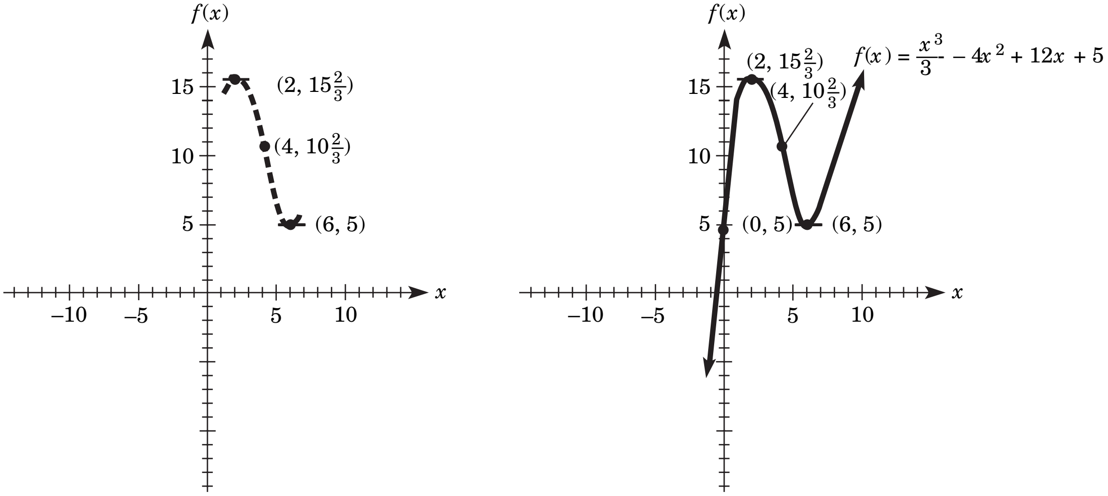
Para probar la naturaleza del punto crítico $(2, 15\frac{2}{3})$,

$$f''(2) = 2(2) - 8 = -4 < 0$$



a) Puntos críticos en *f*

b) Extremos relativos para *f*



c) Extremos relativos y punto de inflexión

d) Trazado final de *f*

Figura 16.19 Desarrollo del trazado de $f(x) = x^3/3 - 4x^2 + 12x + 5$.

Por consiguiente, un máximo relativo ocurre en $(2, 15\frac{2}{3})$. Para probar la naturaleza del punto crítico (6, 5),

$$\begin{aligned} f''(6) &= 2(6) - 8 \\ &= 4 > 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, en (6, 5) se presenta un mínimo relativo. La información adquirida hasta ahora permite obtener el trazado de *f* en el grado mostrado en la figura 16.19*b*.

2. Puntos de inflexión Se encuentran candidatos a puntos de inflexión cuando f'' se hace igual a 0, o bien cuando

$$2x - 8 = 0$$

o

$$x = 4$$

Si se sustituye $x = 4$ en f, se puede afirmar que el único candidato a un punto de inflexión ocurre en $(4, 10\frac{1}{3})$. Y *sin* verificar el signo de f'' a la izquierda y la derecha de $x = 4$, puede llegarse a la conclusión de que el punto $(4, 10\frac{1}{3})$ es el único punto de inflexión en la gráfica de f. Ello obedece a que *debe haber* un punto de inflexión entre el máximo relativo en $(2, 15\frac{2}{3})$ y el mínimo relativo en $(6, 5)$. *Para una función continua, la concavidad de la función debe cambiar entre los puntos críticos adyacentes*. El único candidato está entre los dos puntos críticos; por lo tanto, debe ser un punto de inflexión. La información adquirida hasta aquí permite mejorar el trazado de f, como se aprecia en la figura 16.19*c*.

3. Intersecciones con los ejes La intersección con el eje y es un punto fácil de localizar. En este caso

$$f(0) = 5$$

La intersección con el eje y se presenta en $(0, 5)$.

Según la función de que se trate, las intersecciones con el eje x pueden o no ser fáciles de encontrar. En esta función resultarán bastante difíciles de identificar. En nuestro trazado de f no infÏluirá mucho el hecho de conocer la localización exacta de una intersección con el eje x que existe para f.

4. Dirección final Para f, el término de mayor potencia es $x^3/3$. Para determinar el comportamiento de f a medida que x se torne más positiva, es preciso observar el comportamiento de $x^3/3$ cuando x va haciéndose más positiva. A medida que

$$x \to +\infty \qquad \frac{x^3}{3} \to +\infty$$

Por lo tanto, a medida que

$$x \to +\infty \qquad f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x + 5 \to +\infty$$

De manera análoga, a medida que

$$x \to -\infty \qquad \frac{x^3}{3} \to -\infty$$

y

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x + 5 \to -\infty$$

La figura 16.19*d* incorpora las intersecciones con los ejes y las direcciones finales al trazado de la curva.

Ejemplo 17 **(Escenario de motivación)** Trace la gráfica de la función

$$f(4) = \frac{x^4}{4} - \frac{8(4^3)}{3} + 8(4$$

SOLUCIÓN

1. Máximos y mínimos relativos Para localizar los extremos relativos de f se obtiene la primera derivada:

$$f'(x) = x^3 - 8x^2 + 16x$$

Al hacer f' igual a 0 se obtiene

$$x^3 - 8x^2 + 16x = 0$$

$$x(x^2 - 8x + 16) = 0$$

o bien

$$x(x - 4)(x - 4) = 0$$

Si los factores se hacen igual a 0, los valores críticos se obtienen en $x = 0$ y $x = 4$. Los valores correspondientes de $f(x)$ son

$$f(0) = 0$$

y

$$f(4) = \frac{x^4}{4} - \frac{8(4^3)}{3} + 8(4^2)$$

$$= 64 - 170\tfrac{2}{3} + 128 = 21\tfrac{1}{3}$$

Por lo tanto, los puntos críticos ocurren en (0, 0) y $(4, 21\frac{1}{3})$.

Probando $x = 0$, se obtiene

$$f''(x) = 3x^2 - 16x + 16$$

y

$$f''(0) = 16 > 0$$

Un mínimo relativo ocurre en (0, 0).

Al probar $x = 4$,

$$f''(4) = 3(4)^2 - 16(4) + 17$$

$$= 48 - 64 + 16 = 0$$

No puede extraerse conclusión alguna sobre $x = 4$ que se base en la segunda derivada. Continuando con la prueba de la derivada de orden superior,

$$f'''(x) = 6x - 16$$

y

$$f'''(4) = 6(4) - 16$$

$$= 8 > 0$$

Puesto que el orden de la derivada es impar, un punto de inflexión ocurre en $(4, 21\frac{1}{3})$.

2. Puntos de inflexión Los candidatos a puntos de inflexión se encuentran al hacer f'' igual a 0, o cuando

$$\begin{aligned} 3x^2 - 16x + 16 &= 0 \\ (3x - 4)(x - 4) &= 0 \\ x = \tfrac{4}{3} \quad \text{y} \quad x &= 4 \end{aligned}$$

Ya hemos verificado que un punto de inflexión ocurre en $(4, 21\frac{1}{3})$. Confirme que $(\frac{4}{3}, 8.69)$ es también un punto de inflexión.

3. Intersecciones con los ejes Cuando se calcula $f(0) = (0)^4/4 - 8(0)^3/3 + 8(0)^2 = 0$, se llega a la conclusión de que la interacción con el eje y ocurre en (0, 0). Para localizar las intersecciones con el eje x,

$$\frac{x^4}{4} - \frac{8x^3}{3} + 8x^2 = 0$$

cuando

$$x^2\left(\frac{x^2}{4} - \frac{8x}{3} + 8\right) = 0$$

Una raíz de esta ecuación es $x = 0$, lo cual indica que una intersección con el eje x se encuentra en (0, 0) (antes debimos observar que la intersección con el eje y es al mismo tiempo una intersección con el eje x). Mediante la fórmula cuadrática verifique que no haya raíces para la ecuación

$$\frac{x^2}{4} - \frac{8x}{3} + 8 = 0$$

Para f, el punto (0, 0) representa la única intersección con los ejes.

4. Dirección final El comportamiento final de $f(x)$ está ligado al del término $x^4/4$. A medida que

$$x \to +\infty \qquad \frac{x^4}{4} \to +\infty \quad \text{y} \quad f(x) \to +\infty$$

Conforme a

$$x \to -\infty \qquad \frac{x^4}{4} \to +\infty \quad \text{y} \quad f(x) \to +\infty$$

Con la información recabada, podemos trazar la forma aproximada de f como se aprecia en la figura 16.20. ❑

Sección 16.3 Ejercicios de seguimiento

Dibuje las gráficas de las funciones siguientes.

1. $f(x) = x^3/3 - 5x^2 + 16x - 100$
2. $f(x) = x^2 - 5x + 6$
3. $f(x) = x^4/4 - 25x^2/2$
4. $f(x) = x^3/3 - 2.5x^2 + 4x$
5. $f(x) = (6x - 12)^3$
6. $f(x) = x^6/6 - 8x^2 - 10$
7. $f(x) = -(x - 5)^3$
8. $f(x) = (x^2 - 16)^4$

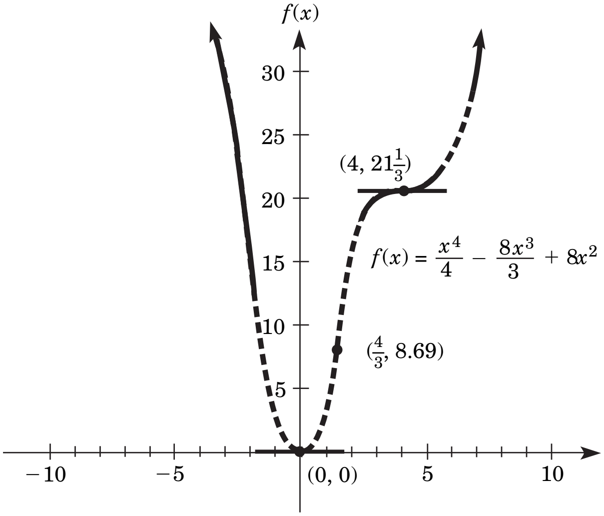


Figura 16.20

9. $f(x) = x^3/3 - 7x^2/2 - 30x$
10. $f(x) = -(x - 2)^4$
11. $f(x) = -5x^5 + 100$
12. $f(x) = x^5 - 25$
13. $f(x) = 2x^3/3 + x^2/2 - 10x$
14. $f(x) = x^3/3 - 8x^2 + 60x$
15. $f(x) = -4x^5/5 + 324x - 250$
16. $f(x) = 2x^5/5 - 32x$
17. $f(x) = -e^{-x} - 10x$
18. $f(x) = x^4/4 - 9x^2/2$
19. $f(x) = \ln(x^2 + 25)$
20. $f(x) = x^3/3 - 3.5x^2 - 30x$

16.4 Consideraciones del dominio restringido

En esta sección se examinarán los métodos que ayuden a identificar los máximos y mínimos absolutos cuando el dominio de una función está restringido.

Cuando el dominio está restringido

Con mucha frecuencia, en los problemas aplicados el dominio está restringido. Por ejemplo, si la utilidad P se expresa en función del número de unidades producidas x, es probable que x esté restringida a valores como $0 \leq x \leq x_u$. En este caso x está restringida a valores no negativos (no se producen cantidades negativas), los cuales son menores o iguales a algún límite superior x_u. El valor de x_u puede reflejar la capacidad de producción, definida por escasa mano de obra, pocas materias primas o por la capacidad física de la planta.

En la búsqueda del máximo o mínimo absoluto de una función habrá que tener en cuenta no sólo los máximos y mínimos relativos de ella, sino también los ***puntos finales*** de su dominio. Por ejemplo, observe la función graficada en la figura 16.21. Nótese que el dominio de la función está restringido a valores comprendidos entre 0 y x_u y que el máximo absoluto de f ocurre en x_u, el punto final derecho del dominio. El mínimo absoluto se presenta en x_2, que es también un mínimo relativo en la función. En seguida se describe el procedimiento para identificar los extremos absolutos.

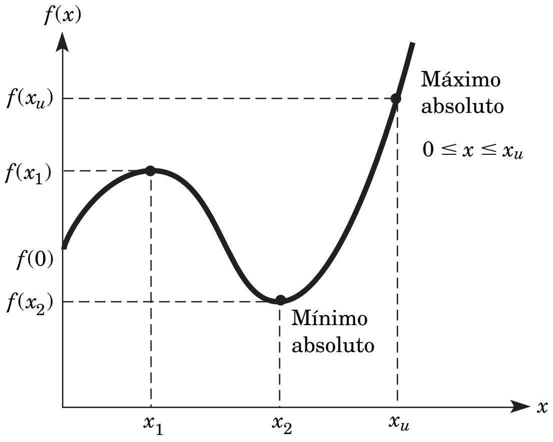


Figura 16.21

Procedimiento para identificar los puntos de máximo y mínimo absolutos

Dada la función continua f definida sobre el intervalo cerrado $[x_l, x_u]$:

- **I** *Localice todos los puntos críticos $[x^*, f(x^*)]$ que estén dentro del dominio de la función.*[1] *Prescinda de los valores críticos de x^* que se encuentren fuera del dominio.*
- **II** *Calcule los valores de $f(x)$ en los dos puntos finales del dominio $[f(x_l)$ y $f(x_u)]$.*
- **III** *Compare los valores de $f(x^*)$ para todos los puntos críticos relevantes con $f(x_l)$ y $f(x_u)$. El máximo absoluto es el mayor de estos valores. El mínimo absoluto es el menor de ellos.*

Ejemplo 18 Determine las localizaciones y valores del máximo y mínimo absolutos de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 6x + 5$$

donde $2 \leq x \leq 10$.

SOLUCIÓN

❑ **Paso I.** La primera derivada es

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2}{3} - \frac{14x}{2} + 6 \\ &= x^2 - 7x + 6 \end{aligned}$$

---

[1] Recuérdese que los puntos críticos satisfacen la condición $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no está definida.

Si se hace f' igual a 0,

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

o bien

$$(x - 6)(x - 1) = 0$$

Por lo tanto,

$$x = 6 \quad \text{y} \quad x = 1$$

El único valor crítico *dentro del dominio* de la función es $x = 6$.

$$\begin{aligned} f(6) &= \frac{6^3}{3} - \frac{7(6^2)}{2} + 6(6) + 5 \\ &= 72 - 126 + 36 + 5 = -13 \end{aligned}$$

En consecuencia, un punto crítico ocurre en $(6, -13)$.

Para probar $x = 6$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2x - 7 \\ f''(6) &= 2(6) - 7 \\ &= 5 > 0 \end{aligned}$$

Puesto que $f''(6) > 0$, un mínimo relativo se presenta en $(6, -13)$. Dado que $f'(x)$ se define para todas las x reales, no existen otros valores críticos.

❑ **Paso II.** Los valores de $f(x)$ en los puntos finales del dominio son

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{2^3}{3} - \frac{7(2^2)}{2} + 6(2) + 5 \\ &= \tfrac{8}{3} - 14 + 12 + 5 = 5\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f(10) &= \frac{(10)^3}{3} - \frac{7(10)^2}{2} + 6(10) + 5 \\ &= \frac{1\,000}{3} - \frac{700}{2} + 65 = 48\tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

❑ **Paso III.** Al comparar $f(2)$, $f(6)$ y $f(10)$ se observa que el mínimo absoluto de -13 ocurre cuando $x = 6$ y que el máximo absoluto de $48\frac{1}{3}$ se presenta cuando $x = 10$. La figura 16.22 muestra una gráfica de la función. ❑

Sección 16.4 Ejercicios de seguimiento

En los siguientes ejercicios determine las localizaciones y valores del máximo y mínimo absolutos de f.

1. $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$, donde $2 \leq x \leq 8$
2. $f(x) = -x^2 + 8x - 100$, donde $-2 \leq x \leq 4$
3. $f(x) = x^3 - 12x^2$, donde $2 \leq x \leq 10$

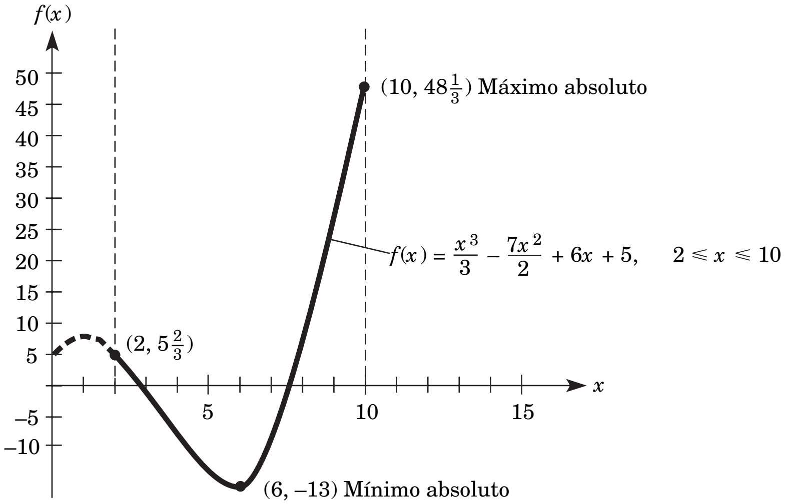


Figura 16.22

4. $f(x) = -2x^3 - 15x^2 + 10$, donde $-6 \leq x \leq +2$
5. $f(x) = x^5/5 - x - 25$, donde $3 \leq x \leq 8$
6. $f(x) = x^5/5 - 3x^4/4 + 2x^3/3 - 20$, donde $0 \leq x \leq 5$
7. $f(x) = x^6/6 - x^5 + 2.5x^4$, donde $0 \leq x \leq 4$
8. $f(x) = x^3 + 10$, donde $1 \leq x \leq 5$
9. $f(x) = -4x^2 + 6x - 10$, donde $0 \leq x \leq 10$
10. $f(x) = x^3/3 - x^2/2 - 6x$, donde $0 \leq x \leq 5$
11. $f(x) = x^4/4 - 4x^2 + 16$, donde $5 \leq x \leq 10$
12. $f(x) = x^4/4 - 7x^3/3 + 5x^2$, donde $0 \leq x \leq 4$
13. $f(x) = x^5/5 - 5x^4/4 - 14x^3/3 - 10$, donde $0 \leq x \leq 6$
14. $f(x) = x^4/4 - 8x^2 + 25$, donde $x \geq 0$
15. $f(x) = \ln(x^2 + 10)$, donde $-1 \leq x \leq 4$
16. $f(x) = x^{2/3}$, donde $0 \leq x \leq 4$
17. $f(x) = x^{1/2}$, donde $4 \leq x \leq 16$
18. $f(x) = (x - 2)^{1/3}$, donde $0 \leq x \leq 10$

❑ TÉRMINOS Y CONCEPTOS CLAVE

concavidad 774
consideraciones del dominio restringido 803
dirección final 800
función creciente 770
función decreciente 771
funciones cóncavas 779
funciones convexas 779
máximo (mínimo) absoluto 782
máximo (mínimo) relativo 782
prueba de la derivada de orden superior 794
prueba de la primera derivada 785
prueba de la segunda derivada 788
punto de inflexión 774
puntos críticos 783
valores críticos 783

EJERCICIOS ADICIONALES

SECCIÓN 16.1

Para los siguientes ejercicios, determine los intervalos sobre los cuales f es: *a*) creciente; *b*) decreciente; *c*) ni creciente ni decreciente; *d*) cóncava hacia arriba, y *e*) cóncava hacia abajo.

1. $f(x) = 2x^2 - 5x + 8$
2. $f(x) = 20 - 4x + x^2$
3. $f(x) = x^3 - 27x$
4. $f(x) = 2x^5$
5. $f(x) = b$
6. $f(x) = 5x^2 - 20x + 100$
7. $f(x) = 4x^2 - 2x + 6$
8. $f(x) = x^3/3 - x^2 + x - 5$
9. $f(x) = x^3/3 + 2x^2 + 4x$
10. $f(x) = (x - 5)^4$
11. $f(x) = (x + 3)^5$
12. $f(x) = (2x - 8)^3$

Para los ejercicios siguientes, identifique las coordenadas de cualquier punto de inflexión.

13. $f(x) = -x^5$
14. $f(x) = 3x^4/2$
15. $f(x) = 8x^3 - 2x^2 + 150$
16. $f(x) = x^4/12 + x^3 + 4x^2$
17. $f(x) = x^5/20 - x^3/6$
18. $f(x) = (x + 4)^3$
19. $f(x) = (x - 1)^5$
20. $f(x) = x^4/12 + x^3/6 - 3x^2 + 120$
21. $f(x) = x^3/6 - x^2 + 9$
22. $f(x) = x^6$
23. $f(x) = x^4/6 + 5x^3 + 12x^2 - 4$
24. $f(x) = 2x^6 - x^5$
25. $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^4$
26. $f(x) = (2x - 7)^4$

SECCIÓN 16.2

Para los siguientes ejercicios, determine la posición de todos los puntos críticos, así como su naturaleza.

27. $f(x) = 2x^2 - 16x + 30$
28. $f(x) = -x^2/2 + 8x + 7$
29. $f(x) = 4x^4$
30. $f(x) = x^4 - 25x^2/2$
31. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 40$
32. $f(x) = -2x^3 + 3x^2/2 + 3x + 1$
33. $f(x) = x^5 - x^4 - x^3/3$
34. $f(x) = (-x + 2)^6$
35. $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 + 10$
36. $f(x) = x^4 - 20x^3 + 100x^2 + 80$
37. $f(x) = 2x + 50/x$
38. $f(x) = 96\sqrt{x} - 6x$
39. $f(x) = 3x^3 - x^2/2 + 5x$
40. $f(x) = 5x^3 - x^2 + 12x$
41. $f(x) = (2x - 5)^4$
42. $f(x) = (x + 5)^3$
43. $f(x) = (x + 4)^5$
44. $f(x) = (3x - 9)^4$
45. $f(x) = x^4/4 + x^3 + x^2 + 5$
46. $f(x) = -2x^3 + 7x^2 - 4x - 9$
47. $f(x) = 30x - e^x$
48. $f(x) = 2.5x + e^{-0.5x}$
49. $f(x) = e^{(x - 0.2x^2)}$
50. $f(x) = 40x - e^{0.1x} + 50$
51. $f(x) = 10x - e^{0.2x}$
52. $f(x) = e^{(2 - 0.1x^2)}$
53. $f(x) = 40x - e^{2x}$
54. $f(x) = 3.5x - e^{1.5x}$
55. $f(x) = \ln 50x - 15x$
56. $f(x) = 8x^2 \ln x$
57. $f(x) = 80x - 20 \ln x$
58. $f(x) = 0.5x^2 - 4x - 5 \ln x + 50$
59. $f(x) = 45x - 5 \ln x$
60. $f(x) = \ln 20x - 2x$

SECCIÓN 16.3

Trace las gráficas de las funciones siguientes.

61. $f(x) = x^3/3 - 7x^2/2 + 12x$

62. $f(x) = (10 - x)^3$

63. $f(x) = (x + 5)^3$

64. $f(x) = 2x^5/5 + x^4/4 - x^3 + 1$

65. $f(x) = -2x^3 + 7x^2 - 4x - 9$

66. $f(x) = x^4/4 + x^3 + x^2 + 5$

67. $f(x) = (x + 3)^3$

68. $f(x) = x^4 - 25x^2/2$

SECCIÓN 16.4

En las funciones siguientes, determine la localización y valores del mínimo y máximo absolutos.

69. $f(x) = 3x^2 - 48x + 30$, donde $0 \leq x \leq 10$
70. $f(x) = 2x^2 - 5x + 15$, donde $-1 \leq x \leq 4$
71. $f(x) = 2x^3/3 + 3x^2 + 4x - 1$, donde $-3 \leq x \leq 5$
72. $f(x) = x^3/3 - 7x^2/2 - 30x$, donde $0 \leq x \leq 10$
73. $f(x) = 2x^5/5 - 27x^2$, donde $-2 \leq x \leq 3$
74. $f(x) = -x^6 + x^4 + 2x^3/3$, donde $-2 \leq x \leq 4$
75. $f(x) = x^4 + 5x^3 + 5.5x^2 + 6$, donde $-1 \leq x \leq 1$
76. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$, donde $-3 \leq x \leq 5$
77. $f(x) = -2x^3 + 3x^2/2 + 3x + 1$, donde $-2 \leq x \leq 4$
78. $f(x) = (-x + 2)^4$, donde $0 \leq x \leq 3$

❑ EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. Dada $f(x) = x^3/3 - 3x^2 - 40x$, determine los valores de x para los cuales f es: *a*) creciente, *b*) decreciente, *c*) ni creciente ni decreciente.

2. Trace una parte de una función para la cual: *a*) $f'(x) < 0$ y $f''(x) > 0$, y *b*) $f'(x) > 0$ y $f''(x) > 0$.

3. Para los siguientes ejercicios, determine la posición de todos los puntos críticos, así como su naturaleza.

a) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 21x + 5$
b) $f(x) = e^{-x^2+3}$

4. Dada

$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3} - 4x^2$$

identifique las posiciones de todos los puntos de inflexión.

5. Determine las localizaciones y valores del mínimo y del máximo absolutos para

$$f(x) = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x - 10, \qquad -2 \leq x \leq 3$$

6. Trace la función $f(x) = (x + 4)^5$.

CAPÍTULO 17

Optimización: aplicaciones

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Ilustrar una amplia variedad de aplicaciones para los procedimientos de optimización.
- Reforzar la habilidad para la formulación de problemas.
- Reforzar la habilidad para la interpretación de los resultados matemáticos.

ESCENARIO DE MOTIVACIÓN: Posibilidades de una construcción de tuberías

Una importante compañía petrolera está planeando construir tuberías para transportar petróleo crudo desde los pozos principales hasta un punto en donde el crudo se cargará en camiones cisterna y se enviará a las refinerías. Las tuberías deberán construirse a través de dos tipos diferentes de terreno, uno relativamente árido, y otro boscoso y denso. Los costos de construcción varían de manera significativa dependiendo del terreno. *La compañía desea determinar un plan de construcción que minimice el costo de construcción de la tubería* (ejemplo 17).

En el capítulo 16 se proporcionan las herramientas de optimización clásica. Es decir, se ofrece un método para examinar funciones con el fin de localizar los puntos máximos y mínimos. Este capítulo estará dedicado a ilustrar el uso de esos procedimientos en diversas aplicaciones. Cuando el lector comience este capítulo, no olvide que estos problemas aplicados exigen una traducción de la formulación verbal del problema a una adecuada representación matemática. Hay que tener cuidado y definir las variables (incógnitas) con exactitud. Una vez obtenida una solución matemáticamente derivada, un elemento esencial del proceso problema-solución lo constituye la traducción del resultado matemático a una recomendación práctica en el ámbito de la aplicación. A medida que se avance en este capítulo, se utilizará alguna o todas las etapas de este proceso problema-solución, como se muestra en la figura 17.1.

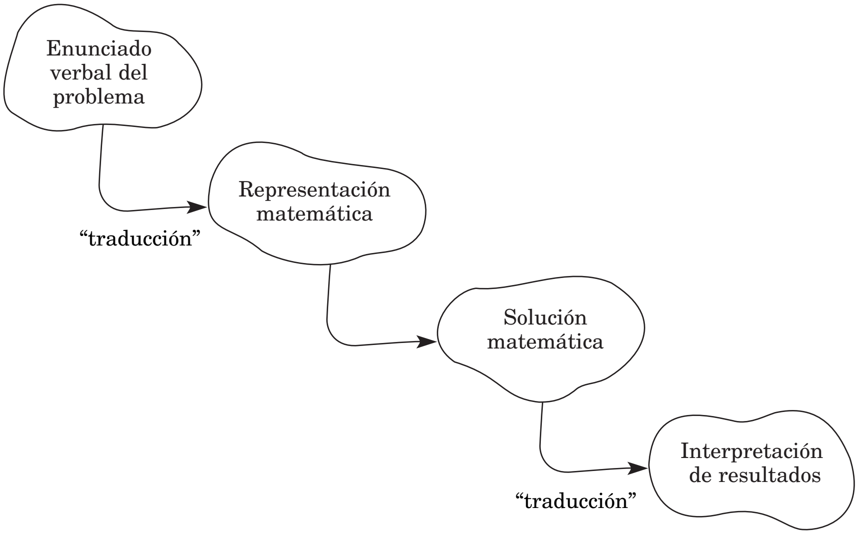


Figura 17.1 Proceso de solución de problemas.

17.1 Aplicaciones del ingreso, costo y utilidad

Aplicaciones del ingreso

Las siguientes aplicaciones se centran en la maximización de los ingresos. Recuérdese que el dinero que *entra* a una organización por la venta de productos o la prestación de servicios recibe el nombre de ***ingreso***. Y la manera fundamental de calcular el ingreso total conseguido con la venta de un producto (o servicio) es

$$\boxed{\text{Ingreso total} = (\text{precio unitario})(\text{cantidad vendida})}$$

En esta relación se supone que el precio de venta es igual para todas las unidades vendidas.

Ejemplo 1

La demanda del producto de una compañía varía según el precio que le fije al producto. La compañía ha descubierto que el ingreso total anual R (expresado en miles de dólares) es una función del precio p (en dólares). En concreto,

$$R = f(p) = -50p^2 + 500p$$

a) Determine el precio que debería cobrarse con objeto de maximizar el ingreso total.
b) ¿Cuál es el valor máximo del ingreso total anual?

SOLUCIÓN

a) En el capítulo 6 se dijo que la función de ingreso es cuadrática y que su gráfica es una parábola cóncava hacia abajo. De este modo, el valor máximo de R ocurrirá en el vértice. La primera derivada de la función de ingreso es

$$f'(p) = -100p + 500$$

Si se hace $f'(p)$ igual a 0,

$$\begin{aligned} -100p + 500 &= 0 \\ -100p &= -500 \end{aligned}$$

u ocurre un valor crítico cuando

$$p = 5$$

Aunque se sabe que un máximo relativo ocurre cuando $p = 5$ (por el conocimiento que se tiene de las funciones cuadráticas), verifique formalmente esto mediante la prueba de la segunda derivada:

$$f''(p) = -100 \qquad \text{y} \qquad f''(5) = -100 < 0$$

Por consiguiente, un máximo relativo ocurre en f cuando $p = 5$.
b) El valor máximo de R se calcula sustituyendo $p = 5$ en f, o

$$\begin{aligned} f(5) &= -50(5^2) + 500(5) \\ &= -1\,250 + 2\,500 = 1\,250 \end{aligned}$$

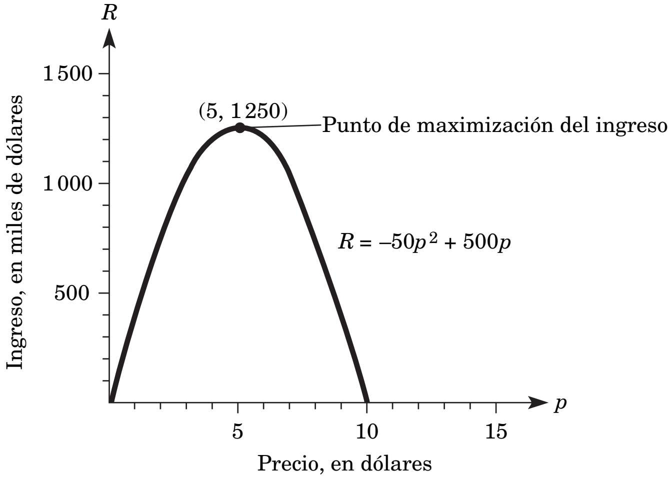


Figura 17.2 Función cuadrática de ingreso.

Así pues, se espera que el ingreso total anual se maximice en \$1 250 (miles), es decir, \$1.25 millones cuando la empresa cobre \$5 por unidad. La figura 17.2 muestra una gráfica de la función del ingreso. ❑

NOTA Esto ya se mencionó antes en el libro, cuando se hizo referencia a las aplicaciones; sin embargo, vale la pena repetirlo. Es muy frecuente que los estudiantes resuelvan un problema expresado con palabras, encuentren la solución, pero que carezcan de la habilidad de interpretar los resultados dentro del marco de la aplicación. Si el lector queda atrapado en la mecánica de la obtención de una solución y pierde temporalmente su marco de referencia respecto del problema original, vuelva a leer el problema, fijándose especialmente en cómo se definen las variables. También repase las preguntas que se hacen en el problema. Esto le ayudará a recordar los objetivos y la dirección que deberá seguir.

Ejemplo 2 (**Administración del transporte público**) Las autoridades de tránsito de una gran área metropolitana han aprobado la estructura de tarifas que rige el sistema de autobuses públicos de la ciudad. Se abandonó la estructura de tarifas por zona en la cual la tarifa depende del número de zonas por las cuales cruza el pasajero. El nuevo sistema tiene tarifas fijas: el pasajero puede viajar por el mismo precio entre dos puntos cualesquiera de la ciudad.

Las autoridades de tránsito han encuestado a los ciudadanos a fin de determinar el número de personas que utilizarían el sistema de autobuses si la tarifa fija admitiera diferentes importes. Basándose en los resultados de la encuesta, los analistas de sistemas han determinado una función aproximada de la demanda, la cual expresa el número diario de pasajeros en función de la tarifa. En concreto, la función de demanda es

$$q = 10\,000 - 125p$$

donde q representa el número de pasajeros por hora y p la tarifa en centavos.

a) Determine la tarifa que se cobraría con objeto de maximizar por hora el ingreso por la tarifa de los autobuses.

b) ¿Cuál es el ingreso máximo esperado?

c) ¿Cuántos pasajeros por hora se esperan con esta tarifa?

SOLUCIÓN

a) El primer paso es determinar una función que exprese el ingreso por hora según la tarifa *p*. Se escoge *p* como variable independiente porque se querría determinar la tarifa que produciría el ingreso máximo total. Por otra parte, la tarifa es una ***variable de decisión***, aquella cuyo valor puede fijar la administración de las autoridades de tránsito.

La expresión general del ingreso total es, como se señaló antes,

$$\boxed{R = pq}$$

Pero en esta forma *R* se expresa en función de dos variables: *p* y *q*. *En este momento* no se puede tratar la optimización de funciones con más de una variable independiente. Sin embargo, la función de demanda establece una relación entre las variables *p* y *q* que permiten transformar dicha función en una, en que *R* se expresa en función de la variable independiente *p*. El miembro derecho de la función de demanda es una expresión que establece *q* en términos de *p*. Si con esta expresión se sustituye *q* en la función de ingreso, se obtiene

$$\begin{aligned} R &= f(p) \\ &= p(10\,000 - 125p) \end{aligned}$$

o bien

$$R = 10\,000p - 125p^2$$

La primera derivada es

$$f'(p) = 10\,000 - 250p$$

Si la derivada se hace igual a 0,

$$\begin{aligned} 10\,000 - 250p &= 0 \\ 10\,000 &= 250p \end{aligned}$$

y un valor crítico ocurre cuando

$$40 = p$$

La segunda derivada se obtiene y evalúa cuando $p = 40$ para determinar la naturaleza del punto crítico:

$$f''(p) = -250$$

$$f''(40) = -250 < 0$$

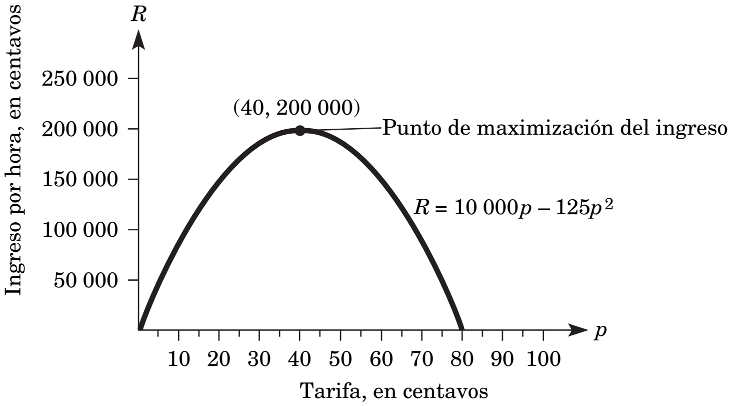


Figura 17.3 Función cuadrática de ingreso.

Así pues, ocurre un máximo relativo para f cuando $p = 40$. Puesto que f es cóncava hacia abajo en todas partes, la interpretación de este resultado es que el ingreso por hora se maximizará cuando se cobre una tarifa fija de \$0.40 (40 centavos de dólar).

b)

$$\begin{aligned} f(40) &= 10\,000(40) - 125(40)^2 \\ &= 400\,000 - 200\,000 = 200\,000 \end{aligned}$$

Dado que la tarifa se expresa en centavos, el máximo ingreso por hora esperado será de 200 000 centavos, o sea \$2 000.

c) El número de pasajeros que se espera cada hora con esta tarifa se calcula sustituyendo la tarifa en la función de demanda, es decir,

$$\begin{aligned} q &= 10\,000 - 125(40) \\ &= 10\,000 - 5\,000 \\ &= 5\,000 \text{ pasajeros por hora} \end{aligned}$$

La figura 17.3 contiene una gráfica de la función de ingreso por hora. ❑

Aplicaciones del costo

Según se mencionó antes, los costos representan *salidas de efectivo* para la organización. La mayor parte de las empresas buscan el modo de reducirlas al mínimo. En la presente sección se dan aplicaciones que se refieren a la minimización de alguna medida del costo.

Ejemplo 3

(**Administración del inventario**) Un problema común de las organizaciones es determinar qué cantidad de un artículo deberá conservarse en almacén. Para los minoristas, el problema se relaciona a veces con el número de unidades de cada producto que ha de mantenerse en inventario. Para los productores consiste en decidir qué cantidad de cada materia prima debe estar disponible. Este problema se identifica con un área o especialidad, denominada ***control del inventario*** o ***administración del***

inventario. Por lo que respecta a la pregunta de cuánto "inventario" ha de conservarse, el hecho de tener demasiado, poco o mucho inventario puede acarrear costos.

Un minorista de bicicletas motorizadas ha analizado los datos referentes a los costos, y determinó una función de costo que expresa el costo anual de comprar, poseer y mantener el inventario en función del tamaño (número de unidades) de cada pedido de bicicletas que coloca. He aquí la función de costo

$$C = f(q) = \frac{4\,860}{q} + 15q + 750\,000$$

donde C es el costo anual del inventario, expresado en dólares, y q denota el número de bicicletas ordenadas cada vez que el minorista repone la oferta.

a) Determine el tamaño de pedido que minimice el costo anual del inventario.

b) ¿Cuál se espera que sea el costo mínimo anual del inventario?

SOLUCIÓN

a) La primera derivada es

$$f'(q) = -4\,860q^{-2} + 15$$

Si f' se hace igual a 0,

$$-4\,860q^{-2} + 15 = 0$$

cuando

$$\frac{-4\,860}{q^2} = -15$$

La multiplicación de ambos miembros por q^2 y su división entre -15 producen

$$\frac{4\,860}{15} = q^2$$

$$324 = q^2$$

Tomando la raíz cuadrada de ambos lados, existen valores críticos en

$$\pm 18 = q$$

El valor $q = -18$ no tiene sentido en esta aplicación (las cantidades de pedidos negativas no son posibles). La naturaleza del único punto crítico significativo ($q = 18$) se verifica al obtener f'':

$$f''(q) = 9\,720q^{-3}$$

$$= \frac{9\,720}{q^3}$$

Al evaluar el valor crítico se obtiene

$$f''(18) = \frac{9\,720}{(18)^3}$$

$$= 1.667 > 0$$

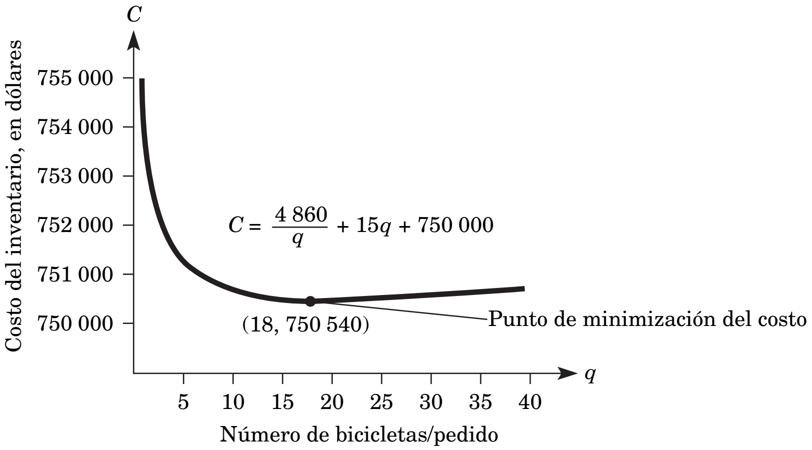


Figura 17.4 Función de costo del inventario.

Nótese que $f''(q) > 0$ para $q > 0$. Por consiguiente, la gráfica de *f* será cóncava hacia arriba en todas partes. De esta manera, el valor mínimo de *f* se presenta cuando $q = 18$. Los costos anuales del inventario se minimizarán cuando se pidan 18 bicicletas cada vez que el minorista reponga las existencias.

b) Los costos anuales mínimos del inventario se determinan calculando $f(18)$, o

$$\begin{aligned} f(18) &= \frac{4\,860}{18} + 15(18) + 750\,000 \\ &= 270 + 270 + 750\,000 = \$750\,540 \end{aligned}$$

La figura 17.4 es una gráfica de la función del costo. (El minicaso al final del capítulo analiza suposiciones subyacentes a la función de costo del inventario en este ejemplo.)

Ejemplo 4

(Minimización del costo promedio por unidad) El costo total de la producción de q unidades de cierto producto se describe mediante la función

$$C = 100\,000 + 1\,500q + 0.2q^2$$

donde C es el costo total expresado en dólares. Determine cuántas unidades q deberían fabricarse a fin de minimizar el *costo promedio por unidad.*

SOLUCIÓN

El costo promedio por unidad se calcula dividiendo el costo total entre el número de unidades producidas. Por ejemplo, si el costo total de la fabricación de 10 unidades de un producto es de \$275, el costo promedio por unidad será \$275/10 = \$27.50. Así pues, la función que representa el costo promedio por unidad en este ejemplo es

$$\overline{C} = f(q) = \frac{C}{q} = \frac{100\,000}{q} + 1\,500 + 0.2q$$

La primera derivada de la función del costo promedio es

$$f'(q) = -100\,000q^{-2} + 0.2$$

Si f' se hace igual a 0,

$$0.2 = \frac{100\,000}{q^2}$$

o bien

$$\begin{aligned} q^2 &= \frac{100\,000}{0.2} \\ &= 500\,000 \end{aligned}$$

Al obtener la raíz cuadrada de ambos miembros, se tiene un valor crítico de

$$q = \pm 707.11 \text{ (unidades)}$$

El valor $q = -707.11$ no tiene sentido en esta aplicación, puesto que el nivel de producción, q, debe ser positivo.

La naturaleza del único punto crítico relevante se determina por la prueba de la segunda derivada:

$$\begin{aligned} f''(q) &= 200\,000q^{-3} \\ &= \frac{200\,000}{q^3} \\ f''(707.11) &= \frac{200\,000}{(707.11)^3} \\ &= 0.00056 > 0 \end{aligned}$$

La segunda derivada $f''(p)$ es positiva para $q > 0$, lo que significa que la gráfica de f es cóncava hacia arriba para $q > 0$. Por lo tanto, un mínimo relativo ocurre para f cuando $q = 707.11$. Este costo promedio mínimo por unidad es

$$\begin{aligned} f(707.11) &= \frac{100\,000}{707.11} + 1\,500 + 0.2(707.11) \\ &= 141.42 + 1\,500 + 141.42 = \$1\,782.84 \end{aligned}$$

La figura 17.5 es una gráfica de la función de costo promedio.

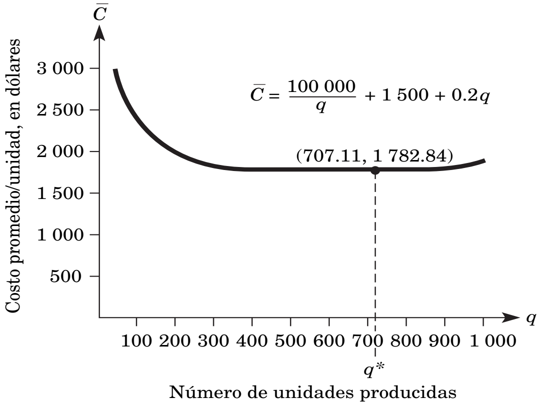


Figura 17.5 Función del costo promedio.

❑

Ejercicio de práctica

En el ejemplo 4, ¿cuál es el costo total de fabricación en este nivel de producción? ¿Cuáles son las dos formas en que puede calcularse esta cifra? *Respuesta*: $1 260 663.90.

Aplicaciones de la utilidad

Esta sección contiene dos ejemplos que se refieren a la maximización de utilidades.

Ejemplo 5

(Asignación de la fuerza de ventas) En el ejemplo 1 del capítulo 6 se explicó la *ley de rendimientos decrecientes* como un caso de una función no lineal. Una importante compañía que vende cosméticos y productos de belleza, que se especializa en la venta domiciliaria (casa por casa), descubrió que la respuesta de las ventas a la asignación de más representantes se ajusta a la ley de rendimientos decrecientes. En un distrito regional de ventas, la compañía ha averiguado que la *utilidad anual P, expresada en cientos de dólares, es una función del número de representantes de ventas x asignados a ese distrito.* Específicamente, la función que relaciona esas dos variables es la siguiente

$$P = f(x) = -12.5x^2 + 1\,375x - 1\,500$$

a) ¿Qué número de representantes producirá la utilidad máxima en el distrito?
b) ¿Cuál es la utilidad máxima esperada?

SOLUCIÓN

a) La derivada de la función de utilidad es

$$f'(x) = -25x + 1\,375$$

Si f' se hace igual a 0,

$$-25x = -1\,375$$

o bien, ocurre un valor crítico cuando

$$x = 55$$

Al comprobar la naturaleza del punto crítico, se obtiene

$$f''(x) = -25 \qquad \text{y} \qquad f''(55) = -25 < 0$$

Puesto que la gráfica de f es cóncava hacia abajo en todas partes, el máximo valor de f se presenta cuando $x = 55$.
b) La utilidad máxima esperada es

$$\begin{aligned} f(55) &= -12.5(55)^2 + 1\,375(55) - 1\,500 \\ &= -37\,812.5 + 75\,625 - 1\,500 = 36\,312.5 \end{aligned}$$

Podemos concluir que la utilidad anual será maximizada en un valor de $36 312.5 (cientos), es decir, $3 631 250 si se asignan 55 representantes al distrito. La figura 17.6 ofrece una gráfica de la función de utilidad. ❑

PUNTO PARA PENSAR Y ANALIZAR

¿Qué representan en la figura 17.6 las intersecciones con el eje x? Interprete el significado de la intersección con el eje y. Analice la ley de rendimientos decrecientes en su aplicación a la forma de esta función de utilidad.

Ejemplo 6

(Energía solar) Un fabricante ha ideado un nuevo diseño para los paneles solares colectores. Según los estudios de mercadotecnia que se han realizado, la demanda anual de los paneles dependerá del precio al que se venden. La función de su demanda se ha estimado así:

$$q = 100\,000 - 200p \qquad \textbf{(17.1)}$$

donde q es el número de unidades demandadas al año y p representa el precio en dólares. Los estudios de ingeniería indican que el costo total de la producción de q paneles está muy bien estimado por la función

$$C = 150\,000 + 100q + 0.003q^2 \qquad \textbf{(17.2)}$$

Formule la función de utilidad $P = f(q)$ que exprese la utilidad anual P en función del número de unidades q que se producen y venden.

SOLUCIÓN

Se ha pedido desarrollar una función que exprese la utilidad P en términos de q. A diferencia del ejemplo 5, *hay que construir* la función de utilidad. La ecuación (17.2) es una función del costo total formulado en términos de q. No obstante, se necesita formular una función del ingreso total expresada en términos de q. La estructura básica para calcular el ingreso total es

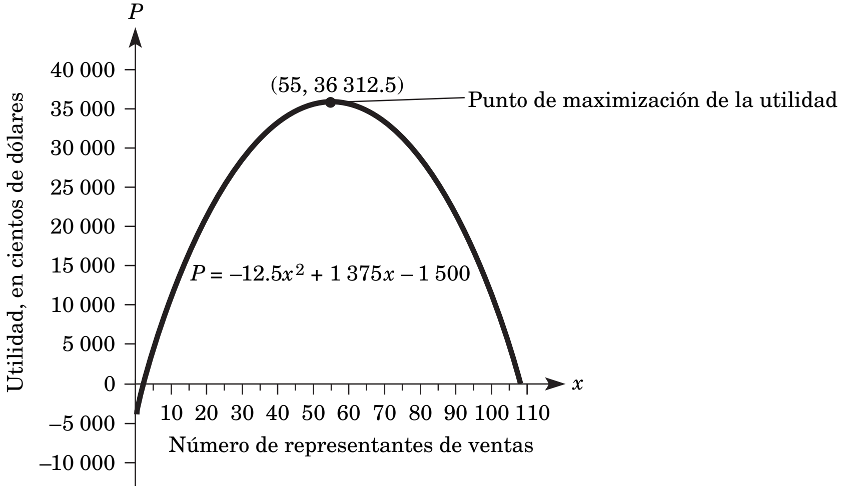


Figura 17.6 Función de la utilidad.

$$R = pq \tag{17.3}$$

Como se quiere que R se exprese en términos de q, se necesita reemplazar p en la ecuación (17.3) por una expresión equivalente que puede derivarse de la función de demanda. Al despejar p en la ecuación (17.1), se obtiene

$$200p = 100\,000 - q$$

o bien

$$p = 500 - 0.005q \tag{17.4}$$

Se puede sustituir el lado derecho de esta ecuación en la fórmula (17.3) para obtener la función de ingreso

$$\begin{aligned} R &= (500 - 0.005q)q \\ &= 500q - 0.005q^2 \end{aligned}$$

Ahora que las funciones de ingreso y de costo se han expresado en términos de q, es posible definir la función de utilidad como

$$\begin{aligned} P &= f(q) \\ &= R - C \\ &= 500q - 0.005q^2 - (150\,000 + 100q + 0.003q^2) \\ &= 500q - 0.005q^2 - 150\,000 - 100q - 0.003q^2 \end{aligned}$$

o bien

$$P = -0.008q^2 + 400q - 150\,000$$

❏

Ejercicio de práctica

En el ejemplo 6 determine: *a*) el número de unidades q que deberían producirse para maximizar la utilidad anual; *b*) el precio que tendría que cobrarse por cada panel para generar una demanda igual a la respuesta en el inciso *a*), y *c*) la máxima utilidad anual. *Respuesta*: *a*) $q = 25\,000$ unidades, *b*) $p = \$375$, *c*) \$4 850 000.

Ejemplo 7

(Dominio restringido) En el último ejemplo, suponga que la capacidad de producción anual del fabricante es de 20 000 unidades. Resuelva de nuevo el ejemplo 6 con esta restricción adicional.

SOLUCIÓN

Con nuestra restricción adicional, el dominio de la función está definido como $0 \leq q \leq 20\,000$. De acuerdo con la sección 16.4, recuérdese que deben compararse los valores de $f(q)$ en los puntos finales del dominio con los de $f(q^*)$ para cualquier valor q^*, donde $0 \leq q^* \leq 20\,000$.

El único punto crítico en la función de utilidades ocurre en $q = 25\,000$, que se encuentra fuera del dominio. Por ello, la utilidad será maximizada en uno de los puntos finales. Al evaluar $f(q)$ en ellos se obtiene

$$f(0) = -150\,000$$

y

$$\begin{aligned} f(20\,000) &= -0.008(20\,000)^2 + 400(20\,000) - 150\,000 \\ &= -3\,200\,000 + 8\,000\,000 - 150\,000 = 4\,650\,000 \end{aligned}$$

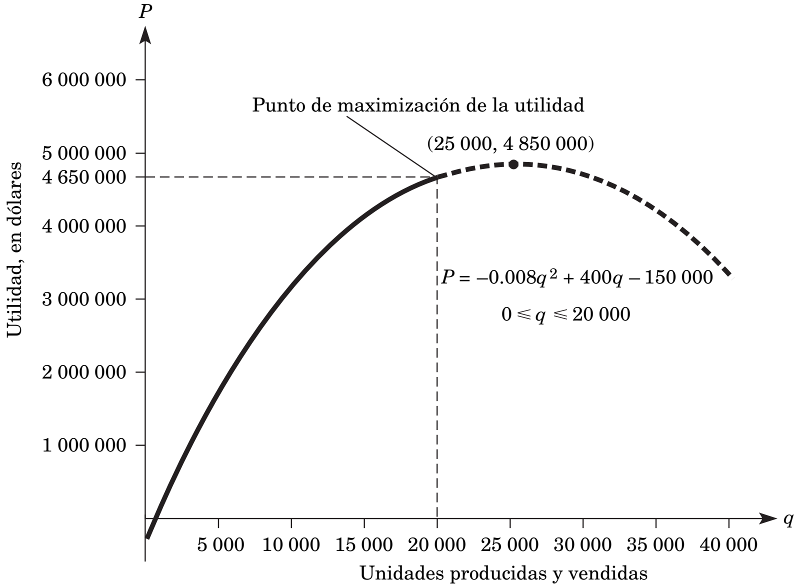


Figura 17.7 Función de utilidad/dominio restringido.

La utilidad se maximiza en un valor de \$4 650 000 cuando $q = 20\,000$ o cuando el fabricante opera a toda su capacidad.

El precio que debería fijarse se calcula sustituyendo $q = 20\,000$ en la ecuación (17.4), o

$$\begin{aligned} p &= 500 - 0.005(20\,000) \\ &= 500 - 100 = \$400 \end{aligned}$$

La figura 17.7 contiene una gráfica de la función de utilidad. ❑

Aproximación marginal para la maximización de la utilidad

Otro método para calcular el punto de maximización de la utilidad es el ***análisis marginal***. Este método, que goza de gran aceptación entre los economistas, examina los *efectos incrementales* en la rentabilidad. Si una firma está produciendo determinado número de unidades al año, el análisis marginal se ocupa del efecto que se refleja en la utilidad si se produce y se vende *una* unidad más.

Para que este método pueda aplicarse a la maximización de utilidades, es preciso que se cumplan las siguientes condiciones.

Condiciones para usar la aproximación marginal

I *Deberá ser posible identificar por separado las funciones del ingreso total y del costo total.*

II *Las funciones del ingreso y costo habrán de formularse en términos del nivel de producción o del número de unidades producidas y vendidas.*

Ingreso marginal. Uno de los dos conceptos más importantes del análisis marginal es el del ingreso marginal. *El* ***ingreso marginal*** *es el ingreso adicional que se consigue al vender una unidad más de un producto o servicio.* Si cada unidad de un producto se vende al mismo precio, el ingreso marginal será siempre igual al precio. Por ejemplo, la función lineal de ingreso

$$R = 10q$$

representa una situación donde cada unidad se vende a \$10. El ingreso marginal logrado con la venta de una unidad más es de \$10 en cualquier nivel de producción q.

En el ejemplo 6, una función de demanda para los paneles solares se estableció así

$$q = 100\,000 - 200p$$

A partir de esta función de demanda se formuló la función no lineal de ingreso total

$$R = f_1(q) = 500q - 0.005q^2 \tag{17.5}$$

El ingreso marginal en este ejemplo no es constante. Esto se mostró al calcular el ingreso total para distintos niveles de producción. La tabla 17.1 contiene estos cálculos para algunos valores de q. La tercera columna representa el ingreso marginal asociado al paso de un nivel de producción a otro. Nótese que, si bien las diferencias son ligeras, los valores del ingreso marginal están cambiando en cada nivel diferente de producción.

Tabla 17.1

Cálculo del ingreso marginal

Nivel producción q	**Ingreso total $f_1(q)$**	**Ingreso marginal $\Delta R = f_1(q) - f_1(q-1)$**
100	\$49 950.00	
101	\$50 448.995	\$498.995
102	\$50 947.98	\$498.985
103	\$51 446.955	\$498.975

Para una función del ingreso total $R(q)$, la derivada $R'(q)$ representa la razón de cambio instantánea en el ingreso total con un cambio del número de unidades vendidas. R' también representa una expresión general de la pendiente de la gráfica de la función del ingreso total. En el análisis marginal, la derivada se emplea para representar el ingreso marginal, es decir,

$$\boxed{MR = R'(q)} \tag{17.6}$$

La derivada, según se explicó en el capítulo 15, ofrece una aproximación a los cambios reales que se dan en el valor de una función. Por lo tanto, R' puede emplearse para aproximar el ingreso marginal obtenido con la venta de la siguiente unidad. Si se calcula R' para la función del ingreso en la ecuación (17.5),

$$R'(q) = 500 - 0.010q$$

Para aproximar el ingreso marginal logrado con la venta de la unidad 101, se evalúa R' cuando $q = 100$, o

$$\begin{aligned} R'(100) &= 500 - 0.010(100) \\ &= 500 - 1 = 499 \end{aligned}$$

Ésta es una aproximación muy cercana al valor real ($498.995) del ingreso marginal que aparece en la tabla 17.1.

Costo marginal. El otro concepto central del análisis marginal lo constituye el costo marginal. *El **costo marginal** es el costo adicional en que se incurre al producir y vender una unidad de un producto o servicio.* Las funciones lineales del costo suponen que el costo variable por unidad sea constante; en ellas, el costo marginal es el mismo en cualquier nivel de producción. Un ejemplo de ello es la función de costo

$$C = 150\,000 + 3.5q$$

donde el costo variable por unidad es $3.50. El costo marginal para esta función de costo es siempre $3.50.

Una función no lineal de costo es caracterizada por costos marginales variables. Esto se ejemplifica en la función de costo

$$C = f_2(q) = 150\,000 + 100q + 0.003q^2 \tag{17.7}$$

que se utilizó en el ejemplo 6. Puede mostrarse que los costos marginales realmente fluctúan en distintos niveles de producción si se calculan los valores de esos costos para algunos valores de q. Este cálculo se da en la tabla 17.2.

En una función de costo total $C(q)$, la derivada $C'(q)$ representa la razón de cambio instantánea del costo total suponiendo que haya un cambio en el número de unidades producidas. $C'(q)$ representa además una expresión general para la pendiente de la gráfica de la función del costo total. En el análisis marginal, la derivada se usa para representar el costo marginal, o

$$\boxed{MC = C'(q)} \tag{17.8}$$

Tabla 17.2

Cálculo del costo marginal

Nivel de producción q	**Ingreso total $f_2(q)$**	**Ingreso marginal $\Delta C = f_2(q) - f_2(q-1)$**
100	$160 030.00	
101	$160 130.603	$100.603
102	$160 231.212	$100.609
103	$160 331.827	$100.615

Como en el caso de R', C' puede emplearse para aproximar el costo marginal asociado a la producción de la siguiente unidad. La derivada de la función de costo en la ecuación (17.7) es

$$C'(q) = 100 + 0.006q$$

Para aproximar el costo marginal debido a la producción de la unidad 101, se evalúa C' en $q = 100$, o

$$\begin{aligned} C'(100) &= 100 + 0.006(100) \\ &= \$100.60 \end{aligned}$$

Si se compara este valor con el valor real (\$100.603) en la tabla 17.2, se advierte que ambos están muy cercanos entre sí.

Análisis de la utilidad marginal. Como se indicó antes, este análisis se ocupa del efecto que se opera en las utilidades si se produce y vende una unidad adicional. Cuanto el ingreso adicional conseguido con la venta de la siguiente unidad sea mayor que el costo de producirla y venderla, habrá una utilidad neta con su producción y venta, aumentando también la utilidad total. Pero si es menor que el costo de producir y vender la unidad adicional, habrá una pérdida neta en esa unidad y disminuirá la utilidad total. A continuación se da una regla práctica para saber si debe o no producirse una unidad adicional (suponiendo que la utilidad sea de gran importancia).

Regla práctica: ¿Debería producirse una unidad adicional?

I *Si $MR > MC$, se producirá la siguiente unidad.*

II *Si $MR < MC$, no se producirá la siguiente unidad.*

En muchas situaciones de producción, el ingreso marginal rebasa al costo marginal en niveles más bajos de producción. A medida que aumenta el nivel de producción (cantidad producida), disminuye la cantidad en que el ingreso marginal excede al costo marginal. Con el tiempo se llega a un nivel en que $MR = MC$. Más allá de este punto $MR < MC$, y la utilidad total empieza a disminuir al incrementarse la producción. Así, si puede identificarse el punto donde $MR = MC$ para la última unidad producida y vendida, la utilidad total será maximizada. Este nivel de producción que maximiza la utilidad puede identificarse mediante la siguiente condición.

Criterio de maximización de la utilidad

Se producirá hasta alcanzar el nivel de producción en que

$$MR = MC \tag{17.9}$$

Expresado en términos de las derivadas, este criterio recomienda producir hasta el punto donde

$$\boxed{R'(q) = C'(q)} \tag{17.10}$$

Esta ecuación es resultado natural de hallar el punto donde la función de utilidad es maximizada, es decir, establecer la derivada de

$$P(q) = R(q) - C(q)$$

igual a 0 y resolver para q.

$$P'(q) = R'(q) - C'(q)$$

y $$P'(q) = 0$$

cuando $$R'(q) - C'(q) = 0$$

o bien $$R'(q) = C'(q)$$

Sea q^* un valor donde $R'(q) = C'(q)$. La segunda derivada de P es $P''(q) = R''(q) - C''(q)$. Por la prueba de la segunda derivada, la utilidad se maximizará en $q = q^*$ siempre que

$$P''(q^*) < 0$$

o $$R''(q^*) - C''(q^*) < 0$$

o bien $$R''(q^*) < C''(q^*)$$

Si $R''(q) < C''(q)$ para todos los valores de $q > 0$, entonces la utilidad tiene un valor máximo absoluto de $q = q^*$.

Condición suficiente para la maximización de la utilidad

Si se tiene un nivel de producción q^* en que $R'(q) = C'(q)$ (o $MR = MC$), la producción de q^* dará por resultado la maximización de la utilidad si

$$R''(q^*) < C''(q^*) \tag{17.11}$$

Ejemplo 8 Resuelva de nuevo el ejemplo 6 haciendo uso de la aproximación marginal.

SOLUCIÓN

En el ejemplo 6

$$R = 500q - 0.005q^2$$

y $$C = 150\,000 + 100q + 0.003q^2$$

Debido a que las funciones de ingreso y costo son distintas y ambas se expresan en términos del nivel de producción q, las dos condiciones para efectuar el análisis marginal quedan satisfechas. Ya se ha determinado que

$$R'(q) = 500 - 0.01q$$

y
$$C'(q) = 100 + 0.006q$$

Por lo tanto,
$$R'(q) = C'(q)$$

cuando
$$500 - 0.01q = 100 + 0.006q$$
$$-0.016q = -400$$

o
$$q^* = 25\,000$$

Puesto que
$$R''(q^*) = -0.01 \qquad \text{y} \qquad C''(q^*) = 0.006$$
$$R''(q^*) < C''(q^*)$$

o bien
$$-0.01 < 0.006$$

y se tiene un máximo relativo en la función de utilidad cuando $q = 25\,000$. La figura 17.8 presenta las gráficas de $R(q)$ y $C(q)$.

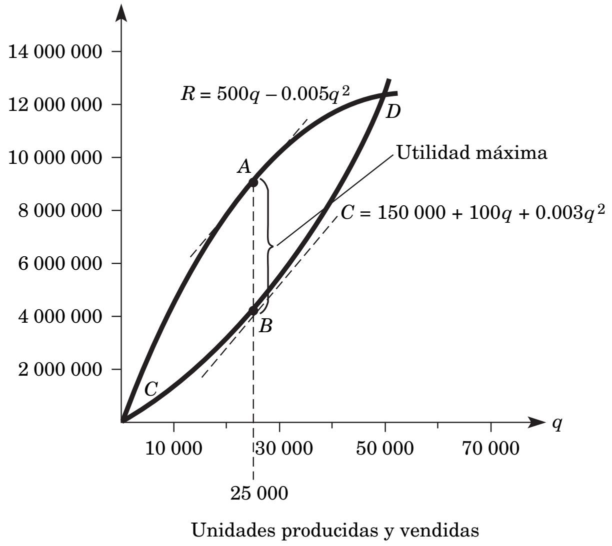


Figura 17.8 Análisis marginal: maximización de la utilidad.

Hagamos una pausa para examinar detenidamente la figura 17.8. Vale la pena hacer las siguientes observaciones:

1. *Los puntos C y D representan los puntos donde se intersecan las funciones de ingreso y de costo. Estas últimas representan puntos de equilibrio.*
2. *Entre los puntos C y D, la función de ingreso se halla arriba de la de costo, lo cual indica que el ingreso total es mayor que el costo total y que se lograrán utilidades dentro de este intervalo. Para los niveles de producción a la derecha de D, la función de costo se halla arriba de la de ingresos, lo cual indica que el costo total es mayor que el ingreso total, resultando de ello una utilidad negativa (pérdida).*

3. *La distancia vertical que separa las gráficas de las dos funciones representa la utilidad o pérdida, según el nivel de la producción.*
4. *En el intervalo $0 \leq q \leq 25\,000$, la pendiente de la función de ingreso es positiva y mayor que la pendiente de la función de costo. Expresado en términos de MR y MC, $MR > MC$ en este intervalo.*
5. *Por otra parte, en el intervalo $0 \leq q \leq 25\,000$ la distancia vertical entre las dos curvas aumenta y esto indica que la utilidad está aumentando en el intervalo.*
6. *En $q = 25\,000$ las pendientes en los puntos A y B son iguales, lo cual indica que $MR = MC$. Asimismo, en $q = 25\,000$, la distancia vertical que separa las dos curvas es mayor que en cualquier otro punto de la región de utilidades; por lo tanto, éste es el punto de la maximización de utilidades.*
7. *Para $q > 25\,000$, la pendiente de la función de ingreso es positiva pero es menos positiva para la función de costo. Así pues, $MR < MC$ y disminuye para cada utilidad adicional por unidad, lo cual ocasiona una pérdida más allá del punto D.*

Ejemplo 9

En el ejemplo 5 se pidió determinar el número de representantes de ventas x que producirían una utilidad máxima P en una empresa de cosméticos y artículos de belleza. La función de utilidades se formuló así

$$P = f(x) = -12.5x^2 + 1\,375x - 1\,500$$

Con el método del análisis marginal, determine el número de representantes que producirían la utilidad máxima para la empresa.

SOLUCIÓN

No es posible aplicar el método del análisis marginal en este ejemplo porque no pueden identificarse las funciones de ingreso y costo totales que se combinaron para formar la función de utilidad. No se satisfizo la condición 1 del empleo del análisis marginal.

Ejemplo 10

La figura 17.9 muestra una gráfica de la función lineal de ingreso y de la función no lineal de costo. A la izquierda de q^*, la pendiente de la función de ingreso excede a la de la función de costo, lo cual indica que $MR > MC$.

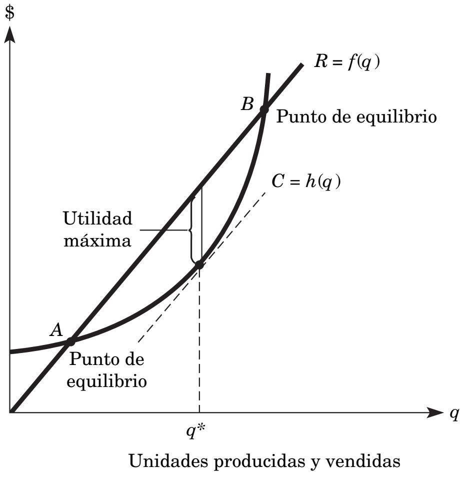


Figura 17.9 Funciones del ingreso lineal y del costo cuadrático.

En q^* las pendientes de ambas funciones son iguales. La distancia vertical que las separa es mayor en q^* que en cualquiera otro valor de q entre los puntos A y B. Estos dos son los puntos de equilibrio. ❑

Sección 17.1 Ejercicios de seguimiento

1. Una compañía ha descubierto que el ingreso total es una función del precio fijado a su producto. En concreto, la función del ingreso total es

$$R = f(p) = -10p^2 + 1\,750p$$

donde p es el precio en dólares.

a) Determine el precio p que produce el máximo ingreso total.
b) ¿Cuál es el valor máximo del ingreso total?

2. La función de demanda del producto de una firma es

$$q = 150\,000 - 75p$$

donde q representa el número de unidades demandadas y p indica su precio en dólares.

a) Determine el precio que deberá cobrarse para maximizar el ingreso total.
b) ¿Cuál es el valor máximo del ingreso total?
c) ¿Cuántas unidades se espera que se demanden?

3. La utilidad anual de una compañía depende del número de unidades producidas. Específicamente, la función que describe la relación existente entre la utilidad P (expresada en dólares) y el número de unidades producidas x es

$$P = -0.01x^2 + 5\,000x - 25\,000$$

a) Determine el número de unidades x que producirán la utilidad máxima.
b) ¿Cuál es la utilidad máxima esperada?

4. Administración de playas Una comunidad, situada en una zona vacacional, está tratando de escoger una tarifa de estacionamiento que fijará a la playa del pueblo. En la zona hay otras playas, y todas ellas compiten por atraer a los bañistas. El municipio ha optado por la siguiente función que expresa el número promedio de automóviles por día q en términos de la tarifa de estacionamiento p expresada en centavos.

$$q = 6\,000 - 12p$$

a) Determine la tarifa que debería cargarse para maximizar los ingresos diarios de la playa.
b) ¿Cuál se espera que sea el máximo ingreso diario de la playa?
c) ¿Cuántos automóviles se esperan en un día promedio?

5. Administración del impuesto de importación El gobierno estadounidense está estudiando la estructura de los impuestos de importación para los televisores de color traídos de otros países. El gobierno está tratando de determinar el impuesto que impondrá a cada aparato. Sabe bien que ese impuesto repercutirá en la demanda de los televisores importados. Estima que la demanda

D, medida en cientos de televisores, guarda relación con el impuesto de importación t, medido en centavos, de acuerdo con la función

$$D = 80\,000 - 12.5t$$

a) Determine el impuesto de importación que produce los máximos ingresos fiscales en la importación de los televisores.
b) ¿Cuál es el ingreso máximo?
c) ¿Cuál será la demanda de los televisores importados de color con este impuesto?

6. Un fabricante ha calculado una función de costo que expresa el costo anual de la compra, posesión y mantenimiento del inventario de sus materias primas en términos del tamaño de cada pedido. La función de costo es

$$C = \frac{51\,200}{q} + 80q + 750\,000$$

donde q es el tamaño de cada pedido (en toneladas) y C el costo anual del inventario.
a) Determine el tamaño de pedido q que minimice el costo anual del inventario.
b) ¿Cuáles se esperan que sean los mínimos costos del inventario?

7. En el ejercicio 6, suponga que la cantidad máxima de materias primas que puede aceptarse en un embarque cualquiera es de 20 toneladas.
a) Con esta restricción, determine el tamaño de pedido q que minimice el costo anual del inventario.
b) ¿Cuáles son los mínimos costos anuales del inventario?
c) ¿Qué relación tienen estos resultados con los del ejercicio 6?

8. Un gran distribuidor de pelotas de tenis está prosperando mucho. Uno de los principales problemas del distribuidor es mantener el ritmo de demanda de las pelotas de tenis. Las compra periódicamente a un fabricante de artículos deportivos. El costo anual de la compra, posesión y mantenimiento del inventario de las pelotas de tenis se describe mediante la función

$$C = \frac{280\,000}{q} + 0.15q + 2\,000\,000$$

donde q es el tamaño de pedido (en docenas de pelotas de tenis) y C indica el costo anual del inventario.
a) Determine el tamaño de pedido q que minimice el costo anual del inventario.
b) ¿Cuáles se espera que sean los costos mínimos del inventario?

9. El distribuidor del ejercicio 8 cuenta con instalaciones de almacenamiento para recibir un máximo de 1 200 docenas de pelotas en cada embarque.
a) Determine el tamaño de pedido q que minimice los costos anuales del inventario.
b) ¿Cuáles son los costos mínimos del inventario?
c) ¿Qué relación guardan estos resultados con los obtenidos en el ejercicio 8?

10. El costo total de producir q unidades de cierto producto se describe mediante la función

$$C = 5\,000\,000 + 250q + 0.002q^2$$

donde C es el costo total expresado en dólares.

a) ¿Cuántas unidades deberán producirse a fin de minimizar el costo promedio por unidad?
b) ¿Cuál es el mínimo costo promedio por unidad?
c) ¿Cuál es el costo total de producción en este nivel de producción?

11. El costo total de fabricar q unidades de cierto producto se describe con la función

$$C = 350\,000 + 7\,500q + 0.25q^2$$

donde C es el costo total expresado en dólares.

a) Determine cuántas unidades q deberían producirse con objeto de minimizar el *costo promedio por unidad*.
b) ¿Cuál es el mínimo costo promedio por unidad?
c) ¿Cuál es el costo total de producción en este nivel de producción?

12. Resuelva de nuevo el ejercicio 11 si la capacidad máxima de producción es de 1 000 unidades.

13. **Servicios públicos** Una compañía de televisión por cable ha averiguado que su rentabilidad depende de la tarifa mensual que cobra a sus clientes. Específicamente, la relación que describe la utilidad anual P (en dólares) en función de la tarifa mensual de renta r (en dólares) es la siguiente

$$P = -50\,000r^2 + 2\,750\,000r - 5\,000\,000$$

a) Determine la tarifa de renta mensual r que dé por resultado la utilidad máxima.
b) ¿Cuál es la utilidad máxima esperada?

14. En el ejercicio 13 suponga que la comisión local de servicios públicos ha impuesto a la compañía de televisión por cable la obligación de no cobrar una tarifa mayor que $20.

a) ¿Cuál tarifa produce la utilidad máxima a la compañía?
b) ¿Cuál es el efecto que la decisión de la comisión tiene en la rentabilidad de la empresa?

15. Una compañía estima que la demanda de su producto fluctúa con su precio. La función de la demanda es

$$q = 280\,000 - 400p$$

donde q es el número de unidades demandadas y p el precio en dólares. El costo total de producir q unidades se estima con la función

$$C = 350\,000 + 300q + 0.0015q^2$$

a) Determine cuántas unidades q deberían producirse con objeto de maximizar la utilidad anual.
b) ¿Qué precio debería fijarse?
c) ¿Cuál se espera que sea la utilidad anual?

16. Resuelva el ejercicio anterior, usando la aproximación marginal para maximizar las utilidades.

17. Si en el ejercicio 15 la capacidad anual es de 40 000 unidades, ¿cuántas unidades q darán por resultado la utilidad máxima? ¿Cuál es la pérdida en la utilidad atribuida a la capacidad restrictiva?

18. Una manera equivalente de resolver el ejemplo 2 consiste en expresar el ingreso total en función de q, el número promedio de pasajeros por hora. Formule la función $R = g(q)$ y determine el número de pasajeros q que produzca el máximo ingreso total. Verifique que tanto el valor máximo de R como el precio que debería fijarse sean los mismos que los que se obtuvieron en el ejemplo 2.

19. Las funciones de costo e ingreso totales de un producto son

$$C(q) = 500 + 100q + 0.5q^2$$

$$R(q) = 500q$$

a) Mediante la aproximación marginal determine el nivel de producción que maximice las utilidades.

b) ¿Cuál es la utilidad máxima?

20. Una empresa vende cada unidad de un producto en \$50. El costo total de producir x (mil) unidades se describe mediante la función

$$C(x) = 10 - 2.5x^2 + x^3$$

donde $C(x)$ se mide en miles de dólares.

a) Utilice la aproximación marginal para determinar el nivel de producción que maximice las utilidades.

b) ¿Cuál es el ingreso total en este nivel de producción? ¿El costo total? ¿Las utilidades totales?

21. La función de utilidad de una firma es

$$P(q) = -4.5q^2 + 36\,000q - 45\,000$$

a) Con la aproximación marginal, determine el nivel de producción que maximice las utilidades.

b) ¿Cuál es la utilidad máxima?

22. Las funciones de costo e ingreso totales de un producto son

$$C(q) = 5\,000\,000 + 250q + 0.002q^2$$

$$R(q) = 1\,250q - 0.005q^2$$

a) Mediante la aproximación marginal, determine el nivel de producción que maximice las utilidades.

b) ¿Cuál es la utilidad máxima?

23. Las funciones de costo e ingreso totales de un producto son

$$C(q) = 40\,000 + 25q + 0.002q^2$$

$$R(q) = 75q - 0.008q^2$$

a) Con la aproximación marginal, determine el nivel de producción que maximice las utilidades.

b) ¿Cuál es la utilidad máxima?

24. En la figura 17.10 se describe una función de costo total $C(q)$ y una de ingreso total $R(q)$. Explique la importancia económica de los cuatro niveles de producción q_1, q_2, q_3 y q_4.

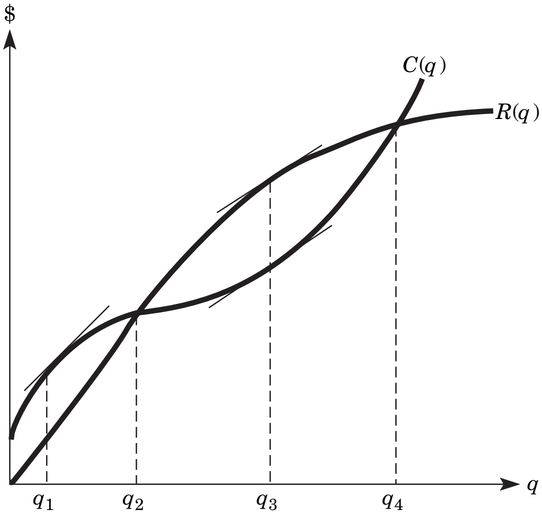


Figura 17.10

17.2 Aplicaciones adicionales

Los siguientes ejemplos constituyen aplicaciones adicionales de los procedimientos de optimización.

Ejemplo 11

(Bienes raíces) A un gran conglomerado multinacional le interesa comprar terrenos de primera calidad y provistos de muelles o paseos de entablado en uno de los principales lugares de veraneo en el océano. El conglomerado desea adquirir un lote rectangular situado en ese lugar. La única restricción es que tenga una superficie de 100 000 pies cuadrados. La figura 17.11 ofrece un diagrama del terreno: la x es el frente del paseo de entablado y la y indica el fondo del lote (medidos ambos en pies).

El dueño de la propiedad ha fijado a los lotes un precio de $5 000 por pie de frente a lo largo del paseo de entablado y de $2 000 por pie de fondo a partir del paseo. El conglomerado desea determinar las dimensiones del lote que minimicen el costo total de compra.

Consulte la figura 17.11. El costo total de compra de un lote que tenga las dimensiones de x pies por y pies es

$$C = 5\,000x + 2\,000y \tag{17.12}$$

donde C es el costo en dólares.

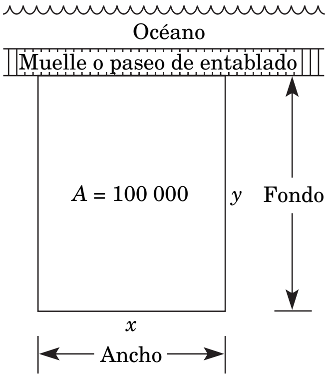


Figura 17.11

El problema radica en determinar los valores de x y y que minimicen C. Sin embargo, C se expresa en función de dos variables, y todavía no podemos manejar las funciones que consten de dos variables independientes.

El conglomerado ha estipulado que la superficie del lote debe ser de 100 000 pies cuadrados, de manera que la relación existente entre x y y es

$$xy = 100\,000 \tag{17.13}$$

Conocida esta relación, puede despejarse una de las variables en términos de la otra. Por ejemplo,

$$y = \frac{100\,000}{x} \tag{17.14}$$

Puede sustituirse el miembro derecho de esta ecuación en la función de costo siempre que aparezca la variable y, o

$$\begin{aligned} C &= f(x) \\ &= 5\,000x + 2\,000\,\frac{100\,000}{x} \\ &= 5\,000x + \frac{200\,000\,000}{x} \end{aligned} \tag{17.15}$$

La ecuación (17.15) es una repetición de la ecuación (17.12) únicamente en términos de una variable independiente. Ahora podemos buscar el valor de x que minimiza el costo de compra C.

La primera derivada es

$$C'(x) = 5\,000 - 200\,000\,000x^{-2}$$

Si C' se hace igual a 0,

$$5\,000 = \frac{200\,000\,000}{x^2}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{200\,000\,000}{5\,000} \\ &= 40\,000 \end{aligned}$$

o bien los valores críticos se presentan en

$$x = \pm 200$$

El punto crítico en $x = -200$ carece de sentido. Para probar $x = 200$,

$$\begin{aligned} C''(x) &= 400\,000\,000x^{-3} \\ &= \frac{400\,000\,000}{x^3} \\ C''(200) &= \frac{400\,000\,000}{(200)^3} \\ &= \frac{400\,000\,000}{8\,000\,000} = 50 > 0 \end{aligned}$$

Puesto que $C''(x) > 0$ para $x > 0$, la gráfica de C será cóncava hacia arriba para $x > 0$. Así pues, el valor mínimo para C ocurre en $x = 200$.

Los costos totales se minimizarán cuando el ancho del lote sea de 200 pies. El fondo del mismo se obtendrá al sustituir $x = 200$ en la ecuación (17.14), esto es

$$\begin{aligned} y &= \frac{100\,000}{200} \\ &= 500 \end{aligned}$$

Si el lote es de 200 pies por 500 pies, el costo total será minimizado en un valor de

$$\begin{aligned} C &= \$5\,000(200) + \$2\,000(500) \\ &= \$2\,000\,000 \end{aligned}$$

Ejemplo 12 **(Respuesta a las emergencias: Modelo de ubicación)** En el ejemplo 13 del capítulo 6 se explicó un problema en el que tres ciudades de veraneo aceptaron construir y sostener un servicio de respuesta en casos de emergencia, donde residirían los paramédicos y se guardarían los camiones de rescate. La cuestión clave que se analizó fue la ubicación del servicio. El criterio seleccionado fue escoger la ubicación de manera que minimizara S, o sea la suma de los productos de las poblaciones veraniegas de cada pueblo y el cuadrado de la distancia entre el pueblo y el servicio. La figura 17.12 muestra las localizaciones relativas de las tres ciudades.

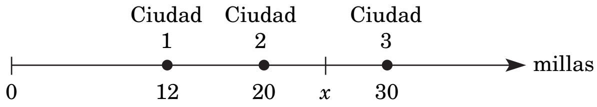


Figura 17.12

Se determinó que la función de criterio que debía ser minimizada era

$$S = f(x) = 450x^2 - 19\,600x + 241\,600$$

donde x es la ubicación del servicio en relación con el punto cero de la figura 17.12. (Quizás el lector quiera volver a leer el ejemplo 13 de la página 244.) Si se conoce la función de criterio, la primera derivada será

$$f'(x) = 900x - 19\,600$$

Si hacemos f' igual a 0,

$$900x = 19\,600$$

y un valor crítico ocurre en

$$x = 21.77$$

Al comprobar la naturaleza del punto crítico se obtiene

$$f''(x) = 900 \text{ para } x > 0$$

En particular, $$f''(21.77) = 900 > 0$$

Así pues, f se minimiza cuando $x = 21.77$. El criterio S se minimiza en $x = 21.77$, y el servicio deberá localizarse como se indica en la figura 17.13.

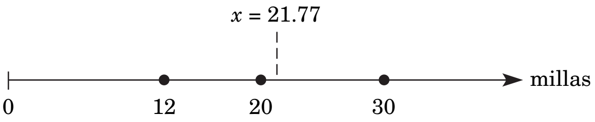


Figura 17.13

Ejemplo 13

(Sustitución de equipo) Una decisión que afrontan muchas organizaciones es determinar el momento óptimo para reemplazar equipo muy importante. Los equipos principales se caracterizan a menudo por dos componentes de costos: *costo de capital* y *costo de operación.* El ***costo de capital*** es el costo de compra menos su valor de salvamento. Si una máquina cuesta \$ 10 000 y luego se vende en \$2 000, el costo de capital es de \$8 000. El ***costo de operación*** comprende los gastos de poseer y mantener un equipo. La gasolina, el aceite, los seguros y la reparación son costos asociados a la posesión y operación de un vehículo y pueden considerarse como costos de operación.

Algunas organizaciones se concentran en el *costo promedio de capital* y en el *costo promedio de operación* cuando determinan el momento de sustituir un equipo. Esos costos tienden a compensarse mutuamente. Esto es, cuando uno aumenta el otro disminuye. El costo promedio de capital de un equipo tiende a disminuir con el tiempo. En el caso de un automóvil nuevo cuyo valor decrece de \$12 000 a \$9 000 en el primer año, el costo promedio de capital por año es de \$3 000. Si el valor del automóvil disminuye en \$2 000 al cabo de cinco años, el costo promedio de capital será

$$\frac{\$12\,000 - \$2\,000}{5} = \frac{\$10\,000}{5} = \$2\,000 \text{ por año}$$

El costo promedio de operación tiende a incrementarse con el tiempo, a medida que el equipo pierde eficiencia y se requiere más mantenimiento. Por ejemplo, el costo promedio anual de operación de un automóvil tiende a elevarse a medida que el automóvil envejece.

Una compañía de taxis de una gran ciudad quiere determinar cuánto tiempo debería conservar sus taxis. Cada taxi viene totalmente equipado a un precio de \$18 000. La compañía estima que el costo promedio de capital y el costo promedio de operación son una función de x, o sea el número de millas que recorre cada unidad. El valor de recuperación (salvamento) del automóvil, en dólares, se expresa mediante la función

$$S(x) = 16\,000 - 0.10x$$

Ello significa que el automóvil disminuye su valor en \$2 000 tan pronto empieza a ser conducido y que luego su valor decae a una tasa de \$0.10 por milla.

El costo promedio de operación, expresado en dólares por milla, se estima mediante la función

$$O(x) = 0.0000003x + 0.15$$

Determine el número de millas que el automóvil debería recorrer antes de ser reemplazado, si el objetivo es minimizar la *suma* de los costos promedio de capital y de operación.

SOLUCIÓN

El costo promedio de capital por milla es igual al costo de compra menos el valor de recuperación, todo ello dividido entre el número de millas recorridas, esto es,

$$\begin{aligned} C(x) &= \frac{18\,000 - (16\,000 - 0.10x)}{x} \\ &= \frac{2\,000 + 0.10x}{x} \\ &= \frac{2\,000}{x} + 0.10 \end{aligned}$$

La suma de los costos promedio de capital y de operación promedio es

$$\begin{aligned} f(x) &= O(x) + C(x) \\ &= 0.0000003x + 0.15 + \frac{2\,000}{x} + 0.10 \\ &= 0.0000003x + 0.25 + \frac{2\,000}{x} \\ f'(x) &= 0.0000003 - 2\,000x^{-2} \end{aligned}$$

Si hacemos f' igual a 0,

$$0.0000003 = \frac{2\,000}{x^2}$$

$$x^2 = \frac{2\,000}{0.0000003}$$

$$= 6\,666\,666\,666.67$$

o un valor crítico ocurre cuando $x = \pm 81\,649.6$

De nueva cuenta, un valor negativo para x no tiene sentido. Al comprobar el valor crítico $x = 81\,649.6$, se obtiene

$$f''(x) = 4\,000x^{-3}$$

$$= \frac{4\,000}{x^3}$$

Para $x > 0, f''(x) > 0$ (es decir, la gráfica de f es cóncava hacia arriba para $x > 0$). Por consiguiente f es minimizada cuando $x = 81\,649.6$,

$$f(81\,649.6) = 0.0000003(81\,649.6) + 0.25 + \frac{2\,000}{81\,649.6}$$

$$= 0.02450 + 0.25 + 0.02450 = 0.299$$

Los costos promedio de capital y de operación se minimizan a un valor de $0.299 por milla cuando un taxi recorre 81 649.6 millas. Los costos totales de capital y de operación serán iguales a (costo/milla) · (número de millas), o

$$(\$0.299)(81\,649.6) = \$24\,413.23$$

La figura 17.14 ilustra las funciones de los dos costos componentes, así como la función del costo total. Adviértase que el costo promedio de operación por milla $O(x)$ aumenta al elevarse los valores de x, y que el costo promedio de capital por milla $C(x)$ disminuye con los valores crecientes de x.

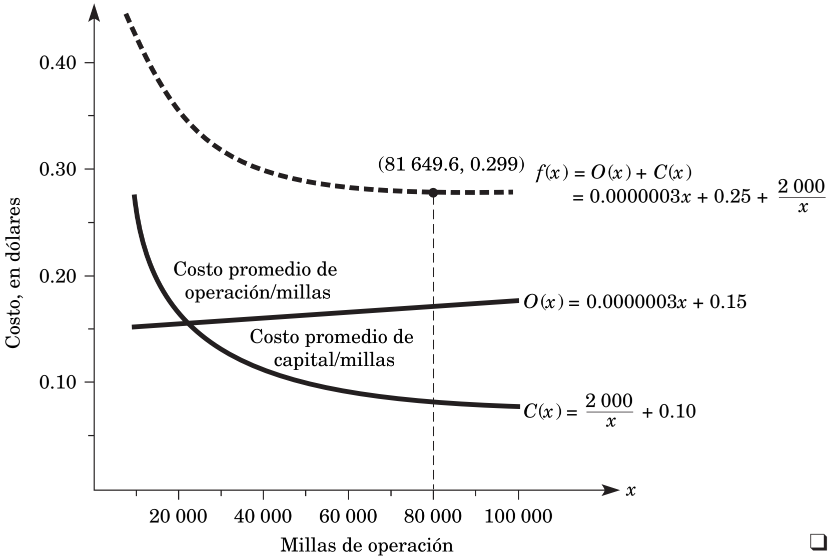


Figura 17.14

❑

PUNTO PARA PENSAR Y ANALIZAR Dado que el lector entiende de decisiones acerca de cuándo reemplazar equipos, haga la crítica de las suposiciones empleadas en este modelo. ¿Qué factores o consideraciones relevantes no se explicaron cuando se utilizaron los resultados de este modelo?

Ejemplo 14 **(Cobranza de cuentas)** En el ejemplo 11 del capítulo 7 se analizó el cobro de cuentas por créditos proporcionados a las personas que utilizan una tarjeta de crédito de renombre. La institución financiera determinó que el porcentaje de cuentas por cobrar P (en dólares) que se recaudan t meses después que el crédito fue otorgado es

$$P = 0.95(1 - e^{-0.7t})$$

El crédito promedio autorizado en un mes cualquiera es de $100 millones. La institución financiera estima que *para cada $100 millones en nuevos créditos* autorizados cada mes, los esfuerzos de cobro tienen un costo de $1 millón por mes. Es decir, si se autoriza un crédito de $100 millones el día de hoy, costarán $1 millón al mes los intentos de la institución por cobrar estas cuentas. Determine el número de meses que debería continuar el esfuerzo de cobranza si el objetivo es maximizar las cobranzas netas N (dólares cobrados menos los costos de cobranza).

SOLUCIÓN

Dado que se otorgan $100 millones de crédito, la cantidad de cobranzas recaudadas (en millones de dólares) es igual a

(Cantidad de crédito otorgado) (Porcentaje de cuentas cobradas)

o

$$(100)(0.95)(1 - e^{-0.7t})$$

Por consiguiente, los cobros netos N se describen mediante la función

Cobros netos = cantidad recaudada − costos de cobranza

o bien

$$\begin{aligned} N &= f(t) \\ &= (100)(0.95)(1 - e^{-0.7t}) - (1)t \\ &= 95(1 - e^{-0.7t}) - t \\ &= 95 - 95e^{-0.7t} - t \end{aligned}$$

donde t es igual al número de meses durante los cuales se llevan a cabo los esfuerzos de recaudación o cobranza. La primera derivada es

$$f'(t) = 66.5e^{-0.7t} - 1$$

Si se hace $f' = 0$,

$$66.5e^{-0.7t} = 1$$

$$e^{-0.7t} = 0.01503$$

De la tabla 1,

$$e^{-4.2} = 0.0150$$

De este modo, $e^{-0.7t} = 0.01503$ cuando

$$-0.7t = -4.2$$

y se presenta un valor crítico cuando

$$t = 6$$

El único punto crítico en f ocurre cuando $t = 6$. Ya que $f''(t) = -46.55e^{-0.7t} < 0$ para toda $t > 0$, $f''(6) < 0$ y f es maximizada en $t = 6$. Las cobranzas netas máximas son

$$\begin{aligned} f(6) &= 95 - 95e^{-0.7(6)} - 6 \\ &= 95 - 95(0.0150) - 6 = 95 - 1.425 - 6 = 87.575 \end{aligned}$$

o bien, \$87.575 millones.

Para cada \$100 millones de crédito otorgados, las cobranzas netas se maximizarán a un valor de \$87.575 millones si los esfuerzos de recaudación continúan por seis meses. ❑

Ejercicio de práctica

a) Verifique que el punto crítico en $t = 6$ sea un máximo relativo.

b) ¿Cuál es la cantidad total (bruta) recolectada durante el periodo de seis meses?

Respuesta: b) \$93.575 millones.

Ejemplo 15

(Administración del bienestar) Una agencia de bienestar recientemente creada intenta determinar el número de analistas por contratar para procesar solicitudes de bienestar. Los expertos en eficiencia estiman que el costo promedio C de procesar una solicitud es una función del número de analistas x. Específicamente, la función de costo es

$$C = f(x) = 0.001x^2 - 5 \ln x + 60$$

Determine el número de analistas que deberían contratarse para minimizar el costo promedio por solicitud.

SOLUCIÓN

La derivada de f es

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0.002x - 5\frac{1}{x} \\ &= 0.002x - \frac{5}{x} \end{aligned}$$

Si se hace $f' = 0$,

$$
\begin{aligned}
0.002x &= \frac{5}{x} \\
0.002x^2 &= 5 \\
x^2 &= \frac{5}{0.002} \\
&= 2\,500
\end{aligned}
$$

y se presenta un valor crítico cuando

$$x = 50$$

(La raíz $x = -50$ no tiene sentido.)

El valor de $f(x)$ en el punto crítico es

$$
\begin{aligned}
f(50) &= 0.001(50)^2 - 5 \ln 50 + 60 \\
&= 0.001(2\,500) - 5(3.912) + 60 = 2.5 - 19.56 + 60 = \$42.94
\end{aligned}
$$

Para verificar la naturaleza del punto crítico,

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= 0.002 + 5x^{-2} \\
&= 0.002 + \frac{5}{x^2} > 0 \text{ para } x > 0
\end{aligned}
$$

En particular,

$$
\begin{aligned}
f''(50) &= 0.002 + \frac{5}{(50)^2} \\
&= 0.002 + \frac{5}{2\,500} = 0.002 + 0.002 = 0.004 > 0
\end{aligned}
$$

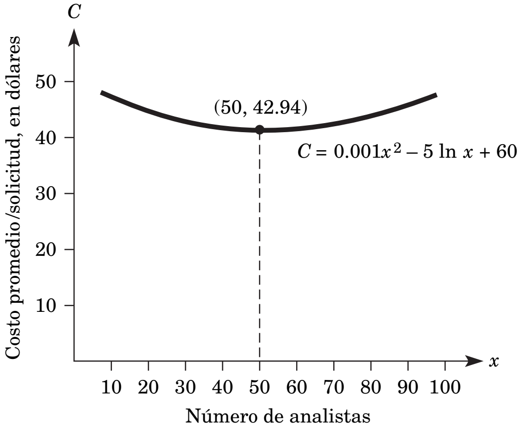


Figura 17.15

Por lo tanto, f se minimiza cuando $x = 50$. El costo de procesamiento promedio por solicitud se minimiza a un valor de \$42.94 cuando se contratan 50 analistas. La figura 17.15 ilustra una gráfica de la función promedio de costo.

Ejemplo 16

(Planeación de la compensación) El fabricante de un producto perecedero ofrece un incentivo salarial a los conductores de sus camiones de carga. Una entrega normal tarda un promedio de 20 horas. A los conductores se les paga una tarifa de \$10 por hora hasta un *máximo* de 20 horas. Si el viaje tarda más de 20 horas, los conductores reciben una remuneración de apenas 20 horas. Se les da un incentivo por hacer el viaje en menos (pero no mucho menos) de 20 horas. Por cada hora por debajo de las 20, el sueldo por hora aumenta en \$1.

a) Determine la función $w = f(x)$ cuando w es igual al sueldo por hora en dólares y x indica el número de horas requeridas para realizar el viaje.
b) ¿Qué tiempo de viaje x maximizará el sueldo del conductor por viaje?
c) ¿Cuál es el sueldo por hora relacionado con este tiempo de viaje?
d) ¿Cuál es el sueldo máximo?
e) ¿Qué relación guarda este salario con el recibido por un viaje de 20 horas?

SOLUCIÓN

a) La función del sueldo por hora debe expresarse en dos partes.

$$\text{Salario por hora} = \begin{cases} \$10 + \$1 \times \text{(el número de horas es menor que 20)} \\ \qquad\qquad\qquad \text{(cuando el tiempo del viaje es menor que 20 horas)} \\ \$10 \qquad\qquad\quad \text{(cuando el tiempo del viaje es de 20 horas o más)} \end{cases}$$

Si se conocen las definiciones de las variables de x y w, esta función puede reformularse así

$$w = f(x) = \begin{cases} 10 + 1(20 - x) & 0 \leq x < 20 \qquad \textbf{(17.16a)} \\ 10 & x \geq 20 \qquad \textbf{(17.16b)} \end{cases}$$

b) El sueldo de un conductor S por viaje será de \$10/hora × 20 horas = \$200, si el tiempo del viaje es mayor o igual a 20 horas. En caso de que sea menor de 20 horas,

$$\begin{aligned} S &= g(x) \\ &= wx \\ &= [10 + 1(20 - x)]x \\ &= (30 - x)x \\ &= 30x - x^2 \end{aligned} \qquad \textbf{(17.17)}$$

Necesitamos comparar el salario de \$200 para $x \geq 20$ con el salario más alto para un tiempo de viaje de menos de 20 horas.

A fin de examinar g para un máximo relativo, se calcula la derivada

$$g'(x) = 30 - 2x$$

Haciendo g' igual a 0,

$$30 - 2x = 0$$
$$30 = 2x$$

y se presenta un valor crítico cuando

$$15 = x$$

Para verificar el comportamiento de $g(x)$ cuando $x = 15$,

$$g''(x) = -2 \text{ para } 0 \leq x \leq 20$$

y $$g''(15) = -2 < 0$$

En consecuencia, ocurre un valor máximo en g cuando $x = 15$ o cuando un viaje tarda 15 horas.

c) El sueldo por hora asociado a un viaje de 15 horas de duración es

$$\begin{aligned} w &= 10 + 1(20 - 15) \\ &= 10 + 5 = \$15 \end{aligned}$$

d) El sueldo del conductor relacionado con un viaje de 15 horas de duración se calcula evaluando $g(15)$. Si se sustituye $x = 15$ en la ecuación (17.17),

$$\begin{aligned} S &= 30(15) - 15^2 \\ &= 450 - 225 = \$225 \end{aligned}$$

También podría haberse llegado a esta respuesta multiplicando el sueldo por hora de $15 por el tiempo del viaje de 15 horas.

e) El sueldo de $225 por un viaje de 15 horas es $25 más que el que se paga por un tiempo de viaje de 20 horas o más.

Ejemplo 17 **(Construcción de tuberías: Escenario de motivación)** Una compañía petrolera planea construir una tubería para llevar petróleo desde un gran pozo hasta el punto donde será cargado en camiones cisterna y transportado a las refinerías. La figura 17.16 muestra las localizaciones relativas del sitio de perforación *A* y el punto de destino *C*. Los puntos *A* y *C* son los extremos opuestos de un bosque de aproximadamente 25 millas de ancho. El punto *C* se halla también a 100 millas al sur de *A*. La compañía petrolera propone construir una tubería que corra al sur a lo largo del lado este del bosque y que en algún punto *x* lo atraviese hasta el punto *C*. Los costos de construcción son $100 000 por milla a lo largo del borde del bosque y $200 000 por milla para la sección que cruza el bosque. Determine el punto de cruce *x* que reduzca al mínimo los costos de construcción de la tubería.

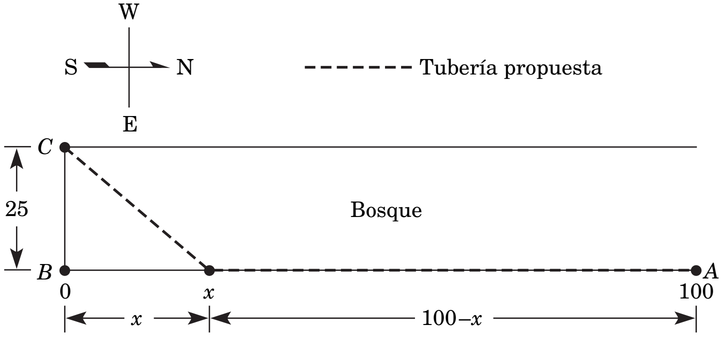


Figura 17.16

SOLUCIÓN

Los costos de construcción se calcularon conforme a la fórmula

Costo = \$100 000/milla (millas de la tubería bordeando el bosque)
+ \$200 000/milla (millas de la tubería cruzando el bosque) **(17.18)**

La distancia entre el punto A y el punto de cruce x es $(100 - x)$ millas.

Teorema de Pitágoras

En un triángulo recto con base a, altura b e hipotenusa c,

$$c^2 = a^2 + b^2$$

o bien

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Véase la figura 17.17.

Empleando el teorema de Pitágoras, la longitud de la sección de la tubería comprendida entre C y x es

$$\sqrt{x^2 + (25)^2}$$

Al aplicar la ecuación (17.18), el costo total de construcción de la tubería, C (expresado en miles de dólares) es

$$\begin{aligned} C &= f(x) \\ &= 100(100 - x) + 200\sqrt{x^2 + (25)^2} \\ &= 10\,000 - 100x + 200\sqrt{x^2 + 625} \\ &= 10\,000 - 100x + 200(x^2 + 625)^{1/2} \end{aligned} \qquad \textbf{(17.19)}$$

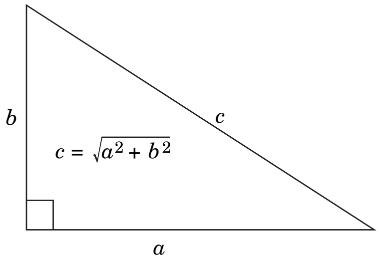


Figura 17.17 Teorema de Pitágoras.

Para examinar *f* para cualquier mínimo relativo se calcula la derivada

$$\begin{aligned} f'(x) &= -100 + 200(\tfrac{1}{2})(x^2 + 625)^{-1/2}(2x) \\ &= -100 + 200x(x^2 + 625)^{-1/2} \\ &= -100 + \frac{200x}{(x^2 + 625)^{1/2}} \end{aligned}$$

Al hacer f' igual a cero,

$$\begin{aligned} -100 + \frac{200x}{(x^2 + 625)^{1/2}} &= 0 \\ \frac{200x}{\sqrt{x^2 + 625}} &= 100 \\ \frac{200x}{100} &= \sqrt{x^2 + 625} \\ 2x &= \sqrt{x^2 + 625} \qquad \textbf{(17.20)} \end{aligned}$$

Si se elevan al cuadrado ambos miembros de la ecuación (17.20),

$$\begin{aligned} 4x^2 &= x^2 + 625 \\ 3x^2 &= 625 \\ x^2 &= \frac{625}{3} = 208.33 \end{aligned}$$

y se presenta un valor crítico (relevante) cuando $x = 14.43$. (Una raíz negativa carece de sentido.)

Ejercicio de práctica

Con la prueba de la segunda derivada verifique que *f* tenga un mínimo relativo cuando $x = 14.43$.

El ejercicio anterior deberá comprobar que se presenta un mínimo relativo cuando $x = 14.43$, esto es, que la tubería deberá cruzar el bosque después de que haya avanzado 85.57 millas hacia el sur. Los costos totales de la construcción (en miles de dólares) pueden calcularse sustituyendo $x = 14.43$ en la ecuación (17.19), o sea

$$\begin{aligned} C &= 10\,000 - 100(14.43) + 200\sqrt{(14.43)^2 + 625} \\ &= 10\,000 - 1\,443 + 200\sqrt{833.22} \\ &= 10\,000 - 1\,443 + 200(28.86) \\ &= 10\,000 - 1\,443 + 5\,772 \\ &= 14\,329\ (\$1\,000) \\ &= \$14\,329\,000 \end{aligned}$$

❑

PUNTO PARA PENSAR Y ANALIZAR

¿Qué otro procedimiento podría usarse para calcular el costo mínimo total de $14 329 000?

El ejemplo siguiente, aunque no es una aplicación de optimización, es de particular importancia en economía.

Ejemplo 18

(Elasticidad de la demanda) Un concepto importante en economía y teoría de precios es el de la **elasticidad del precio de la demanda**, o más simplemente, la **elasticidad de la demanda**. Si se tiene la función de demanda de un producto $q = f(p)$ y un punto especificado (p, q) en la función de demanda, la elasticidad de la demanda será la razón o cociente

$$\frac{\text{Cambio porcentual en la cantidad demandada}}{\text{Cambio porcentual del precio}} \tag{17.21}$$

Esta razón es una medida de la respuesta *relativa* de la demanda ante los cambios en el precio. La ecuación (17.21) puede expresarse de manera simbólica como

$$\frac{\dfrac{\Delta q}{q}}{\dfrac{\Delta p}{p}} \tag{17.22}$$

La elasticidad de la demanda puntual es el límite de la ecuación (17.22) a medida que $\Delta p \to 0$. Utilizando la letra griega η (eta) para denotar la *elasticidad de la demanda puntual en un punto* (p, q),

$$\begin{aligned}\eta &= \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\dfrac{\Delta q}{q}}{\dfrac{\Delta p}{p}} \\ &= \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta q}{q} \cdot \frac{p}{\Delta p} \\ &= \frac{p}{q} \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta p}\end{aligned}$$

o bien,

$$\boxed{\eta = \frac{p}{q} \cdot f'(p)} \tag{17.23}$$

Dada la función de demanda $q = f(p) = 500 - 25p$, calcule la elasticidad de la demanda puntual para los precios de: *a*) \$15, *b*) \$10 y *c*) \$5.

Para p = \$15

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{p}{q} \cdot f'(p)\\ &= \frac{15}{f(15)} \cdot (-25)\\ &= \frac{15}{500 - 25(15)}(-25)\\ &= \frac{-375}{125} = -3\end{aligned}$$

La interpretación de $\eta = -3$ es que a un precio de \$15, un incremento en precio de un 1% produciría decremento de la cantidad demandada de aproximadamente 3%. Se estima un cambio porcentual en la demanda de tres veces el cambio porcentual en el precio.

Para p = \$10

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{10}{f(10)}(-25)\\ &= \frac{10}{500 - 25(10)}(-25)\\ &= \frac{-250}{250} = -1\end{aligned}$$

La interpretación de $\eta = -1$ es que para un precio de \$10, un incremento en precio de 1% produciría decremento en la cantidad demandada de aproximadamente 1%. Se estima un cambio porcentual similar en la demanda respecto del cambio porcentual en el precio.

Para p = \$5

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{5}{f(5)}(-25)\\ &= \frac{5}{500 - 25(5)}(-25)\\ &= \frac{-125}{375} = -1/3\end{aligned}$$

La interpretación de $\eta = -1/3$ es que a un precio de \$5, un incremento en precio de un 1% produciría un decremento en la cantidad demandada de aproximadamente 0.33%. Se estima un cambio porcentual menor en la demanda con respecto al cambio porcentual en el precio. ❏

Los economistas clasifican los valores de la elasticidad en tres categorías.

❏ ***Caso 1* ($|\eta| > 1$):** El cambio porcentual en la demanda es mayor que el que se opera en el precio (por ejemplo, un cambio de 1% en el precio origina un cambio mayor que 1% en la demanda). En estas regiones de una función de demanda, se dice que la demanda es ***elástica***.

- ❑ ***Caso 2*** **($|\eta| < 1$):** El cambio porcentual en la demanda es menor que el que se opera en el precio. En estas regiones de la función de demanda, se dice que la demanda es ***inelástica***.
- ❑ ***Caso 3*** **($|\eta| = 1$):** El cambio porcentual en la demanda es igual que el que se opera en el precio. En estas regiones de la función de demanda se dice que la demanda es ***elástica unitaria***.

Sección 17.2 Ejercicios de seguimiento

1. Una persona desea cercar un jardín rectangular que tendrá una superficie de 1 500 pies cuadrados. Determine las dimensiones que crearán la superficie deseada, pero que requerirán la longitud mínima de cerca.

2. El dueño de un rancho quiere construir un corral rectangular de jineteo que tenga una superficie de 5 000 metros cuadrados. Si el corral es como el de la figura 17.18, determine las dimensiones x y y que requerirán la longitud mínima de cerca. (*Sugerencia:* Formule una función para la longitud total de la cerca, expresada en términos de x y y. Recuérdese entonces que $xy = 5\,000$, y vuelva a formular la función de longitud en términos de x o de y.)

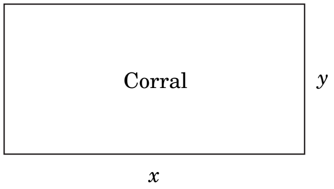


Figura 17.18

3. Un pequeño club de playa ha recibido 300 metros de barrera de flotación para encerrar una superficie de nado. Se pretende crear la máxima superficie rectangular de nado con los 300 metros de barrera de flotación. La figura 17.19 muestra el diseño propuesto. Adviértase que la barrera de flotación se necesita únicamente en tres lados del área de nado.

Figura 17.19

Determine las dimensiones de x y y que produzcan la máxima superficie de nado. ¿Cuál es la superficie máxima? (*Sugerencia:* Recuerde que $x + 2y = 300$.)

4. Un distribuidor de automóviles desea crear un área de estacionamiento cerca de un gran puerto de Estados Unidos para almacenar los automóviles nuevos procedentes de Japón. El área deberá tener una superficie total de 1 000 000 de metros cuadrados y sus dimensiones serán las que se indican en la figura 17.20. Por consideraciones de seguridad, la sección de la cerca en la parte frontal del lote será más sólida y alta que la que se use a los lados y en la parte posterior. El costo de la cerca en la sección frontal es de \$20 por metro y la que se utilizará en los otros tres lados costará \$12 por metro. Determine las dimensiones de x y y que den por resultado un costo mínimo total de la cerca. ¿Cuál es el costo mínimo? (*Sugerencia:* $xy = 1\,000\,000$.)

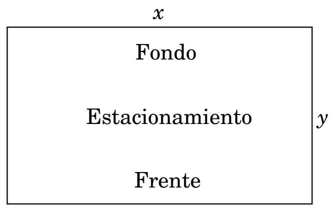


Figura 17.20

5. **Administración penitenciaria** La figura 17.21 contiene un patio de recreación que será cercado dentro de una prisión. Además de cercar el área, una sección de la cerca deberá dividir la superficie total a la mitad. Si se cuenta con 3 600 pies de cerca, determine las dimensiones de x y y que producirán el área máxima cercada. ¿Cuál es la superficie máxima? (*Sugerencia:* $2x + 3y = 3\,600$.)

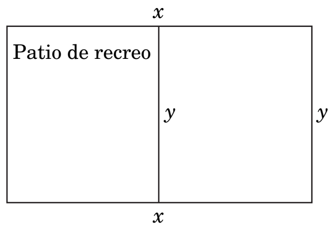


Figura 17.21

6. **Ubicación del almacén** Un fabricante desea ubicar un almacén entre tres ciudades. Las localizaciones relativas de las ciudades se observan en la figura 17.22. El objetivo es situar el almacén de modo que minimice la suma de los cuadrados de las distancias que separan a cada ciudad y al almacén. ¿A qué distancia del punto de referencia deberá ubicarse el almacén?

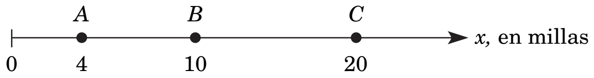


Figura 17.22

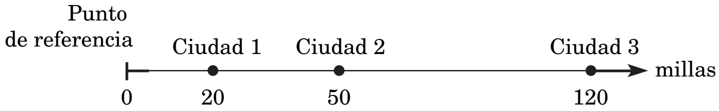


Figura 17.23

7. Organización para el cuidado de la salud La figura 17.23 contiene las localizaciones relativas de tres ciudades. Una gran organización dedicada al mantenimiento de la salud (HMO) desea construir una clínica satélite para dar servicio. La localización de la clínica x deberá ser tal que minimice la suma de los cuadrados de las distancias entre la clínica y cada ciudad. El criterio que se aplicará puede expresarse como

$$\text{Minimice} \qquad S = \sum_{j=1}^{3} (x_j - x)^2$$

donde x_j es la localización de la ciudad j y x es la localización de la clínica. Determine la ubicación de x que minimice S.

***8.** En el ejercicio 7, suponga que las ciudades 1, 2, 3 cuentan con 10 000, 5 000 y 3 000 personas, respectivamente, las cuales son miembros de la organización para el mantenimiento de la salud. Suponga, asimismo, que esta institución ha establecido su criterio de localización como la minimización de

$$\sum_{j=1}^{3} \begin{pmatrix} \text{miembro HMO} \\ \text{en la ciudad } j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{cuadrado de la distancia} \\ \text{que separa la ciudad } j \\ \text{de la clínica} \end{pmatrix}$$

o bien

$$S = \sum_{j=1}^{3} n_j (x_j - x)^2$$

donde n_j es el número de miembros que habitan en la ciudad j. Determine la localización x que minimice S.

9. El departamento de policía compra nuevas patrullas en \$26 000. El departamento estima que los costos promedio de capital y de operación son una función de x, el número de millas que recorrerá la patrulla. El valor de recuperación de una patrulla (en dólares) se expresa mediante la función

$$S(x) = 22\,500 - 0.15x$$

El costo promedio de operación, expresado en dólares por milla, se estima mediante la función

$$O(x) = 0.0000006x + 0.20$$

a) Determine cuántas millas deberá recorrer la patrulla antes de su sustitución si el objetivo es minimizar la suma de los costos promedio de capital y los costos promedio de operación por milla.
b) ¿Cuál es el costo mínimo por milla?
c) ¿Cuál se espera que sea el valor de recuperación?

10. Sustitución de aeronaves comerciales Una gran aerolínea compra un tipo particular de avión a un costo de \$40 000 000. La compañía estima que los costos promedio de capital y de operación son una función de x, o sea, el número de horas de vuelo. El valor de recuperación de un avión (en dólares) se expresa mediante la función

$$S(x) = 36\,000\,000 - 10\,000x$$

El costo promedio de operación, expresado en dólares por hora de vuelo, se estima mediante la función

$$O(x) = 500 + 0.40x$$

a) Determine cuántas horas deberá volarse un avión antes de la sustitución, si el objetivo es minimizar la suma de los costos promedio de capital y de operación por hora.
b) ¿Cuál es el costo mínimo por hora?
c) ¿Cuál se espera que sea el valor de recuperación?

11. Un club de esquí de una universidad está organizando un viaje a un sitio de esquiar. El precio del viaje es \$100 si 50 o menos personas se inscriben para la excursión. Por cada excursionista después de 50, el precio que se cobra a *todos* disminuye en \$1. Por ejemplo, si se inscriben 51 personas, cada una pagará \$99. Sea x el número de excursionistas que exceda de 50.
a) Determine la función que establezca el precio por persona p en función de x.
b) En el inciso *a*), ¿existe una restricción en el dominio?
c) Formule la función $R = h(x)$, que exprese el ingreso total R en función de x.
d) ¿Qué valor de x produce el valor máximo de R?
e) ¿Cuántas personas se inscribirán en el viaje?
f) ¿Cuál es el valor máximo de R?
g) ¿Qué precio por boleto produce el ingreso máximo?
h) ¿Podría el club generar más ingresos aceptando 50 o un número menor de personas?

12. Una institución de beneficencia a nivel nacional está planeando una campaña de recaudación de fondos en una ciudad importante de Estados Unidos con una población de dos millones de personas. El porcentaje de la población que se estima que hará una contribución se representa por la función

$$R = 1 - e^{-0.02x}$$

donde R es igual al porcentaje de la población y x es igual al número de días en que se lleva a cabo la campaña. Experiencias pasadas indican que la contribución promedio en esta ciudad es de \$2 por donante. Los costos de la campaña se estiman en \$10 000 por día.
a) ¿Durante cuántos días debería continuarse la campaña si el objetivo es maximizar las ganancias netas (contribuciones totales menos costos totales) de la campaña?

b) ¿Cuáles son las ganancias netas máximas que se espera recaudar? ¿Qué porcentaje de la población se espera que contribuya?

13. Una compañía de distribución nacional vende discos compactos únicamente por correo. La publicidad se realiza en estaciones locales de televisión. Se está planeando un programa de promoción para una importante área metropolitana con respecto a una nueva grabación de música "country". La audiencia "blanco" u objetivo (aquellas personas que pueden estar interesadas en este tipo de música grabada) se estima en 600 000. Experiencias pasadas indican que para esta ciudad y tipo de música el porcentaje del mercado objetivo R que en realidad compra un disco compacto de audio es una función de la extensión de la campaña de publicidad t, establecida en días. Específicamente, esta *función de respuesta de ventas* es

$$R = 1 - e^{-0.025t}$$

El margen de ganancia de cada disco compacto es de \$1.50. Los costos de publicidad incluyen un costo fijo de \$15 000 y un costo variable de \$2 000 por día.

a) Determine cuánto tiempo debería seguirse la campaña si la meta es maximizar las *ganancias netas* (ganancia bruta menos costos de publicidad).

b) ¿Cuál es la ganancia neta máxima esperada?

c) ¿Qué porcentaje del mercado objetivo se espera que adquiera el disco compacto?

14. Suponga, en el ejemplo 14, que la cantidad promedio de crédito otorgado cada mes es de \$50 millones y que los costos de cobranza mensuales son iguales a \$0.5 millones. Vuelva a resolver el problema.

15. El departamento de policía ha determinado que la tasa de crímenes diaria promedio en la ciudad depende del número de oficiales asignados a cada turno. De manera específica, la función que describe esta relación es

$$N = f(x) = 500 - 10xe^{-0.025x}$$

donde N representa la tasa de crímenes diaria promedio y x es igual al número de oficiales asignados a cada turno. Determine el número de oficiales que producirán una tasa mínima de crímenes diaria promedio. ¿Cuál es la tasa mínima de crímenes diaria promedio?

16. La ganancia anual de una compañía está representada como una función del número de empleados contratados. La función de ganancia es

$$P = 20(x)e^{-0.002x}$$

donde P representa la ganancia establecida en millares de dólares y x es igual al número de empleados.

a) Determine el número de empleados que maximizarán la ganancia anual.

b) ¿Cuál es la ganancia máxima esperada?

17. Una compañía está contratando personas para trabajar en su planta. Para el trabajo que las personas deben efectuar, los expertos en eficiencia estiman que el costo promedio C de realizar la tarea es una función del número de personas contratadas x. Específicamente,

$$C = f(x) = 0.003x^2 - 0.216 \ln x + 5$$

a) Determine el número de personas que deberían ser contratadas para minimizar el costo promedio.

b) ¿Cuál es el mínimo costo promedio?

18. Una compañía está contratando gente para trabajar en su planta. Para el trabajo que las personas deben efectuar, los expertos en eficiencia estiman que el costo promedio C de realizar la tarea es una función del número de personas contratadas x. De manera específica,

$$C = f(x) = 0.005x^2 - 0.49 \ln x + 5$$

a) Determine el número de personas que deberían ser contratadas para minimizar el costo promedio.

b) ¿Cuál es el mínimo costo promedio?

19. Plan de incentivos en sueldos Un fabricante ofrece un incentivo salarial a personas que trabajan en un producto en particular. El tiempo normal para terminar una unidad del mismo es de 15 horas. A los empleados se les paga una tarifa de \$6 por hora hasta un máximo de 15 horas por unidad en que trabajen (si un empleado tarda 20 horas en terminar una unidad, sólo se le paga por las 15 horas). Existe un incentivo para los empleados que terminan una unidad en menos de 15 horas. Por cada hora menos de 15, el sueldo por hora aumenta en \$1.50. Sea x el número de horas que se necesitan para terminar una unidad.

a) Determine la función $w = f(x)$, donde w es el sueldo por hora en dólares.

b) ¿Qué tiempo x maximizará los sueldos totales de un empleado por terminar una unidad?

c) ¿Cuál es el sueldo por hora asociada a este tiempo por unidad x?

d) ¿Cuál es el sueldo máximo por unidad?

e) ¿Qué relación guarda este sueldo con los que se ganan al terminar una unidad en 15 o más horas?

20. Construcción de tuberías Una gran compañía petrolera planea construir una tubería para llevar petróleo crudo desde un pozo hasta un punto donde se embarcará en camiones cisterna y será transportado a las refinerías. La figura 17.24 muestra las localizaciones relativas del sitio de perforación A y el punto de destino C. Los puntos A y C se hallan en lados opuestos de un lago, que tiene 20 millas de ancho. El punto C se encuentra también a 20 millas al sur de A, a lo largo del lago.

La compañía petrolera planea construir una tubería que vaya al sur a lo largo de la ribera oriental del río, y en algún punto x cruce el río hacia el punto C. Los costos de construcción son \$50 000 por milla a lo largo de la ribera del río y de \$100 000 por milla en la sección que lo atraviesa. Determine el punto de cruce x que reduzca al mínimo los costos de construcción. ¿Cuál es el costo mínimo de construcción?

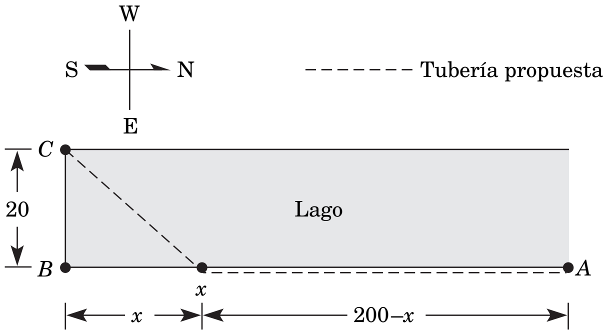


Figura 17.24

En los siguientes ejercicios: *a*) determine la expresión general para la elasticidad de demanda puntual, *b*) determine la elasticidad de la demanda para los precios indicados, clasificando también la demanda como elástica, inelástica o elástica unitaria, y *c*) interprete el significado de los valores de elasticidad hallados en el inciso *b*).

21. $q = f(p) = 1\,200 - 60p, p = \$5, p = \$10$ y $p = \$15$

22. $q = f(p) = 150 - 2.5p, p = \$15, p = \$30$ y $p = \$45$

23. $q = f(p) = 12\,000 - 10p^2, p = \$10, p = \$20$ y $p = \$30$

24. $q = f(p) = 900 - p^2, p = \$5, p = \$15$ y $p = \$25$

25. Dada la función de demanda $q = f(p) = 900 - 30p$, determine el precio al que la demanda es elástica unitaria.

26. Dada la función de demanda $q = f(p) = 80 - 1.6p$, determine el precio al que la demanda es elástica unitaria.

❑ EJERCICIOS ADICIONALES

1. Una firma vende cada unidad de un producto en \$250. La función de costo que describe el costo total *C* en términos del número de unidades producidas y vendidas *x* es

$$C(x) = 50x + 0.1x^2 + 150$$

a) Formule la función de utilidad $P = f(x)$.
b) ¿Cuántas unidades se debieran producir y vender a fin de maximizar la utilidad total?
c) ¿Cuál es el ingreso total en este nivel de producción?
d) ¿Cuál es el costo total en este nivel de producción?

2. Vuelva a resolver el ejercicio 1 aplicando la aproximación marginal.

3. Un agente viajero está organizando una excursión en avión a un conocido sitio vacacional. Ha cotizado un precio de \$300 por persona si 100 o menos se inscriben en el vuelo. Por cada persona que rebase esa cifra, el precio que se cobrará disminuirá en \$2.50. Por ejemplo, si 101 personas se inscriben, cada una pagará \$297.50. Sea *x* el número de personas por arriba de 100.

a) Determine la función que exprese el precio por persona p en términos de x, o $p = f(x)$.
b) En el inciso *a*) ¿existe restricción en el dominio?
c) Formule la función $R = h(x)$, que exprese el ingreso total de los boletos R en función de x.
d) ¿Qué valor de x aumentará al máximo el de R?
e) ¿Cuál es el valor máximo de R?
f) ¿Qué precio por boleto produce el máximo R?

4. El costo total de fabricar q unidades de cierto producto se describe con la función

$$C = 12\,500\,000 + 100q + 0.02q^2$$

a) Determine cuántas unidades q deberían producirse a fin de minimizar el *costo promedio por unidad*.
b) ¿Cuál es el mínimo costo promedio por unidad?
c) ¿Cuál es el costo total de producción en este nivel de producción?

5. Una ley de la economía establece que el costo promedio por unidad se minimiza cuando el costo marginal es igual al costo promedio. Muestre que esto se cumple en el caso de la función de costo del ejercicio 4.

6. La función cuadrática del costo total para un producto es

$$C = ax^2 + bx + c$$

donde x es el número de unidades producidas y vendidas y C se expresa en dólares. El producto se vende a un precio de p dólares por unidad.
a) Construya la función de utilidad en términos de x.
b) ¿Qué valor de x genera una utilidad máxima?
c) ¿Qué restricción garantiza que un máximo relativo ocurra en este valor de x?
d) ¿Qué restricciones sobre a, b, c y p aseguran que $x > 0$?

7. Un campo petrolero consta actualmente de 10 pozos, cada uno de los cuales produce 300 barriles de petróleo al día. Se estima que con cada nuevo pozo que se perfore, el rendimiento por pozo disminuirá en 10 barriles diarios. Determine el número de pozos que deben perforarse a fin de maximizar el producto total diario del campo petrolero. ¿Cuál es la producción máxima?

8. Va a construirse un pequeño almacén que tendrá una superficie total de 10 000 pies cuadrados. El edificio se dividirá como se aprecia en la figura 17.25. Los costos se estimaron a partir de las dimensiones de las paredes exteriores e interiores. Los costos son de \$200 por pie de pared exterior más \$100 por pie de pared interior.
a) Determine las dimensiones que minimicen los costos de construcción.
b) ¿Cuáles son los costos mínimos?

9. Se construirá una caja rectangular abierta cortando los ángulos cuadrados de una pieza de 40×40 pulgadas de cartón grueso y doblando los extremos como se ve en la figura 17.26.
a) Determine el valor de x que produzca la caja de volumen máximo.
b) ¿Cuál es el volumen máximo?

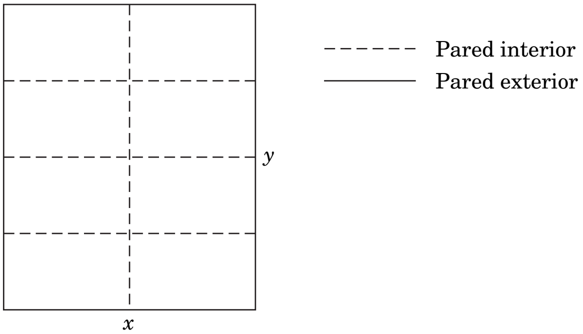


Figura 17.25

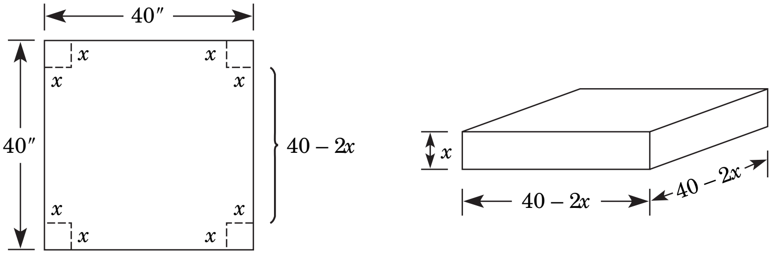


Figura 17.26

10. La función de demanda para un producto es

$$q = f(p) = 25\,000e^{-0.05p}$$

donde q es la cantidad demandada (en unidades) y p es el precio (en dólares).

a) Determine el valor de p que produzca el ingreso total máximo.

b) ¿Cuál es el ingreso total máximo?

11. Una organización de investigación de mercado afirma que si una compañía gasta x millones de dólares en publicidad por televisión, la ganancia total puede estimarse mediante la función

$$P = f(x) = 40x^2e^{-0.5x}$$

donde P se expresa en millones de dólares.

a) ¿Cuánto debería gastarse en publicidad por televisión con el fin de maximizar la ganancia total?

b) ¿Cuál es la ganancia máxima?

12. Retención de la memoria Se realizó un experimento para determinar los efectos del tiempo transcurrido sobre la memoria de una persona. Se solicitó a varios sujetos de estudio que observaran una imagen que contenía diferentes objetos. Después de estudiar la imagen, se les solicitó que recordaran tantos objetos como pudieran. A diferentes intervalos de tiempo después de esto, se les solicitaría que recordaran tantos objetos como pudieran. Con base en este experimento, se desarrolló la ecuación siguiente:

$$\overline{R} = f(t) = 84 - 25 \ln t, \qquad t \geq 1$$

Para esta función $\overline{R}$ representa los recuerdos porcentuales promedio como una función del tiempo desde que se estudie la imagen (expresada en horas). Un valor de $\overline{R} = 50$ indicaría que en el tiempo correspondiente t el recuerdo promedio para el grupo de estudio fue de 50 por ciento.

a) ¿Cuál es el recuerdo porcentual promedio después de una hora?
b) ¿Después de 10 horas?
c) Encuentre la expresión para la tasa de cambio en $\overline{R}$ con respecto del tiempo.
d) ¿Cuál es el máximo recuerdo porcentual? ¿Y el mínimo?

13. Una nueva institución de beneficencia estatal quiere determinar cuántos analistas contratar para el procesamiento de las solicitudes de seguridad social. Se estima que el costo promedio C de procesar una solicitud es una función del número de analistas x. Específicamente, la función de costo es

$$C = 0.005x^2 - 16 \ln x + 70$$

a) Si el objetivo es minimizar el costo promedio por solicitud, determine el número de analistas que deberían contratarse.
b) ¿Cuál es el costo promedio mínimo que se espera para procesar una solicitud?

14. Una compañía ha estimado que el costo de producción promedio por unidad $\overline{C}$ fluctúa con el número de unidades producidas x. La función de costo promedio es

$$\overline{C} = 0.002x^2 - 1\,000 \ln x + 7\,500$$

donde $\overline{C}$ se establece en dólares por unidad y x se establece en cientos de unidades.

a) Determine el número de unidades que deberían producirse con el fin de minimizar el costo de producción promedio por unidad.
b) ¿Cuál es el costo promedio mínimo por unidad esperado?
c) ¿Cuáles se espera que sean los costos de producción totales?

***15.** **Servicio Postal** El servicio postal de Estados Unidos exige que los paquetes de correo se ajusten a determinadas dimensiones. En concreto, la longitud más la circunferencia no deben ser mayores que 84 pulgadas.

a) Calcule las dimensiones (r y l) de un paquete cilíndrico que maximicen el volumen del paquete. (*Sugerencia:* Vea la figura 17.27 y recuerde que $V = \pi r^2 l$.)
b) ¿Cuál es la circunferencia del paquete?
c) ¿Cuál es el volumen máximo?

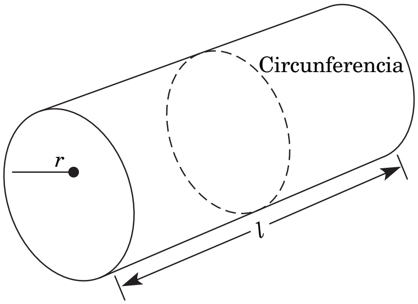


Figura 17.27

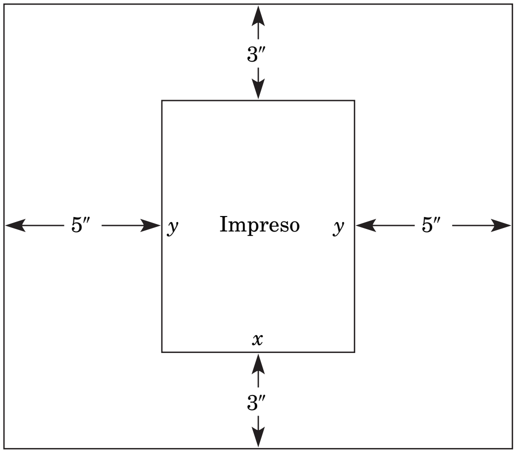


Figura 17.28

16. **Problema de cartel** La figura 17.28 es el diagrama de un cartel que se está diseñando para una campaña política. El área impresa deberá contener 1 500 pulgadas cuadradas. En ambos lados del impreso deberá haber un margen de 5 pulgadas y un margen de 3 pulgadas en la partes superior e inferior.

a) Determine las dimensiones de la superficie impresa que minimicen el área del cartel.

b) ¿Cuáles son las dimensiones óptimas del cartel?

c) ¿Cuál es la superficie mínima del cartel?

***17.** Una persona quiere comprar una propiedad rectangular a fin de construir un almacén. Éste deberá tener una superficie de 10 000 pies cuadrados. Los reglamentos de zonificación estipulan que deberá haber un mínimo de 30 pies entre el edificio y los límites laterales del lote y por lo menos 40 pies entre el edificio y los límites frontal y posterior del lote. La figura 17.29 es un diagrama del lote propuesto.

a) Determine las dimensiones del almacén que minimicen el área del lote.

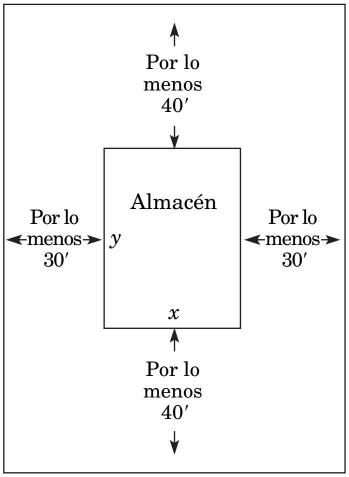


Figura 17.29

b) ¿Cuáles son las dimensiones óptimas del lote?

c) ¿Cuál es la superficie mínima del lote?

18. Determine dos números x y y cuya suma sea 50 y cuyo producto sea lo más grande posible. ¿Cuál es el producto máximo de los dos números?

19. Determine dos números positivos cuyo producto sea 40 y cuya suma sea lo más grande posible. ¿Cuál es la suma mínima?

***20.** **Biathlon** Una mujer va a participar en un biathlon de carrera y natación. El recorrido tiene una longitud variable y se muestra en la figura 17.30. Cada participante correrá (o caminará) desde el punto de arranque a lo largo del río. Deben cruzarlo a nado; pero el punto de cruce x debe ser elegido por cada participante.

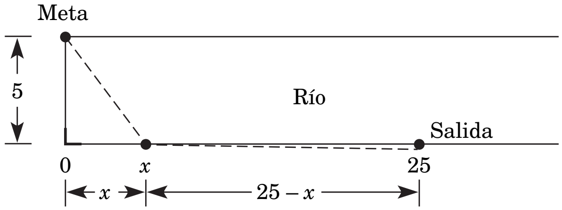


Figura 17.30

Esta concursante estima que alcanzará un promedio de cinco millas por hora en la parte correspondiente a la carrera y una milla por hora en la parte correspondiente al nado. Desea minimizar su tiempo en el evento.

a) Determine el punto de cruce x que producirá el tiempo mínimo.

b) ¿Cuál se espera que sea el tiempo mínimo?

c) ¿Qué relación tiene este tiempo con el que se logra si la participante corre las 25 millas completas (el punto de cruce se halla en $x = 0$)?

Sugerencia: tiempo = distancia ÷ velocidad u horas = millas ÷ millas/hora; por otra parte,

$$t_{\text{total}} = t_{\text{carrera}} + t_{\text{nado}}$$

***21.** **Administración de desperdicios sólidos** Un municipio planea construir una instalación para el tratamiento de desperdicios sólidos. Uno de los principales componentes de la planta es un pozo para agitación. El pozo será de forma circular y deberá tener una capacidad de 2 millones de pies cúbicos. Los ingenieros municipales han estimado que los costos de construcción serán una función de la superficie de la base del pozo y su pared. Esos costos se estiman en $80 por pie cuadrado en la base del pozo y en $30 por pie cuadrado de la superficie de la pared. La figura 17.31 es un diagrama del pozo. Nótese que r es igual al radio del pozo en pies y h es la profundidad en pies. Determine las dimensiones r y h que ofrezcan una capacidad de 2 millones de pies cúbicos al costo mínimo de construcción. (*Sugerencia:* el área A de un círculo de radio r es $A = \pi r^2$, la superficie A de un cilindro circular de radio r y altura h es $A = 2\pi rh$ y el volumen V es $V = \pi r^2 h$).

En los ejercicios siguientes: *a*) determine la expresión general para la elasticidad de demanda puntual; *b*) determine la elasticidad de demanda a los precios indicados, clasificando también la demanda como elástica, inelástica o elástica unitaria, y *c*) interprete el significado de los valores de elasticidad hallados en el inciso *b*).

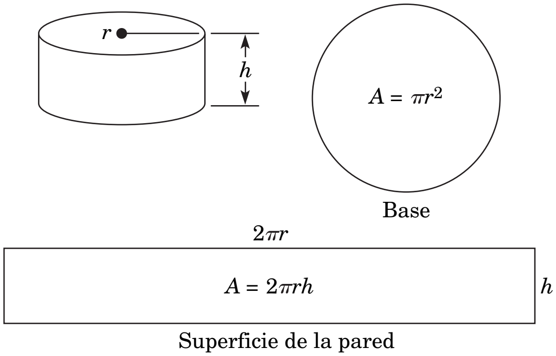


Figura 17.31

22. $q = f(p) = 2\,500 - 80p$, $p = \$6$, $p = \$15$, $p = \$24$

23. $q = f(p) = 875 - p - 0.05p^2$, $p = \$50$, $p = \$70$ y $p = \$100$

24. Dada la función de demanda en el ejercicio 22, determine el (los) precio(s) para el (los) cual(es) la demanda es: *a*) elástica, *b*) inelástica y *c*) elástica unitaria.

25. Dada la función de demanda $q = f(p) = 2\,400 - 40p$, determine el (los) precio(s) para el (los) cual(es) la demanda es: *a*) elástica, *b*) inelástica y *c*) elástica unitaria.

❑ EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. La función de demanda de un producto es

$$q = f(p) = 60\,000 - 7.5p$$

donde q es la cantidad demandada y p es el precio en dólares. Formule la función del ingreso total $R = g(p)$.

2. La función del ingreso total para un producto es

$$R = f(x) = -4x^2 + 300x$$

donde R se mide en cientos de dólares y x es el número de unidades vendidas (en cientos). El costo total de producir x unidades (cientos) se describe con la función

$$C = g(x) = x^2 - 150x + 5\,000$$

donde C se mide en cientos de dólares.

a) Formule la función de utilidad $P = h(x)$.
b) ¿Cuántas unidades se debieran producir y vender a fin de maximizar la utilidad total?
c) ¿Cuál es la utilidad máxima?

3. Un importador quiere cercar una superficie de almacenamiento situada cerca de los muelles de embarque. La superficie se usará para el almacenamiento temporal de las cajas. La superficie deberá ser rectangular con un área de 100 000 pies cuadrados. La cerca costará $20 por pie lineal.

a) Determine las dimensiones de la superficie que reduzcan al mínimo los costos de la cerca.
b) ¿Cuál es el costo mínimo?

4. Un minorista ha decidido que el costo anual C de comprar, poseer y mantener uno de sus productos se comporta conforme a la función

$$C = f(q) = \frac{20\,000}{q} + 0.5q + 80\,000$$

donde q es el tamaño (en unidades) de cada orden comprada a los proveedores.

a) ¿Qué cantidad de orden q produce un costo mínimo anual?
b) ¿Cuál es el costo mínimo anual?

5. La función de demanda para un producto es

$$q = f(p) = 35\,000e^{-0.05p}$$

donde q es la cantidad demandada (en unidades) y p es el precio (en dólares).

a) Determine el valor de p que produzca el ingreso total máximo.
b) ¿Cuál es el ingreso total máximo?

6. Una compañía está contratando personas para trabajar en su planta. Para el trabajo que las personas deben realizar, los expertos en eficiencia estiman que el costo promedio C de llevar a cabo la tarea es una función del número de personas contratadas x. Específicamente,

$$C = f(x) = 0.005x^2 - 0.49 \ln x + 5$$

a) Determine el número de personas que deberían ser contratadas para minimizar el costo promedio.

b) ¿Cuál es el costo promedio mínimo?

MINICASO

EL MODELO DE LA CANTIDAD ECONÓMICA DE PEDIDO

El modelo de la cantidad económica de pedido (*economic order quantity,* EOQ) es un modelo clásico de inventario. Su finalidad es encontrar la cantidad que debe pedirse de un objeto con el fin de minimizar los costos totales del inventario. El modelo supone tres componentes diferentes del costo: *costo de pedido*, *costo de mantenimiento del inventario* y *costo de compra.* Los costos de pedido son los que implican colocar y recibir una orden. Son los gastos que se destinan a cubrir los salarios de las personas que realizan la requisición de los productos, que procesan los trámites, que reciben los productos y que los ponen en inventario. Se supone que se realizan cada vez que se hace un pedido.

Los costos de mantenimiento del inventario, algunas veces llamados *costos de conservación*, son los costos de poseer y mantener un inventario. Estos costos incluyen componentes como el costo del espacio de almacenamiento, seguros, sueldos del personal encargado del control del inventario, obsolescencia y los costos de oportunidad debido al hecho de tener la inversión en el inventario. Estos costos a menudo se expresan como porcentaje del valor promedio del inventario disponible (por ejemplo, 25% al año). El costo de compra no es más que el costo de los elementos del inventario.

Aunque el modelo de la cantidad económica de pedido admite variaciones, el modelo básico hace las siguientes suposiciones: 1) la demanda de elementos se conoce y es una tasa constante (o casi constante); 2) el tiempo transcurrido entre colocar y recibir un pedido (*tiempo de espera*) se conoce con certeza; 3) las cantidades del pedido tienen siempre el mismo tamaño y 4) la reposición del inventario es instantánea (es decir, todo el pedido se recibe en un lote).

Si se supone un marco temporal de un año, los costos totales del inventario serán

$$\begin{aligned} TC &= \text{costo anual de pedidos} + \text{costo anual de mantenimiento del inventario} \\ &\quad + \text{costo anual de compras} \\ &= \begin{pmatrix}\text{número de}\\ \text{pedidos por año}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{costo de pedidos}\\ \text{por orden}\end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix}\text{inventario}\\ \text{promedio}\\ \text{de unidades}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{valor}\\ \text{por}\\ \text{unidad}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{costo de mantenimiento del}\\ \text{inventario en porcentaje}\end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix}\text{demanda}\\ \text{anual}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{precio de compra}\\ \text{por unidad}\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si

D = *demanda anual en unidades*

C_o = *costo de pedido por orden*

C_d = *costo de mantenimiento del inventario* (*expresado como porcentaje del valor promedio del inventario disponible*)

p = *precio de compra por unidad*

q = *cantidad de pedido*

los costos anuales del inventario pueden expresarse como una función de la cantidad de pedido q, como sigue:

$$TC = f(q) = \frac{D}{q}C_o + \frac{q}{2}pC_h + pD$$

Requisitos:

1. Para un elemento determinado del inventario, $D = 5\,000$, $C_o = \$125$, $P = \$100$ y $C_h = 0.20$. Determine el valor de q que minimice los costos anuales totales del inventario. ¿Cuáles son los costos anuales mínimos del inventario? ¿Cuántos pedidos deben hacerse cada año? ¿Cuáles son los costos anuales de los pedidos? ¿Y cuáles son los costos anuales de mantenimiento del inventario?
2. La cantidad de pedido que minimiza los costos anuales del inventario recibe el nombre de "cantidad económica de pedido" (*economic order quantity*, EOQ). Usando la función generalizada de costos, determine la expresión general de la cantidad de pedido q que minimice el costo anual del inventario. (*Sugerencia:* Encuentre la derivada con respecto de q, suponiendo que D, C_o, P y C_d sean constantes.)
3. Pruebe que el valor crítico de q no produce un mínimo relativo en la función de costo.
4. Con la expresión de q obtenida en la parte 2, demuestre que los costos anuales de los pedidos equivalen al costo anual de mantenimiento del inventario cuando se opera al nivel de la cantidad económica de pedido.

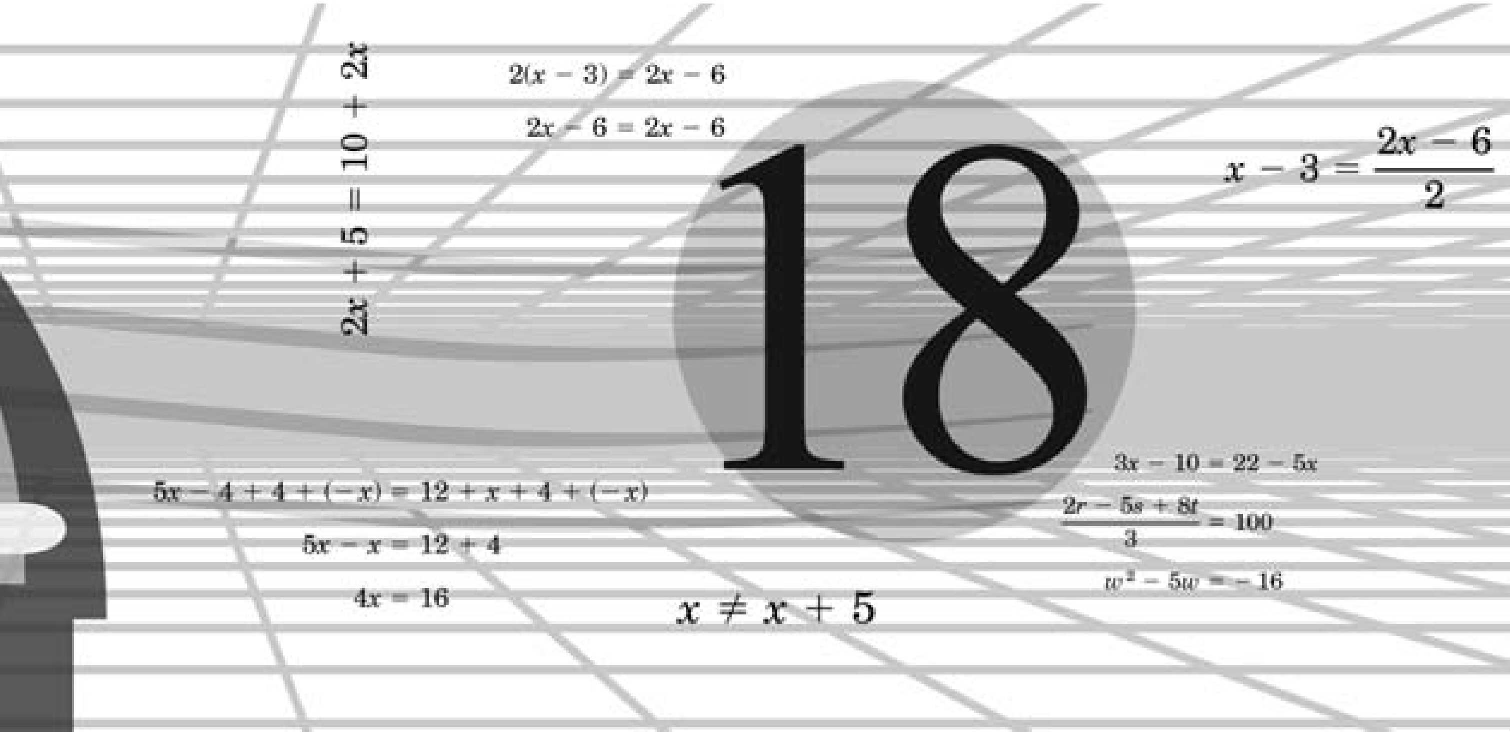
5. Los costos anuales del inventario pueden expresarse en términos del número de pedidos que se hacen por año, N, reconociendo que $N = D/q$. Vuelva a escribir la función generalizada de costo en términos de N y no en términos de q. Determine la expresión general del valor de N que minimice los costos anuales del inventario. Confirme que el valor crítico de N no origine un mínimo relativo en la función de costo.

CAPÍTULO 18

Cálculo integral: una introducción

OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Introducción a la naturaleza y métodos del cálculo integral.
- Ofrecer algunas reglas de la integración y ejemplos de su uso.
- Dar ejemplos de otros métodos de integración que puedan ser apropiados cuando no lo sean las reglas básicas.



ESCENARIO DE MOTIVACIÓN: Costo marginal

En el capítulo 17 se definió el costo marginal como el costo adicional en que se incurre como resultado de producir y vender una unidad más de un producto o servicio. También se determinó que dada la función de costo total $C = f(q)$, la función de costo marginal es la derivada de la función de costo total, o $MC = f'(q)$. Suponga que se tiene la función

$$MC = x + 100$$

donde x es igual al número de unidades producidas. También se sabe que el costo total es igual a $40 000 cuando $x = 100$. *Lo que se desea es determinar la función de costo total $C = f(x)$* (ejemplo 5).

En este capítulo se abordará una segunda e importantísima área de estudio del cálculo: el *cálculo integral.* Según se mencionó al inicio del capítulo 15, el cálculo diferencial es útil para estudiar las razones de cambio y las pendientes de tangentes. Un aspecto fundamental del cálculo integral es determinar las áreas que se encuentran entre curvas y otras fronteras definidas. Asimismo, si se conoce la derivada de una función, con el cálculo integral podrá obtenerse la función original.

Al iniciar esta nueva área de estudio, conviene saber hacia dónde nos dirigimos. En primer lugar, el cálculo integral abarca un campo fundamental de estudio dentro del cálculo. A este material se dedican dos capítulos. Con ello se pretende ofrecer al lector un panorama general de una disciplina para que conozca los aspectos y los métodos del cálculo integral, cómo se relaciona éste con el cálculo diferencial y en qué casos se aplica.

En este capítulo se tratará primero la naturaleza del cálculo integral al relacionarlo con las derivadas. Del mismo modo que se cuenta con reglas para calcular las derivadas en el cálculo diferencial, también existen para obtener las *integrales* en el cálculo integral. Las reglas de mayor uso se describirán en las secciones 18.2 y 18.3. En la sección 18.4 se analizan los procedimientos con que se calculan las integrales cuando no son aplicables las reglas mencionadas en las secciones 18.2 y 18.3. Por último, en la sección 18.5 se explican las ecuaciones diferenciales. El capítulo 19 se centrará en las aplicaciones del cálculo integral.

18.1 Antiderivadas

El concepto de la antiderivada

Dada una función f, ya se sabe calcular la derivada f'. Puede haber ocasiones en que se conozca la derivada f' y se quiera encontrar la función original f. Puesto que el proceso de determinar la función original es el opuesto al de la diferenciación, se dice que f es una ***antiderivada*** de f'.

Considérese la derivada

$$f'(x) = 4 \tag{18.1}$$

Al utilizar el método de tanteo, no resulta muy difícil concluir que la función

$$f(x) = 4x \tag{18.2}$$

tiene una derivada de la forma de la ecuación (18.1). He aquí otra función que tiene la misma derivada:

$$f(x) = 4x + 1$$

De hecho, cualquier función que tenga la forma

$$f(x) = 4x + C \tag{18.3}$$

donde C es cualquier constante, tendrá también la misma derivada. Así pues, con la derivada de la ecuación (18.1), la conclusión será que la función original pertenecía a la *familia* de funciones caracterizadas por la ecuación (18.3). Esa familia es un conjunto de funciones lineales cuyos miembros tienen una pendiente de $+4$, pero diferentes intersecciones C con el eje y. La figura 18.1 contiene algunos miembros de esa familia de funciones.

Puede afirmarse también que la función

$$f(x) = 4x + C$$

es la *antiderivada* de

$$f'(x) = 4$$

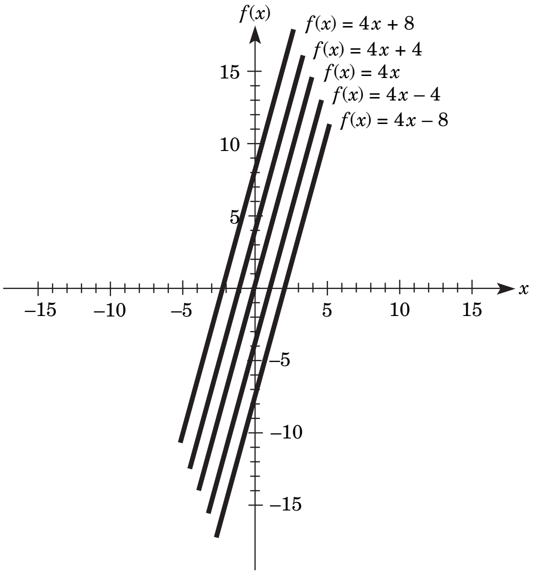


Figura 18.1

Ejemplo 1 Encuentre la antiderivada de $f'(x) = 0$.

SOLUCIÓN

Se sabe que la derivada de cualquier función constante es 0. Por consiguiente, la antiderivada es $f(x) = C$.

Ejemplo 2 Encuentre la antiderivada de $f'(x) = 2x - 5$.

SOLUCIÓN

Al aplicar el método de tanteo y al trabajar con cada término por separado, debería llegarse a la conclusión de que la antiderivada es

$$f(x) = x^2 - 5x + C$$ ❑

> **NOTA** Una comprobación fácil de la antiderivada f consiste en diferenciarla y determinar f'.

Con información complementaria quizá sea posible determinar la función precisa de dónde se dedujo f'. Supóngase en el ejemplo original que se dice que $f(x) = 4$ y un punto en la función original es (2, 6). Puesto que las coordenadas en este punto deben satisfacer la ecuación de la función original, puede resolverse para el valor específico C al sustituir $x = 2$ y $f(x) = 6$ en la ecuación (18.3), o bien

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x + C \\ 6 &= 4(2) + C \\ -2 &= C \end{aligned}$$

Por lo tanto, el miembro específico de la familia de funciones caracterizadas por la ecuación (18.3) es

$$f(x) = 4x - 2$$

Ejemplo 3 En el ejemplo 1, suponga que un punto en la función f sea $(-2, 5)$. Determine la función específica de la que se obtuvo f'.

SOLUCIÓN

La antiderivada que describe la familia de posibles funciones era

$$f(x) = C$$

La sustitución de $x = -2$ y $f(x) = 5$ en esta ecuación da

$$5 = C$$

Por lo tanto, la función específica es $f(x) = 5$.

Ejemplo 4 En el ejemplo 2, suponga que un punto en la función f sea (2, 20). Determine la función específica de donde se derivó f'.

SOLUCIÓN

La antiderivada que describe la familia de posibles funciones era

$$f(x) = x^2 - 5x + C$$

Si se sustituye $x = 2$ y $f(x) = 20$ en esta ecuación, se obtiene

$$20 = 2^2 - 5(2) + C$$

$$20 = -6 + C$$

$$26 = C$$

Así pues, la función original será

$$f(x) = x^2 - 5x + 26$$ ❑

Funciones de ingreso y costo

En el capítulo 17 se explicó el *enfoque marginal* con el cual se obtiene el nivel de producción que maximiza las utilidades. Se señaló que una expresión del ingreso marginal (*MR*) es la derivada de la función de ingreso total, donde la variable independiente es el nivel de producción. De manera semejante, se afirmó que una expresión del costo marginal (*MC*) es la derivada de la función del costo total. Si se tiene una expresión del ingreso o del costo marginal, las antiderivadas respectivas serán las funciones del ingreso y costo totales.

Ejemplo 5 **(Costo marginal; escenario de motivación)** La función que describe el costo marginal de fabricar un producto es

$$MC = x + 100$$

donde x es el número de unidades producidas. Se sabe también que el costo total es \$40 000, cuando $x = 100$. Determine la función de costo total.

SOLUCIÓN

Para determinar la función de costo total, primero se encuentra la antiderivada de la función de costo marginal, es decir,

$$C(x) = \frac{x^2}{2} + 100x + C \tag{18.4}$$

Dado que $C(100) = 40\,000$, se puede despejar el valor de C, que resulta para representar el costo fijo.

$$40\,000 = \frac{(100)^2}{2} + 100(100) + C$$

$$40\,000 = 5\,000 + 10\,000 + C$$

o bien

$$25\,000 = C$$

La función específica que representa el costo total de fabricar el producto es

$$C(x) = \frac{x^2}{2} + 100x + 25\,000$$

Ejemplo 6 **(Ingreso marginal)** La función de ingreso marginal para el producto de una compañía es

$$MR = 50\,000 - x$$

donde x es el número de unidades producidas y vendidas. Si el ingreso total es 0 cuando no se vende ninguna unidad, determine la función de ingreso total del producto.

SOLUCIÓN

Dado que la función del ingreso marginal es la derivada de la función del ingreso total, esta última será la antiderivada del ingreso marginal. Al aplicar el método de tanteo se obtiene

$$R(x) = 50\,000x - \frac{x^2}{2} + C \qquad \textbf{(18.5)}$$

Puesto que se sabe que $R(0) = 0$, la sustitución de $x = 0$ y $R = 0$ en la ecuación (18.5) da

$$0 = 50\,000(0) - \frac{0^2}{2} + C$$

o bien

$$0 = C$$

Por lo tanto, la función de ingreso total del producto de la compañía es

$$R(x) = 50\,000x - \frac{x^2}{2}$$

❑

Sección 18.1 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 30, encuentre la antiderivada de la función dada.

1. $f'(x) = 80$

2. $f'(x) = -50$

3. $f'(x) = \frac{1}{5}$

4. $f'(x) = \sqrt{70}$

5. $f'(x) = 3x$

6. $f'(x) = -6x$

7. $f'(x) = x^2/2$

8. $f'(x) = x^2$

9. $f'(x) = x^4$

10. $f'(x) = x^3/3$

11. $f'(x) = x^2 - 4x$

12. $f'(x) = x^3 + x^2 + 6x$

13. $f'(x) = x^2 + 8x + 10$

14. $f'(x) = x^5$

15. $f'(x) = 9x^2 + 10x$
16. $f'(x) = 6x^2 + 2x + 20$
17. $f'(x) = 3x^2 + 18x + 12$
18. $f'(x) = 18x^2 - 10x - 100$
19. $f'(x) = 8x^3 - 6x^2$
20. $f'(x) = 4x^3 - 3x^2$
21. $f'(x) = 12x^3 - 9x^2 + 3$
22. $f'(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$
23. $f'(x) = 5x^4 - 9x^2 - 6$
24. $f'(x) = 20x^4 + 8x^3 - 4x$
25. $f'(x) = 30x^4 - 2x^3 + 8x - 5$
26. $f'(x) = 15x^4 - 6x^3 + 2x - 8$
27. $f'(x) = x^3/2$
28. $f'(x) = \sqrt{2}x^3$
29. $f'(x) = -18x^5 + 9x^2 - 10x$
30. $f'(x) = 36x^5 - 15x^4 + 3x^2$

En los ejercicios 31 a 50, determine f si se conoce f' y un punto que satisfaga f.

31. $f'(x) = 20, (1, 20)$
32. $f'(x) = -8x + 2, (2, 10)$
33. $f'(x) = 10x, (-2, 10)$
34. $f'(x) = x^2, (-4, 26)$
35. $f'(x) = 4x^3, (2, 15)$
36. $f'(x) = -2x^3, (6, 10)$
37. $f'(x) = -x^2 + 4x, (3, 45)$
38. $f'(x) = x^2 + 2x - 3, (-3, 8)$
39. $f'(x) = 6x^2 + 8x, (2, -20)$
40. $f'(x) = 5x^4, (-5, 48)$
41. $f'(x) = 9x^2 + 2x, (-2, 2)$
42. $f'(x) = 9x^2 - 4x + 2, (-8, -20)$
43. $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x, (3, 80)$
44. $f'(x) = x^3 - x^2 + x + 3, (-1, 0)$
45. $f'(x) = 8x^3 - 3x^2, (2, 8)$
46. $f'(x) = 5x^4 - 6x^2, (5, 140)$
47. $f'(x) = -4x^3 - 12x, (-5, 40)$
48. $f'(x) = -8x^3 + 6x^2, (-6, 28)$
49. $f'(x) = 6x^5 - 3x^2, (1, 10)$
50. $f'(x) = 10 - x + x^2, (2, -7)$

51. La función de ingreso marginal del producto de una compañía es

$$MR = 40\,000 - 4x$$

donde x es el número de unidades vendidas. Si el ingreso total es 0 cuando no se venden unidades, determine la función de ingreso total del producto.

52. La función que describe el costo marginal (en dólares) de la producción de un artículo es

$$MC = 8x + 800$$

donde x indica el número de unidades producidas. Se sabe que el costo total es de \$80 000 cuando se fabrican 40 unidades. Calcule la función de costo total.

53. La función que describe la *utilidad marginal* lograda al producir y vender un producto es

$$MP = -6x + 450$$

donde x es el número de unidades y MP es la utilidad marginal medida en dólares. Cuando se producen y venden 100 unidades, la *utilidad total* es \$5 000. Encuentre la función de utilidad total.

54. La función que describe la utilidad marginal lograda con la fabricación y venta de un producto es

$$MP = -3x + 500$$

donde x es el número de unidades y MP es la utilidad marginal medida en dólares. Cuando se producen y venden 200 unidades, la utilidad total es de \$15 000. Determine la función de utilidad total.

18.2 Reglas de la integración

Por fortuna no es preciso recurrir a un método de tanteo cuando se quiere encontrar una antiderivada. Como en el caso de la diferenciación, se ha ideado un conjunto de reglas que permite calcular las antiderivadas. Si una función presenta una forma determinada, tal vez se disponga de una regla para determinar fácilmente su antiderivada.

Integración

El proceso de encontrar las antiderivadas suele recibir el nombre de ***integración***. Y la familia de funciones obtenidas mediante ese proceso se llama ***integral indefinida***. La notación

$$\int f(x)\,dx \tag{18.6}$$

se emplea con frecuencia para indicar la integral indefinida de la función f. El símbolo $\int$ es el ***signo de integral***; f es el ***integrando***, o sea la función cuya integral indefinida se desea obtener; y dx, tal como se considera aquí, denota la variable respecto de la cual se realiza el proceso de integración. Dos descripciones verbales del proceso indicadas por la ecuación (18.6) son "integrar la función f respecto de la variable x" y "encontrar la integral indefinida de f respecto de x".

NOTA No olvide que calcular una integral indefinida es lo mismo que obtener una antiderivada.

En el ejemplo 2 se observó que la antiderivada de $2x - 5$ es $x^2 - 5x + C$. Puede denotarse esto usando la notación integral, como

$$\boxed{\int (2x - 5)\,dx = x^2 - 5x + C}$$

A continuación se da una definición más formal de la integral indefinida.

Definición: Integral definida

Dado que f es una función continua,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{18.7}$$

si $F'(x) = f(x)$.

En la definición anterior, C se conoce como la ***constante de integración***. Una vez más, C refleja la naturaleza indefinida de obtención de la antiderivada o integral indefinida.

Reglas de la integración

A continuación se da un conjunto de reglas que permiten calcular la integral indefinida de algunas funciones comunes en las aplicaciones a la administración y la economía.

Regla 1: Funciones constantes

$$\int k\,dx = kx + C$$

donde k es una constante cualquiera.

El ejemplo 7 illustra esta regla.

Ejemplo 7

a) $\int (-2)\,dx = -2x + C$

b) $\int \frac{3}{2}\,dx = \frac{3}{2}x + C$

c) $\int \sqrt{2}\,dx = \sqrt{2}x + C$

d) $\int 0\,dx = (0)x + C = C$ ❑

Regla 2: Regla de la potencia

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

Esta regla es análoga a la regla de la diferenciación basada en la potencia. *Nótese que esta regla no es válida cuando $n = -1$.* Más adelante nos ocuparemos de esta excepción. En su forma verbal, la regla establece que, si el integrando es x elevada a una potencia de valor real, el exponente de x se aumenta en 1, se divide entre el nuevo exponente y se suma la constante de integración. El ejemplo 8 ofrece varias ilustraciones de esta regla.

Ejemplo 8

a) $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$

b) $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$

c) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx = \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$

d) $\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$ ❑

NOTA No olvide el mecanismo intrínseco de verificación. Su aplicación requiere unos cuantos segundos y con él pueden evitarse los errores atribuibles al descuido. Calcule la derivada de las integrales indefinidas encontradas en el ejemplo 8 y compruebe si son iguales a los integrandos respectivos. Quizá se necesite de alguna manipulación algebraica para verificar esos resultados.

Regla 3

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

donde k es una constante de valor real.

En su forma verbal, esta regla establece que la integral indefinida de una constante k por una función f se determina multiplicando la constante por la integral indefinida de f. Otra manera de concebir la regla es afirmar que siempre que una constante pueda factorizarse a partir del integrando, también puede factorizarse fuera de la integral. En el ejemplo 9 se dan algunos casos de esta regla.

Ejemplo 9

a)
$$\begin{aligned}\int 5x\,dx &= 5\int x\,dx\\ &= 5\left(\frac{x^2}{2}+C_1\right)\\ &= \frac{5x^2}{2}+5C_1\\ &= \frac{5x^2}{2}+C\end{aligned}$$

Comprobación Si $f(x) = \dfrac{5x^2}{2} + C,\qquad f'(x) = \dfrac{5}{2}(2x) = 5x$ ✓

NOTA Con integrales indefinidas se incluye siempre la constante de integración. En la aplicación de la regla 3, el álgebra sugiere que cualquier constante k factorizada fuera de la integral deberá multiplicarse por la constante de integración (el término $5C_1$ en este ejemplo). Esta multiplicación es innecesaria, simplemente se requiere una constante de integración para indicar la "naturaleza indefinida" de la integral. Así, la convención es sumar C y no un múltiplo de C. En el último paso, el término $5C_1$ se reescribe simplemente como C, puesto que C representa cualquier constante y también $5C_1$.

b) $$\int \frac{x^2}{2}\,dx = \int \frac{1}{2}x^2\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int x^2\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + C$$
$$= \frac{x^3}{6} + C$$

Comprobación Si $f(x) = \dfrac{x^3}{6} + C,\qquad f'(x) = \dfrac{3x^2}{6} = \dfrac{x^2}{2}$ ✓

c) $$\int \frac{3}{\sqrt{x}}\,dx = \int 3x^{-1/2}\,dx$$
$$= 3\int x^{-1/2}\,dx$$
$$= 3\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C$$
$$= 6x^{1/2} + C$$

Comprobación Si $f(x) = 6x^{1/2} + C,\qquad f'(x) = 6(\tfrac{1}{2})x^{-1/2}$
$$= \frac{3}{x^{1/2}}$$
$$= \frac{3}{\sqrt{x}}$$ ✓

❑

Regla 4

Si existen $\int f(x)\,dx$ y $\int g(x)\,dx$, entonces

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

La integral indefinida de la suma (diferencia) de dos funciones es la suma (diferencia) de sus integrales indefinidas respectivas.

Ejemplo 10

a) $$\int (3x - 6)\,dx = \int 3x\,dx - \int 6\,dx$$
$$= \frac{3x^2}{2} + C_1 - (6x + C_2)$$

$$= \frac{3x^2}{2} - 6x + C_1 - C_2$$
$$= \frac{3x^2}{2} - 6x + C$$

Nótese también aquí que, aun cuando las dos integrales producen, desde el punto de vista técnico, constantes separadas de integración, éstas pueden considerarse como una sola.

Comprobación Si $f(x) = \frac{3x^2}{2} - 6x + C, \quad f'(x) = 3x - 6$ ✓

b) $$\int (4x^2 - 7x + 6)\,dx = \int 4x^2\,dx - \int 7x\,dx + \int 6\,dx$$
$$= \frac{4x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 6x + C$$

Comprobación Si $f(x) = \frac{4x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 6x + C, \quad f'(x) = \frac{12x^2}{3} - \frac{14x}{2} + 6$
$$= 4x^2 - 7x + 6$$ ✓ ❑

Sección 18.2 Ejercicios de seguimiento

En los siguientes ejercicios, encuentre la integral indefinida (si es posible).

1. $\int 60\,dx$

2. $\int -25\,dx$

3. $\int dx/8$

4. $\int dx$

5. $\int 8x\,dx$

6. $\int (x/2)\,dx$

7. $\int -3x\,dx$

8. $\int (-8x/3)\,dx$

9. $\int (3x + 6)\,dx$

10. $\int (10 - 5x)\,dx$

11. $\int (x/3 - 1/4)\,dx$

12. $\int (x/2 + 1/4)\,dx$

13. $\int (3x^2 - 4x + 2)\,dx$

14. $\int (-6x^2 + 10)\,dx$

15. $\int (-18x^2 + x - 5)\,dx$

16. $\int (10 - 6x + 15x^2)\,dx$

17. $\int (4x^3 + 6x^2 - 3)\,dx$

18. $\int (8x^3 + 6x^2 - 2x + 10)\,dx$

19. $\int (x^5 - 12x^3 + 3)\,dx$

20. $\int (8x^3 + x^2/2 + 6)\,dx$

21. $\int \sqrt[5]{x}\, dx$

22. $\int (2/\sqrt[3]{x})\, dx$

23. $\int dx/x^3$

24. $\int (20/\sqrt[3]{x^2})\, dx$

25. $\int (ax^4 + bx^2)\, dx$

26. $\int (mx + b)\, dx$

27. $\int (a/bx^n)\, dx$

28. $\int \sqrt[b]{x}\, dx$

29. $\int dx/x^n$

30. $\int (a/\sqrt[b]{x})\, dx$

31. $\int 2\sqrt[3]{x}\, dx$

32. $\int 3\sqrt{x}\, dx$

33. $\int \sqrt[5]{x^3}\, dx$

34. $\int 8\sqrt[4]{x}\, dx$

35. $\int (4\sqrt[4]{x}/3)\, dx$

36. $\int (3\sqrt[3]{x}/2)\, dx$

37. $\int (dx/x^4)$

38. $\int (-8\, dx/x^3)$

39. $\int (16\, dx/x^2)$

40. $\int (3\, dx/x^3)$

41. $\int (dx/\sqrt{x})$

42. $\int (dx/\sqrt[3]{x})$

43. $\int (-15\, dx/\sqrt[5]{x})$

44. $\int (-2\, dx/\sqrt{x})$

45. $\int (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)\, dx$

46. $\int (6\, dx/x^6)$

47. $\int (4ax^3 + 3bx^2 + 2cx)\, dx$

48. $\int (dx/ax^2)$

49. $\int (dx/ax^n)$

50. $\int ([1/x^2] + [2/x^3])\, dx$

18.3 Reglas adicionales de integración

En esta sección se ofrecen más reglas de integración y se dan ejemplos de su aplicación.

Regla 5: Excepción de la regla de la potencia

$$\int x^{-1}\, dx = \ln x + C$$

Ésta es la excepción relacionada con la regla 2 (la regla de la potencia), donde $n = -1$ para x^n. ¿Recuerda el lector las reglas de diferenciación? Si $f(x) = \ln x$, $f'(x) = 1/x = x^{-1}$.

Regla 6

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

Regla 7

$$\int [f(x)]^n f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1$$

Esta regla se parece a la de la potencia (regla 2). En efecto, la regla de la potencia es el caso especial de esta regla, donde $f(x) = x$. Si el integrando está formado por el producto de la función f elevada a una potencia n y la derivada de f, la integral indefinida se calculará aumentando en 1 el exponente de f y dividiendo el resultado entre el nuevo exponente.

Ejemplo 11 Evalúe $\int (5x - 3)^3(5)\, dx$.

SOLUCIÓN

Cuando se identifica un integrando que contiene una función elevada a una potencia, el lector deberá pensar de inmediato en la regla 7. El primer paso es determinar la función f. En este caso, la función que se eleva a la tercera potencia es

$$f(x) = 5x - 3$$

Una vez obtenida f, deberá determinarse f'. En este caso,

$$f'(x) = 5$$

Si el integrando presenta la forma $[f(x)]^n f'(x)$, entonces se aplicará la regla 7. El integrando en este ejemplo sí tiene la forma requerida, y

$$\int \overbrace{(5x - 3)}^{f(x)}{}^3\, \overbrace{(5)}^{f'(x)}\, dx = \frac{(5x - 3)^4}{4} + C$$

Comprobación Si $f(x) = \dfrac{(5x - 3)^4}{4} + C$, $\quad f'(x) = \dfrac{4}{4}(5x - 3)^3(5)$

$$= (5x - 3)^3(5) \quad \checkmark$$

Ejemplo 12 Evalúe $\int \sqrt{2x^2 - 6}(4)\, dx$.

SOLUCIÓN

El integrando puede reescribirse como

$$\int (2x^2 - 6)^{1/2}(4)\, dx$$

En relación con la regla 7, se tiene

$$f(x) = 2x^2 - 6 \quad \text{y} \quad f'(x) = 4x$$

Para que se aplique la regla 7, $(2x^2 - 6)^{1/2}$ deberá multiplicarse por f', o sea $4x$, en el integrando. Puesto que el otro factor del integrando es 4 y no $4x$, no será posible evaluar la integral mediante la regla 7.

Ejemplo 13 Evalúe $\int (x^2 - 2x)^5(x - 1)\, dx$.

SOLUCIÓN

Para esta integral

$$f(x) = x^2 - 2x \quad \text{y} \quad f'(x) = 2x - 2$$

También en este caso parece que el integrando no es de la forma apropiada. Para aplicar la regla 7, el segundo factor en el integrando tendría que ser $2x - 2$ y no $x - 1$. Sin embargo, al recordar la regla 3 y utilizar algunas manipulaciones algebraicas se obtiene

$$\begin{aligned}\int (x^2 - 2x)^5(x - 1)\, dx &= \frac{2}{2}\int (x^2 - 2x)^5(x - 1)\, dx\\ &= \frac{1}{2}\int (x^2 - 2x)^5(2)(x - 1)\, dx\\ &= \frac{1}{2}\int (x^2 - 2x)^5(2x - 2)\, dx \qquad \textbf{(18.8)}\end{aligned}$$

Lo que se ha hecho es *manipular* el integrando para convertirlo en la forma adecuada. La regla 3 establece que las *constantes* pueden factorizarse de adentro hacia afuera del signo de la integral. De manera análoga, una constante que sea un factor puede desplazarse de afuera del signo de la integral hacia adentro. Se multiplicó el integrando por 2 y esta operación se compensó al multiplicar la integral por 1/2. En efecto, simplemente se multiplica la integral original por 2/2, o sea 1. Así pues, hemos cambiado el aspecto de la integral original, pero no su valor.

Al evaluar la integral en la ecuación (18.8) se obtiene

$$\int (x^2 - 2x)^5(x - 1)\, dx = \frac{1}{2}\int \overbrace{(x^2 - 2x)}^{f(x)}{}^5\,\overbrace{(2x - 2)}^{f'(x)}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(x^2 - 2x)^6}{6} + C$$

$$= \frac{(x^2 - 2x)^6}{12} + C$$

Comprobación Si $f(x) = \dfrac{(x^2 - 2x)^6}{12} + C,$ $\quad f'(x) = \dfrac{6}{12}(x^2 - 2x)^5(2x - 2)$

$$= \frac{6(x^2 - 2x)^5(2)(x - 1)}{12}$$

$$= (x^2 - 2x)^5(x - 1) \quad ✓$$

Ejemplo 14 Evalúe $\displaystyle\int (x^4 - 2x^2)^4(4x^2 - 4)\,dx.$

SOLUCIÓN

En esta integral

$$f(x) = x^4 - 2x^2 \quad \text{y} \quad f'(x) = 4x^3 - 4x$$

El integrando no es exactamente de la forma de la regla 7. Existe una fuerte tentación a efectuar las siguientes operaciones.

$$\begin{aligned}\int (x^4 - 2x^2)^4(4x^2 - 4)\,dx &= \frac{x}{x}\int (x^4 - 2x^2)^4(4x^2 - 4)\,dx \\ &= \frac{1}{x}\int (x^4 - 2x^2)^4 x(4x^2 - 4)\,dx \\ &= \frac{1}{x}\int (x^4 - 2x^2)^4(4x^3 - 4x)\,dx\end{aligned}$$

Sin embargo, no se ha comentado ninguna propiedad que permita factorizar las *variables* dentro de un signo de integral. Las constantes sí, pero no así las variables. Por consiguiente, con las reglas de que se dispone hasta ahora no es posible evaluar la integral. ❑

Regla 8

$$\int f'(x)e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + C$$

Esta regla, lo mismo que la precedente, requiere que el integrando presente una forma muy específica. La regla 6 es en realidad el caso especial de ésta cuando $f(x) = x$.

Ejemplo 15 Evalúe $\int 2xe^{x^2}\,dx$.

SOLUCIÓN

Cuando se identifica un integrando que contiene *e* elevada a una potencia que es una función de *x*, de inmediato el lector debería recordar la regla 8. Igual que en el caso de la regla 7, el siguiente paso consiste en verificar si el integrando tiene la forma requerida para aplicar la regla 8. En este integrando,

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad f'(x) = 2x$$

Según la regla 8, el integrando presenta la forma adecuada, y

$$\int \overbrace{2x}^{f'(x)} \quad \overbrace{e^{x^2}}^{f(x)} \; dx = e^{x^2} + C$$

Comprobación Si $f(x) = e^{x^2} + C, \qquad f'(x) = (2x)e^{x^2}$ ✓

Ejemplo 16 Evalúe $\int x^2 e^{3x^3}\,dx$.

SOLUCIÓN

En relación con la regla 8, en este integrando se tiene

$$f(x) = 3x^2 \quad \text{y} \quad f'(x) = 9x^2$$

El integrando no se encuentra actualmente en una forma idónea para servirse de la regla 8. No obstante,

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{3x^3}\,dx &= \frac{9}{9}\int x^2 e^{3x^3}\,dx \\ &= \frac{1}{9}\int 9x^2 e^{3x^3}\,dx \end{aligned}$$

lo que es adecuado para hacer uso de la regla 8. Por consiguiente,

$$\int x^2 e^{3x^3}\,dx = \tfrac{1}{9}e^{3x^3} + C$$

Comprobación Si $f(x) = \frac{1}{9}e^{3x^3} + C, \qquad f'(x) = \frac{1}{9}e^{3x^3}(9x^2) = x^2 e^{3x^3}$ ✓ ❑

Regla 9

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + C$$

Ejemplo 17 Evalúe $\displaystyle\int \frac{6x}{3x^2 - 10}\,dx$.

SOLUCIÓN

Al aplicar la regla 9, se obtiene

$$f(x) = 3x^2 - 10 \quad \text{y} \quad f'(x) = 6x$$

Puesto que el integrando presenta la forma requerida por la regla 9,

$$\int \frac{6x\,dx}{3x^2 - 10} = \ln(3x^2 - 10) + C$$

Comprobación Si $f(x) = \ln(3x^2 - 10) + C$, $f'(x) = \dfrac{6x}{3x^2 - 10}$ ✓

Ejemplo 18 Evalúe $\displaystyle\int \frac{x - 1}{4x^2 - 8x + 10}\,dx$.

SOLUCIÓN

En relación con la regla 9, se tiene

$$f(x) = 4x^2 - 8x + 10 \quad \text{y} \quad f'(x) = 8x - 8$$

El integrando no parece ajustarse a la forma que exige la regla 9. Pero una manipulación algebraica permite volver a escribirlo en la forma requerida, o

$$\begin{aligned}
\int \frac{x - 1}{4x^2 - 8x + 10}\,dx &= \frac{8}{8}\int \frac{x - 1}{4x^2 - 8x + 10}\,dx \\
&= \frac{1}{8}\int \frac{8(x - 1)}{4x^2 - 8x + 10}\,dx \\
&= \frac{1}{8}\int \frac{8x - 8}{4x^2 - 8x + 10}\,dx
\end{aligned}$$

la que satisface la forma de la regla 9. Por lo tanto,

$$\int \frac{x - 1}{4x^2 - 8x + 10}\,dx = \frac{1}{8}\ln(4x^2 - 8x + 10) + C$$

Comprobación Si $f(x) = \frac{1}{8}\ln(4x^2 - 8x + 10) + C$,

$$f'(x) = \frac{1}{8}\left[\frac{8x - 8}{4x^2 - 8x + 10}\right] = \frac{x - 1}{4x^2 - 8x + 10} \quad ✓$$

❑

Sección 18.3 Ejercicios de seguimiento

En los siguientes ejercicios calcule la integral indefinida (si es posible).

1. $\int (x + 20)^5\, dx$

2. $\int \sqrt{x - 30}\, dx$

3. $\int 8(8x + 20)^3\, dx$

4. $\int \frac{1}{2}[10 - (x/2)]^4\, dx$

5. $\int [(x/3) + 15]^2(\frac{1}{3})\, dx$

6. $\int \sqrt{8 + 2x}\,(6)\, dx$

7. $\int (3x - 10)^3(x)\, dx$

8. $\int x\sqrt{x + 6}\, dx$

9. $\int (x^2 + 3)^4(2x)\, dx$

10. $\int (x^3 + 1)^4(3x^2)\, dx$

11. $\int (x^3 + 5)^3(x^2)\, dx$

12. $\int (x^2 + 3)^{3/2}(x)\, dx$

13. $\int (2x^2 - 4x)^6(x - 1)\, dx$

14. $\int (x^2/4 - x/2)^5(x - 1)\, dx$

15. $\int (2x/\sqrt{x^2 + 8})\, dx$

16. $\int 3x^2/(x^3 + 4)^3\, dx$

17. $\int (4x^3 + 8x^2)^5(x)\, dx$

18. $\int 4x^3\sqrt{x^2 + 1}\, dx$

19. $\int (4x^3 + 1)^3(12x)\, dx$

20. $\int (3x^4 - 5)^4(12x^2)\, dx$

21. $\int \sqrt{2x^3 + 3}\,(x^2)\, dx$

22. $\int \sqrt[3]{20 + 3x^3}\,(x^2)\, dx$

23. $\int (2x^2 + 8x)^3(x + 2)\, dx$

24. $\int (3x - 3x^3)^4(3x^2 - 1)\, dx$

25. $\int (x^3 + 3x^4)^3(3x + 12x^2)\, dx$

26. $\int \sqrt{9x - 3x^2}\,(3 - 2x)\, dx$

27. $\int e^{x^2}\, dx$

28. $\int e^{x-8}\, dx$

29. $\int e^{3x}\, dx$

30. $\int 2xe^{x^2}\, dx$

31. $\int e^{ax}\, dx$

32. $\int (x + 2)e^{x^2+4x}\, dx$

33. $\int \frac{-x}{x^2 + 5}\, dx$

34. $\int \frac{4x}{100 + x^2}\, dx$

35. $\int \frac{18}{6x + 5}\, dx$

36. $\int \frac{x^3 - 1}{x^4 - 4x}\, dx$

37. $\int \frac{dx}{ax+b}$

38. $\int \frac{ax-1}{ax^2-2x}\,dx$

39. $\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx}\,dx$

40. $\int \frac{a-bx}{2ax-bx^2}\,dx$

18.4 Otras técnicas de integración (opcional)

Las nueve reglas de integración expuestas en las secciones 18.2 y 18.3 se aplican únicamente a un subconjunto de funciones susceptibles de ser integradas. Este subconjunto comprende algunas de las funciones más comunes empleadas en las aplicaciones a la administración y la economía. Una pregunta espontánea es la siguiente: ¿Qué sucede cuando las reglas no son aplicables? En la presente sección se estudian dos técnicas que pueden utilizarse cuando no pueden usarse otras reglas y cuando la estructura del integrando tiene la forma apropiada. También se explica la utilización de tablas especiales con fórmulas de integración.

Integración por partes

Recuerde el lector la regla del producto de diferenciación explicada en el capítulo 15. Esta regla establece que, si

$$f(x) = u(x)v(x)$$

entonces $$f'(x) = v(x)u'(x) + u(x)v'(x)$$

Esta regla se puede escribir de un modo ligeramente diferente, así:

$$\frac{d}{dx}[u(x)v(x)] = v(x)u'(x) + u(x)v'(x)$$

Si se integran ambos miembros de la ecuación, el resultado será

$$u(x)v(x) = \int v(x)u'(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx$$

Y al reescribir la ecuación, se obtiene la ***fórmula de integración por partes***.

Fórmula de integración por partes

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx \qquad \textbf{(18.9)}$$

Esta ecuación expresa una relación que puede servir para determinar las integrales cuando el integrando tenga la forma $u(x)v'(x)$.

El procedimiento de integración por partes es un método de tanteo que puede o no dar buenos resultados con un integrando determinado. Si el integrando ocurre en la forma de un producto y no son aplicables las otras reglas de la integración, conviene recurrir al siguiente procedimiento.

Procedimientos de integración por partes mediante tanteo

I *Defina dos funciones, u y v, y determine si el integrando tiene la forma $u(x)v'(x)$.*

II *Si se encuentran dos funciones, tales que $u(x)v'(x)$ sea el integrando, trate de calcular la integral y para hacerlo evalúe el miembro derecho de la ecuación (18.9). La clave es si puede evaluarse $\int v(x)u'(x)dx$.*

En los siguientes ejemplos se explica esta técnica.

Ejemplo 19 Determine $\int xe^x\, dx$.

SOLUCIÓN

La primera observación debería ser que el integrando viene en una forma de producto. Se siente la tentación de aplicar la regla 8, la cual se usa con integrales de la forma $\int f'(x)e^{f(x)}\, dx$. Con el exponente $f(x)$ definido como x, $f'(x) = 1$ y el integrando no se presenta en la forma apropiada para aplicar la regla 8.

A continuación se tratará de definir dos funciones u y v, tales que el integrando tenga la forma $u(x)v'(x)$.

NOTA Una sugerencia es examinar los factores del integrando para determinar si uno de ellos presenta la forma de la derivada de otra función.

A continuación se definirá v' como igual a x y u como igual a e^x, de modo que el integrando adopte la forma

$$\int \overbrace{x}^{v'(x)}\ \overbrace{e^x}^{u(x)}\, dx$$

Con las definiciones anteriores es posible determinar v al integrar v' y u' y al diferenciar u, o sea

$$v'(x) = x \qquad \text{indica que} \qquad v(x) = \frac{x^2}{2}$$

y

$$u(x) = e^x \qquad \text{indica que} \qquad u'(x) = e^x$$

Una vez definidas u, v y sus derivadas, se sustituyen en la ecuación (18.9):

$$\int \overbrace{xe^x}^{v'(x)u(x)}\, dx = \overbrace{e^x}^{u(x)}\ \overbrace{\frac{x^2}{2}}^{v(x)} - \int \overbrace{\frac{x^2}{2}e^x}^{v(x)u'(x)}\, dx$$

Un examen de $\int (x^2/2)e^x\,dx$ indica que esta integral puede ser difícil de evaluar como la integral original.

Por ello se retrocede y se principia de nuevo. Se redefinirán v' y u tales que $v'(x) = e^x$ y $u(x) = x$:

$$\int \overbrace{x}^{u(x)}\ \overbrace{e^x}^{v'(x)}\,dx$$

Con estas definiciones,

$$u(x) = x \qquad \text{indica que} \qquad u'(x) = 1$$

$$v'(x) = e^x \qquad \text{indica que} \qquad v(x) = e^x$$

Se sustituye en la ecuación (18.9) y se obtiene

$$\begin{aligned}\int \overbrace{xe^x}^{u(x)v'(x)}\,dx &= \overbrace{x}^{u(x)}\ \overbrace{e^x}^{v(x)} - \int \overbrace{e^x(1)}^{v(x)u'(x)}\,dx\\ &= xe^x - \int e^x\,dx\end{aligned}$$

Puesto que $\int e^x\,dx = e^x$,

$$\int xe^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

Comprobación Al diferenciar esta respuesta como una comprobación, encontramos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[xe^x - e^x + C] &= (1)e^x + e^x x - e^x\\ &= xe^x \quad \checkmark\end{aligned}$$

Ejemplo 20 Determine $\int x^2 \ln x\,dx$.

SOLUCIÓN

Si se hace $u(x) = \ln x$ y $v'(x) = x^2$, entonces

$$u'(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{y} \qquad v(x) = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$$

Al sustituir en la ecuación (18.9) se obtiene

$$\begin{aligned}\int \overbrace{x^2 \ln x}^{v'(x)u(x)}\,dx &= \overbrace{(\ln x)}^{u(x)}\overbrace{\left(\frac{x^3}{3}\right)}^{v(x)} - \int \overbrace{\frac{x^3}{3}\ \frac{1}{x}}^{v(x)u'(x)}\,dx\\ &= \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}\,dx\\ &= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C\end{aligned}$$

Comprobación La verificación de esta respuesta por diferenciación, da

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C\right] &= \frac{3x^2}{3}\ln x + \frac{1}{x}\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{9}\\ &= x^2\ln x + \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{3}\\ &= x^2\ln x \quad ✓\end{aligned}$$

Ejemplo 21 Determine $\int \ln x\, dx$.

SOLUCIÓN

Aunque el integrando no se encuentra en la forma de un producto, se puede imaginar que presenta la forma

$$\int \ln x(1)\, dx$$

Al hacer $u(x) = \ln x$ y $v'(x) = 1$, se obtiene

$$u'(x) = \frac{1}{x}$$

y

$$\begin{aligned}v(x) &= \int 1\, dx\\ &= x\end{aligned}$$

La sustitución en la ecuación (18.9) da

$$\begin{aligned}\int \overbrace{\ln x}^{u(x)v'(x)}\, dx &= \overbrace{(\ln x)}^{u(x)}\ \overbrace{(x)}^{v(x)} - \int \overbrace{x\frac{1}{x}}^{v(x)u'(x)}\, dx\\ &= x\ln x - \int dx\\ &= x\ln x - x + C\end{aligned}$$

Comprobación Esta respuesta se verifica por diferenciación, o bien

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[x\ln x - x + C] &= (1)\ln x + \frac{1}{x}x - 1\\ &= \ln x + 1 - 1\\ &= \ln x \quad ✓\end{aligned}$$

❑

La integración por partes a menudo es lenta, debido al método de tanteo que se requiere. Se recuerda de nuevo al lector la necesidad de examinar primero el integrando con mucho cuidado, con el fin de determinar si se aplican otras reglas antes que se sirva de este procedimiento.

Integración por fracciones parciales

Las funciones racionales tienen la forma de un cociente de dos polinomios. Existen muchas funciones racionales que no pueden integrarse mediante las reglas (en especial la regla 9) descritas en páginas anteriores. Cuando esto ocurre, una posibilidad consiste en que la función racional sea expresada otra vez en una forma equivalente constituida por más funciones elementales. En el siguiente ejemplo se explica la descomposición de una función racional en las ***fracciones parciales*** equivalentes.

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+3x+2} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

Verifíquese que la función racional

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2+3x+2}$$

no puede integrarse mediante la regla 9. Sin embargo, sí es posible integrar las fracciones parciales equivalentes. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\int \frac{x+3}{x^2+3x+2}\,dx &= \int \frac{2}{x+1}\,dx - \int \frac{dx}{x+2}\\ &= 2\ln(x+1) - \ln(x+2) + C\\ &= \ln\left[\frac{(x+1)^2}{(x+2)}\right] + C\end{aligned}$$

Esta técnica de integración de las funciones racionales recibe el nombre de ***método de fracciones parciales***.

A continuación se explica el proceso de descomponer una función racional en sus fracciones parciales. Para aplicar este método, es preciso que la función racional tenga la forma de una *fracción propia.* Una función racional es una fracción propia si el grado del polinomio del numerador es menor que el del polinomio del denominador.

Recordatorio de álgebra

El grado de un término es la suma de los exponentes de las variables contenidas en él. Por ejemplo, el grado de $5x^2yz^3$ es 6. El grado de un polinomio es el grado del término de mayor grado en él. Por ejemplo, el grado del polinomio

$$2x^3 - 4x^2 + x - 10$$

es 3.

La función racional $f(x) = x^2/(5x^3 - 2x + 1)$ está en la forma de un fracción propia. En una *fracción impropia*, el grado del polinomio del numerador es igual o mayor que el grado del polinomio del denominador. La función racional $f(x) = x^3/(3x^2 - 10)$ muestra la forma de una fracción impropia. Las fracciones impropias pueden reducirse a la suma algebraica de un polinomio y una fracción propia, al hacer una división larga de las funciones de numerador y denominador. Así, la fracción impropia.

$$\frac{x^3 - 2x}{x - 1}$$

puede dividirse como sigue:

$$\begin{array}{rl}
 & x^2 + x - 1 \\
x - 1 & \overline{)\, x^3 - 2x} \\
 & \underline{x^3 - x^2} \\
 & x^2 - 2x \\
 & \underline{x^2 - x} \\
 & -x \\
 & \underline{-x + 1} \\
 & -1
\end{array}$$

Por lo tanto, una división larga da por resultado

$$\frac{x^3 - 2x}{x - 1} = x^2 + x - 1 + \frac{-1}{x - 1}$$

Si nuestro objetivo es integrar

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x - 1}$$

podríamos hacer esto de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3 - 2x}{x - 1}\,dx &= \int \left(x^2 + x - 1 + \frac{-1}{x - 1}\right) dx \\
&= \int (x^2 + x - 1)\,dx - \int \frac{dx}{x - 1} \\
&= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x - \ln(x - 1) + C
\end{aligned}$$

Si se tiene una fracción propia hay que factorizar el denominador para efectuar la descomposición en fracciones parciales equivalentes. En general, por cada factor del denominador hay una fracción parcial correspondiente. La forma de cada factor determina la forma de la fracción parcial equivalente. En la tabla 18.1 se ofrecen algunas de las posibilidades.

Tabla 18.1

Forma de factor	Forma de la fracción parcial correspondiente
1. Factor lineal único $ax + b$	$\dfrac{A}{ax + b}$, A constante
2. Factor lineal repetido $(ax + b)^n$	$\dfrac{A_1}{ax + b} + \dfrac{A_2}{(ax + b)^2} + \cdots + \dfrac{A_n}{(ax + b)^n}$
3. Factor cuadrático único $ax^2 + bx + c$	$\dfrac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$, A y B constantes

Ejemplo 22 Anteriormente se estableció que

$$f(x) = \frac{x + 3}{x^2 + 3x + 2} = \frac{2}{x + 1} - \frac{1}{x + 2}$$

A continuación se derivarán estas fracciones parciales. El primer paso es probar y factorizar el denominador de *f.* Puesto que

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$$

el denominador puede ser factorizado en dos factores lineales. De acuerdo con la tabla 18.1, la descomposición de *f* debería producir dos fracciones parciales (una por cada factor), o

$$\frac{x + 3}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{A_1}{x + 1} + \frac{A_2}{x + 2} \tag{18.10}$$

Para despejar las constantes A_1 y A_2, las dos fracciones del miembro derecho de la ecuación (18.10) se combinan justo en el común denominador $(x + 1)(x + 2)$, lo que conduce a

$$\frac{x + 3}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{A_1(x + 2) + A_2(x + 1)}{(x + 1)(x + 2)}$$

o bien

$$\frac{x + 3}{(x + 1)(x + 2)} = \frac{(A_1 + A_2)x + 2A_1 + A_2}{(x + 1)(x + 2)}$$

Para que los dos miembros de esta ecuación sean iguales, los numeradores de las fracciones deben ser iguales. A_1 y A_2 deben ser tales que

$$A_1 + A_2 = 1$$

y

$$2A_1 + A_2 = 3$$

Al resolver las ecuaciones anteriores, $A_1 = 2$ y $A_2 = -1$. Si estos valores se sustituyen en la ecuación (18.10), el resultado será

$$\frac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

que es el resultado mostrado antes.

Ejemplo 23 Mediante el método de las fracciones parciales, obtenga la integral indefinida

$$\int \frac{5x+8}{x^2+4x+4}\,dx$$

SOLUCIÓN

El primer paso consiste en verificar que las reglas 7 y 9 no sean aplicables al caso. Una vez convencidos de ello, tratemos de factorizar el denominador. Dado que

$$x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$$

La tabla 18.1 indica que el integrando puede descomponerse en las fracciones parciales generales

$$\frac{5x+8}{(x+2)^2} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} \tag{18.11}$$

Para despejar A_1 y A_2, las dos fracciones parciales del miembro derecho de la ecuación (18.11) se combinan en el denominador común $(x+2)^2$ y dan

$$\frac{5x+8}{(x+2)^2} = \frac{A_1(x+2)+A_2}{(x+2)^2}$$

o bien

$$\frac{5x+8}{(x+2)^2} = \frac{A_1x+2A_1+A_2}{(x+2)^2}$$

Para que ambos miembros de la ecuación anterior sean iguales, habrá que elegir A_1 y A_2, tales que

$$A_1 = 5$$

y

$$2\,A_1 + A_2 = 8$$

Como $A_1 = 5$,

$$2(5) + A_2 = 8$$

$$A_2 = -2$$

Al sustituir los valores anteriores en la ecuación (18.11),

$$\frac{5x+8}{(x+2)^2} = \frac{5}{x+2} - \frac{2}{(x+2)^2}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\int \frac{5x + 8}{(x + 2)^2}\,dx &= \int \frac{5}{x + 2}\,dx - \int \frac{2}{(x + 2)^2}\,dx \\ &= 5\int \frac{dx}{x + 2} - 2\int (x + 2)^{-2}\,dx \\ &= 5\ln(x + 2) - 2\,\frac{(x + 2)^{-1}}{-1} + C \\ &= 5\ln(x + 2) + \frac{2}{(x + 2)} + C\end{aligned}$$

Ejemplo 24 Por el método de las fracciones parciales, encuentre la integral indefinida

$$\int \frac{2x^2 - 1}{x^3 + x^2}\,dx$$

SOLUCIÓN

El primer paso consiste en verificar que la regla 9 no sea aplicable a este integrando. Una vez convencidos de ello, se tratará de factorizar el denominador. Puesto que

$$x^3 + x^2 = x^2(x + 1)$$

llegamos a la conclusión de que tiene dos factores: el factor cuadrático x^2 y el factor lineal $(x + 1)$. De acuerdo con la tabla 18.1, el integrando puede descomponerse en las fracciones parciales generales

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2(x + 1)} = \frac{A_1x + B_1}{x^2} + \frac{A_2}{x + 1} \tag{18.12}$$

Para despejar las constantes A_1, B_1 y A_2, las dos fracciones parciales del lado derecho de la ecuación (18.12) se combinan en el común denominador $x^2(x + 1)$ y dan

$$\begin{aligned}\frac{2x^2 - 1}{x^2(x + 1)} &= \frac{(A_1x + B_1)(x + 1) + A_2x^2}{{}^{2}\ x\ (x + 1)} \\ &= \frac{A_1x^2 + A_1x + B_1x + B_1 + A_2x^2}{x^2(x + 1)}\end{aligned}$$

o bien

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2(x + 1)} = \frac{(A_1 + A_2)x^2 + (A_1 + B_1)x + B_1}{x^2(x + 1)}$$

Para que los dos miembros de la ecuación anterior sean iguales, A_1, A_2 y B_1 han de ser tales que

$$A_1 + A_2 = 2$$

$$A_1 + B_1 = 0$$

y

$$B_1 = -1$$

La sustitución del valor $B_1 = -1$ en la segunda ecuación produce $A_1 = 1$. Y al sustituir este valor en la primera ecuación, se obtiene $A_2 = 1$.

Por lo tanto,

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2(x + 1)} = \frac{x - 1}{x^2} + \frac{1}{x + 1}$$

y

$$\int \frac{2x^2 - 1}{x^3 + x^2}\,dx = \int \frac{x - 1}{x^2}\,dx + \int \frac{dx}{x + 1}$$

Aunque el integrando de la primera fracción parcial no tiene la forma apropiada para que se aplique la regla 9,

$$\begin{aligned}\frac{x - 1}{x^2} &= \frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\int \frac{(2x^2 - 1)}{x^3 + x^2}\,dx &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{x + 1} \\ &= \ln x + \frac{1}{x} + \ln(x + 1) + C\end{aligned}$$

❏

Ejercicio de práctica

En el ejemplo 24, el denominador fue factorizado en $x^2\,(x + 1)$. La ecuación (18.12) supone que el factor x^2 era un factor cuadrático único, según la tabla 18.1. Este factor x^2 también podría visualizarse como un factor lineal repetido, de acuerdo con la tabla 18.1. Utilice el método de las fracciones parciales para hallar la integral indefinida suponiendo a x^2 como un factor lineal repetido.

Tablas de integrales

En los casos en que las reglas aquí expuestas y otros procedimientos no sean adecuados para calcular las integrales indefinidas, se cuenta con tablas especiales de integrales, las cuales pueden contener literalmente cientos de fórmulas de integración. Cada fórmula se aplica a un integrando que muestra una forma funcional particular. Para utilizar las tablas hay que igualar la forma del integrando con la forma general correspondiente de la tabla. Una vez identificada la fórmula apropiada, se obtiene directamente de la misma la integral indefinida.

La tabla 18.2 muestra algunas fórmulas de integración para los logaritmos naturales y las formas exponenciales de un integrando.

Tabla 18.2

1. $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$

2. $\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$

3. $\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C$

4. $\int x^n \ln ax \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln ax - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C, \qquad n \neq -1$

5. $\int (\ln x)^2 \, dx = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C$

6. $\int (\ln x)^n \, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} \, dx + C, \qquad n \neq -1$

7. $\int \frac{(\ln x)^n}{x} \, dx = \frac{1}{n+1} (\ln x)^{n+1} + C, \qquad n \neq -1$

8. $\int x^n \ln x \, dx = x^{n+1} \left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] + C, \qquad n \neq -1$

9. $\int e^{-x} \, dx = -e^{-x} + C$

10. $\int e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a} + C$

11. $\int xe^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1) + C$

12. $\int \frac{dx}{1 + e^x} = x - \ln(1 + e^x) = \ln \frac{e^x}{1 + e^x} + C$

13. $\int \frac{dx}{a + be^{px}} = \frac{x}{a} - \frac{1}{ap} \ln(a + be^{px}) + C$

Ejemplo 25 De acuerdo con la fórmula (4) en la tabla 18.2

$$\begin{aligned} \int x^3 \ln 5x \, dx &= \frac{x^{3+1}}{3+1} \ln 5x - \frac{x^{3+1}}{(3+1)^2} + C \\ &= \frac{x^4}{4} \ln 5x - \frac{x^4}{16} + C \end{aligned}$$

Este resultado puede verificarse, como antes, mediante la diferenciación.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4} \ln 5x - \frac{x^4}{16} + C\right) &= \left(\frac{4x^3}{4} \ln 5x + \frac{1}{x} \frac{x^4}{4}\right) - \frac{4x^3}{16} \\ &= x^3 \ln 5x + \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{4} \\ &= x^3 \ln 5x \end{aligned}$$

que era el integrando original.

Ejemplo 26 Según la fórmula (7),

$$\begin{aligned}\int \frac{(\ln x)^5}{x}\,dx &= \frac{1}{5+1}(\ln x)^{5+1} + C\\ &= \frac{(\ln x)^6}{6} + C\end{aligned}$$

Para comprobar este resultado,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\frac{(\ln x)^6}{6} + C\right] &= \frac{1}{6}[6(\ln x)^5]\frac{1}{x}\\ &= \frac{(\ln x)^5}{x}\end{aligned}$$

que era el integrando original.

Ejemplo 27 Según la fórmula (10),

$$\int e^{-5x}\,dx = \frac{e^{-5x}}{-5} + C$$

Para verificar este resultado,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-5x}}{-5} + C\right) &= -\frac{1}{5}(-5)e^{-5x}\\ &= e^{-5x}\end{aligned}$$

(Nota: Podría haberse manipulado el integrando en este ejemplo de modo que se aplicara la regla 8.) ❑

Sección 18.4 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 14, determine la integral indefinida (si es posible) usando la integración por partes.

1. $\int xe^{-x}\,dx$

2. $\int 5xe^{x}\,dx$

3. $\int x\sqrt[3]{x+1}\,dx$

4. $\int x\sqrt{x+1}\,dx$

5. $\int xe^{2x}\,dx$

6. $\int xe^{-2x}\,dx$

7. $\int (x+4)\ln x\,dx$

8. $\int x^2\ln 5x\,dx$

9. $\int x(x+2)^4\,dx$

10. $\int x(x-4)^5\,dx$

11. $\int (x/\sqrt{x-3})\,dx$

12. $\int (x/[x-3]^2)\,dx$

13. $\int (\ln x/x^2)\,dx$

14. $\int (2x+5)(x+1)^{1/2}\,dx$

En los ejercicios 15 a 22, aplique el método de las fracciones parciales para encontrar la integral indefinida.

15. $\int \frac{5-x}{x^2+5x+6}\,dx$

16. $\int \frac{5x-7}{x^2-2x-15}\,dx$

17. $\int \frac{7-2x}{x^2-2x+1}\,dx$

18. $\int \frac{10x+25}{x^2+6x+9}\,dx$

19. $\int \frac{5x^2-2x+64}{x^3-16x}\,dx$

20. $\int \frac{x-3}{x^3+2x^2}\,dx$

21. $\int \frac{4x^2-2x-6}{x^3-x}\,dx$

22. $\int \frac{36-9x-5x^2}{x^3-9x}\,dx$

En los ejercicios 23 a 36, calcule la integral indefinida (de ser posible) mediante la tabla 18.2.

23. $\int x^4 \ln 10x\,dx$

24. $\int (\ln 4x/x^2)\,dx$

25. $\int (\ln x/x^3)\,dx$

26. $\int (\ln x)^4\,dx$

27. $\int (\ln x)^2\,dx$

28. $\int ([\ln x]^3/x)\,dx$

29. $\int x^4 \ln x\,dx$

30. $\int (\ln x/x^5)\,dx$

31. $\int e^{2.5x}\,dx$

32. $\int e^{-2x}\,dx$

33. $\int xe^{5x}\,dx$

34. $\int (x/e^{3x})\,dx$

35. $\int \frac{dx}{5+3e^{2x}}$

36. $\int \frac{dx}{10-2e^{x}}$

18.5 Ecuaciones diferenciales

Una ***ecuación diferencial*** es una ecuación que contiene derivadas, diferenciales o ambas.* En la sección 18.1 se estudiaron las ecuaciones diferenciales (sin llamarlas con ese nombre) cuando se pasó de una derivada f' a su correspondiente antiderivada f. Se *resolvió* la ecuación diferencial al encontrar la antiderivada. En la presente sección se ampliará el tema utilizando las reglas de integración para facilitar el proceso de solución.

---

* Se ha empleado regularmente la notación dy/dx. Tomadas por separado dy y dx reciben el nombre de *diferenciales*, lo cual refleja los cambios instantáneos de y y x, respectivamente.

Clasificaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias

Si una ecuación diferencial contiene derivadas de una función de una variable independiente, recibe el nombre de ***ecuación diferencial ordinaria***. La siguiente ecuación es un ejemplo donde la variable independiente es x.

$$\frac{dy}{dx} = 5x - 2 \tag{18.13}$$

Las ecuaciones diferenciales se clasifican además por su ***orden***, que es el orden de la derivada de mayor orden que aparece en ellas. La ecuación (18.13) es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden. Otro sistema de clasificación es el que se basa en el ***grado*** de las ecuaciones diferenciales. El grado es la *potencia* de la derivada de mayor orden en ellas. La ecuación (18.13) es de *primer grado*. La ecuación (18.14) es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y de segundo grado.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 10 = y \tag{18.14}$$

Ejemplo 28 Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias por *orden* y *grado*.

a) $dy/dx = x^2 - 2x + 1$

b) $d^2y/dx^2 - (dy/dx) = x$

c) $d^2y/dx^2 - (dy/dx)^3 + 2x = 0$

SOLUCIÓN

a) Ésta es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden y de primer grado.
b) Ésta es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden y de primer grado.
c) Ésta es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden y de primer grado (*dy*/*dx* no es la derivada de más alto orden). ❑

Soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias

En la presente sección se centrará en las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Este tipo de solución es una función que no contiene derivadas ni diferenciales que satisfagan la ecuación diferencial original.

Las soluciones a las ecuaciones diferenciales pueden clasificarse en ***soluciones generales*** y en ***soluciones particulares***. Una solución general es aquella que incluye constantes arbitrarias de integración. Una solución particular es la que se obtiene de la solución general. En el caso de las soluciones particulares, se asignan valores específicos a las constantes de integración, basados en las ***condiciones iniciales*** o ***condiciones acotadas*** (o a la frontera).

Considérese la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2x + 5$$

La *solución general* de esta ecuación diferencial se obtiene al integrar la ecuación, es decir,

$$y = f(x) = \frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 5x + C$$
$$= x^3 - x^2 + 5x + C$$

Con la *condición inicial* de que $f(0) = 15$, la *solución particular* se deriva al sustituir estos valores en la solución general y al despejar C.

$$15 = 0^3 - 0^2 + 5(0) + C$$

o bien $$15 = C$$

La solución particular de la ecuación diferencial es

$$f(x) = x^3 - x^2 + 5x + 15$$

Ejemplo 29 En la ecuación diferencial

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = x - 5 \qquad \textbf{(18.15)}$$

y las *condiciones acotadas* o a la *frontera* $f'(2) = 4$ y $f(0) = 10$, obtenga la solución general y la solución particular.

SOLUCIÓN

La ecuación dada es una ecuación diferencial ordinaria de *segundo* orden y de *primer* grado. Si se integra la ecuación, el resultado será

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} - 5x + C_1 \qquad \textbf{(18.16)}$$

que también es una ecuación diferencial porque contiene la derivada dy/dx. Así pues, para liberar la ecuación de cualquier derivada es preciso integrar la ecuación (18.16).

$$f(x) = y = \frac{x^3}{6} - \frac{5x^2}{2} + C_1x + C_2 \qquad \textbf{(18.17)}$$

La ecuación (18.17) es la solución *general* de la ecuación diferencial original. *Nótese el empleo de subíndices en las constantes de integración para distinguirlas entre sí.*

NOTA La solución general de una ecuación diferencial de *n*-ésimo orden contendrá *n* constantes de integración.

Para obtener la solución particular, hay que sustituir las condiciones acotadas ("a la frontera") en las ecuaciones (18.16) y (18.17). Comenzando con la ecuación (18.16) y la condición de que $f'(2) = 4$,

$$4 = \frac{(2)^2}{2} - 5(2) + C_1$$

$$4 = -8 + C_1$$

y $$12 = C_1$$

Si este valor se sustituye en la ecuación (18.17), junto con la otra información referente a la condición acotada $f(0) = 10$,

$$10 = \frac{0^3}{6} - \frac{5(0)^2}{2} + 12(0) + C_2$$

$$10 = C_2$$

En consecuencia, la solución particular es

$$f(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{5x^2}{2} + 12x + 10$$ ❑

En los capítulos 7 y 15 se analizaron las funciones del crecimiento y decaimiento exponencial. Las funciones de crecimiento exponencial presentan la forma general

$$\boxed{V = V_0 e^{kt}} \tag{18.18}$$

donde V_0 es el valor de la función cuando $t = 0$ y k es una constante positiva. Se demostró en el ejemplo 56 del capítulo 15 (página 751) que estas funciones se caracterizan por una tasa porcentual constante de crecimiento k, y

$$\frac{dV}{dt} = kV_0 e^{kt}$$

o bien $$\boxed{\frac{dV}{dt} = kV} \tag{18.19}$$

La ecuación (18.19) es una ecuación diferencial; su solución general se expresa en la ecuación (18.18), donde V_0 y k son constantes.

La investigación empírica con frecuencia implica observaciones de un proceso (por ejemplo, el crecimiento bacteriano, el crecimiento o disminución de la población, y la desintegración radiactiva) a lo largo del tiempo. Con frecuencia los datos reunidos reflejan valores de la función en diferentes puntos en el tiempo y medidas de *razones de cambio* en el valor de la función. A partir de estos tipos de datos se deduce la verdadera relación funcional. Expresado esto con palabras más sencillas, a menudo la investigación produce ecuaciones diferenciales que describen de modo parcial la relación existente entre variables. La solución de estas ecuaciones diferenciales da origen a una descripción completa de las relaciones funcionales.

Ejemplo 30 (**Crecimiento de las especies**) La población de una rara especie de peces está creciendo de manera exponencial. Cuando se identificó y se clasificó inicialmente, la población se calculó en 50 000. Cinco años después era de 75 000, según las estimaciones hechas. *Si P es la población de la especie en el momento t, donde t se mide en años*, el crecimiento de la población ocurre a una tasa descrita por la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP = kP_0e^{kt}$$

Al integrar esta ecuación, se obtiene

$$\int \frac{dP}{dt} = \int kP_0e^{kt}$$

$$P = P_0 \int ke^{kt}$$

O la solución general es

$$P = P_0e^{kt}$$

donde P_0 y k son constantes. Para determinar el valor específico de P_0 se aplica la condición inicial según la cual $P = 50\,000$ cuando $t = 0$.

$$50\,000 = P_0e^{k(0)}$$

o bien

$$50\,000 = P_0$$

El valor de k puede calcularse sustituyendo la condición acotada ($P = 75\,000$ cuando $t = 5$), junto con $P_0 = 50\,000$ en la solución general

$$75\,000 = 50\,000e^{k(5)}$$

$$1.5 = e^{5k}$$

Si se calcula el logaritmo natural a ambos lados de la ecuación,

$$\ln 1.5 = 5k$$

Según la tabla 2 (de la solapa)

$$\ln 1.5 = 0.4055$$

$$0.4055 = 5k$$

y

$$0.0811 = k$$

Por lo tanto, la función particular que describe el crecimiento de la población es

$$P = 50\,000e^{0.0811t}$$

❑

Un proceso de decaimiento exponencial se caracteriza por disminución porcentual constante de valor en el tiempo. La función general que describe esta clase de procesos es

$$\boxed{V = V_0 e^{-kt}} \tag{18.20}$$

donde V es el valor de la función en el tiempo t, V_0 es el valor de la función cuando $t = 0$ y k es la tasa porcentual del decaimiento. La razón de cambio en el valor de la función respecto de un cambio en el tiempo es

$$\frac{dV}{dt} = -kV_0 e^{-kt}$$

o bien

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = -kV} \tag{18.21}$$

La ecuación (18.21) es una ecuación cuya solución general es la ecuación (18.20).

Ejemplo 31

(Absorción de un medicamento) Se administró a una persona un medicamento en particular en una dosis de 100 miligramos. La cantidad del medicamento contenida en la corriente sanguínea disminuye con el tiempo, según lo describe una función de decaimiento exponencial. Al cabo de seis horas, una muestra de sangre revela que la concentración en el organismo es de 40 miligramos. Si V denota la concentración del medicamento en la corriente sanguínea después de t horas y si V_0 es la cantidad en la corriente sanguínea cuando $t = 0$, el decaimiento se presenta a una tasa descrita por la función

$$\frac{dV}{dt} = -kV = -kV_0 e^{-kt}$$

La solución general de esta ecuación diferencial es

$$V = V_0 e^{-kt}$$

Si la condición inicial ($V = 100$ con $t = 0$) se sustituye en esta ecuación, V_0 se identifica como 100 y

$$V = 100e^{-kt}$$

Sustituyendo la condición acotada ($V = 40$ cuando $t = 6$)

$$40 = 100e^{-k(6)}$$

o bien

$$0.4 = e^{-6k}$$

Tomando el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación,

$$\ln (0.4) = -6k$$

Según la tabla 2,

$$\ln (0.4) = -0.9163$$

y

$$-0.9163 = -6k$$

$$0.1527 = k$$

Así pues, la función particular que describe la disminución de la concentración del medicamento es

$$V = 100e^{-0.1527t}$$ ❑

Extensión de las ecuaciones diferenciales

En nuestra exposición se ha descubierto apenas la “punta del iceberg” respecto del tema de las ecuaciones diferenciales. Se ha examinado exclusivamente el caso más simple. Este tema a menudo es el centro de un curso semestral. El objetivo ha sido ofrecer una introducción al mismo y relacionarlo con el cálculo integral.

Sección 18.5 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 10, clasifique las ecuaciones diferenciales por orden y grado.

1. $dy/dx = x^3 - x^2 + 5x$
2. $dy/dx - d^2y/dx^2 = x + 5$
3. $(d^2y/dx^2)^3 = x^3 - dy/dx$
4. $d^2y/dx^2 = (dy/dx)^4 - x^3$
5. $dy/dx = x^4 - 5x^2 + 8x$
6. $dy/dx = -(d^2y/dx^2)^3 + 10$
7. $(dy/dx)^3 = dy/dx + x + 10$
8. $d^2y/dx^2 = 5(dy/dx)^3 - x^2 - 5$
9. $dy/dx = 28 + x - (d^2y/dx^2)^3$
10. $x^2 + x = dy/dx - (d^2y/dx^2)^3$

En los ejercicios 11 a 28, encuentre la solución general de la ecuación diferencial.

11. $dy/dx = x^4 + 2x + 6$
12. $dy/dx = 6x^2 + 6x + 18$
13. $dy/dx = 1/x$
14. $dy/dx = (2x)(x^2 + 5)^4$
15. $dy/dx = 5x/(5x^2 + 10)$
16. $dy/dx = 6xe^{3x^2}$
17. $d^2y/dx^2 = x + 5$
18. $6x = 24x^2 + d^2y/dx^2$
19. $2(d^2y/dx^2) + x^3 = d^2y/dx^2 + 2x - 16$
20. $d^2y/dx^2 = 3x - 5$
21. $d^2y/dx^2 = e^x$
22. $d^2y/dx^2 = x^2 - x + 4$
23. $d^2y/dx^2 = e^x + 5$
24. $d^2y/dx^2 = 12x^2 - 6x + 40$
25. $3(d^2y/dx^2) - 5 = 2(d^2y/dx^2) - x$
26. $dy/dx = 2x/(x^2 - 5)$
27. $4(dy/dx) - 2x(x^2 + 15)^3 = 3\,dy/dx$
28. $3(d^2y/dx^2) + 12x^2 - 5 = 2(d^2y/dx^2) + x$

En los ejercicios 29 a 38, obtenga las soluciones general y particular de la ecuación diferencial.

29. $dy/dx = 2x, f(0) = -50$
30. $dy/dx = 6x^2 + 2x + 6, f(0) = 18$
31. $dy/dx = x^2 + 3x + 8, f(1) = 7.5$
32. $dy/dx = (6x)(3x^2 + 7), f(2) = 20$
33. $d^2y/dx^2 = 6x + 18, f'(5) = -10, f(2) = 30$
34. $d^2y/dx^2 = 15; f'(2) = 20, f(3) = -10$
35. $d^2y/dx^2 = 25e^{5x}; f'(0) = 4, f(0) = -2$
36. $3 - d^2y/dx^2 = 20x; f'(0) = -12, f(-1) = 18$
37. $d^2y/dx^2 = 6x - 9; f'(2) = 10, f(-2) = -10$
38. $dy/dx = 4x(2x^2 - 8)^3; f(2) = 20$

39. La población de una especie de conejos recién descubierta parece estar creciendo en forma exponencial. Cuando por primera vez se descubrió en un país sudamericano, la población se estimó en 500. Dos años más tarde se calculó en 1 250. Determine la función de crecimiento exponencial que describa la población P en términos del tiempo t, medida en años transcurridos desde el descubrimiento de la especie.

40. La población de una especie de alce de Alaska, que se encuentra en peligro de extinción, parece estar decreciendo a una tasa exponencial. Cuando la disminución se sospechó por primera vez, la población de alces se estimó en 2 500. Al cabo de 10 años se calculó en 1 250. Determine la función de decaimiento exponencial que describa la población de alces en términos del tiempo *t*, medido en años transcurridos desde que se empezó a sospechar la disminución de la especie.

41. La población de una especie de lobos en peligro de extinción parece estar disminuyendo a una tasa exponencial. Cuando por primera vez se sospechó la disminución, la población de lobos se estimó en 40 000. Cinco años más tarde se calculó en 32 000. Determine la función de decaimiento exponencial que describa esta población de lobos en términos del tiempo *t*, medido en años transcurridos desde que por primera vez se sospechó la disminución de la población.

42. La población de una especie particular de animales salvajes parece estar creciendo en forma exponencial. Cuando se descubrió la población, se estimó que era de 200 000. Cuatro años después, se calculó en 320 000. Determine la función de crecimiento exponencial que describa la población *P* en términos del tiempo *t*, medido en años transcurridos desde el descubrimiento de esa especie.

❑ TÉRMINOS Y CONCEPTOS CLAVE

antiderivada 868
constante de integración 874
ecuación diferencial 898
ecuaciones diferenciales ordinarias 899
integración 874
integración por partes 886
integral indefinida 874
integrando 874
método de fracciones parciales 890
signo de integral 874
soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias 899

❑ FÓRMULAS IMPORTANTES

$$\int k\,dx = kx + C \qquad k \text{ real} \qquad \text{(Regla 1)}$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1 \qquad \text{(Regla 2)}$$

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \qquad k \text{ real} \qquad \text{(Regla 3)}$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx \qquad \text{(Regla 4)}$$

$$\int x^{-1}\,dx = \ln x + C \qquad \text{(Regla 5)}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \text{(Regla 6)}$$

$$\int [f(x)]^n f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1 \qquad \textbf{(Regla 7)}$$

$$\int f'(x)e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + C \qquad \textbf{(Regla 8)}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + C \qquad \textbf{(Regla 9)}$$

EJERCICIOS ADICIONALES

SECCIÓN 18.1

Calcule la antiderivada de las siguientes funciones.

1. $f'(x) = -30$
2. $f'(x) = \sqrt{2e}$
3. $f'(x) = x/3$
4. $f'(x) = x/4 + 10$
5. $f'(x) = 9x^2 + 6x + 8$
6. $f'(x) = 8x^3 + x^2 - 2x + 20$
7. $f'(x) = 8x^3 + 9x^2 - 5$
8. $f'(x) = 16x^3 - 9x^2 + 3x + 5$
9. $f'(x) = 4x(2x^2 + 10)^4$
10. $f'(x) = 6x^2(2x^3 + 4)^3$

En los siguientes ejercicios, determine *f*, dados f' y un punto que satisfaga *f*.

11. $f'(x) = 4$, $(2, 10)$
12. $f'(x) = x^2 + 2x$, $(0, 10)$
13. $f'(x) = -4x^3/3 + 2x - 1$, $(-2, 10)$
14. $f'(x) = -8x^3 + 6x^2$, $(-2, 10)$
15. $f'(x) = -8x^3 + 12x^2$, $(-1, 25)$
16. $f'(x) = 2x(x^2 - 5)^3$, $(3, 40)$

SECCIONES 18.2 Y 18.3

En los ejercicios siguientes, calcule la integral indefinida (si es posible).

17. $\int 25\,dx$
18. $\int -18\,dx$
19. $\int 26x\,dx$
20. $\int (-4x + 15)\,dx$
21. $\int (-10x - 6)\,dx$
22. $\int (x/4 - 10)\,dx$
23. $\int (2x^3 + 6x^2)\,dx$
24. $\int (x^3/2 + 3x^2 + 8)\,dx$
25. $\int (x^4 - 2/x^3)\,dx$
26. $\int (x - 5)^5\,dx$
27. $\int (2x^6 + 6x^4 - x^3 + 9x^2 - 4x)\,dx$
28. $\int (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)\,dx$
29. $\int ([1/x] - [3/x^2] + [4/x^3])\,dx$
30. $\int (1 + [1/x] - [1/x^2])\,dx$
31. $\int (2/\sqrt[3]{x})\,dx$
32. $\int (-20/\sqrt{x})\,dx$
33. $\int (dx/x^6)$
34. $\int (8/x^4)\,dx$

35. $\int (-2/x^2)\,dx$

36. $\int (-5/x^3)\,dx$

37. $\int \sqrt{x^5}\,dx$

38. $\int \sqrt[4]{x^3}\,dx$

39. $\int (2x^2-3)^{1/2}(4x)\,dx$

40. $\int (x^3+2e^x+6)\,dx$

41. $\int (\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[5]{x})\,dx$

42. $\int (x^2-10)(2x)\,dx$

43. $\int (3x^2-10)^3(x)\,dx$

44. $\int (2x^3-x^2)^2(3x^2-x)\,dx$

45. $\int (2x^2+2x)^5(x+1)\,dx$

46. $\int (4x^3-6x^2)^3(6x-6)\,dx$

47. $\int \frac{-x}{4-x^2/2}\,dx$

48. $\int \frac{4-x}{x^3}\,dx$

49. $\int \frac{2}{x-5}\,dx$

50. $\int (e^2-3)\,dx$

51. $\int (x/\sqrt{x^2-8})\,dx$

52. $\int (x/[x^2+3]^5)\,dx$

SECCIÓN 18.4

Encuentre la integral indefinida (si es posible) haciendo uso de la integración por partes.

53. $\int x\ln x\,dx$

54. $\int xe^{ax}\,dx$

55. $\int e^x(x+1)^2\,dx$

56. $\int xe^{-3x}\,dx$

57. $\int x^2e^x\,dx$

Encuentre la integral indefinida (si es posible) empleando el método de las fracciones parciales.

58. $\int \frac{10-2x}{x^2-5x-4}\,dx$

59. $\int \frac{3x-5}{x^2+2x-15}\,dx$

60. $\int \frac{3x^2-x+5}{x^3-4x}\,dx$

61. $\int \frac{x-5}{x^3-9x}\,dx$

Encuentre la integral indefinida (si es posible) utilizando la tabla 18.2.

62. $\int 3e^{-5x}\,dx$

63. $\int (xe^{-3x}/2)\,dx$

64. $\int dx/(5+2e^{3x})$

65. $\int x^5\ln x\,dx$

66. $\int ([\ln x]^4/x)\,dx$

67. $\int x^5\ln 3x\,dx$

68. $\int ([\ln x]^2/2)\,dx$

69. $\int -2(\ln x)^3\,dx$

SECCIÓN 18.5

Clasifique las siguientes ecuaciones diferenciales por orden y grado.

70. $dy/dx = 8x^4 + 6x^2 - 10x + 5$

71. $(d^2y/dx^2)^3 - (d^2y/dx^2)^2 = 5x^2 - (dy/dx)$

72. $(d^2y/dx^2)^3 = (dy/dx)^4 + x + 3$

Encuentre la solución general para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales.

73. $dy/dx = x^4 + 5x$

74. $dy/dx = x/(x^2 - 3) + 6x^2e^{2x^3-4}$

75. $d^2y/dx^2 = x^2/6 + 20x$

76. $x^2 + 3x = d^2y/dx^2 + 30$

En las siguientes ecuaciones diferenciales, encuentre las soluciones particular y general.

77. $dy/dx = -4x + 4, f(2) = 18$

78. $dy/dx = 4x^3 + 9x^2, f(-1) = 50$

79. $d^2y/dx^2 = x^2/12 + 12x$
$f'(2) = 20$
$f(2) = 40$

80. $20x = 5 + (d^2y/dx^2)$
$f'(1) = 25$
$f(2) = 81$

EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. Dada la ecuación $f'(x) = 4x^3 + 2x - 20$ y el punto (5, 200) que satisface f, determine f.

a) $\int dx/\sqrt[3]{x^5}$

b) $\int (x^4 + 10)^5x^3\,dx$

c) $\int e^{-10x}\,dx$

2. Calcule las siguientes integrales indefinidas

3. Encuentre las soluciones general y particular de la ecuación diferencial $6 + x = d^2y/dx^2$, donde $f(2) = 24$ y $f'(3) = 5$.

4. La función de ingreso marginal del producto de una compañía es

$$MR = 220\,000 - 18x$$

donde x es el número de unidades vendidas. Si el ingreso total es 0 donde no se vende ninguna unidad, determine la función del ingreso total.

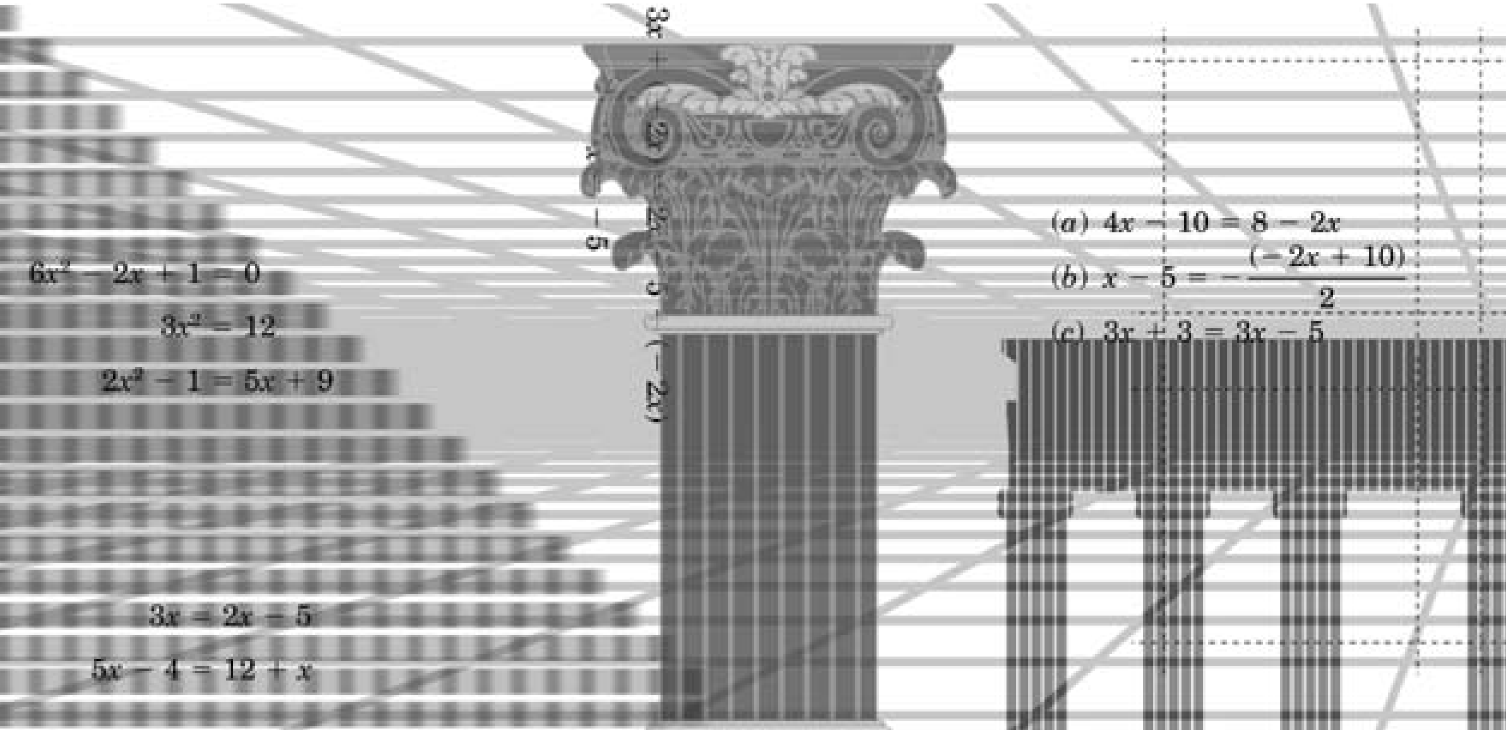
5. Aplicando la integración por partes, calcule la integral indefinida $\int xe^{10x}\,dx$.

6. Con el método de fracciones parciales calcule la integral indefinida

$$\int \frac{20x - 10}{x^2 - x - 6}\,dx$$

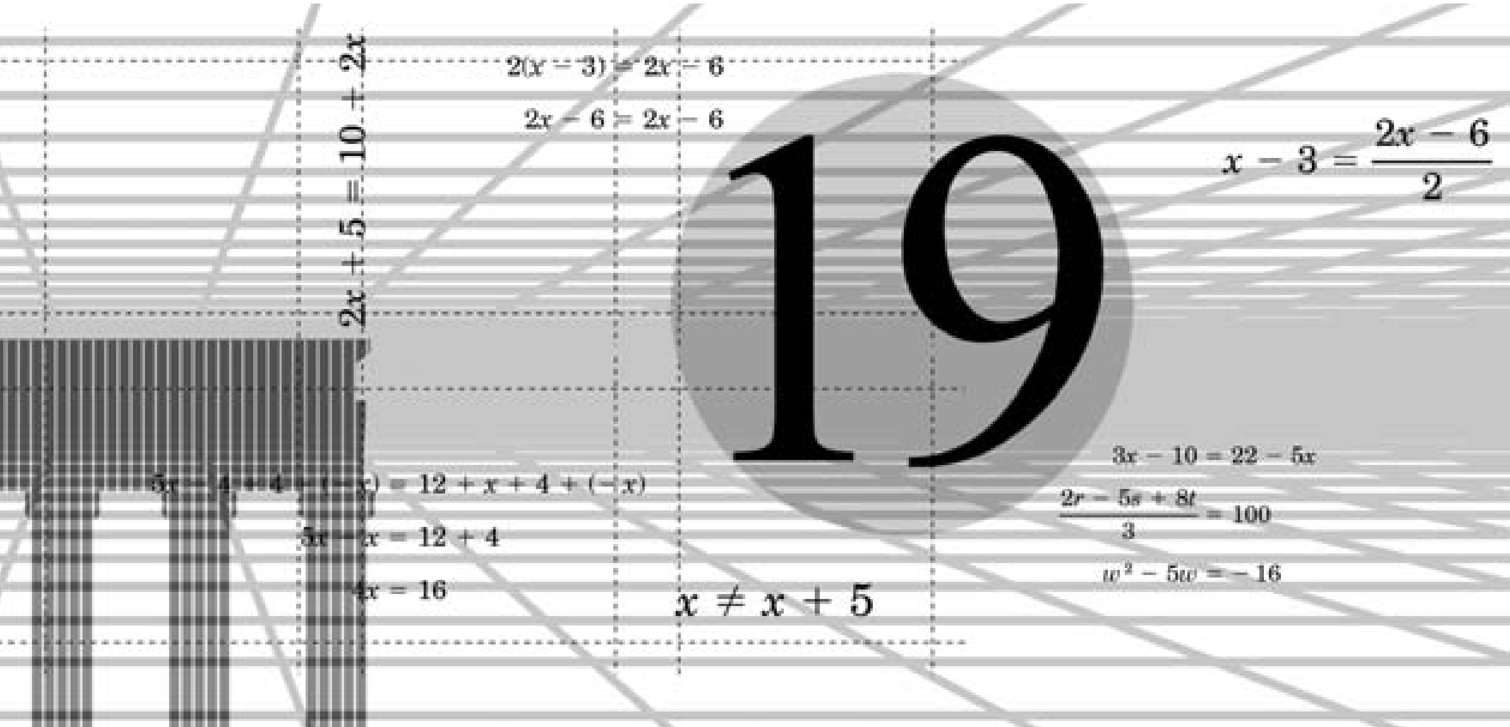
CAPÍTULO 19

Cálculo integral: aplicaciones



OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Ofrecer una introducción a la integral definida.
- Ilustrar la aplicación de la integral definida en el cálculo de áreas.
- Presentar una gran variedad de aplicaciones del cálculo integral.
- Dar ejemplos de la relación que hay entre el cálculo integral y la teoría de la probabilidad.



ESCENARIO DE MOTIVACIÓN: Administración del banco de sangre

El banco de sangre de un hospital lleva a cabo una campaña de donación de sangre para reponer sus reservas. El hospital estima que la sangre se donará a una tasa de $d(t)$ unidades o "pintas" por día (1 pinta equivale a 0.47 litros en Estados Unidos y a 0.57 litros en el Reino Unido; *N. del T.*), donde

$$d(t) = 500e^{-0.4t}$$

y la t representa la duración de la campaña en días. *Si el objetivo de la campaña de donación de sangre es obtener 1 000 unidades ("pintas"), los administradores del hospital desean saber cuánto les tomará alcanzar esa meta* (ejemplo 24).

Este capítulo se centra en la aplicación del cálculo integral. En particular, se explicará la *integral definida*, el uso de las integrales definidas en el cálculo de áreas debajo y entre las curvas, diversas aplicaciones que se valen del cálculo integral y su aplicación a la teoría de la probabilidad.

19.1 Integrales definidas

En la presente sección se explicará la integral definida, que constituye el fundamento de muchas aplicaciones del cálculo integral.

La integral definida

La *integral definida* puede interpretarse como un área y como un límite. Examínese atentamente la gráfica de la función $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, que aparece en la figura 19.1. Supóngase que se desea determinar el área sombreada A debajo de la curva comprendida entre $x = 1$ y $x = 3$. Un procedimiento consiste en *aproximar* el área calculando las superficies de un conjunto de rectángulos que están contenidos en la región sombreada. En la figura 19.2 se han trazado dos rectángulos dentro del área de interés. El ancho de cada uno es 1, y sus alturas respectivas son $f(1)$ y $f(2)$. Si se usa la suma de las áreas de los dos rectángulos para aproximar la que se desea conocer, se tendrá

$$\begin{aligned} A^* &= f(1) \cdot (1) + f(2) \cdot (1) \\ &= (1)^2 \cdot (1) + (2)^2 \cdot (1) \\ &= (1)(1) + (4)(1) = 5 \end{aligned}$$

donde A^* es el área aproximada. Nótese que en esta aproximación se *subestima* el área real. El error introducido se representa con las zonas sombreadas más ligeramente.

En la figura 19.3 se han trazado cuatro rectángulos dentro del área de interés. Su ancho es de $\frac{1}{2}$, y la superficie total de los cuatro rectángulos se calcula mediante la ecuación

$$\begin{aligned} A^* &= f(1) \cdot (0.5) + f(1.5) \cdot (0.5) + f(2) \cdot (0.5) + f(2.5) \cdot (0.5) \\ &= (1)^3 \cdot (0.5) + (1.5)^2 \cdot (0.5) + (2)^2 \cdot (0.5) + (2.5)^2 \cdot (0.5) \\ &= (1)(0.5) + (2.25)(0.5) + (4)(0.5) + (6.25)(0.5) \\ &= 0.5 + 1.125 + 2.0 + 3.125 = 6.75 \end{aligned}$$

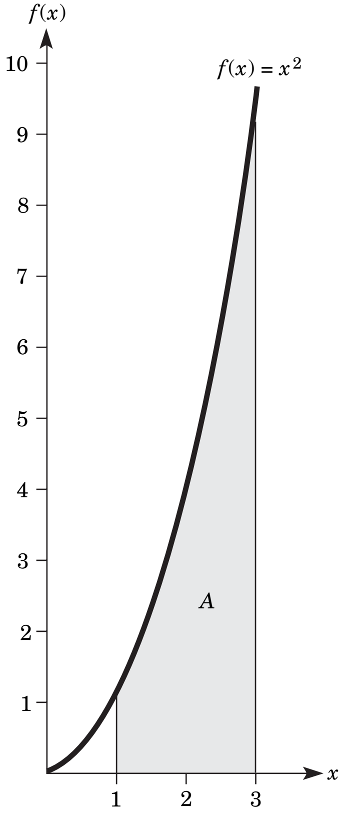
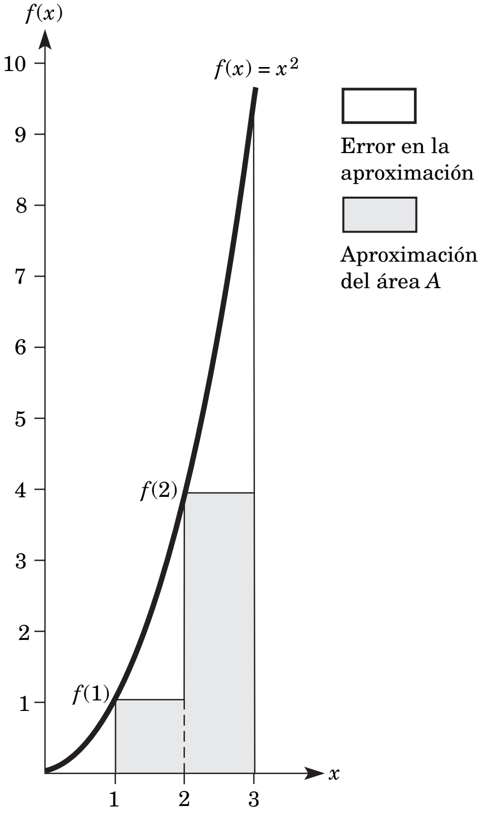


Figura 19.1

Figura 19.2 Aproximación mediante dos rectángulos.



En comparación con la figura 19.2, el empleo de cuatro rectángulos en vez de dos da una mejor aproximación del área real. El área sombreada más ligeramente es menor en la figura 19.3.

En la figura 19.4 se trazaron ocho rectángulos, cada uno con un ancho igual a 0.25. Su superficie se calcula mediante la ecuación

$$\begin{aligned} A^* &= f(1) \cdot (0.25) + f(1.25) \cdot (0.25) + \cdots + f(2.75) \cdot (0.25) \\ &= (1)^2 \cdot (0.25) + (1.25)^2 \cdot (0.25) + \cdots + (2.75)^2 \cdot (0.25) \\ &= (1)(0.25) + (1.5625)(0.25) + \cdots + (7.5625)(0.25) = 7.6781 \end{aligned}$$

Obsérvese que esta aproximación es mejor que las otras. De hecho, si se sigue subdividiendo el intervalo entre $x = 1$ y $x = 3$, haciendo cada vez más pequeña la base de cada rectángulo, la aproximación se acercará más y más al área real (que, según se determinará, es de $8\frac{2}{3}$).

A continuación se estudiará este proceso desde una perspectiva más amplia. Tómese, por ejemplo, la función de la figura 19.5. Supóngase que se desea determinar el área debajo de la curva, pero por arriba del eje de las x entre $x = a$ y $x = b$. Supóngase, además, que el intervalo se haya subdividido en n rectángulos. Asimismo, que el ancho del rectángulo i es Δx_i y que su altura es $f(x_i)$. No es necesario dar por hecho que el ancho de cada rectángulo

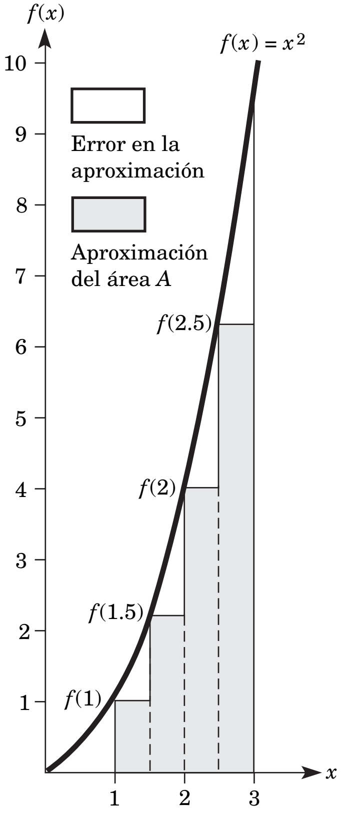


Figura 19.3 Aproximación mediante cuatro rectángulos.

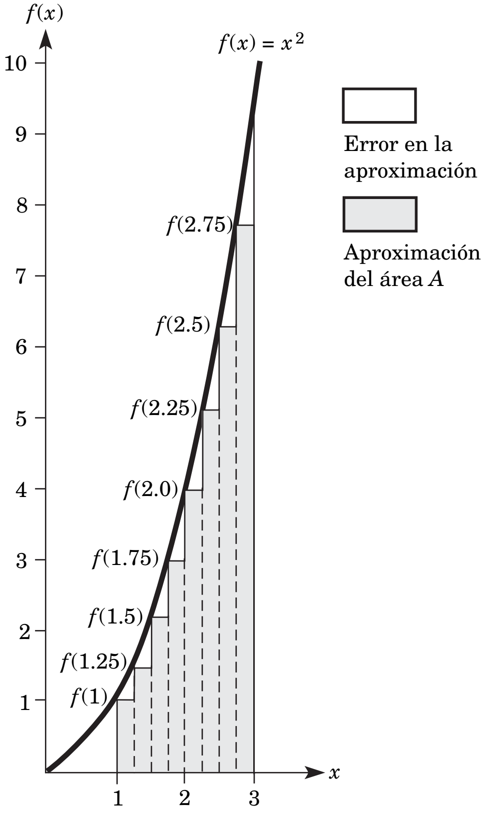


Figura 19.4 Aproximación con ocho rectángulos.

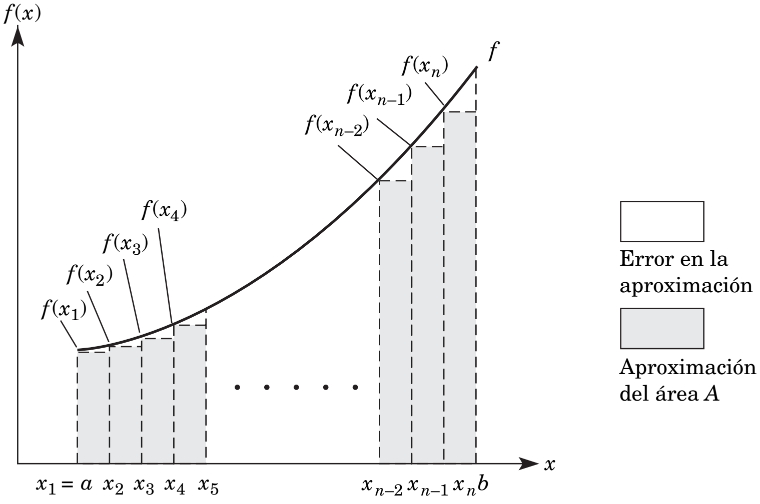


Figura 19.5 Aproximación con n rectángulos.

sea igual. Se puede aproximar el área de interés sumando las áreas de n rectángulos, es decir,

$$\begin{aligned} A^* &= f(x_1)\,\Delta x_1 + f(x_2)\,\Delta x_2 + \cdots + f(x_n)\,\Delta x_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i \end{aligned}$$

Como se dijo en cuanto a la función $f(x) = x^2$, la aproximación siempre se vuelve más exacta al irse reduciendo el ancho de los rectángulos y, por lo tanto, conforme el número de rectángulos se torna simultáneamente más grande. Esta observación puede formalizarse al afirmar que *cuando existe el límite*,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = A} \tag{19.1}$$

Es decir, el área real bajo la curva A es el valor límite de la suma de las áreas de los n rectángulos inscritos, a medida que el número de rectángulos se acerca al infinito (y el ancho Δx_i de cada uno se aproxima a 0).

Del mismo modo que el signo de la sumatoria Σ se aplica cuando se desea sumar elementos discretos, también la integral definida implica la suma de funciones continuas.

Definición: Integral definida

Si f es una función acotada en el intervalo $[a, b]$, se definirá la ***integral definida*** de f en los siguientes términos:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i = A \tag{19.2}$$

a condición de que exista este límite, a medida que el tamaño de todos los intervalos de la subdivisión tienda a cero y, por lo tanto, el número de intervalos n se aproxime al infinito.

El lado izquierdo de la ecuación (19.2) muestra la notación de la *integral definida*. Los valores a y b que aparecen, respectivamente, debajo y arriba del signo de la integral se llaman ***límites de integración***. El ***límite inferior de integración*** es a, y el ***límite superior de integración*** es b. La notación $\int_a^b f(x)\,dx$ puede describirse como "*la integral definida de f entre un límite inferior $x = a$ y un límite superior $x = b$*", o más simple, "*la integral de f entre a y b*".

Evaluación de las integrales definidas

La evaluación de las integrales definidas se facilita con el siguiente teorema de gran importancia.

Teorema fundamental del cálculo integral

Si una función f es continua sobre un intervalo y F es cualquier antiderivada de f, entonces para cualquier punto $x = a$ y $x = b$ en el intervalo, donde $a \leq b$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{19.3}$$

Conforme al teorema fundamental del cálculo integral, la integral definida puede evaluarse ya sea: 1) determinando la integral indefinida $F(x) + C$, y 2) calculando $F(b) - F(a)$, algunas veces denotada con $F(x)]_a^b$. Como se verá en el siguiente ejemplo, no hay necesidad de incluir la constante de integración al evaluar las integrales definidas.

Ejemplo 1 Para evaluar $\int_0^3 x^2\,dx$, la integral indefinida es

$$\begin{aligned} F(x) &= \int x^2\,dx \\ &= \frac{x^3}{3} + C \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \int_0^3 x^2\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)\Bigg]_0^3 &= \left(\frac{3^3}{3} + C\right) - \left(\frac{0^3}{3} + C\right) \\ &= 9 + C - C \\ &= 9 \end{aligned}$$

❑

Cuando se evalúan integrales definidas, siempre se resta el valor de la integral indefinida en el límite inferior de integración, al valor del límite superior de integración. ***La constante de integración invariablemente desaparece en este cálculo, como sucedió en el ejemplo. Por lo tanto, no se necesita incluir la constante al evaluar las integrales definidas.***

Ejemplo 2 Para evaluar $\int_1^4 (2x^2 - 4x + 5)\,dx$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int (2x^2 - 4x + 5)\,dx \\ &= \frac{2x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 5x \\ &= \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 5x \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_1^4 (2x^2 - 4x + 5)\,dx &= \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 5x\Big]_1^4 \\ &= \left[\frac{2(4)^3}{3} - 2(4)^2 + 5(4)\right] - \left[\frac{2(1)^3}{3} - 2(1)^2 + 5(1)\right] \\ &= (\tfrac{128}{3} - 32 + 20) - (\tfrac{2}{3} - 2 + 5) = 30\tfrac{2}{3} - 3\tfrac{2}{3} = 27\end{aligned}$$

❑

Ejercicio de práctica

Evalúe $\int_1^3 (x^3 - 2x)\,dx$. *Respuesta:* 12.

Ejemplo 3 Para evaluar $\int_{-2}^{1} e^x\,dx$,

$$\begin{aligned}F(x) &= \int e^x\,dx \\ &= e^x\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1} e^x\,dx &= e^x\Big]_{-2}^{1} \\ &= e^1 - e^{-2}\end{aligned}$$

o, según la tabla 1,

$$\begin{aligned}e^1 - e^{-2} &= 2.7183 - 0.1353 \\ &= 2.5830\end{aligned}$$

Ejemplo 4 Para evaluar $\int_2^4 \frac{x\,dx}{x^2 - 1}$,

$$\begin{aligned}F(x) &= \int \frac{x\,dx}{x^2 - 1} \\ &= \tfrac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2 - 1}\end{aligned}$$

y de acuerdo con la regla 9,

$$F(x) = \tfrac{1}{2}\ln(x^2 - 1)$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\int_2^4 \frac{x\,dx}{x^2 - 1} &= \tfrac{1}{2}\ln(x^2 - 1)\Big]_2^4 \\ &= \tfrac{1}{2}\ln(4^2 - 1) - \tfrac{1}{2}\ln(2^2 - 1) \\ &= \tfrac{1}{2}\ln 15 - \tfrac{1}{2}\ln 3\end{aligned}$$

Según la tabla 2,

$$\begin{aligned}\int_2^4 \frac{x\,dx}{x^2 - 1} &= \tfrac{1}{2}(2.7081) - \tfrac{1}{2}(1.0986) \\ &= 1.35405 - 0.5493 = 0.80475\end{aligned}$$

❑

Ejercicio de práctica

Evalúe: *a*) $\int_{-1}^{2} e^{2x}\,dx$ y *b*) $\int_{1}^{3} \frac{4x}{x^2+5}\,dx$. *Respuesta: a*) 27.23135, *b*) 1.6946.

Propiedades de las integrales definidas

Existen diversas propiedades que pueden ser de ayuda al evaluar las integrales definidas. Se incluyen a continuación, junto con ejemplos que las explican.

Propiedad 1

Si f está definida y es continua en el intervalo (a, b),

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \tag{19.4}$$

Ejemplo 5

Considere la función $f(x) = 4x^3$.

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{1} 4x^3\,dx &= \frac{4x^4}{4}\Big]_{-2}^{1} = x^4\Big]_{-2}^{1}\\ &= (1)^4 - (-2)^4 = 1 - 16 = -15\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{1}^{-2} 4x^3\,dx &= \frac{4x^4}{4}\Big]_{1}^{-2} = x^4\Big]_{1}^{-2}\\ &= (-2)^4 - (1)^4 = 16 - 1 = 15\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\int_{-2}^{1} 4x^3\,dx = -\int_{1}^{-2} 4x^3\,dx$$

❑

Propiedad 2

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \tag{19.5}$$

Ejemplo 6

$$\begin{aligned}\int_{10}^{10} e^x\,dx &= e^x\Big]_{10}^{10}\\ &= e^{10} - e^{10}\\ &= 0\end{aligned}$$

❑

Propiedad 3

Si *f* es continua en el intervalo (a, c) y $a < b < c$,

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \qquad \textbf{(19.6)}$$

Ejemplo 7 Demuestre que

$$\int_0^4 3x^2\,dx = \int_0^2 3x^2\,dx + \int_2^4 3x^2\,dx$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}\int_0^4 3x^2\,dx &= \frac{3x^3}{3}\Big]_0^4 = x^3\Big]_0^4 \\ &= (4)^3 - (0)^3 = 64\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^2 3x^2\,dx + \int_2^4 3x^2\,dx &= x^3\Big]_0^2 + x^3\Big]_2^4 \\ &= [(2)^3 - (0)^3] + [(4)^3 - (2)^3] \\ &= (8 - 0) + (64 - 8) = 64\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^4 3x^2\,dx = \int_0^2 3x^2\,dx + \int_2^4 3x^2\,dx$$

o bien

$$64 = 64$$

❑

Ejercicio de práctica

Demuestre que

$$\int_0^4 3x^2\,dx = \int_0^1 3x^2\,dx + \int_1^4 3x^2\,dx$$

Propiedad 4

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx \qquad \textbf{(19.7)}$$

donde *c* es constante.

Ejemplo 8 Demuestre que para la función del ejemplo 7,

$$\int_0^4 3x^2\,dx = 3\int_0^4 x^2\,dx$$

SOLUCIÓN

En el ejemplo 7 se probó que $\int_0^4 3x^2\,dx$ es igual a 64. Se necesita evaluar $3\int_0^4 x^2\,dx$.

$$\begin{aligned} 3\int_0^4 x^2\,dx &= 3\,\frac{x^3}{3}\bigg]_0^4 \\ &= 3\left[\frac{(4)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3}\right] = 3\left(\frac{64}{3}\right) = 64 \end{aligned}$$

❑

Propiedad 5

Si $\int_a^b f(x)\,dx$ y $\int_a^b g(x)\,dx$ existen,

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \tag{19.8}$$

Ejemplo 9 Suponga que se desea evaluar

$$\int_2^4 (4x-5)\,dx + \int_2^4 (5-6x)\,dx$$

Debido a que los límites de la integración son los mismos, la ecuación (19.8) indica que los integrandos pueden combinarse algebraicamente con una integral definida, es decir,

$$\begin{aligned} \int_2^4 (4x-5)\,dx + \int_2^4 (5-6x)\,dx &= \int_2^4 [(4x-5)+(5-6x)]\,dx \\ &= \int_2^4 (-2x)\,dx \\ &= -x^2\bigg]_2^4 \\ &= [-(4)^2] - [-(2)^2] \\ &= -16 + 4 = -12 \end{aligned}$$

❑

Ejercicio de práctica

Evalúe

$$\int_2^4 (4x - 5)\,dx + \int_2^4 (5 - 6x)\,dx$$

utilizando las dos integrales definidas y verifique que la suma sea igual a -12.

Sección 19.1 Ejercicios de seguimiento

Evalúe las siguientes integrales definidas.

1. $\int_0^3 x\,dx$

2. $\int_2^4 (x + 2)\,dx$

3. $\int_1^5 dx$

4. $\int_{-2}^2 8\,dx$

5. $\int_{-1}^3 2x\,dx$

6. $\int_{-1}^1 -8x\,dx$

7. $\int_0^2 (x^2 + 4x)\,dx$

8. $\int_0^4 (4x^3 + 3x^2)\,dx$

9. $\int_0^{49} \sqrt{x}\,dx$

10. $\int_{-2}^2 2e^x\,dx$

11. $\int_4^6 (dx/x)$

12. $\int_4^9 (4\,dx/x)$

13. $\int_{-3}^0 (2x)e^{x^2}\,dx$

14. $\int_{-1}^0 (3x^2)e^{x^3}\,dx$

15. $\int_{-1}^1 5x\,dx$

16. $\int_{-2}^1 2x^3\,dx$

17. $\int_b^b 6x^2\,dx$

18. $\int_c^c 4x^3\,dx$

19. $\int_0^4 (2x + 5)\,dx$

20. $\int_2^4 3x^2\,dx$

21. $\int_6^{12} 10\,dx$

22. $\int_0^3 4x^3\,dx$

23. $\int_0^2 (x + 3)^2\,dx$

24. $\int_9^{16} \sqrt{x}\,dx$

25. $\int_{-1}^2 (x^2 + 4x + 6)\,dx$

26. $\int_1^4 3x^5\,dx$

27. $\int_2^3 -9x^2\,dx$

28. $\int_2^4 -3e^x\,dx$

29. $\int_0^4 e^x\,dx$

30. $\int_0^2 2xe^{x^2}\,dx$

31. $\int_2^4 (dx/2x)$

32. $\int_1^3 \frac{2x}{x^2-4}\,dx$

33. $\int_{-2}^2 (3x^2+4x+10)\,dx$

34. $\int_{-2}^1 (4x^3+6x^2)\,dx$

35. $\int_0^2 5e^{5x}\,dx$

36. $\int_{-1}^2 12e^{6x}\,dx$

37. $\int_0^4 2x(x^2+4)^2\,dx$

38. $\int_0^2 -6x(3x^2+4)^3\,dx$

39. $\int_1^4 (6\,dx/x)$

40. $\int_4^{10} (-20\,dx/x)$

41. $\int_4^6 \frac{6x}{3x^2-5}\,dx$

42. $\int_5^{10} \frac{-5x\,dx}{5x^2-4}$

43. $\int_1^3 \frac{6x^2}{x^3+6}\,dx$

44. $\int_2^4 \frac{-12x^2}{2x^3+3}\,dx$

45. $\int_2^4 \frac{2x^2+x}{4x^3+6x^2}\,dx$

46. $\int_1^4 \frac{3x^2+x}{8x^3+4x^2}\,dx$

47. $\int_1^2 (mx-b)\,dx$

48. $\int_0^3 (ax^2+bx+c)\,dx$

49. $\int_2^3 \frac{x^2}{x^3-1}\,dx$

50. $\int_3^5 \frac{6x}{x^2+4}\,dx$

51. $\int_2^4 (x^2+3x+1)\,dx - \int_2^4 (2x^2-7x+1)\,dx$

52. $\int_0^3 (6x^2+4x+12)\,dx + \int_0^3 (3x^2-2x+8)\,dx$

53. $\int_2^4 (5x^3+5x^2)\,dx - \int_2^4 (8x^3+6x^2+10)\,dx$

54. $\int_{-2}^1 (5x^2+2x+3)\,dx - \int_{-2}^1 (3x^2+2x-4)\,dx$

55. $\int_2^4 (x+8)\,dx - \int_4^2 (2x-6)\,dx$

56. $\int_1^3 (x^2+8)\,dx + \int_3^1 (-2x^2+10)\,dx$

57. $\int_0^3 (3x^2+2x+4)\,dx - \int_3^0 (x^2+5x)\,dx$

58. $\int_1^4 (10x^2-8x+3)\,dx + \int_4^1 (8x^2+4x-8)\,dx$

59. $\int_0^3 5e^x\,dx - \int_3^0 2e^x\,dx$

60. $\int_1^2 (4\,dx/x) + \int_2^1 (3\,dx/x)$

19.2 Integrales definidas y áreas

Una de las aplicaciones prácticas del cálculo integral es el hecho de que las integrales definidas pueden emplearse para determinar áreas. Puede tratarse de superficies que están acotadas por curvas, las cuales representan funciones, los ejes de coordenadas, o ambos. En la sección 19.4 se estudiarán situaciones donde esas áreas tienen un significado especial en el problema en que se usan.

Áreas entre una función y el eje de las *x*

Las integrales definidas pueden servir para obtener el área situada entre la curva que representa una función y el eje de las *x*. Se pueden presentar diversos casos. Su tratamiento es variable y se explicará en seguida.

Caso 1: $(f(x) > 0)$

Cuando el valor de una función f continua es positivo en el intervalo $a \leq x \leq b$ (es decir, que la gráfica de f se encuentre por arriba del eje de las x), el área que está acotada por f, el eje de las x, $x = a$ y $x = b$ se determina mediante

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

En la figura 19.6 se describe esta situación.

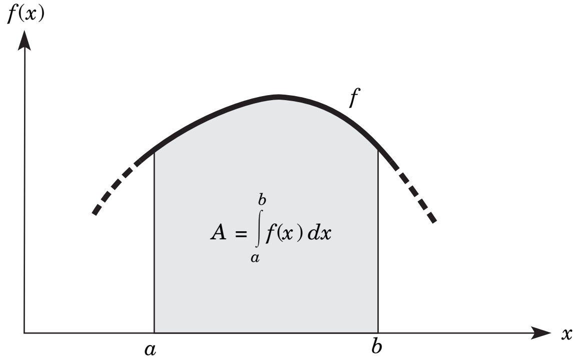


Figura 19.6 Determinación de áreas sobre el eje de las x.

Ejemplo 10 Encuentre el área debajo de $f(x) = x^2$ y por arriba del eje de las x, entre $x = 1$ y $x = 3$.

SOLUCIÓN

Esta área se indicó antes en la figura 19.1. Se calcula así

$$\begin{aligned} A &= \int_1^3 x^2\,dx \\ &= \frac{x^3}{3}\Big]_1^3 \\ &= \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 9 - \tfrac{1}{3} = 8\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

El área (exacta) es $8\frac{2}{3}$ unidades *cuadradas*.

Ejemplo 11 Determine el área indicada en la figura 19.7.

SOLUCIÓN

Demos por anticipado la respuesta usando fórmulas muy conocidas con las cuales se obtienen las áreas de un rectángulo y de un triángulo. Como se advierte en la figura 19.8, el área de interés puede considerarse compuesta por un rectángulo de superficie A_2 y un triángulo de superficie A_1. Por lo tanto,

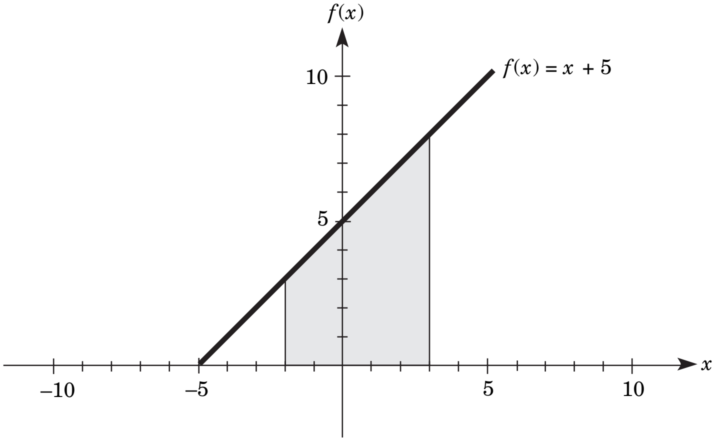


Figura 19.7

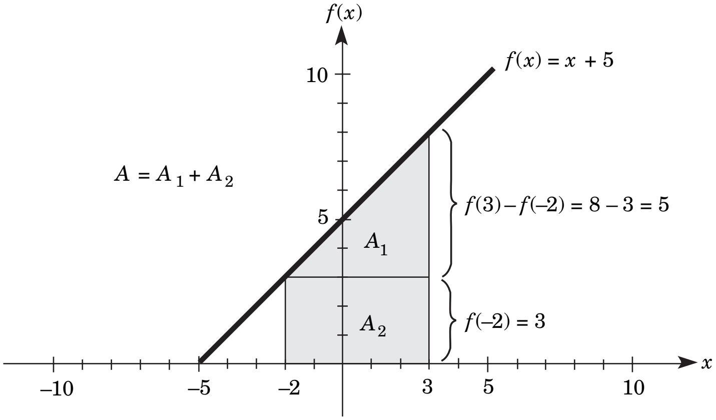


Figura 19.8

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ &= \tfrac{1}{2}bh + lw \\ &= \tfrac{1}{2}(5)(5) + (5)(3) = 12.5 + 15 = 27.5 \text{ unidades cuadradas} \end{aligned}$$

Al emplear la integral definida,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{3} (x + 5)\, dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 5x \Big]_{-2}^{3} \\ &= \left[\frac{(3)^2}{2} + 5(3)\right] - \left[\frac{(-2)^2}{2} + 5(-2)\right] \\ &= (\tfrac{9}{2} + 15) - (2 - 10) = 19.5 - (-8) = 27.5 \text{ unidades cuadradas} \end{aligned}$$

❑

Ejercicio de práctica

Para la función en la figura 19.7, determine el área entre la curva y el eje de las *x*, la cual se encuentra acotada a la izquierda por $x = 2$ y a la derecha por $x = 6$. *Respuesta:* 36.

Caso 2: $(f(x) < 0)$

Cuando el valor de una función continua *f* es negativo en el intervalo $a \leq x \leq b$ (es decir, la gráfica de *f* se halla por debajo del eje de las *x*), el área que está acotada por *f*, el eje de las *x*, $x = a$ y $x = b$ se determina mediante

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

Sin embargo, la integral definida evalúa el área como *negativa* si se encuentra debajo del eje de las *x*. Puesto que el área es absoluta (o *positiva*), se calculará como

$$-\int_{a}^{b} f(x)\, dx$$

Ejemplo 12 Calcule el área indicada en la figura 19.9.

SOLUCIÓN

Dado que *f* es una función negativa,

$$A = -\int_{2.5}^{3.5} -\frac{x^3}{2}\, dx$$

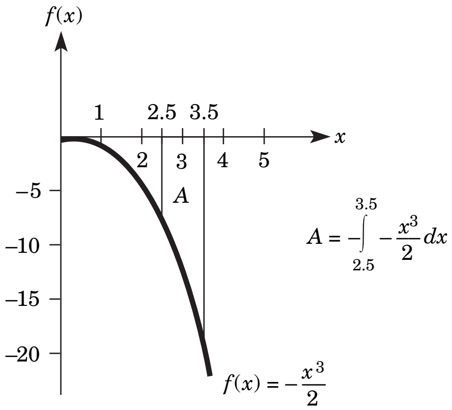


Figura 19.9

$$= -\left[-\frac{x^4}{8}\right]_{2.5}^{3.5}$$
$$= -\left\{\left[-\frac{(3.5)^4}{8}\right] - \left[\frac{-(2.5)^4}{8}\right]\right\}$$
$$= -[-18.7578 - (-4.8828)] = -[-13.875] = 13.875 \text{ unidades cuadradas}$$ ❑

Ejercicio de práctica

En la figura 19.9 encuentre el área entre *f* y el eje de las *x*, acotada a la izquierda y a la derecha por $x = 2$ y por $x = 5$, respectivamente. *Respuesta:* 609/8, o bien $76\frac{1}{8}$.

Caso 3: $(f(x) < 0$ y $f(x) > 0)$

Cuando el valor de una función continua *f* es positivo en la parte del intervalo $a \leq x \leq b$ y negativo en el resto del mismo (parte del área comprendida entre *f* y el eje de las *x* se halla arriba del eje de las *x* y parte debajo de él), entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ calcule el ***área neta***. En otras palabras, las áreas situadas por arriba del eje de las *x* se evalúan como positivas y las que están debajo como negativas. Se combinan algebraicamente para obtener el valor neto.

Ejemplo 13 Evalúe $\int_0^{15} (x - 5)\,dx$ para calcular el área *neta*, la cual se muestra en la figura 19.10.

SOLUCIÓN

Una vez más, se puede anticipar la respuesta aplicando la fórmula con que se mide la superficie de un triángulo. Recuérdese que el área debajo del eje de las *x* (A_1) se evaluará como negativa cuando se haga la integración; entonces se tendrá

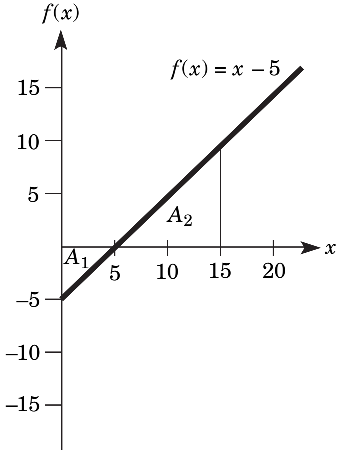


Figura 19.10

$$\begin{aligned} A &= -A_1 + A_2 \\ &= -\tfrac{1}{2}(5)(5) + \tfrac{1}{2}(10)(10) \\ &= -12.5 + 50 \\ &= 37.5 \text{ unidades cuadradas} \end{aligned}$$

Al evaluar la integral definida,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{15} (x - 5)\,dx \\ &= \frac{x^2}{2} - 5x \Big]_0^{15} \\ &= \left[\frac{(15)^2}{2} - 5(15)\right] - \left[\frac{0^2}{2} - 5(0)\right] \\ &= (112.5 - 75) - 0 \\ &= 37.5 \text{ unidades cuadradas} \end{aligned}$$

❑

Obtención de áreas entre curvas

En los siguientes ejemplos se describen los procedimientos con que se calculan las áreas comprendidas entre curvas.

Ejemplo 14 Determine el área sombreada entre *f* y *g* indicada en la figura 19.11.

SOLUCIÓN

A fin de determinar el área *A*, es preciso examinar su composición. No es posible calcularla integrando sólo una de las funciones. Una manera de calcularla se advierte en la figura 19.12. Si *g* se integra entre $x = 0$ y $x = 3$, el área resultante incluye *A* pero también una superficie adicional que no forma parte de *A*. Por haber sobreestimado *A*, habrá que restar el *excedente.* Esta área resulta ser la que se encuentra debajo de *f*, entre $x = 0$ y $x = 3$. En consecuencia, *A* puede determinarse como

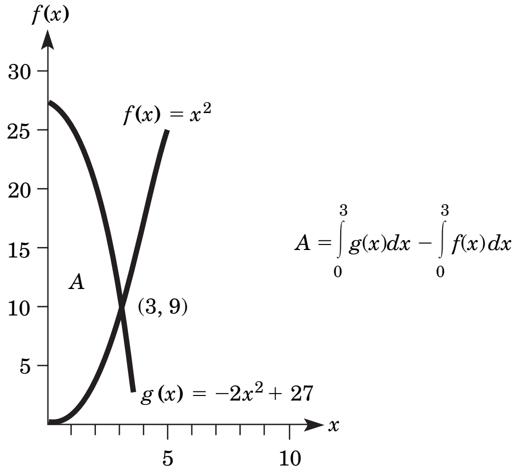


Figura 19.11

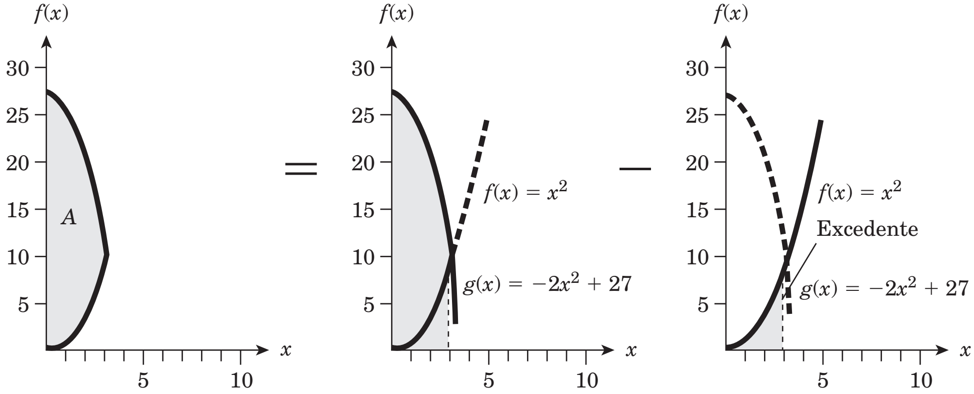


Figura 19.12

$$\boxed{A = \int_0^3 g(x)\,dx - \int_0^3 f(x)\,dx}$$

$$A = \int_0^3 g(x)\,dx - \int_0^3 f(x)\,dx$$

o bien

$$A = \int_0^3 (-2x^2 + 27)\,dx - \int_0^3 x^2\,dx$$

Si se aplica la propiedad 5,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 (-3x^2 + 27)\,dx \\ &= -x^3 + 27x\Big]_0^3 \\ &= [-(3)^3 + 27(3)] - [-(0)^3 + 27(0)] = -27 + 81 - 0 = 54 \text{ unidades cuadradas} \end{aligned}$$

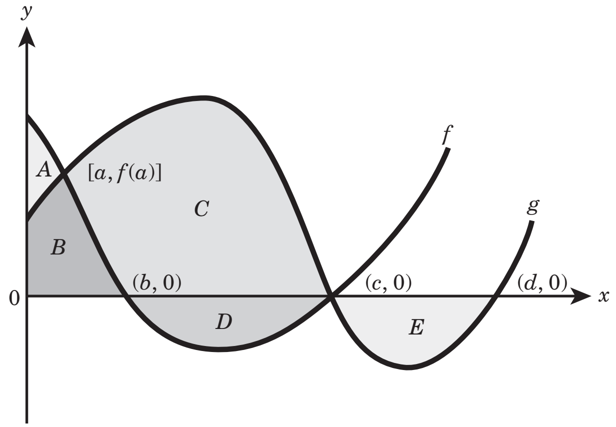


Figura 19.13

Ejemplo 15

De acuerdo con la figura 19.13, determine la combinación de integrales definidas que calcularían el tamaño de: *a*) área *A*, *b*) área *B*, *c*) área *C*.

SOLUCIÓN

Este ejemplo no contiene números reales. Se trata más bien de un ejercicio de la lógica en que se funda la formulación de combinaciones de integrales definidas para determinar las áreas.

a) El límite superior de *A* se determina mediante *f*. Si *f* se integra entre $x = 0$ y $x = a$, el resultado será un área que contenga a_1 y comprende *A* y un área excedente a_2. Esta última puede obtenerse integrando *g* entre $x = 0$ y $x = a$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A &= a_1 - a_2 \\ &= \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a g(x)\,dx \end{aligned}$$

Esto se muestra gráficamente en la figura 19.14*a*.

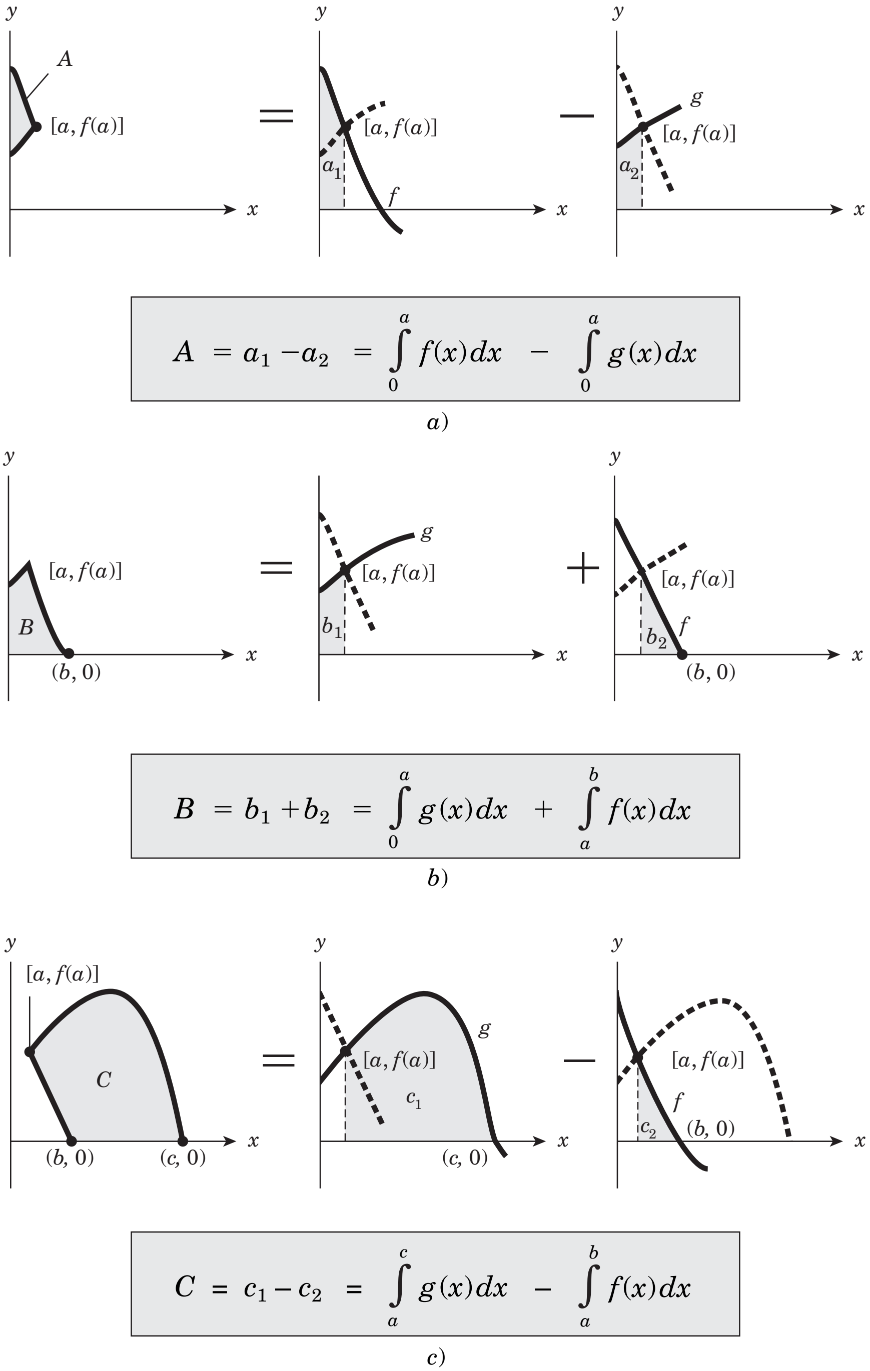
b) *B* puede visualizarse como compuesto de dos subáreas, b_1 y b_2. El límite superior de *B* está determinado por *g* hasta $x = a$ y por *f* cuando $a \leq x \leq b$. Si se integra *g* entre $x = 0$ y $x = a$, el área resultante será una parte de *B*. La parte restante de *B* puede determinarse integrando a *f* entre $x = a$ y $x = b$. Así pues,

$$\begin{aligned} B &= b_1 + b_2 \\ &= \int_0^a g(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$

Esto se muestra gráficamente en la figura 19.14*b*.

c) El límite superior de *C* se calcula por completo mediante *g*. Si se integra *g* entre $x = a$ y $x = c$, el área resultante c_1 comprende *C* y un área excedente c_2. Esta última puede calcularse integrando a *f* entre $x = a$ y $x = b$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} C &= c_1 - c_2 \\ &= \int_a^c g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \end{aligned}$$



$$A = a_1 - a_2 = \int_0^a f(x)dx - \int_0^a g(x)dx$$

a)

$$B = b_1 + b_2 = \int_0^a g(x)dx + \int_a^b f(x)dx$$

b)

$$C = c_1 - c_2 = \int_a^c g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$$

Figura 19.14 *c*)

Esto se indica gráficamente en la figura 19.14*c*. ❑

Ejercicio de práctica

En la figura 19.13 determine la combinación de integrales definidas que calculen: *a*) el área D y *b*) el área E. *Respuesta:* *a*) $-\int_b^c f(x)\,dx$, *b*) $-\int_c^d g(x)\,dx$.

Área entre dos curvas

Si la función $y = f(x)$ se encuentra arriba de la función $y = g(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$, el área entre las dos funciones situadas en el intervalo será

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

La figura 19.15 es una representación gráfica de esta propiedad.

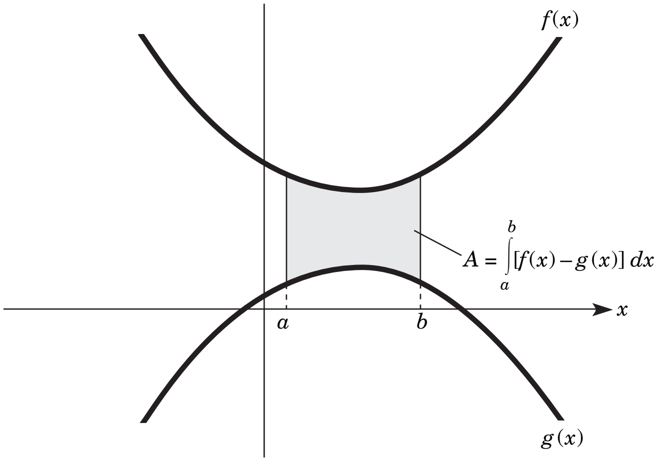


Figura 19.15 Área entre dos curvas.

Esta propiedad es en realidad una formalización del fundamento lógico del que nos hemos valido antes. Por ejemplo, se utilizó al definir el área A en el ejemplo 14; de manera análoga, se usó en el cálculo de A en el ejemplo 15. Conviene señalar que la propiedad es válida para las funciones que se hallan debajo del eje de las x. Para dar una aplicación examínese el siguiente ejemplo.

Ejemplo 16 Ponga, por ejemplo, las funciones $f(x)$ y $g(x)$ que aparecen en la figura 19.16. Suponga que se quiere calcular el área situada entre ambas funciones en el intervalo $0 \leq x \leq 4$. Al aplicar la fórmula de la superficie de un triángulo, puede calcularse el área total como la suma de las áreas del triángulo situado sobre el eje de las x y el que se encuentra debajo del eje de las x.

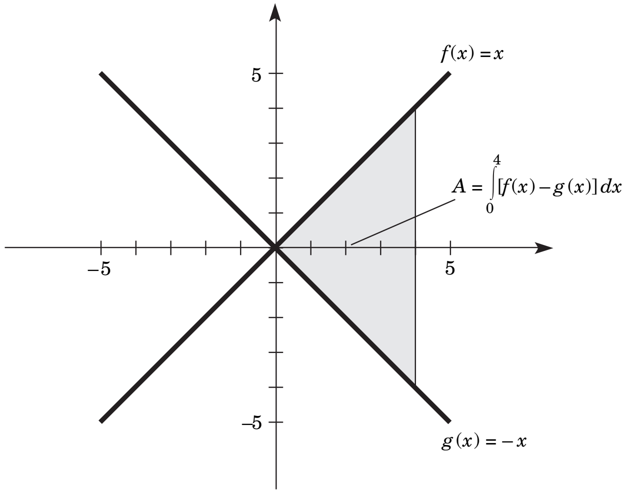


Figura 19.16

$$
\begin{aligned}
A &= \tfrac{1}{2}(4)(4) + \tfrac{1}{2}(4)(4) \\
&= 8 + 8 = 16
\end{aligned}
$$

Otra opción consiste en aplicar la propiedad formulada en páginas anteriores, de manera que

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^4 [x - (-x)]\,dx \\
&= \int_0^4 2x\,dx \\
&= x^2\big]_0^4 \\
&= (4)^2 - (0)^2 \\
&= 16
\end{aligned}
$$

❑

NOTA Una sugerencia para el uso de las integrales definidas para el cálculo de áreas es **siempre trazar un dibujo de las funciones implicadas**. Al tener una representación gráfica de las áreas de interés se hace más fácil identificar los límites pertinentes y comprender la lógica requerida para definir las áreas.

Sección 19.2 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 20: *a*) grafique *f* y *b*) determine el tamaño del área acotada entre *f* y el eje de las *x* en el intervalo señalado.

1. $f(x) = -2x + 8$, entre $x = 1$ y $x = 4$
2. $f(x) = 16 - 2x$, entre $x = 2$ y $x = 6$
3. $f(x) = x^2$, entre $x = 2$ y $x = 8$
4. $f(x) = 10 - x^2$, entre $x = -1$ y $x = 1$
5. $f(x) = 3x^3$, entre $x = 2$ y $x = 4$
6. $f(x) = -2x^3$, entre $x = 0$ y $x = 3$

7. $f(x) = -8x^2$, entre $x = -2$ y $x = 3$
8. $f(x) = -x^2$, entre $x = -2$ y $x = 2$
9. $f(x) = 10 - x^2$, entre $x = -2$ y $x = 3$
10. $f(x) = 4 - x^2$, entre $x = -5$ y $x = -2$
11. $f(x) = e^x$, entre $x = 1$ y $x = 3$
12. $f(x) = -e^x$, entre $x = 1$ y $x = 3$
13. $f(x) = -x^2 + 1$, entre $x = 0$ y $x = 3$
14. $f(x) = 5x^4 - 5$, entre $x = -1$ y $x = 2$
15. $f(x) = 40x - x^2$, entre $x = -10$ y $x = 20$
16. $f(x) = 10x - x^2$, entre $x = -5$ y $x = 5$
17. $f(x) = xe^{x^2}$, entre $x = 2$ y $x = 4$
18. $f(x) = 4xe^{x^2}$, entre $x = 1$ y $x = 3$
19. $f(x) = (1/x)$, entre $x = 5$ y $x = 10$
20. $f(x) = (5/x)$, entre $x = 2$ y $x = 5$

21. En relación con la figura 19.17, determine las combinaciones de integrales definidas que calculen el área de: *a*) *A*, *b*) *B*, *c*) *C* y *d*) *D*.

22. De acuerdo con la figura 19.18, determine las combinaciones de integrales definidas que calculen el área de: *a*) *A*, *b*) *B*, *c*) *C*, *d*) *D*.

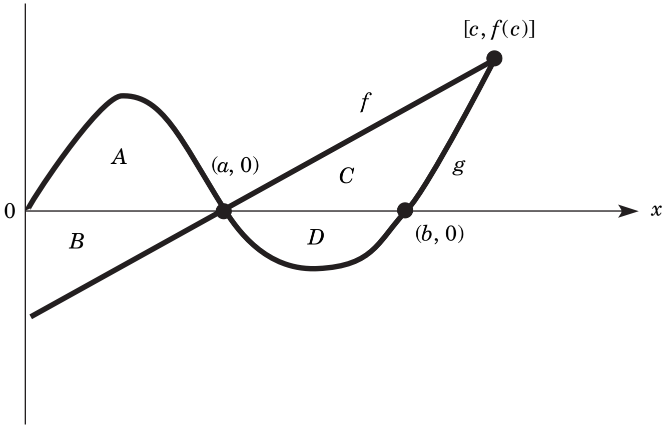


Figura 19.17

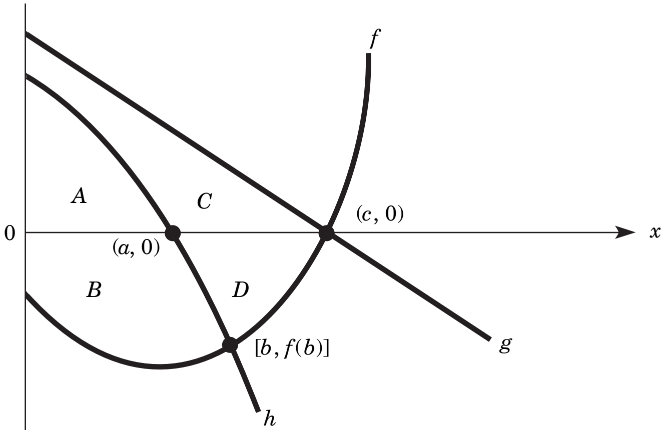


Figura 19.18

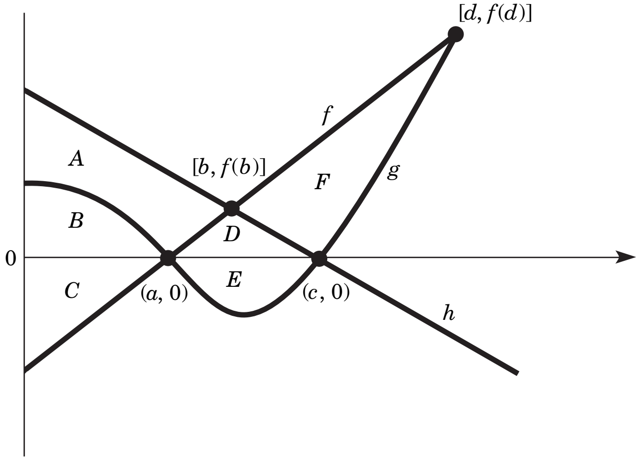


Figura 19.19

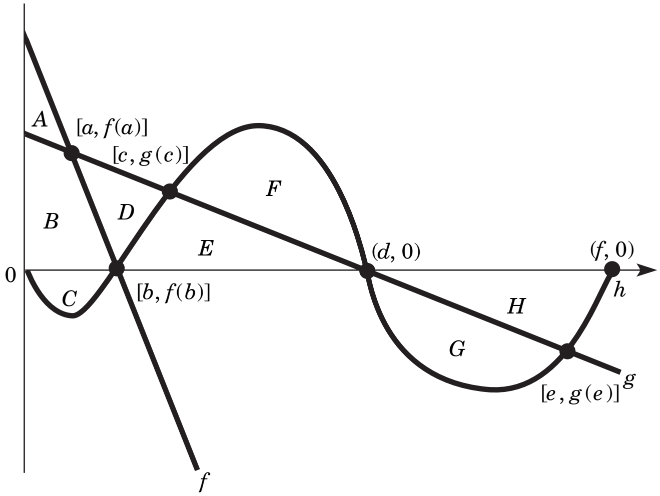


Figura 19.20

23. A partir de la figura 19.19, determine las combinaciones de las integrales definidas que calculen el área de: *a*) *A*, *b*) *B, c*) *C*, *d*) *D*, *e*) *E* y *f*) *F*.

24. Según la figura 19.20, determine las combinaciones de las integrales definidas que calculen el área de: *a*) *A*, *b*) *B*, *c*) *C*, *d*) *D*, *e*) *E*, *f*) *F*, *g*) *G* y *h*) *H*.

25. Dada $f(x) = 2x^2$ y $g(x) = 27 - x^2$: *a*) grafique las dos funciones; *b*) cuando $x \geq 0$, determine el área acotada por las dos funciones y el eje de las *y*.

26. Si se tiene $f(x) = x^2$ y $g(x) = 64 - x^2$: *a*) grafique las dos funciones; *b*) para $x \geq 0$, determine el área acotada por las dos funciones y el eje de las *y*.

27. Dadas $f(x) = 2x$ y $g(x) = 12 - x$: *a*) grafique las dos funciones; *b*) si $x \geq 0$, determine el área acotada por las dos funciones y el eje de las *y*.

28. Si se tienen $f(x) = 3x + 2$ y $g(x) = 20 - 6x$: *a*) grafique las dos funciones; *b*) con $x \geq 0$, determine el área acotada por las dos funciones y el eje de las *y*.

29. Dadas $f(x) = x^2 - 10x$ y $g(x) = -x^2 + 10x$: *a*) grafique las dos funciones; *b*) determine el área acotada por las dos funciones entre $x = 0$ y $x = 10$.

30. Si se conocen $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x + 8$, cuando $x \geq 0$ determine el área acotada en tres lados por las dos funciones y el eje de las y.

31. Obtenga el área entre $f(x) = 2x^2 - 4x + 6$ y $g(x) = -x^2 + 2x$ en el intervalo $0 \leq x \leq 2$.

32. Calcule el área entre $f(x) = x + 2$ y $g(x) = 1 - 2x$ en el intervalo $0 \leq x \leq 5$.

33. Encuentre el área entre $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = -x - 4$ en el intervalo $-1 \leq x \leq 3$.

34. Determine el área entre $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2 - 2$ en el intervalo $-2 \leq x \leq 2$.

35. Calcule el área entre $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = -e^x$ en el intervalo $-1 \leq x \leq 4$.

36. Encuentre el área entre $f(x) = 2x^2 - 2x + 10$ y $g(x) = -x^2 + x + 4$ en el intervalo $1 \leq x \leq 5$.

19.3 Métodos de aproximación

Hay situaciones donde tal vez no se cuente con una regla de integración para evaluar determinado integrando, aun utilizando las tablas de las reglas de integración. Si se necesita evaluar una integral definida para la función, se dispone de métodos para aproximar su valor. En la presente sección examinaremos tres métodos numéricos de aproximación que pueden utilizarse para evaluar

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Regla de los rectángulos

Si se quiere evaluar la integral definida en términos del cálculo del área debajo de una curva, un método consiste en dividir el intervalo $a \leq x \leq b$ en n subintervalos iguales, cada uno con un ancho de $(b - a)/n$. Si x_i se define como el punto medio del intervalo i, puede construirse un conjunto de n rectángulos que tengan un ancho $(b - a)/n$ y altura iguales a $f(x_i)$, según se observa en la figura 19.21. Para aproximar el valor de la integral definida, se suman las áreas de los n rectángulos.

Si se denota como el ancho de cada intervalo. . . $(b - a)/n$. . . como Δx, puede expresarse la regla de los rectángulos como

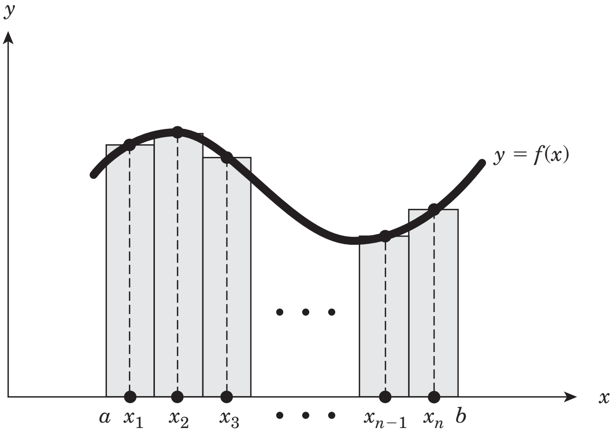


Figura 19.21 Regla de los rectángulos.

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x$$

$$\approx \Delta x[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)] \qquad \textbf{(19.9)}$$

para una n suficientemente grande

Ejemplo 17 A continuación se da un ejemplo del uso de esta regla en una función relativamente simple $f(x) = x^3$. Supóngase que se desea evaluar $\int_0^4 x^3\,dx$. Se aplicará la regla de los rectángulos, dividiendo el intervalo en cuatro subintervalos iguales que tienen un ancho de 1. Como se ve en la figura 19.22, los valores del punto medio en los cuatro subintervalos son 0.5, 1.5, 2.5 y 3.5. Al aplicar la regla de los rectángulos, la aproximación numérica de la integral definida es

$$\begin{aligned}\int_0^4 x^3\,dx &\approx f(0.5)(1) + f(1.5)(1) + f(2.5)(1) + f(3.5)(1)\\ &= (0.5)^3 + (1.5)^3 + (2.5)^3 + (3.5)^3\\ &= 0.125 + 3.375 + 15.625 + 42.875\\ &= 62.0\end{aligned}$$

Confirme por su cuenta que el valor verdadero de la integral definida sea 64. La aproximación numérica lograda mediante la regla de los rectángulos *subestimó* en 2 el valor real de la integral definida.

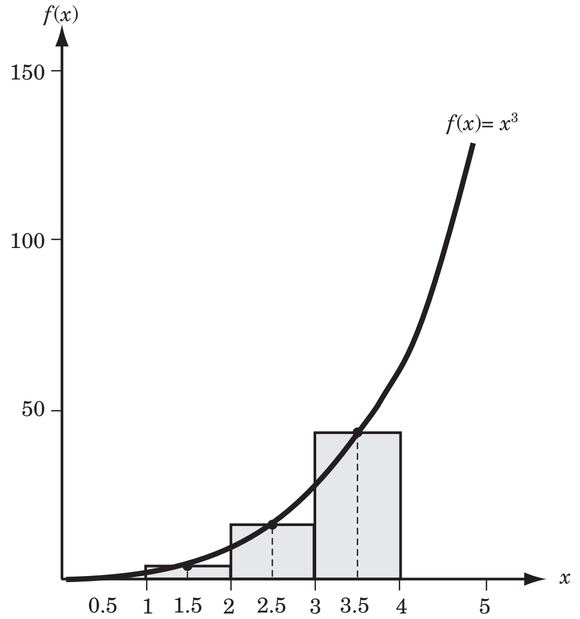


Figura 19.22 Aproximación numérica utilizando la regla de los rectángulos.

❑

Regla de los trapecios

Otro método de aproximación numérica para integrales definidas es la *regla de los trapecios.* Como ocurre con la regla de los rectángulos, el intervalo $a \le x \le b$ se divide en n subintervalos del mismo ancho. Como se advierte en la figura 19.23, la aproximación consiste en sumar las áreas de n trapecios definidas por los subintervalos. Las alturas de n trapecios están definidas por los puntos finales de los subintervalos.

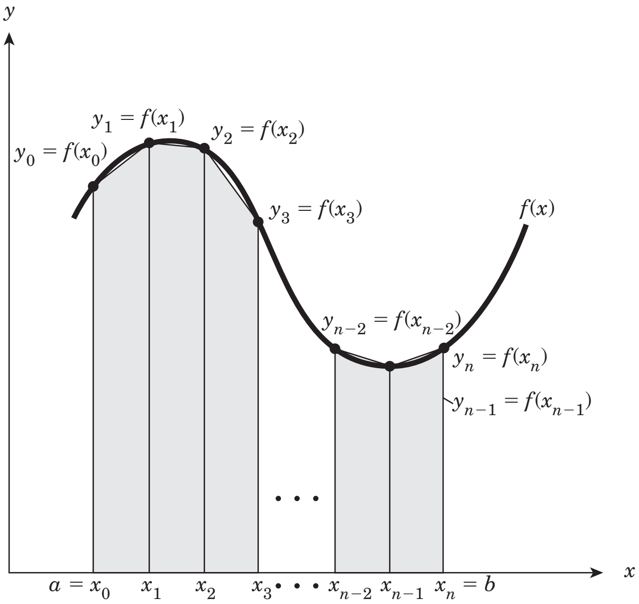


Figura 19.23 Regla de los trapecios.

En un trapecio como el que se muestra en la figura 19.24, el área del mismo se define como el producto de la base del trapecio con su altura promedio, es decir,

$$A = \Delta x[(y_1 + y_2)/2]^*$$

De este modo, si se emplean las áreas de n trapecios en la figura 19.23 para aproximar la integral definida, esta última se evalúa como

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx \approx {} & [(b-a)/n][(y_0+y_1)/2] + [(b-a)/n][(y_1+y_2)/2] \\ & + [(b-a)/n][(y_2+y_3)/2] \\ & + \cdots + [(b-a)/n][(y_{n-1}+y_n)/2]\end{aligned}$$

o bien

---

* Una definición más convencional establece que el área del trapecio con lados paralelos a y b, y una altura h, es igual a $\frac{1}{2}(a + b)/h$.

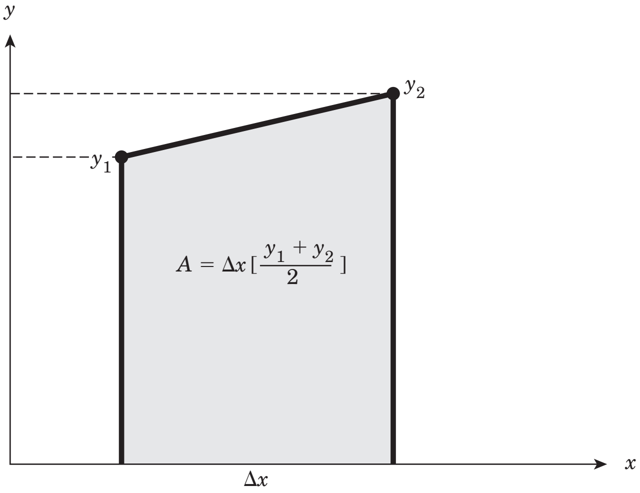


Figura 19.24 Área de trapecios.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \approx \left(\frac{b-a}{2n}\right)(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) \quad \text{para una } n \text{ suficientemente grande}} \tag{19.10}$$

En seguida se explicará el uso de la regla de los trapecios en la evaluación de la misma integral definida del ejemplo 17.

Ejemplo 18

Haciendo uso de las mismas definiciones de los subintervalos que en el ejemplo 17, los puntos finales son 0, 1, 2, 3, 4. Por lo tanto, $y_0 = f(0) = 0$, $y_1 = f(1) = 1$, $y_2 = f(2) = 8$, $y_3 = f(3) = 27$ y $y_4 = f(4) = 64$. Utilizando la ecuación (19.10),

$$\begin{aligned}\int_0^4 x^3\,dx &\approx [(4-0)/2(4)][0 + 2(1) + 2(8) + 2(27) + 64]\\ &= (1/2)(0 + 2 + 16 + 54 + 64)\\ &= (1/2)(136)\\ &= 68\end{aligned}$$

Verifique que la aproximación lograda con la regla de los trapecios *sobreestime* en 4 el valor real de la integral definida. ❏

Regla de Simpson

El tercer método de aproximación numérica se denomina *regla de Simpson.* A diferencia del uso de rectángulos o trapecios para aproximar el valor de una integral definida, la regla de Simpson se basa en la estimación parabólica. De manera gráfica, el intervalo $a \le x \le b$ se divide en un *número par* de n subintervalos que son de idéntica anchura.

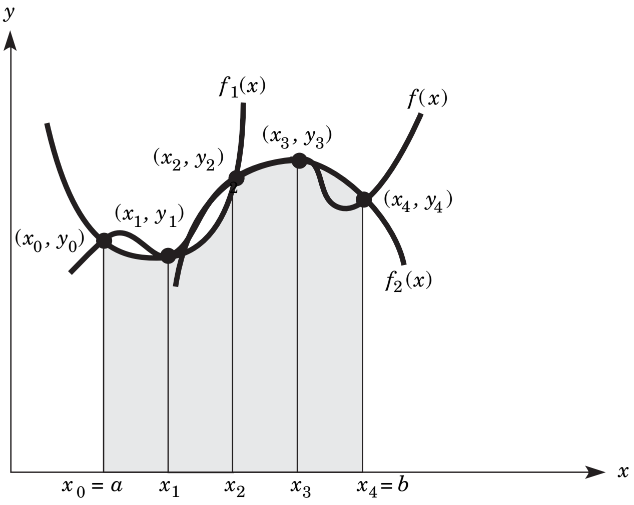


Figura 19.25 Aproximación parabólica de $f(x)$ utilizando f_1 y f_2.

Entonces, una serie de parábolas son idóneas para graficarse, una para cada *par* de subintervalos. Esto se ilustra en la figura 19.25. ¿Recuerda que tres puntos de datos definen una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$? Con la regla de Simpson, una parábola se ajusta a los puntos de datos (x_0, y_0), (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en los dos primeros subintervalos y otra se ajusta a los tres puntos de datos (x_2, y_2) (x_3, y_3) y (x_4, y_4) en los segundos dos subintervalos de la figura 19.25. Estas parábolas sirven para aproximar la función $f(x)$ en el intervalo $a \leq x \leq b$. El área bajo $f(x)$ en este intervalo se aproxima entonces hallando las áreas bajo las dos parábolas.

Dado el caso donde $x_1 - x_0 = x_2 - x_1$, existe una fórmula con la cual determinar el área bajo una parábola que pasa por (x_0, y_0), (x_1, y_1) y (x_2, y_2). La fórmula no requiere la obtención de la función cuadrática que pase por dichos puntos. Si $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = w$, entonces

$$(ax^2 + bx + c)\,dx = \frac{w}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Con el fin de aproximar la integral definida, $w = (b - a)/n$. De esta manera, si $f(x)$ es continua en el intervalo $a \leq x \leq b$ y el número de subintervalos n es par,

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{b-a}{3n}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{b-a}{3n}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

o bien

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \tag{19.11}$$

para n seleccionada suficientemente grande (n par).

Ejemplo 19 Nos serviremos de la regla de Simpson para aproximar la integral definida en los dos últimos ejemplos. Dado que los subintervalos se definen como iguales, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $(x_1, y_1) = (1, 1)$, $(x_2, y_2) = (2, 8)$, $(x_3, y_3) = (3, 27)$ y $(x_4, y_4) = (4, 64)$. Con $a = 0$ y $b = 4$, la integral definida se estima así

$$\begin{aligned}\int_0^4 x^3\,dx &\approx \frac{4-0}{3(4)}[0 + 4(1) + 2(8) + 4(27) + 64]\\ &= \frac{1}{3}(192)\\ &= 64\end{aligned}$$

que es *precisamente* el valor de $\int_0^4 x^3\,dx$.

En términos generales, se espera que la regla de Simpson sea más exacta que la de los rectángulos o la de los trapecios en la obtención de determinado valor de n.

Ejemplo 20 A continuación se explicará el empleo de estas aproximaciones en un caso en que no se cuente con un método para calcular la integral indefinida. Supóngase que se desea evaluar

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

Esta integral definida se aproxima recurriendo a tres métodos y subdividiendo en cuatro subintervalos que tengan un ancho de 0.5. La figura 19.26 contiene la definición de los puntos finales de los intervalos, lo mismo que los puntos intermedios.

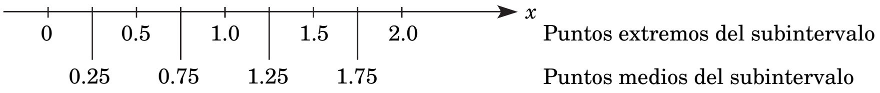


Figura 19.26 Puntos extremos y puntos medios de subintervalos.

Regla de los rectángulos

Al aplicar la ecuación (19.9),

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2+1}\,dx \approx (0.5)[f(0.25) + f(0.75) + f(1.25) + f(1.75)]$$

$$= (0.5)\left[\frac{1}{(0.25)^2 + 1} + \frac{1}{(0.75)^2 + 1} + \frac{1}{(1.25)^2 + 1} + \frac{1}{(1.75)^2 + 1}\right]$$
$$= 0.5(0.94118 + 0.64000 + 0.39024 + 0.24615)$$
$$= 1.10879$$

Regla de los trapecios

Al aplicar la ecuación (19.10),

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2+1}\,dx \approx \left[\frac{2-0}{(2)(4)}\right][f(0) + 2f(0.5) + 2f(1.0) + 2f(1.5) + f(2.0)]$$
$$= \tfrac{1}{4}[1 + 2(0.8) + 2(0.5) + 2(0.308) + 0.2]$$
$$= \tfrac{1}{4}(4.416)$$
$$= 1.104$$

Regla de Simpson

Al aplicar la ecuación (19.11),

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2+1}\,dx \approx \left[\frac{2-0}{(3)(4)}\right][f(0) + 4f(0.5) + 2f(1.0) + 4f(1.5) + f(2.0)]$$
$$= \left(\frac{1}{6}\right)[1 + 4(0.8) + 2(0.5) + 4(0.308) + 0.2]$$
$$= \frac{1}{6}(6.632)$$
$$= 1.105$$

Como no podemos evaluar explícitamente esta integral definida, tampoco es posible estimar la exactitud de tales aproximaciones. La experiencia indicará que el valor conseguido con la regla de Simpson tiende a ser el más exacto. ❑

Sección 19.3 Ejercicios de seguimiento

En los siguientes ejercicios: *a*) evalúe la integral definida usando la regla de los rectángulos (se subdivide en cuatro intervalos); *b*) evalúe el valor exacto mediante las reglas explícitas de integración, y *c*) calcule el error de la aproximación.

1. $\int_0^4 x^2\,dx$

2. $\int_0^4 4x^2\,dx$

3. $\int_0^2 4x^3\,dx$

4. $\int_0^2 8x^3\,dx$

5. $\int_0^4 e^x\,dx$

6. $\int_1^3 3e^x\,dx$

7. $\int_2^4 (x^3 - 2x^2)\,dx$

8. $\int_2^4 (2x^3 + 3x^2)\,dx$

9. $\int_4^8 (2x)(x^2 - 5)^3\,dx$

10. $\int_4^8 (4x)(2x^2 + 10)^4\,dx$

En los siguientes ejercicios: *a*) evalúe la integral definida aplicando la regla de los trapecios ($n = 4$), *b*) evalúe el valor exacto mediante las reglas explícitas de integración y *c*) calcule el error de la aproximación.

11. $\int_1^5 (5x - 2)\, dx$

12. $\int_2^6 (20 - 4x)\, dx$

13. $\int_1^3 (4x^2 - x)\, dx$

14. $\int_3^5 (2x - 3x^2)\, dx$

15. $\int_0^4 2e^x\, dx$

16. $\int_1^5 e^{-x}\, dx$

17. $\int_0^4 (8x)(4x^2 - 5)^3\, dx$

18. $\int_0^4 (3x^2)(x^3 + 5)^3\, dx$

19. $\int_0^2 2xe^{x^2}\, dx$

20. $\int_0^2 xe^{2x^2}\, dx$

En los siguientes ejercicios: *a*) evalúe la integral definida mediante la regla de Simpson (se subdivide en cuatro intervalos), *b*) evalúe el valor exacto con las reglas explícitas de integración y *c*) calcule el error de la aproximación.

21. $\int_0^2 (5x + 8)\, dx$

22. $\int_0^4 (4 - 2x)\, dx$

23. $\int_1^5 (4x^2 - 5x)\, dx$

24. $\int_2^6 (x^3 - 10)\, dx$

25. $\int_0^2 (5x^4 - x)\, dx$

26. $\int_2^4 (2x - x^3)\, dx$

27. $\int_0^4 5e^x\, dx$

28. $\int_4^8 -4e^{-x}\, dx$

29. $\int_4^6 6x^2(x^3 - 1)^3\, dx$

30. $\int_2^4 4x(x^2 + 3)^3\, dx$

En los siguientes ejercicios: *a*) evalúe el valor de la integral definida con las reglas explícitas de integración; *b*) aproxime la integral definida mediante la regla de los rectángulos, la regla de los trapecios y la regla de Simpson (con subdivisión en cuatro intervalos), y *c*) determine el método de aproximación más preciso.

31. $\int_0^2 10\, dx$

32. $\int_0^4 -5\, dx$

33. $\int_2^6 (x^2 - 5)\, dx$

34. $\int_4^8 (10 - x + x^2)\, dx$

35. $\int_0^2 4x^3\, dx$

36. $\int_2^4 8x^3\, dx$

37. $\int_4^6 10e^x\, dx$

38. $\int_2^4 5e^{-x}\, dx$

39. $\int_0^4 4x^3(x^4 - 1)^3\, dx$

40. $\int_0^2 6x^2(x^3 + 6)^4\, dx$

En los siguientes ejercicios, la integral definida no puede evaluarse con las reglas de integración. Aproxime dicha integral haciendo uso de los tres métodos de aproximación (con $n = 4$).

41. $\int_0^2 \frac{4}{2x^2 + 1}\,dx$

42. $\int_0^4 \frac{10}{x^2 + 4}\,dx$

43. $\int_0^4 \frac{2}{x^3 + 1}\,dx$

44. $\int_0^2 \frac{x}{x^3 + 2}\,dx$

45. $\int_2^6 \frac{1}{1 + e^x}\,dx$

46. $\int_0^4 \frac{5}{2 + e^x}\,dx$

47. $\int_0^2 \sqrt{2 + x^3}\,dx$

48. $\int_0^4 \sqrt{10 + x^3}\,dx$

19.4 Aplicaciones del cálculo integral

Los siguientes ejemplos son aplicaciones del cálculo integral.

Ejemplo 21 **(Ingreso)** En el capítulo 18 se analizó cómo obtener la función de ingreso total integrando la función de ingreso marginal. A manera de simple ampliación de ese concepto, supóngase que el precio de un producto es constante a un valor de \$10 por unidad, esto es, la función de ingreso marginal es

$$\begin{aligned} MR &= f(x) \\ &= 10 \end{aligned}$$

donde x es el número de unidades vendidas. El ingreso total conseguido con la venta de x unidades puede determinarse al integrar la función de ingreso marginal entre 0 y x. Por ejemplo, el ingreso total logrado con la venta de 1 500 unidades se calcularía como

$$\begin{aligned} \int_0^{1\,500} 10\,dx &= 10x\Big]_0^{1\,500} \\ &= 10(1\,500) \\ &= \$15\,000 \end{aligned}$$

Se trata de un procedimiento bastante complejo para el cálculo del ingreso total, puesto que bastaría haber multiplicado el precio por la cantidad vendida para haber conseguido así el mismo resultado. No obstante, el procedimiento ejemplifica la manera de interpretar como ingreso total o incremental el área debajo de la función del ingreso marginal (fig. 19.27). El ingreso adicional relacionado con un incremento de 1 500 a 1 800 unidades en las ventas se calculará así

$$\begin{aligned} \int_{1\,500}^{1\,800} 10\,dx &= 10x\Big]_{1\,500}^{1\,800} \\ &= \$18\,000 - \$15\,000 \\ &= \$3\,000 \end{aligned}$$

Ejemplo 22 **(Gastos de mantenimiento)** Un fabricante de automóviles estima que la tasa anual de gastos $r(t)$ para dar mantenimiento a uno de sus modelos está representada por la función

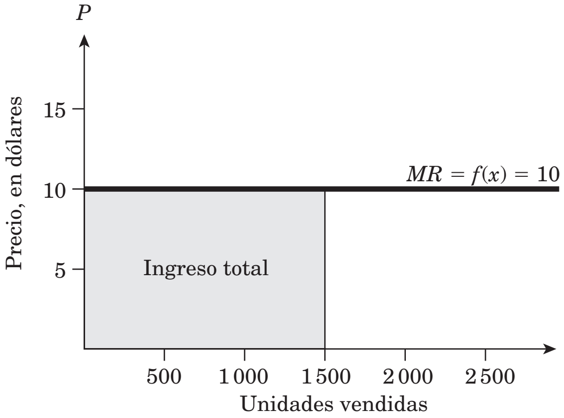


Figura 19.27

$$r(t) = 100 + 10t^2$$

donde t es la edad del automóvil expresada en años y r(*t*) *se mide en dólares por año*. Esta función indica que cuando el automóvil tenga un año de uso, los gastos de mantenimiento se harán a una tasa de

$$\begin{aligned} r(1) &= 100 + 10(1)^2 \\ &= \$110 \text{ por año} \end{aligned}$$

Cuando tenga tres años de uso, estarán realizándose a una tasa de

$$\begin{aligned} r(3) &= 100 + 10(3)^2 \\ &= \$190 \text{ por año} \end{aligned}$$

Como cabe suponer, cuanto más viejo sea el automóvil, más mantenimiento requerirá. La figura 19.28 ilustra la gráfica de la tasa de la función de costos.

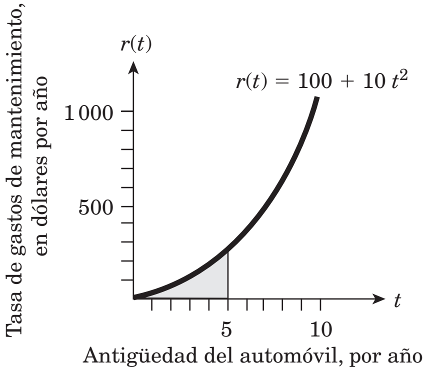


Figura 19.28 Tasa de la función de gasto.

El área bajo esta curva entre dos valores cualesquiera de t es una medida del costo esperado de mantenimiento durante ese intervalo. Los gastos esperados de mantenimiento durante los primeros cinco años de vida del automóvil se calculan como sigue

$$\int_0^5 (100 + 10t^2)\,dt = 100t + \frac{10t^3}{3}\Bigg]_0^5$$
$$= 100(5) + \frac{10(5)^3}{3} = 500 + 416.67 = \$916.67$$

De estos gastos, los que se espera hacer *durante el quinto año* se estiman como

$$\int_4^5 (100 + 10t^2)\,dt = 100t + \frac{10t^3}{3}\Bigg]_4^5$$
$$= \left[100(5) + \frac{10(5)^3}{3}\right] - \left[100(4) + \frac{10(4)^3}{3}\right]$$
$$= 916.67 - (400 + 213.33)$$
$$= \$303.34$$

Ejemplo 23

(Recaudación de fondos) Una organización cívica estatal está efectuando su campaña anual de fondos que se destinan a un programa de campamento de verano para minusválidos. Los gastos de la campaña se realizarán a una tasa de \$10 000 diarios. Por experiencias anteriores se sabe que las aportaciones serán altas en las primeras fases de la campaña y tenderán a disminuir con el paso del tiempo. La función que describe la tasa a que se reciben los donativos es

$$c(t) = -100t^2 + 20\,000$$

donde t representa el día de la campaña y c(t) es igual a la tasa a la que se reciben las contribuciones, medidas en dólares por día. La organización desea maximizar las utilidades netas de la campaña.

a) Determine cuánto debería durar la campaña a fin de maximizar las utilidades netas.
b) ¿Cuáles se espera que sean los gastos totales de la campaña?
c) ¿Cuáles se espera que sean las aportaciones totales?
d) ¿Cuáles se espera que sean las utilidades netas (aportaciones totales menos los gastos totales)?

SOLUCIÓN

a) La función que describe la tasa a que se realizan los gastos $e(t)$ es

$$e(t) = 10\,000$$

La figura 19.29 muestra las dos funciones. Cuanto más exceda la tasa a la que se hacen los donativos a la de los gastos de campaña, las *utilidades netas* serán positivas. Consulte la figura 19.29. Las utilidades netas serán positivas hasta que las gráficas de las dos funciones se intersequen. Más allá de este punto, la tasa de gastos excede la tasa de las aportaciones. Es decir, los donativos se recibirán a una tasa de menos de \$10 000 por día.

Las gráficas de las dos funciones se intersecan cuando

$$c(t) = e(t)$$

o cuando $$-100t^2 + 20\,000 = 10\,000$$

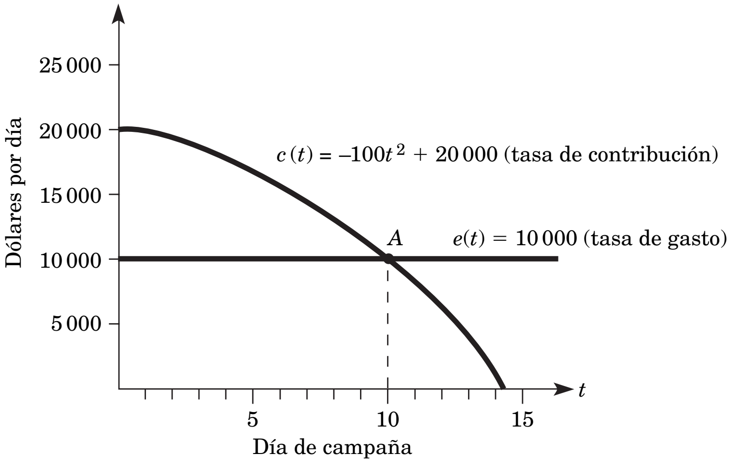


Figura 19.29 Contribuciones para el aumento de recaudación de fondos y funciones de gasto.

$$-100t^2 = -10\,000$$
$$t^2 = 100$$
$$t = 10 \text{ días}$$

(Raíz negativa sin sentido.)

b) Los gastos totales de la campaña están representados por el área bajo *e* entre $t = 0$ y $t = 10$. Esto podría obtenerse al integrar *e* entre estos límites o, más simple, multiplicando:

$$\begin{aligned} E &= (\$10\,000 \text{ por día})(10 \text{ días}) \\ &= \$100\,000 \end{aligned}$$

c) Las aportaciones totales durante 10 días están representadas por el área bajo *c* entre $t = 0$ y $t = 10$, o

$$\begin{aligned} C &= \int_0^{10} (-100t^2 + 20\,000)\, dt \\ &= -100\frac{t^3}{3} + 20\,000t \Big]_0^{10} \\ &= \frac{-100(10)^3}{3} + 20\,000(10) \\ &= -33\,333.33 + 200\,000 = \$166\,666.67 \end{aligned}$$

d) Las utilidades netas serán, según las previsiones,

$$\begin{aligned} C - E &= \$166\,666.67 - \$100\,000 \\ &= \$66\,666.67 \end{aligned}$$

Ejemplo 24 **(Administración del banco de sangre; escenario de motivación)** El banco de sangre de un hospital realiza una campaña de donación de sangre para reponer su inventario. El hospital estima que se donará sangre a una tasa de $d(t)$ pintas por día, donde

$$d(t) = 500e^{-0.4t}$$

y *t indica la duración de la campaña de sangre en días*. Si la meta de la campaña es obtener 1 000 pintas, ¿cuándo habrá alcanzado esa meta el hospital?

SOLUCIÓN

En este problema, el área entre la gráfica de d y el eje de las t representa los donativos totales de sangre, en pintas. A diferencia de las aplicaciones anteriores, el área deseada ya se conoce; la incógnita es el límite superior de integración, como se observa en la figura 19.30. El hospital alcanzará su meta cuando

$$\int_0^{t^*} 500e^{-0.4t}\,dt = 1\,000$$

Al reescribir el integrado

$$\int_0^{t^*} -1\,250(-0.4)e^{-0.4t}\,dt = 1\,000$$

o bien

$$-1\,250\int_0^{t^*} -0.4e^{-0.4t}\,dt = 1\,000$$

Al evaluar la integral definida y resolviendo para t^*,

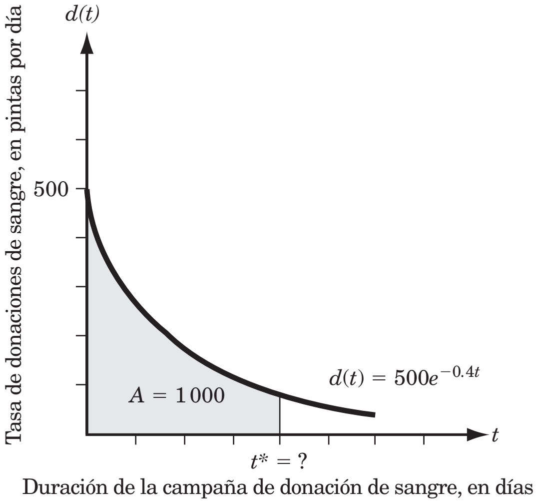


Figura 19.30 Determinación del límite superior de integración.

$$\begin{aligned}
-1\,250[e^{-0.4t}]_0^{t^*} &= 1\,000\\
-1\,250[e^{-0.4t^*} - e^{-0.4(0)}] &= 1\,000\\
-1\,250[e^{-0.4t^*} - 1] &= 1\,000\\
-1\,250e^{-0.4t^*} + 1\,250 &= 1\,000\\
-1\,250e^{-0.4t^*} &= -250\\
e^{-0.4t^*} &= \frac{-250}{-1\,250}\\
e^{-0.4t^*} &= 0.2
\end{aligned}$$

Si se toma el logaritmo natural de ambos lados de la ecuación (usando la tabla 2),

$$\begin{aligned}
-0.4t^* &= -1.6094\\
t^* &= \frac{-1.6094}{-0.4}
\end{aligned}$$

o

$$t^* = 4.0235$$

Así pues, el hospital alcanzará su meta en cuatro días, aproximadamente.

Ejemplo 25 **(Energía nuclear)** Una compañía eléctrica ha propuesto construir una planta de energía nuclear en las afueras de una gran área metropolitana. Como cabe suponer, la opinión pública está dividida al respecto y se han suscitado acaloradas discusiones. Un grupo que se opone a la construcción de la planta ha ofrecido algunos datos discutibles sobre las consecuencias de un accidente catastrófico que pudiera ocurrir en la planta. Este grupo estima que la tasa a la que se producirían las muertes en la zona metropolitana por precipitación radiactiva se describe con la función

$$r(t) = 200\,000e^{-0.1t}$$

donde $r(t)$ *representa la tasa de fallecimientos por día, y t representa el tiempo transcurrido desde el accidente, medido en días.* (*Nota*: ¡Aunque la controversia en este ejemplo es muy real, los datos son ficticios!) La población del área metropolitana es de 1.5 millones de personas.

a) Determine el número esperado de muertes un día después de un gran accidente.

b) ¿Cuánto tardarán todos los habitantes de esa zona en sucumbir ante los efectos de la radiactividad?

SOLUCIÓN

a) La figura 19.31 ofrece una gráfica de *r*. El área debajo de esta función entre dos puntos cualesquiera t_1 y t_2 es una medida del número esperado de fallecimientos durante ese intervalo de tiempo. Así pues, el número de muertes esperadas en el primer día se calcularía como

$$\begin{aligned}
\int_0^1 200\,000e^{-0.1t}\,dt &= \int_0^1 -2\,000\,000(-0.1)e^{-0.1t}\,dt\\
&= -2\,000\,000\int_0^1 (-0.1)e^{-0.1t}\,dt
\end{aligned}$$

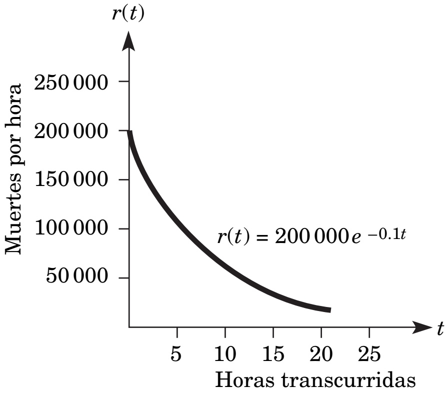


Figura 19.31 Tasa de mortalidad.

$$\begin{aligned}
&= -2\,000\,000\,e^{-0.1t}\Big]_0^1\\
&= -2\,000\,000\,e^{-0.1} + 2\,000\,000e^0\\
&= -2\,000\,000(e^{-0.1} - e^0)\\
&= -2\,000\,000(0.9048 - 1)\\
&= -2\,000\,000(-0.0952) = 190\,400 \text{ personas}
\end{aligned}$$

b) Por terrible que parezca, la población entera sucumbiría al cabo de t^* días, donde

$$\int_0^{t^*} 200\,000e^{-0.1t}\,dt = 1\,500\,000$$

o cuando

$$-2\,000\,000e^{-0.1t}\Big]_0^{t^*} = 1\,500\,000$$

Despejando t^* se obtiene

$$\begin{aligned}
-2\,000\,000e^{-0.1t^*} + 2\,000\,000 &= 1\,500\,000\\
-2\,000\,000e^{-0.1t^*} &= -500\,000\\
e^{-0.1t^*} &= 0.25
\end{aligned}$$

Si se calcula el logaritmo natural (tabla 2) en ambos lados de la ecuación,

$$-0.1t^* = -1.3863$$

o bien

$$t^* = 13.863 \text{ días}$$

Ejemplo 26

(Superávit del consumidor) Una manera de medir el valor o utilidad que un producto tiene para el consumidor es el precio que está dispuesto a pagar por él. Los economistas sostienen que los consumidores en realidad reciben un valor de superávit en los productos que adquieren, atendiendo al modo de funcionar el mercado.

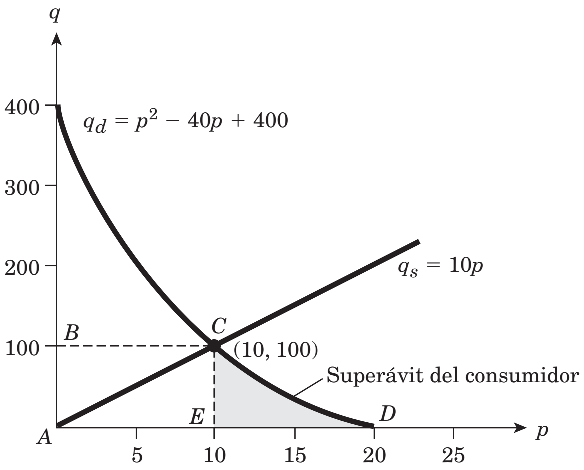


Figura 19.32 Superávit del consumidor.

La figura 19.32 describe las funciones de oferta y demanda para un producto. El equilibrio se da cuando se cobra un precio de \$10 y la demanda es de 100 unidades. Si se emplean dólares para representar el valor que este producto tiene para los consumidores, según las prácticas contables modernas el ingreso total (\$10 · 100 unidades = \$1 000) es una medida del *valor económico* del producto. Esta medida de valor está representada por el área del rectángulo *ABCE*.

Sin embargo, si se tiene presente la naturaleza de la función de demanda, habría habido una demanda del producto a precios mayores que \$10. En otras palabras, habría habido consumidores dispuestos a pagar casi \$20 por el producto. Y otros habrían sido atraídos al mercado con precios que oscilen entre \$10 y \$20. Si se supone que el precio que estarían dispuestos a pagar es una medida de la utilidad que el producto tiene para ellos, en realidad recibirán un bono cuando el precio de mercado sea \$10. Consulte de nuevo la figura 19.32. Los economistas afirmarían que una medida de la utilidad real del producto es el área *ABCDE*. Y cuando el mercado está en equilibrio, la utilidad adicional recibida por los consumidores, denominada el ***superávit del consumidor,*** se representa con el área sombreada *CDE*. Esta área se puede calcular como

$$\begin{aligned}\int_{10}^{20} (p^2 - 40p + 400)\,dp &= \frac{p^3}{3} - 20p^2 + 400p\bigg]_{10}^{20} \\ &= \left[\frac{(20)^3}{3} - 20(20)^2 + 400(20)\right] \\ &\quad - \left[\frac{(10)^3}{3} - 20(10)^2 + 400(10)\right] \\ &= 2\,666.67 - 2\,333.33 = \$333.34\end{aligned}$$

Nuestros métodos contables modernos valuarían la utilidad del producto en \$1 000. Los economistas afirmarían que la utilidad real es de \$1 333.34, o sea que el superávit del consumidor es de \$333.34. Esta medida de utilidad adicional, o bono, se aplica en particular a los consumidores que estarían dispuestos a pagar más de \$10.

Ejemplo 27 **(Volumen de un sólido de revolución)** Considere la función *f* en la figura 19.33. Si el medio plano acotado por *f*, el eje de las *x* y las líneas $x = a$ y $x = b$ se gira en torno al eje de las *x* una revolución completa, se formará una ***superficie de revolución***.

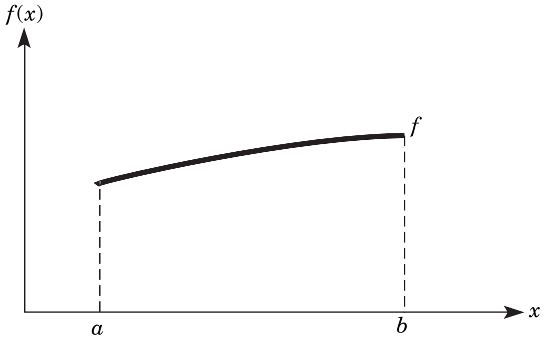


Figura 19.33

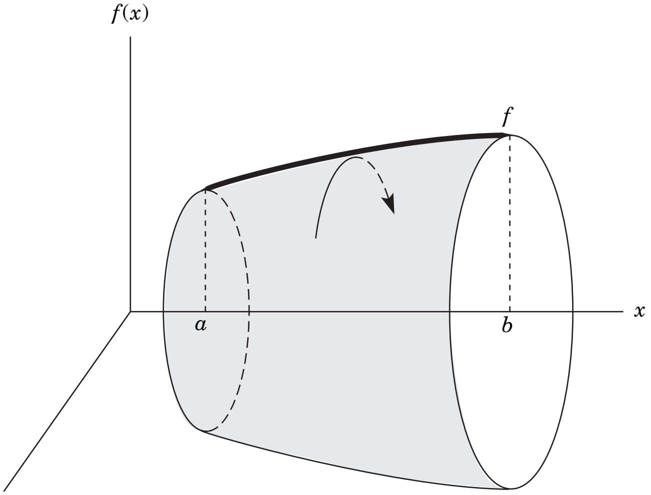


Figura 19.34 Superficie de revolución.

Cada punto de f describe una trayectoria circular. La trayectoria compuesta de todos los puntos f en el intervalo $a \leq x \leq b$ es la superficie de revolución que se muestra en la figura 19.34.

A la superficie de revolución corresponde un ***sólido de revolución***. Éste es el volumen que describe el plano a medida que la gráfica de f es girada alrededor del eje de las x. Supóngase que se desea obtener el volumen del sólido de revolución. Podría estimarse el volumen formando un sólido aproximado de revolución integrado por cilindros circulares rectos como los que se observan en la figura 19.35. En esta figura, el intervalo $a \leq x \leq b$ ha sido subdividido en subintervalos iguales de ancho Δx. La altura de cada cilindro recto es Δx. Y su radio es $f(x_i)$, donde x_i es el valor izquierdo de x para el subintervalo i.

Como se aprecia en la figura 19.36, el volumen del cilindro derecho que tiene un radio r y una altura h es

$$V = \pi r^2 h$$

donde π(pi) = 3.14. . . . Para cada cilindro recto de la figura 19.35, el volumen será

$$V_i = \pi[f(x_i)]^2 \, \Delta x$$

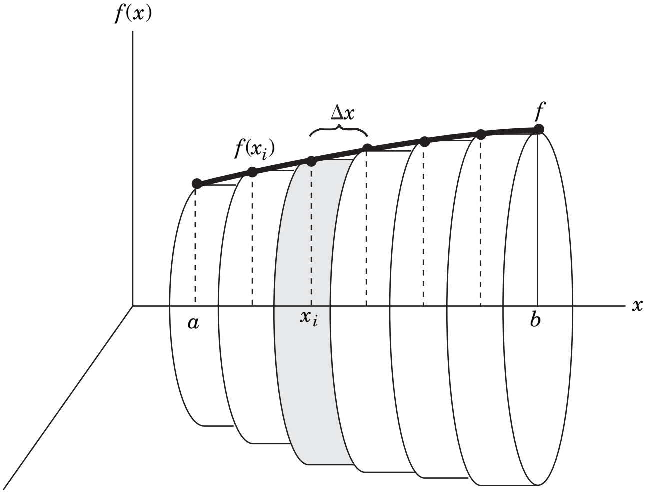


Figura 19.35

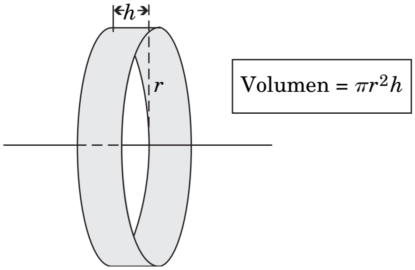


Figura 19.36 Cilindro circular de altura *h* y radio *r*.

Si el intervalo $a \leq x \leq b$ se ha subdividido en *n* subintervalos iguales, el volumen estimado del sólido de revolución es

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi[f(x_i)]^2 \, \Delta x$$

La estimación será más exacta a medida que el intervalo $a \leq x \leq b$ se subdivide en un número mayor de subintervalos, aproximándose Δx a 0.

Definición: Volumen de un sólido de revolución

En una función *f* que es continua en un intervalo $a \leq x \leq b$, el volumen del sólido de revolución generado a medida que la función se gira una revolución alrededor del eje de las *x* se define con

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \pi[f(x_i)]^2 \, \Delta x$$

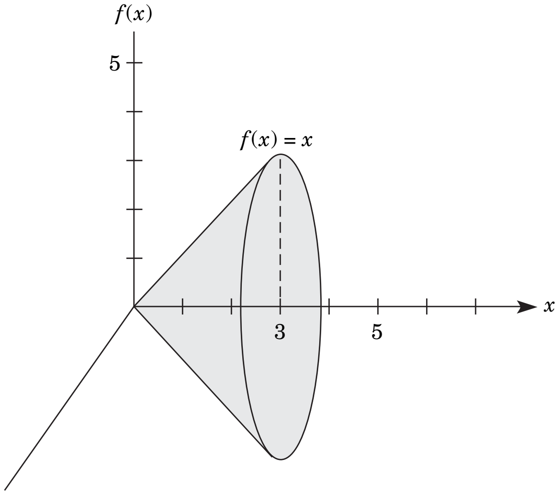


Figura 19.37

Cuando existe el límite, puede probarse que

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx \tag{19.12}$$

Dada la función $f(x) = x$, suponga que se desea calcular el volumen del sólido de revolución generado a medida que la gráfica de f, entre $x = 0$ y $x = 3$, se gira alrededor del eje de las x. Este sólido de revolución se ilustra en la figura 19.37. El volumen es

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 \pi(x)^2\,dx \\ &= \pi \frac{(x)^3}{3}\Bigg]_0^3 \\ &= \pi\left[\frac{(3)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3}\right] \\ &= 9\pi \\ &\doteq 28.26 \text{ unidades cúbicas} \end{aligned}$$

❑

Sección 19.4 Ejercicios de seguimiento

1. La función del ingreso marginal del producto de una firma es

$$MR = -0.04x + 10$$

donde x es el número de unidades vendidas.

a) Determine el ingreso total conseguido con la venta de 200 unidades del producto.

b) ¿Cuál es el ingreso agregado que se logra con un incremento de 100 a 200 unidades en la venta?

2. Un fabricante de motores de aviones de propulsión estima que la tasa a la que se hacen los costos de mantenimiento de los motores es una función de las horas de operación. En el caso de un motor empleado en un avión comercial, la función es

$$r(x) = 60 + 0.040x^2$$

donde x es el número de horas de operación y $r(x)$ indica la tasa a la que se efectúan los costos de reparación (en dólares) por hora de operación.

a) Determine la tasa a la que estarán efectuándose los costos al cabo de 100 horas de operación.
b) ¿Cuáles se espera que sean los costos de mantenimiento durante las primeras 100 horas de operación?

3. Una compañía que está especializándose en las ventas por correo emprende una campaña promocional. Los gastos de publicidad le costarán \$5 950 por día. Los especialistas en mercadotecnia estiman que la tasa a la que se generarán las utilidades (sin contar los costos de publicidad) con la campaña promocional disminuye con la duración de esta última. En concreto, la tasa $r(t)$ de esta campaña se estima mediante la función

$$r(t) = -50t^2 + 10\,000$$

donde t representa el día de la campaña y $r(t)$ se mide en dólares por día. Con objeto de maximizar la utilidad *neta*, la empresa debería realizar la campaña mientras $r(t)$ sea mayor que el costo diario de la publicidad.

a) Grafique la función $r(t)$ y la función $c(t) = 5\,950$, que describe la tasa a que se hacen los gastos de publicidad.
b) ¿Cuánto tiempo debería durar la campaña?
c) ¿Cuáles se espera que sean los gastos de publicidad totales de la campaña?
d) ¿Cuál se espera que sea la utilidad *neta*?

4. Vuelva a resolver el ejemplo 23, suponiendo que los gastos de la campaña se hayan realizado a una tasa de \$5 000 diarios y que

$$c(t) = -10t^2 + 9\,000$$

5. Resuelva otra vez el ejemplo 25, suponiendo que $r(t) = 200\,000e^{-0.05t}$.

6. Resuelva de nuevo el ejemplo 25, suponiendo que la población sea 800 000 y $r(t) = 100\,000e^{-0.1t}$.

7. Al lector se le da la función de demanda

$$q_d = p^2 - 30p + 200$$

y la función de oferta

$$q_s = 5p$$

donde p se expresa en dólares, q_d y q_s se dan en unidades y $0 \leq p \leq 9$.

a) Grafique las dos funciones.
b) Determine la cantidad y el precio de equilibrio.
c) Calcule el valor del superávit del consumidor si el mercado está en equilibrio.

8. **Conservación de la energía** Una pequeña empresa estudia la compra de un aparato de ahorro de energía que reducirá el consumo de combustible. El aparato costará \$32 000. El departamento de ingeniería estima que los ahorros logrados se realizarán a la tasa de $s(t)$ dólares por año, donde

$$s(t) = 20\,000e^{-05t}$$

Y t denota el tiempo medido en años. Determine cuánto tardará la empresa en recuperar el costo del aparato (es decir, cuándo los ahorros acumulados de combustible equivaldrán al costo de compra).

9. **Administración del banco de sangre** El banco de sangre de un hospital lleva a cabo una campaña anual de donación de sangre con el propósito de reponer sus existencias. El hospital estima que la sangre será donada a una tasa de $d(t)$ pintas por día, donde

$$d(t) = 300e^{-0.1t}$$

y t es la duración de la sangre (en días) de la campaña. Si la meta es reunir 2 000 pintas, ¿cuándo la habrá alcanzado el hospital?

10. **Administración de bosques** La demanda de madera forestal comercial ha ido creciendo rápidamente en las últimas tres o cuatro décadas. He aquí la función que describe la tasa de la demanda de madera

$$d(t) = 20 + 0.003t^2$$

donde $d(t)$ se expresa en miles de millones de pies cúbicos por año y t es el tiempo en años ($t = 0$ corresponde al 1 de enero de 1990).

a) Determine la tasa de demanda al inicio de 1995.

b) Determine la tasa de demanda al inicio del año 2010.

c) Determine la demanda *total* de la madera durante el periodo comprendido desde 1990 hasta 2009. [*Sugerencia:* Integre $d(t)$ entre $t = 0$ y $t = 20$.]

11. **Administración de desechos sólidos** La tasa $w(t)$ en que los desechos sólidos se generan en una ciudad de Estados Unidos se describe por la función

$$w(t) = 0.5e^{0.025t}$$

donde $w(t)$se expresa en miles de millones de toneladas por año y t el tiempo medido en años ($t = 0$ corresponde al 1 de enero de 1990).

a) Determine la tasa en que se espera que los desechos sólidos se generen a principios del año 2000.

b) ¿Qué tonelaje total se espera que se genere durante el periodo del año 20 desde 1990 hasta 2009?

12. **Control de epidemias** Un centro de investigación de la salud se especializa en el estudio de las epidemias. Estima que para un tipo particular de epidemia que sucede en una región de la ciudad, la tasa en que nuevas personas fueron afectadas se describe por la función

$$r(t) = 50e^{0.25t} - 40$$

donde $r(t)$ son los nuevos afectados, medida en personas por día, y t es el tiempo desde el comienzo de la epidemia, medida en días. *a*) ¿Cuántas personas fueron afectadas durante los primeros 10 días? *b*) ¿Durante los primeros 20 días?

13. Curvas de aprendizaje Las personas en la industria manufacturera han observado en muchas ocasiones que los empleados asignados a un nuevo trabajo o prueba resultaron más eficientes conforme a la experiencia. Esto es, a medida que el empleado repite la prueba se vuelve más afín con las operaciones, movimientos y equipos requeridos para ejecutar el trabajo. Algunas compañías tienen suficientes experiencias con entrenamiento de trabajo que pueden proyectar qué tan rápido un empleado aprenderá un trabajo. Muy seguido una *curva de aprendizaje* puede construirse estimando la rapidez con que se realiza un trabajo en función de las veces que la ha ejecutado un empleado.

La *curva de aprendizaje* de un trabajo en particular ha sido definida en los siguientes términos

$$h(x) = \frac{20}{x} + 4, \qquad x > 0$$

donde $h(x)$ denota la tasa de producción medida en horas por unidad y x la unidad producida.

a) Determine la tasa de producción $h(x)$ en el tiempo de la décima unidad ($x = 10$).

b) La integración de la curva de aprendizaje en un intervalo especificado ofrece una estimación del número total de horas de producción requeridas en el nivel correspondiente de producción. Determine el número total de horas que, según se espera, se tardará en producir las primeras 20 unidades al integrar $h(x)$ entre $x = 1$ y $x = 20$.

c) Grafique h.

d) ¿Hay un límite que indique la eficiencia que alcanzará un empleado en este trabajo?

14. Superávit del productor El ejemplo 26 explica el concepto de superávit de consumidores, el cual representa lo que en opinión de los economistas constituye una medida de la utilidad adicional que reciben los consumidores cuando el mercado está en equilibrio. Los economistas señalan, asimismo, que los productores obtienen un bono o utilidad agregada cuando el mercado está en equilibrio. La figura 19.38 repite las funciones de oferta y demanda incluidas en el ejemplo 26.

Si el lector se centra en la función de oferta q_s, ésta le indicará que algunos proveedores estarían dispuestos a ofrecer unidades a precios menores que el precio de equilibrio: \$10. Cuando el precio del mercado es \$10, ganarían más de lo que habrían ganado en caso contrario. Si cada uno vende al precio al que está dispuesto a hacerlo, el ingreso total lo representaría el área *ABC*.

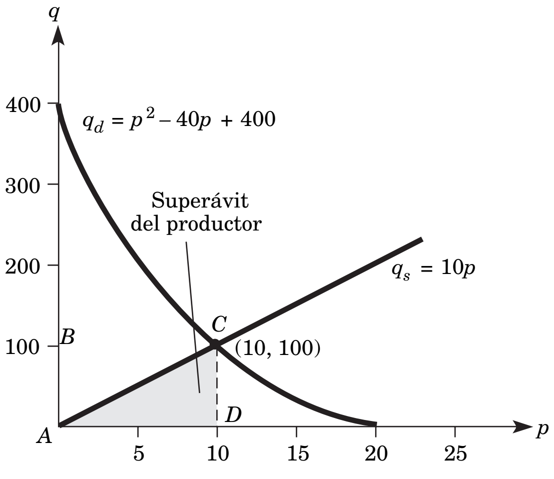


Figura 19.38

Dado que el ingreso total en estado de equilibrio está representado por *ABCD*, el área sombreada denota una medida del valor agregado de los proveedores. A ese valor se le da el nombre de *superávit del productor*.

a) Determine el superávit del productor en el ejemplo 26.

b) Calcule el superávit del productor para las funciones descritas en el ejercicio 7.

15. En la función $f(x) = -x^2 + 9$, encuentre el volumen del sólido de revolución entre $x = 0$ y $x = 3$ si *f* se gira alrededor del eje de las *x*.

16. En la función $f(x) = -x - 2$, calcule el volumen del sólido de revolución entre $x = -2$ y $x = 5$ si *f* se gira alrededor del eje de las *x*.

19.5 Cálculo integral y probabilidad (opcional)

Una función matemática que determina la probabilidad de cada posible resultado de un experimento recibe el nombre de ***función de densidad de probabilidad*** (*probability density function*, pdf). En comparación con las distribuciones de probabilidad que muestran cada resultado y su probabilidad, estas funciones pueden ser concebidas como las funciones matemáticas con las que se calcula la probabilidad. Si *x* es una variable aleatoria continua, su función de densidad *f* habrá de satisfacer dos condiciones

1. *$f(x) \geq 0$ para toda x, y*
2. *el área bajo la gráfica de f es igual a 1.*

La primera condición prohíbe las probabilidades negativas de cualquier evento y la segunda garantiza que los eventos sean mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos.

La probabilidad de que una variable aleatoria *x* adopte un valor en el intervalo comprendido entre *a* y *b*, donde $a < b$, es el área bajo la función de densidad entre $x = a$ y $x = b$. Al aplicar la integral definida, la probabilidad de que *x* asuma un valor entre $x = a$ y $x = b$ es igual a $\int_a^b f(x)\,dx$, o

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Desde el punto de vista técnico, si quisiéramos determinar la probabilidad de que una variable *x* normalmente distribuida, con una media μ y una desviación estándar σ, adopte un valor comprendido entre $x = a$ y $x = b$, $a < b$, podría obtenerse la probabilidad mediante la integración de la función de densidad, o

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-1/2[(x-\mu)/\sigma]^2}\,dx$$

Por fortuna, la conversión equivalente a la distribución normal estándar y la existencia de tablas, como la 14.25, hacen innecesario efectuar lo que parece ser una integración compleja.

Ejemplo 28 Considere la función de densidad de probabilidad para la variable aleatoria *x*

$$f(x) = \frac{2 + x}{30} \qquad 0 \le x \le 6$$

Determine la probabilidad de que x adopte un valor entre 2 y 5.

SOLUCIÓN

La función de densidad y el área de interés se dan en la figura 19.39. La probabilidad se calcula como

$$P(2 \le x \le 5) = \int_2^5 \frac{2 + x}{30}\,dx$$

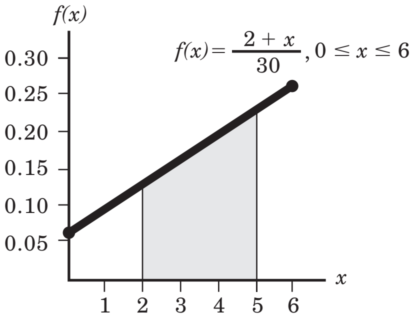


Figura 19.39 Función de densidad de probabilidad.

$$\begin{aligned}
&= \frac{x}{15} + \frac{x^2}{60}\Big]_2^5 \\
&= \left(\frac{5}{15} + \frac{5^2}{60}\right) - \left(\frac{2}{15} + \frac{2^2}{60}\right) \\
&= \frac{5}{15} + \frac{25}{60} - \frac{2}{15} - \frac{4}{60} \\
&= \frac{20 + 25 - 8 - 4}{60} = \frac{33}{60} = 0.55
\end{aligned}$$

Ejemplo 29 Se aplica un examen de tres horas de duración a todos los candidatos a vendedores en una cadena nacional minorista. Se ha descubierto que el tiempo x en horas necesario para efectuar el examen es aleatorio y tiene una función de densidad

$$f(x) = \frac{-x^2 + 10x}{36} \qquad 0 \le x \le 3$$

Determine la probabilidad de que alguien termine la prueba en una hora o en menos tiempo.

SOLUCIÓN

En la figura 19.40 se dan la función de densidad y el área de interés. La probabilidad se calcula como

$$
\begin{aligned}
P(0 \le x \le 1) &= \int_0^1 \frac{-x^2 + 10x}{36}\, dx \\
&= \frac{-x^3}{108} + \frac{10x^2}{72}\bigg]_0^1 \\
&= \frac{-(1)^3}{108} + \frac{10(1)^2}{72} = \frac{-1}{108} + \frac{10}{72} = -0.009 + 0.139 = 0.13
\end{aligned}
$$

❑

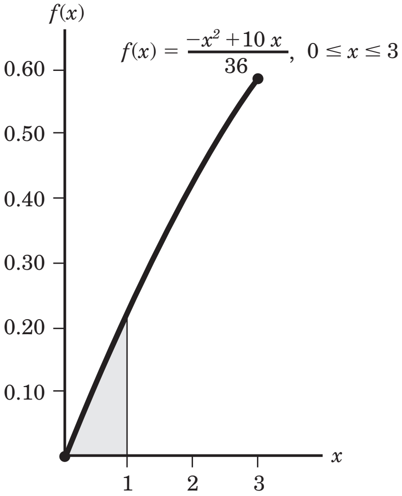


Figura 19.40 Función de densidad de probabilidad.

Sección 19.5 Ejercicios de seguimiento

1. He aquí la función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria continua x

$$f(x) = \frac{5 - x}{4.5} \qquad 2 \le x \le 5$$

¿Cuál es la probabilidad de que la variable aleatoria adopte un valor mayor que 3? ¿Y menor que 2?

2. La función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria continua x es

$$f(x) = \frac{x^2 - 10x + 25}{39} \qquad 0 \le x \le 3$$

Calcule la probabilidad de que la variable aleatoria asuma un valor mayor que 2. Menor que 1.

3. La función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria continua x es

$$f(x) = \frac{1 + 2x}{36} \qquad 2 \le x \le 6$$

Determine la probabilidad de que la variable aleatoria continua adopte un valor entre 2 y 4.

❑ TÉRMINOS Y CONCEPTOS CLAVE

función de densidad de probabilidad 957
integral definida 915
límites (superior e inferior) de integración 915
regla de los rectángulos 940
regla de los trapecios 941
regla de Simpson 938
teorema fundamental del cálculo integral 916

❑ FÓRMULAS IMPORTANTES

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{19.3}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \tag{19.4}$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \tag{19.5}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx \tag{19.6}$$

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx \tag{19.7}$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \tag{19.8}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \Delta x[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)] \qquad \text{Regla de los rectángulos} \tag{19.9}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \left(\frac{b-a}{2n}\right)(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) \qquad \text{Regla de los trapecios} \tag{19.10}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n),\ n \text{ par} \qquad \text{Regla de Simpson} \tag{19.11}$$

❑ EJERCICIOS ADICIONALES

SECCIÓN 19.1

Evalúe las integrales siguientes:

1. $\int_0^1 (x^2 - 3e^x - 2)\,dx$

2. $\int_1^3 (4x^2 + 5)\,dx$

3. $\int_{-2}^2 (6x + 7)\,dx$

4. $\int_{-1}^0 3x^2\,dx$

5. $\int_0^1 (-2x^5 + 3x^4)\,dx$

6. $\int_{-1}^1 (x - 3)/x^3\,dx$

7. $\int_1^2 (-4x^3 + 6x^2)\,dx$

8. $\int_2^4 (20x^3 - 15x^2)\,dx$

9. $\int_0^4 (2x)(x^2 - 3)^3\,dx$

10. $\int_0^2 (2x)(x^2 + 5)^4\,dx$

11. $\int_1^2 (x^2/2 - 2x)\,dx$

12. $\int_{-3}^0 3x^2 e^{x^3}\,dx$

13. $\int_{-3}^3 (-5xe^{x^2+2}\,dx$

14. $\int_2^3 \frac{6x}{3x^2 - 7}\,dx$

15. $\int_0^1 x^{1/2}(1 + x)\,dx$

16. $\int_{-4}^0 e^{-1-6x}\,dx$

17. $\int_1^4 3x^2(x^3 - 3)^3\,dx$

18. $\int_0^2 12x^2(x^3 - 10)^4\,dx$

19. $\int_0^2 3x(3x^2 - 6)^3\,dx$

20. $\int_0^4 (16x)(2x^2 - 3)^4\,dx$

21. $\int_2^4 \frac{-4x}{x^2 + 3}\,dx$

22. $\int_0^2 \frac{-4x}{10 - 2x^2}\,dx$

23. $\int_0^2 \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 1}\,dx$

24. $\int_2^4 \frac{4x + 4}{2x^2 + 4x - 5}\,dx$

25. $\int_4^5 \frac{x^2 - 2x}{x^3 - 3x^2}\,dx$

26. $\int_4^5 \frac{2x^2 - 4x}{2x^3 - 6x^2}\,dx$

27. $\int_0^3 (x^2 + 7x + 4)\,dx - \int_0^3 (x^2 + 7x + 3)\,dx$

28. $\int_1^4 (x^2 + 6)\,dx + \int_1^4 (x^2 + x + 6)\,dx$

29. $\int_{-4}^3 (8x^2 + 2x)\,dx - \int_{-4}^3 (x^2 + 3x + 5)\,dx$

30. $\int_0^5 (x^4 - 3x^2 + 10)\,dx - \int_0^5 (4x^3 + 3x^2 - 6)\,dx + \int_0^5 (4x^4 + 6x^2 - 4)\,dx$

SECCIÓN 19.2

En los ejercicios 31 a 36: *a*) grafique *f* y *b*) determine el tamaño del área entre *f* y el eje de las *x* en el intervalo señalado.

31. $f(x) = 5 + 2x$, entre $x = 3$ y $x = 5$

32. $f(x) = e^{2x}$, entre $x = 0$ y $x = 2.5$

33. $f(x) = x^2$, entre $x = 2$ y $x = 4$

34. $f(x) = \ln(x)$, entre $x = 4$ y $x = 8$

35. $f(x) = e^{-x}$, entre $x = 1$ y $x = 4$

36. $f(x) = 4x^3$, entre $x = 2$ y $x = 4$

37. En $f(x) = x^2 + 4$ y $g(x) = x + 6$, cuando $x \geq 0$, calcule el tamaño del área acotada en los tres lados por las dos funciones y por el eje de las *y*.

38. En $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2 + 8$, determine el tamaño del área finita que está acotada por las dos funciones (ayudaría mucho hacer una gráfica).

39. En $f(x) = 10 - x^2$ y $g(x) = x^2 - 22$, si $x \geq 0$, determine el tamaño del área acotada en los tres lados por las dos funciones y por el eje de las *y*.

40. En $f(x) = 18 - x$ y $g(x) = 3x + 2$, determine el tamaño del área acotada en los tres lados por las dos funciones y por el eje de las *y*.

41. En las funciones de la figura 19.41, obtenga las combinaciones de las integrales definidas que se necesitan para determinar el tamaño de: *a*) *A*, *b*) *B*, *c*) *C*, *d*) *D*, *e*) *E*, *f*) *F*, *g*) *G* y *h*) *H*.

42. En las funciones de la figura 19.42, obtenga las combinaciones de las integrales definidas que se requieren para calcular el tamaño de: *a*) *A*, *b*) *B*, *c*) *C*, *d*) *D*, *e*) *E*, *f*) *F* y *g*) *G*.

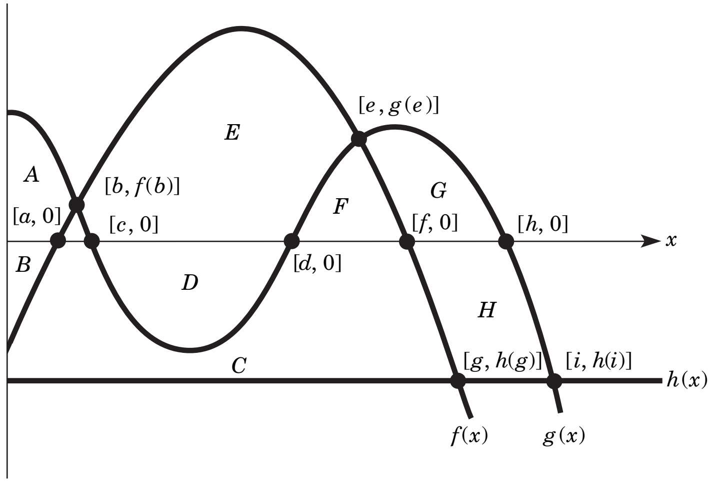


Figura 19.41

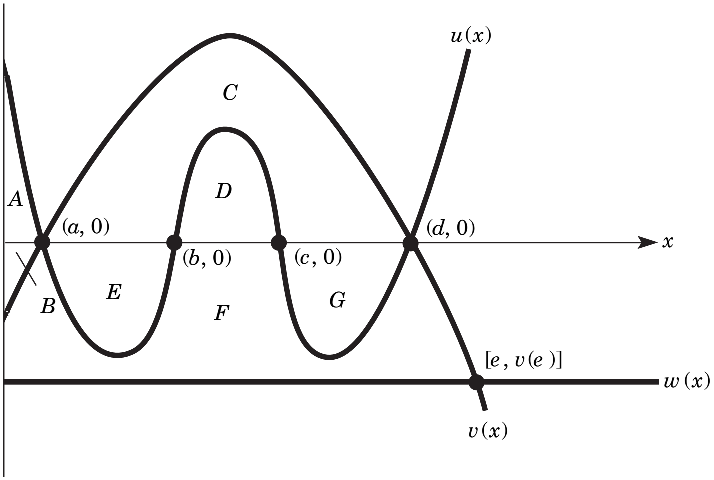


Figura 19.42

SECCIÓN 19.3

En los siguientes ejercicios: *a*) evalúe la integral definida mediante las reglas explícitas de integración; *b*) aproxime la integral definida con la regla de los rectángulos, de los trapecios y de Simpson (subdividiendo en cuatro intervalos), y *c*) determine el método de aproximación más exacto.

43. $\int_2^6 (x^3 - 6x^2 + 4x)\,dx$

44. $\int_0^8 (8x^2 + 6x^2)\,dx$

45. $\int_0^2 (10 - 3x^2)\,dx$

46. $\int_0^4 (5 + 2x - 3x^2)\,dx$

47. $\int_2^4 6xe^{x^2-1}\,dx$

48. $\int_0^4 4xe^{2x^2}\,dx$

49. $\int_2^6 (4x - 12x^2)(x^2 - 2x^3)^4\,dx$

50. $\int_2^{10} 3x^2(x^3 - 1)^3\,dx$

51. $\int_1^3 (8x^3 - 6x^2)\,dx$

52. $\int_1^5 (2x - 6x^2 + 4x^3)\,dx$

En las siguientes integrales definidas, analice el efecto que se tiene en el error de aproximación, a medida que el número de los intervalos se incrementa desde $n = 2$ hasta $n = 4$ y luego a $n = 8$. Aplique las reglas estándar de integración para calcular el valor real de la integral definida y luego efectúe la aproximación sirviéndose del método citado.

53. $\int_0^8 x^2\,dx$, regla de los rectángulos

54. $\int_0^4 x^3\,dx$, regla de los rectángulos

55. $\int_0^4 (3x^2 + 4x^3)\,dx$, regla de los trapecios

56. $\int_2^6 (10x - 4x^3)\,dx$, regla de los trapecios

57. $\int_0^8 (8x^3 - 4x)\,dx$, regla de Simpson

58. $\int_0^4 (-8x^3 + 6x^2)\,dx$, regla de Simpson

SECCIÓN 19.4

59. La función del ingreso marginal del producto de una firma es

$$MR = f(x) = 17.5$$

donde x es el número de unidades vendidas. Con una integral definida obtenga el ingreso total conseguido con la venta de 500 unidades.

60. La función del ingreso marginal del producto de la firma es

$$MR = -0.04x + 10$$

donde x indica el número de unidades vendidas. ¿Cuál será el ingreso adicional en caso de que las ventas se incrementen de 100 a 200 unidades?

61. El fabricante de un equipo industrial especial estima que la tasa anual de gastos $r(t)$ de mantenimiento está representada por la función

$$r(t) = 1\,000 + 25t^2$$

donde t es la edad de la máquina en años y $r(t)$ está medida en dólares por año.

a) Determine la tasa a la que se están realizando los costos de mantenimiento cuando la máquina tenga dos años de uso.

b) ¿Cuáles son los costos de mantenimiento esperados para los tres primeros años?

62. Consumo de gasolina En 1991, el consumo de gasolina en una región de Estados Unidos fue de 5 000 millones de barriles. La demanda estaba creciendo a una tasa exponencial de 10% al año. La función que describe ese índice de consumo $c(t)$ en el tiempo t es

$$c(t) = 5e^{0.10t}$$

donde t se mide en años; $t = 0$ corresponde al 1 de enero de 1991, y $c(t)$ se mide en miles de millones de barriles por año. Si la demanda de petróleo sigue incrementándose a esa tasa, ¿qué cantidad de petróleo se espera que se consuma en el periodo de 20 años comprendido entre el 1 de enero de 1991 y el 1 de enero del año 2011?

***63. Velocidad y aceleración** Dada la función $s(t)$ que describe la posición de un objeto en movimiento en términos del tiempo t, la función de velocidad es $v(t) = s'(t)$ y la función de aceleración es $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

Un objeto en caída libre presenta una aceleración constante hacia abajo de 32 pies por segundo cuadrado. La función de aceleración de un objeto determinado es $a(t) = -32$. La velocidad inicial del objeto arrojado desde el nivel del suelo es de 80 pies por segundo.

a) Determine la función $v(t)$ que describe la velocidad del objeto en el tiempo t.

b) Determine la velocidad cuando $t = 2$.

c) Determine la función $s(t)$ que describe la altura del objeto en el tiempo t.

d) ¿Cuál es la altura con $t = 1$?

64. La demanda de un producto ha ido decreciendo a una tasa exponencial. La tasa anual de la demanda $d(t)$ es

$$d(t) = 250\,000e^{-0.15t}$$

donde $t = 0$ corresponde al 1 de enero de 1992. Si la demanda sigue disminuyendo a la misma tasa,

a) Determine la tasa anual de demanda cuando $t = 4$.

b) ¿Cuántas unidades totales se espera que se demanden en el intervalo de tiempo comprendido entre 1992 y 2001 ($t = 0$ a $t = 10$)?

65. **Compensación por desempleo** Un estado ha proyectado que el costo de la compensación por desempleo tendrá una tasa de $5e^{0.05t}$ millones de dólares por año, en t años a contar del momento actual.

a) Calcule la compensación por desempleo total que se pagará en los próximos cinco.

b) ¿Cuánto tiempo transcurrirá antes que los beneficios totales pagados sean de $200 millones?

66. Dada la función $f(t) = 2e^{0.5t}$, encuentre el volumen del sólido de revolución entre $t = 0$ y $t = 5$. Grafique el sólido de revolución.

67. Un fabricante de microcomputadoras estima que las ventas de sus sistemas de microcomputación tendrán una tasa de $\sqrt{1.2t + 10}$ mil unidades por año en t años a partir de hoy.

a) ¿A qué tasa se espera que estén las ventas al cabo de 10 años?

b) ¿Cuáles se esperan que sean las ventas en los 10 próximos años?

SECCIÓN 19.5

68. La función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria continua es

$$f(x) = \tfrac{3}{4}(4x - x^2 - 3) \qquad 1 \le x \le 3$$

Determine la probabilidad de que la variable aleatoria adopte un valor menor que 2. Mayor que 1.5.

69. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua x es

$$f(x) = \frac{-x^3 + 80}{256} \qquad 0 \le x \le 4$$

¿Qué probabilidad hay de que la variable aleatoria asuma un valor entre 2 y 4?

70. He aquí la función de densidad de probabilidad para una variable aleatoria continua

$$f(x) = \frac{1 + 2x}{36} \qquad 2 \le x \le 6$$

Calcule la probabilidad de que la variable aleatoria adopte un valor entre 3 y 6.

❑ EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. Evalúe: *a*) $\int_0^4 (x^2 - 3x + 1)\,dx$ y *b*) $\int_2^4 e^{x/2}dx.$

2. En las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = 8 + 2x$: *a*) grafique las dos funciones; *b*) cuando $x \ge 0$, obtenga el área acotada por las dos funciones y el eje de las y.

3. Un fabricante de automóviles estima que la tasa anual de gastos de mantenimiento $r(t)$ de uno de sus modelos está representada por la función

$$r(t) = 120 + 8t^2$$

donde t es la edad del automóvil expresada en años y $r(t)$ se mide en dólares por año.

a) ¿A qué tasa anual se hacen los gastos de mantenimiento cuando el automóvil tiene cuatro años de uso?

b) ¿Cuáles se espera que sean los gastos totales de mantenimiento durante los tres primeros años?

4. La función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua es

$$f(x) = \frac{2 + x}{30} \qquad 0 \le x \le 6$$

Calcule la probabilidad de que x asuma un valor mayor que 2.

5. Dada la integral definida

$$\int_0^8 3x^2\,dx$$

a) Evalúela mediante las reglas explícitas de integración.

b) Aproxime el valor mediante la regla de los rectángulos, de los trapecios y de Simpson (subdividiendo en cuatro intervalos).

c) Determine el método de aproximación más exacto.

MINICASO

EL DILEMA DE LA SEGURIDAD SOCIAL: UN PROBLEMA DE SOLVENCIA

A fines del decenio de 1970, el gobierno estadounidense y los ciudadanos de ese país (sobre todo los de mayor edad) empezaron a externar una honda preocupación por el programa de la seguridad social y su supervivencia. El problema más grave era el crecimiento de la población elegible para recibir los beneficios. Los gastos hechos por el fondo fiduciario de la seguridad social llegaron a un nivel que crecía a un ritmo mayor que el de los ingresos. El fondo guardaba un equilibrio aproximado de $24 000 millones a principios de 1980.

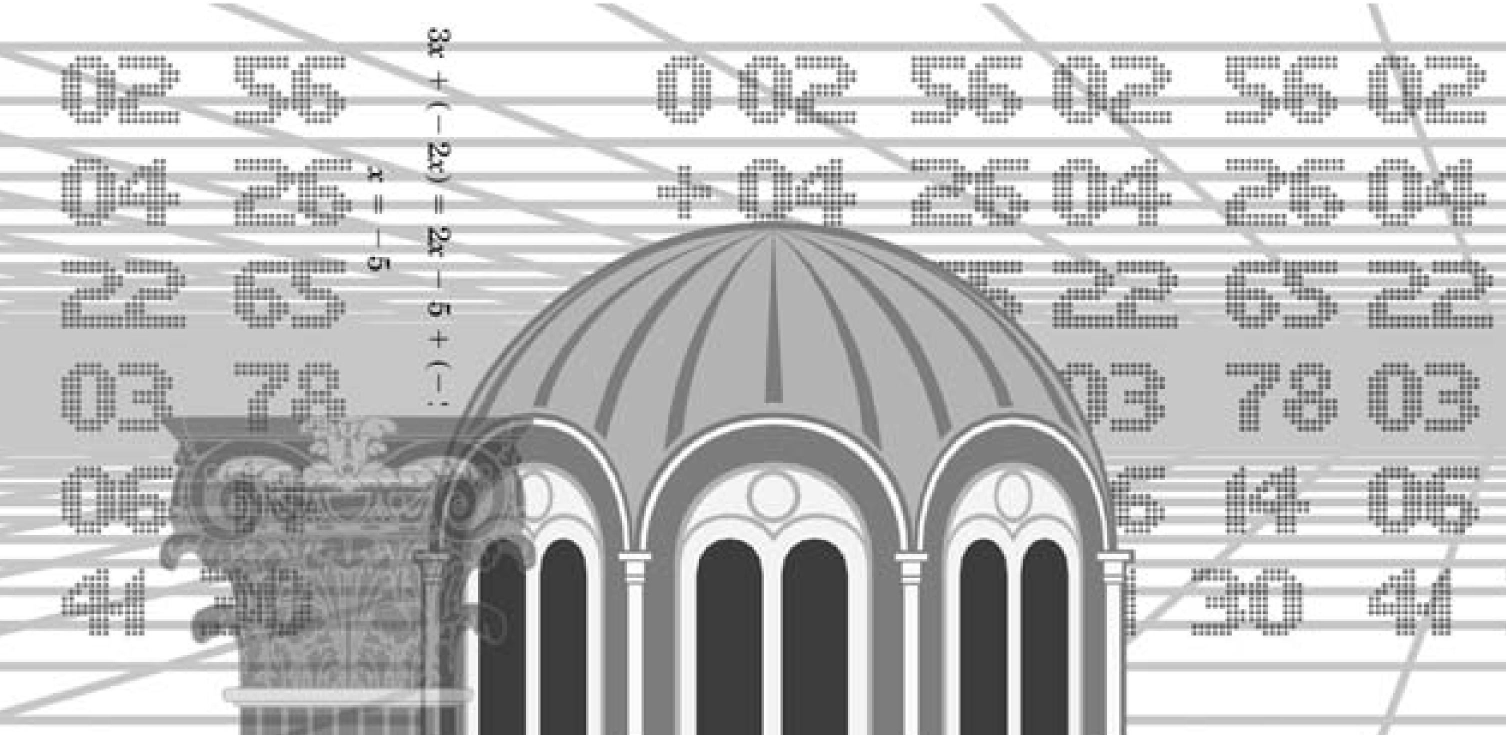
Los economistas confirmaron que la tasa de gastos realizados en los beneficios estaba creciendo de manera *lineal*. Un grupo de genios de las finanzas predijo que los gastos alcanzarían una tasa anual de $122.5 mil millones al comenzar 1980. A principios de 1985 ese grupo estimó que los gastos mostrarían una tasa anual de $230 000 millones. Confirmó asimismo que la tasa de generación de ingresos estaba aumentando en forma lineal. Según sus proyecciones, se generarían ingresos a una tasa anual de $117.5 mil millones a principios de 1980 y de $222.5 mil millones a comienzos de 1985.

Se pide:

1. Formular la función lineal que estime la tasa de gastos en términos del tiempo. Expresar la función lineal que calcule la tasa de la generación de ingresos en términos del tiempo. Graficar ambas funciones.
2. Suponiendo que sean válidos los pronósticos de los economistas, determine cuándo se agotará el fondo fiduciario (esto es, cuándo se terminará el saldo de $24 000 millones). Suponga que la cifra anterior haya sido normalizada para incluir el ingreso obtenido por concepto de intereses en el saldo del fondo fiduciario, así como los ingresos provenientes de las cuotas de la seguridad social.
3. Si son válidas las suposiciones hechas por los economistas, ¿cuál fue el déficit proyectado que se espera tener a principios de 1985?
4. Se han propuesto varias medidas correctivas. Un senador recomendó transferir anualmente $5 000 millones de dólares por año del fondo fiduciario del programa *Medicare* con el fin de posponer la quiebra. ¿Cuánto tardará el fondo en agotarse en caso de que se logre la transferencia?
5. Otra propuesta establece una reducción drástica de los beneficios a quienes se jubilen a los 62 años de edad. Si este plan se pone en práctica, según las proyecciones de los economistas, los gastos a principios de 1985 disminuirán a una tasa anual de $217.5 mil millones (todavía se supone que haya una tendencia lineal). Suponiendo que la tasa de generación de ingresos permanezca inalterada, ¿cuándo será igual a esta tasa la de generación de ingresos? ¿Se agotará el fondo si se implanta esta propuesta?
6. Una última propuesta aconseja incrementar la tasa tributaria de la seguridad social, lo cual vendría a mejorar los ingresos del fondo fiduciario. En caso de que se apruebe el monto propuesto, los economistas estimaron que la tasa de generación de ingresos sería una tasa anual de $230 000 millones a principios de 1985 (se supone todavía la existencia de una tendencia lineal). Suponiendo que la tasa de gastos permanezca inalterada como se estimó inicialmente, ¿cuándo será igual a la tasa de generación de ingresos? ¿Se agotará el fondo fiduciario al aplicar esta propuesta?

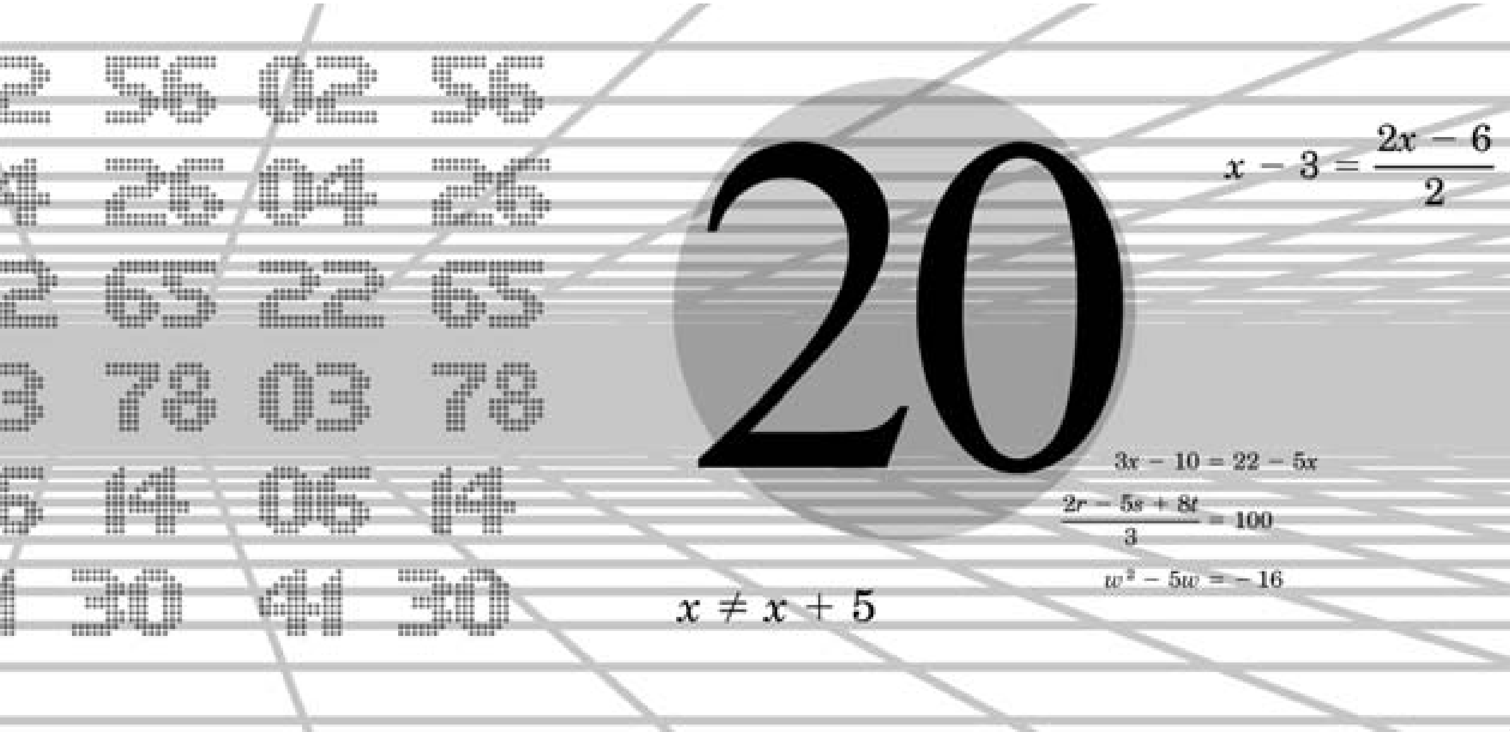
CAPÍTULO 20

Optimización: funciones de varias variables



OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Lograr que el lector comprenda el cálculo de las funciones que contienen dos variables independientes.
- Dar ejemplos de la representación gráfica de funciones en tres dimensiones.
- Ofrecer un panorama general de los procedimientos de optimización para funciones que contienen más de dos variables independientes.
- Introducir la naturaleza y métodos de optimización de las funciones sujetas a condiciones de restricción.



ESCENARIO DE MOTIVACIÓN:
Método de los mínimos cuadrados, o cómo hallar la curva de mejor ajuste para un conjunto de puntos de datos

A lo largo del texto se ha comentado la noción de estimación de relaciones matemáticas. En los capítulos 2, 5, 6 y 7 se vieron aplicaciones reales en las que se utilizaron puntos muestrales de datos para determinar las funciones de estimación lineales, cuadráticas y exponenciales. En cada caso, dichos puntos fueron seleccionados para uso en la determinación de las funciones de estimación. Dado un conjunto de puntos de datos y suponiendo una forma funcional (por ejemplo, lineal, cuadrática, etc.), el *método de los mínimos cuadrados* es uno de los más populares para determinar el "mejor" ajuste para los datos. En este capítulo se verá que el modelo de los mínimos cuadrados se basa en métodos de optimización (ejemplo 21).

En los capítulos 15 a 17 se ofreció una metodología para analizar las funciones que contienen una variable independiente. En las aplicaciones reales, un criterio u objetivo de decisión se basa a menudo en más de una variable. Como se mencionó en el capítulo 4, cuando las funciones incluyen más de una variable independiente se llaman ***funciones multivariadas*** o ***funciones de varias variables***. Se cuenta con métodos del cálculo diferencial para examinar su comportamiento y determinar los valores óptimos (máximos y mínimos). Al estudiar algunos de esos procedimientos en el presente capítulo, se verá que se parecen a los que se aplicaron a las funciones de una variable independiente.

Este capítulo se concentrará inicialmente en las ***funciones bivariadas*** (las que contienen dos variables independientes). Se describirán sus gráficas y luego se dará una explicación de las derivadas de esas funciones y su interpretación. A continuación se expondrán los métodos para obtener sus valores óptimos. Luego vendrá una sección en que se comentan las aplicaciones de las funciones bivariadas. La explicación abarcará la optimización de las funciones de n variables. El tema de la *optimización restringida* se aborda en la última sección del capítulo.

20.1 Representación gráfica de funciones de dos variables

Representación gráfica

Una función que incluye una variable dependiente z y dos variables independientes x y y puede representarse con la notación

$$\boxed{z = f(x, y)} \tag{20.1}$$

Ya antes en el libro se dijo que el número de variables presentes en una función determina el número de dimensiones necesarias para graficarla. Se requieren dos dimensiones para trazar las funciones de una sola variable, y en cambio hacen falta tres dimensiones para graficar las funciones bivariadas.

Según se señaló en el capítulo 4, las funciones lineales que contienen una variable independiente tienen una gráfica de *líneas rectas* en dos dimensiones. Las funciones lineales que incluyen dos variables independientes se grafican como *planos* en tres dimensiones.

En general, las funciones no lineales que contienen una variable independiente se grafican como *curvas* en dos dimensiones. Y la gráfica de las funciones no lineales que contienen dos variables independientes son *superficies curvas* en tres dimensiones. Entre los ejemplos de superficies no lineales se encuentran la superficie ondulante de un campo de golf, la pendiente del terreno para esquiar y la vela de una embarcación de navegación. Un punto importante es que estas funciones se representan con *superficies*, no con sólidos.

Trazado de funciones de dos variables

Aunque la graficación en tres dimensiones es difícil, se dispone de técnicas que pueden aplicarse en algunos casos para trazar la forma general de la gráfica de una función bivariada. El material que se explica a continuación se entenderá mejor si se conocen las gráficas de estas funciones.

Considérese la función bivariada

$$z = f(x, y) = 25 - x^2 - y^2 \qquad \textbf{(20.2)}$$

donde $0 \leq x \leq 5$ y $0 \leq y \leq 5$. A fin de trazar esta función, se fijará el valor de una de las variables independientes y se graficará la función resultante. Por ejemplo, si se hace $y = 0$, la función f se convierte en

$$z = 25 - x^2 - 0^2$$

o bien

$$z = 25 - x^2 \qquad \textbf{(20.3)}$$

Al fijar el valor de una de las variables, la función se reformula en términos de la otra variable independiente. Es decir, una vez especificado el valor de la variable independiente, el de la variable dependiente varía con el valor de la variable independiente restante. Dada la ecuación (20.3), la tabla 20.1 indica algunos valores de x y los valores resultantes de z.

Tabla 20.1

x	0	1	2	3	4	5
$z = 25 - x^2$	25	24	21	16	9	0

La figura 20.1 es una gráfica parcial de la función con el valor de y fijado en 0. Si se hace $y = 0$, la gráfica de la ecuación (20.3) debe estar en el plano xz. Un estudio detenido de la ecuación (20.3) revela que la relación entre z y x es cuadrática. Y la gráfica de la figura 20.1 forma parte de una parábola cóncava hacia abajo.

Si se hace $x = 0$ en la función original, f se transforma en

$$z = 25 - 0^2 - y^2$$

o bien

$$z = 25 - y^2 \qquad \textbf{(20.4)}$$

La tabla 20.2 ofrece algunos valores de y, así como los valores resultantes de z.

La figura 20.2 es una gráfica parcial de $f(x, y)$. Con $x = 0$, la gráfica de la ecuación (20.4) se encuentra en el plano yz. La ecuación (20.4) indica una relación cuadrática entre y y z.

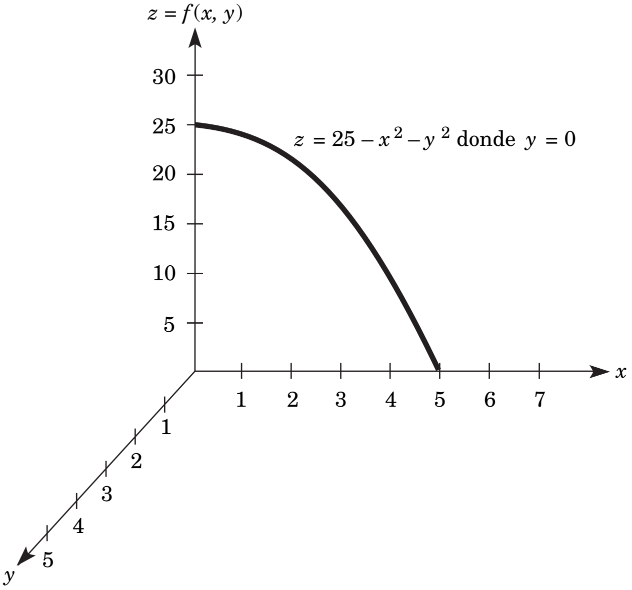


Figura 20.1 Gráfica parcial de $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$.

Tabla 20.2

y	0	1	2	3	4	5
$z = 25 - y^2$	25	24	21	16	9	0

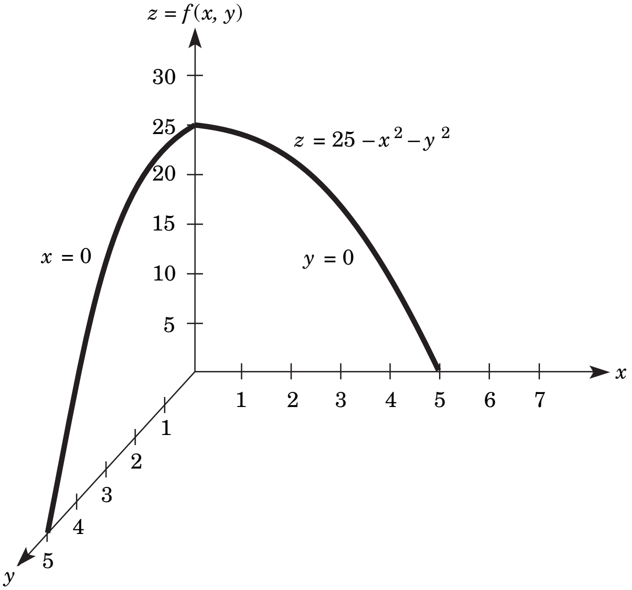


Figura 20.2 Gráfica parcial de $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$.

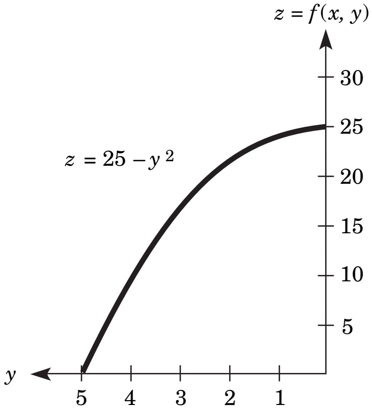


Figura 20.3 Traza con $x = 0$ vista a lo largo del eje x.

Y si se examina atentamente la figura 20.2 en una dirección paralela al eje x, se verá que la gráfica de esta ecuación es una parte de la parábola cóncava hacia abajo. La figura 20.3 contiene lo que se vería si se observara a lo largo del eje x.

Definición: Traza

Si $z = f(x, y)$, una traza es la gráfica de f cuando una variable se mantiene constante.

Observe la figura 20.2. Las dos partes de f que allí se muestran son *trazas*. Una es una traza cuando $y = 0$, en tanto que la otra es una traza donde $x = 0$. Cada traza representa una *costilla* en la superficie que simboliza la función.

La figura 20.4 presenta una gráfica de la función que incluye cuatro trazas adicionales. Haciendo $y = 1$, la función se convierte en

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 25 - x^2 - 1^2 \\ &= 24 - x^2 \end{aligned}$$

La traza que representa a esta función es paralela al plano xz y se encuentra una unidad fuera a lo largo del eje positivo y. De manera análoga, si se hace $y = 3$, se tiene

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 25 - x^2 - 3^2 \\ &= 16 - x^2 \end{aligned}$$

La traza que representa a esta función tiene una gráfica paralela al plano xz y tres unidades fuera a lo largo del eje y.

También se han dibujado las trazas haciendo que $x = 1$ y $x = 3$. Estas seis trazas en combinación comienzan a parecerse a la estructura esquelética de la superficie. Y si se tuviera que graficar más trazas asociadas a otros supuestos valores de x y y se obtendría una representación más exacta de la superficie que representa a f, similar a la parte sombreada de la figura 20.4.

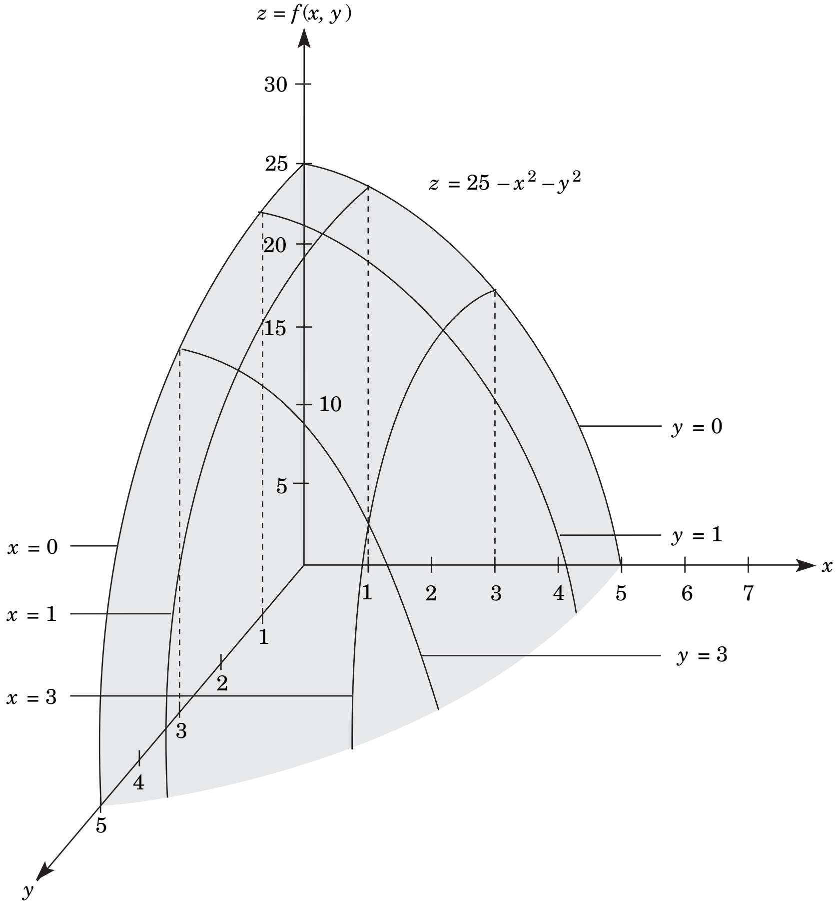


Figura 20.2 Gráfica de $f(x, y) = 25 - x^2 - y^2$.

Por lo tanto, un procedimiento que puede en ocasiones ofrecer una gráfica aproximada de una función de la forma $z = f(x, y)$ consiste en suponer valores selectos de x y y, para luego graficar las trazas que representan las funciones resultantes.

> **NOTA** Conviene tener presente en este momento una observación importante en relación con la gráfica de una función $f(x, y)$. *Siempre que se mantiene constante x, la traza resultante se grafica en un plano paralelo al plano yz. Siempre que se mantiene constante y, la gráfica de la traza resultante se hace en un plano paralelo al plano xz.*

Sección 20.1 Ejercicios de seguimiento

Trace la gráfica de las siguientes funciones.

1. $f(x, y) = 16 - x^2 - y^2$, donde $0 \leq x \leq 4$ y $0 \leq y \leq 4$
2. $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$, donde $0 \leq x \leq 3$ y $0 \leq y \leq 3$
3. $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, donde $0 \leq x \leq 2$ y $0 \leq y \leq 2$
4. $f(x, y) = 25 - x^2/4 - y^2/4$, donde $0 \leq x \leq 10$ y $0 \leq y \leq 10$
5. $f(x, y) = x^2 + y^2$, donde $0 \leq x \leq 5$ y $0 \leq y \leq 5$

20.2 Derivadas parciales

Aunque más complejo, el cálculo de las funciones bivariadas se asemeja mucho al de las funciones de una sola variable. En la presente sección se hablará de las derivadas de estas funciones y de su interpretación.

Derivadas de funciones de dos variables

En las funciones de una sola variable, la derivada representa la tasa instantánea de cambio en la variable dependiente respecto del que se opera en la variable independiente. En las funciones bivariadas se tienen dos ***derivadas parciales***. Estas derivadas representan la tasa instantánea de cambio en la variable dependiente respecto de los cambios de las dos variables independientes, tomadas por separado. En una función $z = f(x, y)$, puede calcularse una derivada parcial respecto de cada variable independiente. La derivada parcial tomada respecto de x se denota mediante

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{o} \quad f_x$$

La derivada parcial tomada respecto de y se indica mediante

$$\frac{\partial z}{\partial y} \quad \text{o} \quad f_y$$

Aunque ambas formas pueden utilizarse para denotar la derivada parcial, en este capítulo se utilizará la notación con subíndices f_x y f_y.

Definición: Derivada parcial

En la función $z = f(x, y)$, la derivada parcial de z respecto de x en (x, y) es

$$f_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

a condición de que exista el límite. La derivada parcial de z respecto de y en (x, y) es

$$f_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

suponiendo que exista el límite.

Ejemplo 1 Considere la función

$$f(x, y) = 3x^2 + 5y^3$$

Para calcular la derivada parcial respecto de *x*, se usará el *método del límite* (explicado en la sección 15.3). Primero se forma el cociente de la diferencia como

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f(x, y)}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\
&= \frac{3(x + \Delta x)^2 + 5y^3 - (3x^2 + 5y^3)}{\Delta x} \\
&= \frac{3(x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2) + 5y^3 - 3x^2 - 5y^3}{\Delta x}
\end{aligned}$$

que, al simplificarse, da

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f(x, y)}{\Delta x} &= \frac{6x\,\Delta x + 3\,\Delta x^2}{\Delta x} \\
&= \frac{\cancel{\Delta x}\,(6x + 3\,\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} \\
&= 6x + 3\,\Delta x
\end{aligned}$$

La derivada parcial es

$$\begin{aligned}
f_x &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x, y)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} (6x + 3\Delta x) \\
&= 6x
\end{aligned}$$

Nótese que al calcular f_x se están examinando los efectos que producen los cambios de *x* (es decir, Δx); la otra variable *y* independiente se mantiene constante.

La derivada parcial tomada respecto de *y* puede obtenerse de modo similar.

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta f(x, y)}{\Delta y} &= \frac{\Delta f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \\
&= \frac{3x^2 + 5(y + \Delta y)^3 - (3x^2 + 5y^3)}{\Delta y} \\
&= \frac{3x^2 + 5(y^3 + 3y^2\,\Delta y + 3y\,\Delta y^2 + \Delta y^3) - 3x^2 - 5y^3}{\Delta y} \\
&= \frac{\cancel{3x}^2 + \cancel{5y}^3 + 15y^2\,\Delta y + 15y\,\Delta y^2 + 5\,\Delta y^3 - \cancel{3x}^2 - \cancel{5y}^3}{\Delta y} \\
&= \frac{\cancel{\Delta y}\,(15y^2 + 15y\,\Delta y + 5\,\Delta y^2)}{\cancel{\Delta y}} \\
&= 15y^2 + 15y\,\Delta y + 5\,\Delta y^2
\end{aligned}$$

La derivada parcial es

$$\begin{aligned} f_y &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta f(x, y)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} (15y^2 + 15y\,\Delta y + 5\,\Delta y^2) \\ &= 15y^2 \end{aligned}$$

Al determinar f_y se están examinando los efectos de los cambios de y (o sea, Δy); la otra variable x independiente se mantiene constante.

Ejemplo 2 Considere la función

$$f(x, y) = 5x^2y$$

Al aplicar el método del límite para calcular las derivadas parciales,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f(x, y)}{\Delta x} &= \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \frac{5(x + \Delta x)^2y - 5x^2y}{\Delta x} \\ &= \frac{5(x^2 + 2x\,\Delta x + \Delta x^2)y - 5x^2y}{\Delta x} \\ &= \frac{\cancel{5x^2y} + 10xy\,\Delta x + 5y\,\Delta x^2 - \cancel{5x^2y}}{\Delta x} \\ &= \frac{\cancel{\Delta x}\,(10xy + 5y\,\Delta x)}{\cancel{\Delta x}} \\ &= 10xy + 5y\,\Delta x \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f_x &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x, y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (10xy + 5y\,\Delta x) \\ &= 10xy \end{aligned}$$

Para determinar f_y

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f(x, y)}{\Delta y} &= \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \\ &= \frac{5x^2(y + \Delta y) - 5x^2y}{\Delta y} \\ &= \frac{\cancel{5x^2y} + 5x^2\Delta y - \cancel{5x^2y}}{\Delta y} \\ &= 5x^2 \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} f_y &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta f(x, y)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} 5x^2 \\ &= 5x^2 \end{aligned}$$

❑

Por fortuna, las derivadas parciales se obtienen más fácilmente empleando las mismas reglas de diferenciación utilizadas en los capítulos 15 a 17. La única excepción es que, *cuando se encuentra una derivada parcial respecto de una variable independiente, se supone que se mantiene constante a la otra*. Por ejemplo, al calcular la derivada parcial respecto de x, se supone que y es constante. Y un punto muy importante es que *la variable que se supone constante debe tratarse como una constante al aplicar las reglas de diferenciación.*

Ejemplo 3 Encuentre las derivadas parciales respecto de f_x y f_y para la función

$$f(x, y) = 5x^2 + 6y^3$$

SOLUCIÓN

Primero, para determinar la derivada parcial respecto de x se supondrá que y es constante. Al diferenciar término por término, se observa que la derivada de $5x^2$ respecto de x es $10x$. Al diferenciar el segundo término, no se olvide que se supone que y es constante. Así pues, este término presenta la forma general

$$6(\text{constante})^3$$

que es simplemente una constante. Una constante no cambia de valor al hacerlo otras variables (o, como se señaló en el capítulo 15, la derivada de una constante es 0), por lo cual la derivada del segundo término es 0. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} f_x &= 10x + 0 \\ &= 10x \end{aligned}$$

Al encontrar la derivada parcial respecto de y, se supone que se mantiene constante la variable x. Al diferenciar término por término, $5x^2$ se considera como constante, ya que x se supone constante y la derivada es 0. La derivada de $6y^3$ respecto de y es $18y^2$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} f_y &= 0 + 18y^2 \\ &= 18y^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 4 Encuentre f_x y f_y para la función

$$f(x, y) = 4xy$$

SOLUCIÓN

Para calcular f_x se supone que y es constante. El término $4xy$ tiene la forma de un producto. Para diferenciar tales términos de producto, pueden aplicarse dos métodos. El primero consiste en usar simplemente la regla del producto. Al considerar $4xy$ como el producto $4x$ y y, con la regla de producto se obtiene

$$f_x = (4)(y) + (0)(4x)$$

o bien

$$f_x = 4y$$

Otro método consiste en recordar cuál variable se supone que era constante. Cuando y se mantiene constante, puede rearreglarse $4xy$ para que tenga la forma

$$\boldsymbol{f(x, y) = \textbf{constante} \cdot x}$$

o bien
$$f(x, y) = (4y)x$$

Al agrupar 4 y y, este término presenta la forma general de una constante $4y$ por x. Y la derivada de una constante multiplicada por x es la constante, o

$$f_x = 4y$$

Para calcular f_y, se supone que x es constante. Al aplicar la regla del producto se obtiene

$$f_y = (0)(y) + (1)(4x)$$

o bien
$$f_y = 4x$$

O usando el otro procedimiento, el factor $4x$ es constante (al mantener constante x) y puede considerarse que f tiene la forma

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f(x, y)} &\boldsymbol{= \textbf{constante} \cdot y}\\ &= (4x)y\end{aligned}$$

La derivada respecto de y es la constante, o bien

$$f_y = 4x$$

Ejemplo 5 Encuentre f_x y f_y si

$$f(x, y) = -10xy^3$$

SOLUCIÓN

Para calcular f_x deberá suponerse que y es constante. Esta función puede rearreglarse (mental o explícitamente) para que tenga la forma

$$f(x, y) = (\text{constante})x = (-10y^3)x$$

donde $-10y^3$ es constante. La derivada es

$$f_x = -10y^3$$

Para f_y puede considerarse que la función tiene la forma

$$(\text{constante})y^3 \qquad \text{o} \qquad \boldsymbol{(-10x)}y^3$$

La derivada respecto de y es

$$\textbf{(constante)}\boldsymbol{(3y^2)}$$

o bien
$$f_y = -30xy^2$$

❑

Ejercicio de práctica

Verifique las expresiones para f_x y f_y calculándolas utilizando ahora la regla del producto.

Ejemplo 6 Calcule f_x y f_y si

$$f(x, y) = e^{x^2+y^2}$$

SOLUCIÓN

Al aplicar las reglas de diferenciación de las funciones exponenciales,

$$f_x = (2x + 0)e^{x^2+y^2} = 2xe^{x^2+y^2}$$

$$f_y = (0 + 2y)e^{x^2+y^2} = 2ye^{x^2+y^2}$$

Ejemplo 7 Encuentre f_x y f_y si

$$f(x, y) = (3x - 2y^2)^3$$

SOLUCIÓN

Al recordar la potencia de una regla de función se obtiene

$$\begin{aligned} f_x &= 3(3x - 2y^2)^2(3) \\ &= 9(3x - 2y^2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y &= 3(3x - 2y^2)^2(-4y) \\ &= -12y(3x - 2y^2)^2 \end{aligned}$$

❑

Ejercicio de práctica

Dada $f(x, y) = (4x^2 - 5y^3)^4$, encuentre f_x y f_y. *Respuesta:* $f_x = 32x(4x^2 - 5y^3)^3$, $fy = -60y^2(4x^2 - 5y^3)^3$.

Interpretación de las derivadas parciales

Una interpretación de las derivadas parciales se refiere a la pendiente de la tangente. Como en el caso de las funciones de una sola variable, las derivadas parciales f_x y f_y tienen una interpretación de la pendiente de una tangente.

Interpretación como pendiente de f_x y f_y

I *f_x es una expresión general para la pendiente de la tangente de la familia de trazas paralelas al plano xz.*

II *f_y es una expresión general para la pendiente de la tangente de la familia de trazas paralelas al plano yz.*

La derivada parcial f_x estima el cambio en z cuando se da un cambio en x, suponiendo que y se mantenga constante. En la sección 20.1 se vio que, cuando y es mantenida constante, las trazas correspondientes se grafican paralelas al plano xz. La pendiente de esas trazas la representa f_x.

De manera semejante, f_y supone que x se conserva constante. Cuando se mantuvo constante x en la sección 20.1, el resultado fue una familia de trazas paralelas al plano yz. Y f_y representa la pendiente de esas trazas. La figura 20.5 muestra la representación de la pendiente.

La otra interpretación de las derivadas parciales es la de la tasa instantánea de cambio. Como en el caso de las funciones de una sola variable, las derivadas parciales pueden emplearse para aproximar los cambios de valor de la variable dependiente, si se produce un

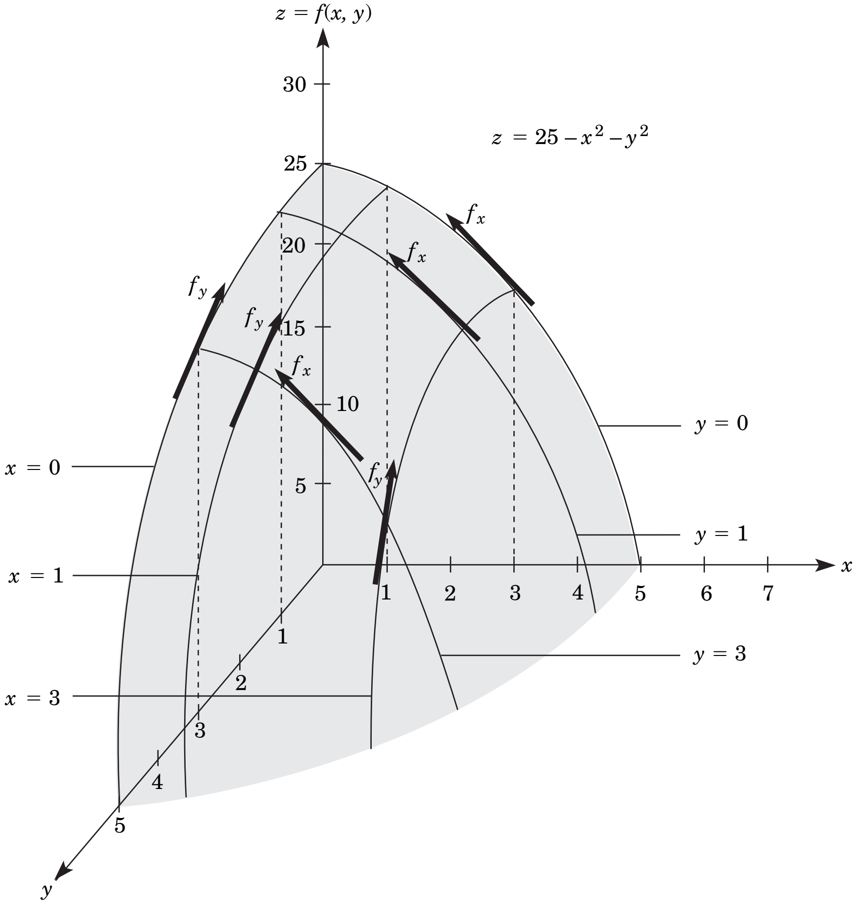


Figura 20.5 Representación de las derivadas parciales a partir de la pendiente de la tangente.

cambio en una de las variables independientes. Por ejemplo, f_x puede servir para aproximar el cambio de $f(x, y)$, cuando se da un cambio en x y se supone que y es constante. La derivada parcial f_y puede utilizarse para aproximar el cambio de $f(x, y)$, dado un cambio en y, suponiendo que x es constante. El siguiente ejemplo ilustra esta interpretación.

Ejemplo 8 **(Interrelaciones de la demanda de varios productos)** Hasta ahora se ha supuesto que la demanda de un producto depende, exclusivamente, de su precio. Así, las *funciones de demanda* analizadas presentan la forma

$$q = f(p)$$

Con frecuencia, la demanda de un producto o servicio recibe el influjo no sólo de su precio, sino también de los precios de otros productos o servicios. La ecuación (20.5) es una función de demanda que expresa la cantidad demandada del producto 1 (q_1) en términos de su precio (p_1) y también de los precios de otros dos productos (p_2 y p_3), todos ellos expresados en dólares.

$$\boxed{q_1 = f(p_1, p_2, p_3) = 10\,000 - 2.5p_1 + 3p_2 + 1.5p_3} \qquad \textbf{(20.5)}$$

Las derivadas parciales de esta función de demanda pueden ofrecer una medida de la respuesta instantánea de la demanda ante los cambios en los precios de los tres productos. Por ejemplo,

$$f_{p_1} = -2.5$$

sugiere que, si p_2 y p_3 se mantienen constantes, la demanda del producto 1 *disminuirá* a una tasa instantánea de 2.5 unidades por cada unidad (dólar) que aumente p_1. De modo análogo, las derivadas parciales

$$f_{p_2} = 3 \quad \text{y} \quad f_{p_3} = 1.5$$

indican las tasas instantáneas de cambio en la demanda asociada a los que se producen en los precios de los otros dos productos. $f_{p_2} = 3$ sugiere que la demanda del producto 1 *aumentará* a una tasa instantánea de tres unidades por cada unidad (dólar) que aumente p_2 (se mantienen constantes p_1 y p_3 y $f_{p_3} = 1.5$ indica que la demanda del producto 1 *crecerá* a una tasa instantánea de 1.5 unidades por cada unidad (dólar) que p_3 aumente (se mantienen constantes p_1 y p_2).

Haga en seguida un par de observaciones. En primer lugar, esta función de demanda es lineal y las correspondientes derivadas parciales son constantes. Es decir, las tasas instantáneas de cambio son realmente las mismas en cualquier parte del dominio de la función de demanda. En segundo lugar, el hecho de que la demanda del producto 1 *aumente* al incrementarse los precios de los productos 2 y 3 revela una interdependencia entre los tres productos. Éste es el tipo de relación que cabría esperar que exista entre *productos en competencia*. Entre los ejemplos de este tipo de bienes conviene citar las diferentes marcas de un mismo producto (por ejemplo, las llantas radiales) o los productos que pueden servir para satisfacer una necesidad determinada (como margarina *vs*. mantequilla, carne de res *vs*. carne de pollo). En el caso de esta categoría de bienes de consumo cabría esperar que, conforme se incremente el precio de un producto, disminuya su demanda y la de los productos en competencia aumente. De manera análoga, a medida que descienda el precio de un producto, cabría esperar que su demanda aumente y la de los productos de la competencia disminuya. Éste es el tipo de comportamiento ejemplificado por la función de demanda en la ecuación (20.5) y sus derivadas parciales. ❑

Ejercicio de práctica

En la función de demanda

$$q_1 = f(p_1, p_2, p_3) = 120\,000 - 0.5p_1^2 - 0.4p_2^2 - 0.2p_3^2$$

a) Calcule todas las derivadas parciales. *b*) Si los precios actuales de los tres productos son $p_1 = 10$, $p_2 = 20$ y $p_3 = 30$, evalúe las derivadas parciales e interprete su significado. *c*) ¿Qué sugerirán la función de demanda y sus derivadas parciales respecto de la interdependencia entre los tres productos? *Respuesta: a*) $f_{p_1} = -p_1, f_{p_2} = -0.8p_2, f_{p_3} = -0.4p_3$; *b*) $f_{p_1}(10, 20, 30) = -10, f_{p_2}(10, 20, 30) = -16, f_{p_3}(10, 20, 30) = -12$; *c*) son productos complementarios.

Ejemplo 9

(Gastos de publicidad) Un fabricante nacional estima que el número de unidades que vende cada año es una función de los gastos hechos en la publicidad por radio y televisión. La función que especifica esta relación es

$$z = 50\,000x + 40\,000y - 10x^2 - 20y^2 - 10xy$$

donde *z es el número de unidades vendidas al año, x denota la cantidad destinada a la publicidad por televisión y la y indica la cantidad gastada en la publicidad por radio (ambas en miles).*

Suponga que la empresa está gastando actualmente $40 000 en la publicidad por televisión ($x = 40$) y $20 000 en la publicidad por radio ($y = 20$). Con estos gastos,

$$\begin{aligned} f(40, 20) &= 50\,000(40) + 40\,000(20) - 10(40)^2 - 20(20)^2 - 10(40)(20) \\ &= 2\,000\,000 + 800\,000 - 16\,000 - 8\,000 - 8\,000 = 2\,768\,000 \end{aligned}$$

o se proyecta que se vendan 2 768 000 unidades.

Supóngase que se quiere determinar el efecto en las ventas anuales si se destinan $1 000 o más dólares a la publicidad por televisión. La derivada parcial f_x debería dar una aproximación del efecto; esta derivada parcial es

$$f_x = 50\,000 - 20x - 10y$$

Como se quiere conocer la tasa instantánea de cambio y como los gastos son actualmente $40 000 y $20 000, se evalúa f_x cuando $x = 40$ y cuando $y = 20$:

$$\begin{aligned} f_x(40, 20) &= 50\,000 - 20(40) - 10(20) \\ &= 50\,000 - 800 - 200 = 49\,000 \end{aligned}$$

Al evaluar la derivada parcial, puede afirmarse que un incremento de los gastos de $1 000 destinados a la televisión debería producir ventas adicionales de *aproximadamente* 49 000 unidades.
Para determinar la exactitud de esta aproximación, se evaluará $f(41, 20)$:

$$\begin{aligned} f(41, 20) &= 50\,000(41) + 40\,000(20) - 10(41)^2 - 20(20)^2 - 10(41)(20) \\ &= 2\,050\,000 + 800\,000 - 16\,810 - 8\,000 - 8\,200 = 2\,816\,990 \end{aligned}$$

El *aumento real* de las ventas se proyecta como

$$\begin{aligned} f(41, 20) - f(40, 20) &= 2\,816\,990 - 2\,768\,000 \\ &= 48\,990 \text{ unidades} \end{aligned}$$

La diferencia entre los incrementos real y estimado usando f_x es de 48 990 − 49 000 = −10 unidades. El signo de menos indica que la derivada parcial *sobreestimó* el cambio verdadero.

Supóngase ahora que se quiere determinar el efecto, si se destinan $1 000 más a la publicidad por radio y no a la publicidad por televisión. La derivada parcial tomada con respecto de y aproximará este cambio:

$$f_y = 40\,000 - 40y - 10x$$

Al evaluar f_y cuando $x = 40$ y cuando $y = 20$, se obtiene

$$\begin{aligned} f_y(40, 20) &= 40\,000 - 40(20) - 10(40) \\ &= 40\,000 - 800 - 400 = 38\,800 \end{aligned}$$

Así pues, un aumento de $1 000 en los gastos de publicidad por radio originará un *incremento aproximado* de 38 800 unidades. Con un aumento de $1 000 en los gastos de este tipo de publicidad, las ventas reales se estiman en

$$\begin{aligned} f(40, 21) &= 50\,000(40) + 40\,000(21) - 10(40)^2 - 20(21)^2 - 10(40)(21) \\ &= 2\,000\,000 + 840\,000 - 16\,000 - 8\,820 - 8\,400 = 2\,806\,780 \text{ unidades} \end{aligned}$$

El *incremento real* en las ventas es

$$\begin{aligned} f(40, 21) - f(40, 20) &= 2\,806\,780 - 2\,768\,000 \\ &= 38\,780 \text{ unidades} \end{aligned}$$

También en este caso, el cambio aproximado estimado empleando f_y presenta un error de apenas 20 unidades.

Desde el punto de vista comparativo, si se asignan $1 000 a la publicidad por televisión o radio, es evidente que el rendimiento mayor provendrá de la televisión. ❑

Derivadas de segundo orden

Igual que en el caso de las funciones de una sola variable, se pueden determinar derivadas de segundo orden para las funciones bivariadas. Éstas serán de gran importancia en la siguiente sección cuando se trate de optimizar el valor de una función.

Para las funciones de la forma $f(x, y)$ existen *cuatro* diferentes derivadas de segundo orden. Éstas se dividen en dos tipos: ***derivadas parciales puras de segundo orden*** y ***derivadas parciales mixtas***. Las dos derivadas parciales se denotan con f_{xx} y f_{yy}. La derivada parcial pura de segundo orden respecto de x, f_{xx} se calcula obteniendo primero f_x y luego diferenciando f_x respecto de x. De manera parecida, f_{yy} se obtiene determinando la expresión para f_y y luego diferenciando f_y respecto de y.

Las dos derivadas parciales mixtas se denotan mediante f_{xy} y f_{yx}. La derivada parcial mixta f_{xy} se obtiene determinando fx y luego diferenciando fx respecto de y. De modo análogo, f_{yx} se encuentra determinando f_y para luego diferenciar f_y respecto de x. La figura 20.6 sintetiza los procedimientos con que se obtienen las derivadas de segundo orden.

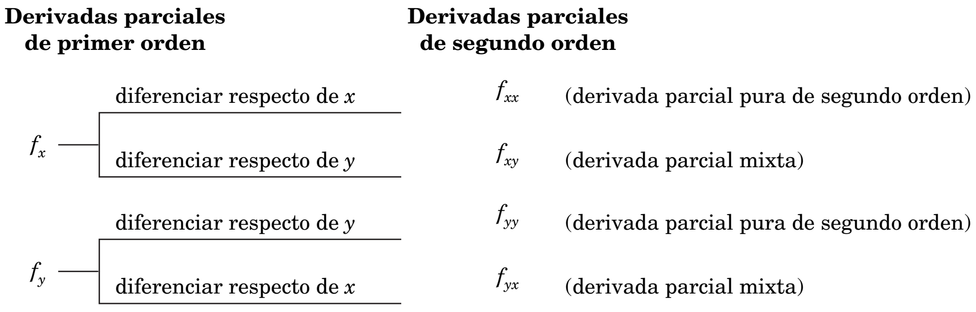


Figura 20.6 Determinación de las derivadas de segundo orden.

Ejemplo 10 Determine las derivadas de primero y segundo órdenes para la función

$$f(x, y) = 8x^3 - 4x^2y + 10y^3$$

SOLUCIÓN

Se empieza con las primeras derivadas:

$$f_x = 24x^2 - 8xy$$

$$f_y = -4x^2 + 30y^2$$

La derivada parcial pura f_{xx} se calcula al diferenciar f_x respecto de x, o sea

$$f_x = 24x^2 - 8xy \quad \rightarrow \quad f_{xx} = 48x - 8y$$

f_{yy} se obtiene al diferenciar f_y respecto de y, es decir,

$$f_y = -4x^2 + 30y^2 \quad \rightarrow \quad f_{yy} = 60y$$

La derivada parcial mixta f_{xy} se calcula al diferenciar f_x respecto de y, o sea

$$f_x = 24x^2 - 8xy \quad \rightarrow \quad f_{xy} = -8x$$

f_{yx} se obtiene diferenciando f_y respecto de x, esto es,

$$f_y = -4x^2 + 30y^2 \quad \rightarrow \quad f_{yx} = -8x$$

❑

NOTA Una proposición conocida con el nombre de **teorema de Young** establece que las derivadas parciales mixtas f_{xy} y f_{yx} son iguales entre sí a condición de que ambas sean continuas. Obsérvese que esta condición se cumple en el ejemplo 10. Esta propiedad ofrece una posible comprobación de los errores que pudieran haberse cometido al calcular f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx}.

No nos detendremos en la interpretación de estas derivadas de segundo orden. Sin embargo, conviene hacer algunas precisiones. Las derivadas parciales puras f_{xx} y f_{yy} transmiten información sobre la concavidad de una función (lo mismo que la segunda derivada en relación con las funciones de una sola variable). En concreto, ***f_{xx} suministra información sobre la concavidad de las trazas que son paralelas al plano xz. De manera semejante f_{yy} proporciona información acerca de la concavidad de las trazas paralelas al plano yz***.

La interpretación de las derivadas parciales mixtas f_{xy} y f_{yx} es menos intuitiva que en el caso de las derivadas parciales puras. No obstante, serán muy importantes en la siguiente sección.

Sección 20.2 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 40, determine f_x y f_y.

1. $f(x, y) = 3x^2 - 10y^3$
2. $f(x, y) = -2x + 3y$
3. $f(x, y) = 10x^2 + 2xy - 6y^2$
4. $f(x, y) = x^2 - 2y^3$
5. $f(x, y) = x^3y^5$
6. $f(x, y) = 25xy^3$
7. $f(x, y) = 6x^2 - xy + 30y^2$
8. $f(x, y) = 20x^2 + 7x^2y^3 + 5y^3$
9. $f(x, y) = -4/xy^2$
10. $f(x, y) = -2x/3y^2$
11. $f(x, y) = (x^2 - 5y)(2x + 4y^5)$
12. $f(x, y) = (1/x)(y^2 + 3y^3)$
13. $f(x, y) = (x - y)^4$
14. $f(x, y) = (x^3 + 3y^2)^4$
15. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
16. $f(x, y) = -20/\sqrt[3]{x + 2y}$
17. $f(x, y) = \ln(x + y)$
18. $f(x, y) = e^{3x-2y}$
19. $f(x, y) = e^{5x^3-2y^2}$
20. $f(x, y) = e^{2x} \ln y$
21. $f(x, y) = 3x^4 - 8x^2y^3$
22. $f(x, y) = 10x^2 - 25xy + 30y^3$
23. $f(x, y) = -3x^3 + 8xy^2 + y^3$
24. $f(x, y) = 15y^3 - 5yx^3 + 25$
25. $f(x, y) = 2x^2/3y^3$
26. $f(x, y) = -x/y^3$
27. $f(x, y) = (x - y)/x^5$
28. $f(x, y) = (3x - y^2)/(x^2 + 1)$
29. $f(x, y) = -5x^2/(x + y)$
30. $f(x, y) = 3y^2/(x^2 - 5y)$
31. $f(x, y) = (x - y)^3$
32. $f(x, y) = (8x - 3y)^4$
33. $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + 2y^2}$
34. $f(x, y) = \sqrt[4]{4x^3 + 2y^2}$
35. $f(x, y) = \ln(x^2 - y^2)$
36. $f(x, y) = \ln(x^2 - 4xy + y^2)$
37. $f(x, y) = e^{x^2y}$
38. $f(x, y) = e^{xy^3}$
39. $f(x, y) = e^x \ln y$
40. $f(x, y) = e^{y^2} \ln x$

En los ejercicios 41 a 60, encuentre todas las derivadas de segundo orden.

41. $f(x, y) = 3x^2 + 5y^3 + 10$
42. $f(x, y) = x^2 - 3x + 4y^3 + 2y$
43. $f(x, y) = 5x^3 - 3xy + 3y^2$
44. $f(x, y) = -20x^5 + 10xy + 6y^3$
45. $f(x, y) = x^3y^4$
46. $f(x, y) = -10xy^3$
47. $f(x, y) = e^{x+y}$
48. $f(x, y) = \ln(x + y)$
49. $f(x, y) = e^{xy}$
50. $f(x, y) = e^y \ln x$
51. $f(x, y) = (x - y)^5$
52. $f(x, y) = (y - x)^4$
53. $f(x, y) = x^4y^2$
54. $f(x, y) = x^2y^5$
55. $f(x, y) = x/y^2$
56. $f(x, y) = y/x^2$
57. $f(x, y) = (6x - 8y)^{3/2}$
58. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$
59. $f(x, y) = \ln x^3y^2$
60. $f(x, y) = \ln 3xy^3$
61. En $f(x, y) = 100x^2 + 200y^2 - 10xy$:
a) Determine $f(10, 20)$.

b) Haciendo uso de las derivadas parciales, estime el cambio esperado en $f(x, y)$, si x aumenta en una unidad.

c) Compare el cambio real con el cambio estimado.

d) Repita los incisos *b*) y *c*), suponiendo un posible incremento de una unidad en y.

62. En $f(x, y) = 20x^3 - 30y^3 + 10x^2y$:

a) Determine $f(20, 10)$.

b) Haciendo uso de las derivadas parciales, estime el cambio esperado en $f(x, y)$, si x aumenta en una unidad.

c) Compare el cambio real con el cambio estimado.

d) Repita los incisos *b*) y *c*), suponiendo un posible incremento de una unidad en y.

63. Una empresa estima que el número de unidades que vende cada año es una función de los gastos de publicidad por radio y televisión. La función que expresa esta relación es

$$z = 2\,000x + 5\,000y - 20x^2 - 10y^2 - 50xy$$

donde z es el número de unidades vendidas, x indica la cantidad destinada a la publicidad por televisión y la y denota la cantidad que se gasta en publicidad por radio (las dos últimas variables se expresan en miles de dólares). En la actualidad, la firma está destinando \$50 000 a la publicidad por televisión y \$30 000 a la publicidad por radio.

a) ¿Cuáles se espera que sean las ventas anuales?

b) Usando derivadas parciales, estime el efecto en las ventas anuales, si se asignan \$1 000 más a la publicidad por televisión.

c) Empleando derivadas parciales, estime el efecto en las ventas anuales si se asignan \$1 000 más a la publicidad por radio.

d) ¿En qué tipo de publicidad se obtienen mejores resultados con una inversión de \$1 000?

64. En la función de demanda

$$q_1 = f(p_1, p_2) = 25\,000 - 0.1p_1^2 - 0.5p_2^2$$

a) Determine las derivadas parciales f_{p_1} y f_{p_2}.

b) Si $p_1 = 20$ y $p_2 = 10$, evalúe f_{p_1} y f_{p_2} e interprete su significado.

c) ¿Cómo se interrelacionan esos tres productos entre sí?

65. En la función de demanda

$$q_1 = f(p_1, p_2, p_3) = 250\,000 - 0.5p_1^2 + p_2^2 + 0.4p_3^2$$

a) Determine las derivadas parciales f_{p_1}, f_{p_2} y f_{p_3}.

b) Si $p_1 = 30$, $p_2 = 10$ y $p_3 = 20$, evalúe las derivadas parciales e interprete su significado.

c) ¿Cómo se interrelacionan los dos productos entre sí?

20.3 Optimización de las funciones de dos variables

El proceso de encontrar los valores óptimos de las funciones bivariadas es muy parecido al que se aplicó en el caso de las funciones de una sola variable. En la presente sección se explicará ese proceso.

Puntos críticos

Igual que con las funciones de una sola variable, nos concentraremos en identificar los puntos máximo y mínimo relativos en la superficie que representa una función $f(x, y)$.

Dichos puntos tienen en dos dimensiones el mismo significado que en tres.

Definición: Máximo relativo

Se dice que una función $z = f(x, y)$ tiene un ***máximo relativo*** cuando $x = a$ y $y = b$ si para todos los puntos (x, y) "suficientemente cercanos" a (a, b),

$$f(a, b) \geq f(x, y)$$

Un máximo relativo suele aparecer en la parte superior o pico de una cresta de la superficie que representa a $f(x, y)$.

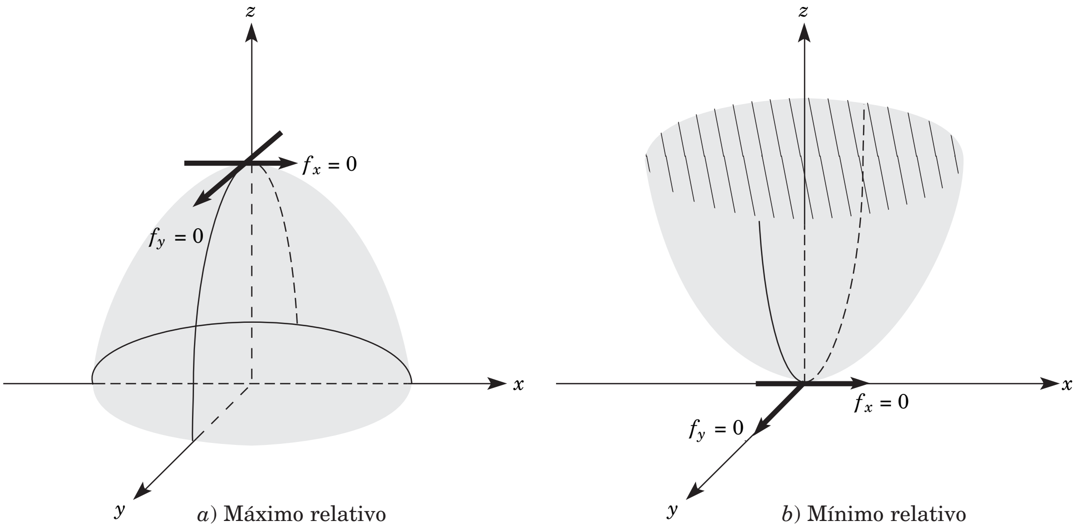
Definición: Mínimo relativo

Se dice que una función $z = f(x, y)$ tiene un ***mínimo relativo*** cuando $x = a$ y $y = b$ si para todos los puntos (x, y) "suficientemente cercanos" a (a, b),

$$f(a, b) \leq f(x, y)$$

Un mínimo relativo suele aparecer en la parte inferior de un valle sobre la superficie que representa a $f(x, y)$.

La figura 20.7 muestra tanto un punto máximo relativo como un punto mínimo relativo. Si el lector examina las condiciones de pendiente de una superficie plana en un máximo o mínimo relativo, debería llegar a la conclusión de que una línea tangente trazada en el punto en cualquier dirección tiene una pendiente de 0. Dado que las primeras derivadas parciales f_x y f_y representan expresiones generales de la pendiente de la tangente de trazas paralelas, respectivamente, a los planos xz y yz, puede afirmarse lo siguiente.



a) Máximo relativo *b*) Mínimo relativo

Figura 20.7 Extremos relativos en un espacio tridimensional.

Condición necesaria de extremos relativos

Una *condición necesaria* para la existencia de un máximo relativo o un mínimo relativo de una función f cuyas derivadas parciales f_x y f_y existen, establece que

$$f_x = 0 \quad \text{y} \quad f_y = 0 \tag{20.6}$$

Una parte importante de esta definición es que *tanto* f_x como f_y son 0. Como se aprecia en la figura 20.8, puede haber un número infinito de puntos en una superficie donde f_x sea 0. En la figura 20.8, una línea tangente trazada paralelamente al plano xz en cualquier parte de la traza AB mostrará una pendiente de 0 ($f_x = 0$). No obstante, el único punto donde *tanto* f_x como f_y son cero es en A. En los otros puntos a lo largo de AB una línea tangente trazada paralelamente al plano yz presenta una pendiente negativa ($f_y < 0$).

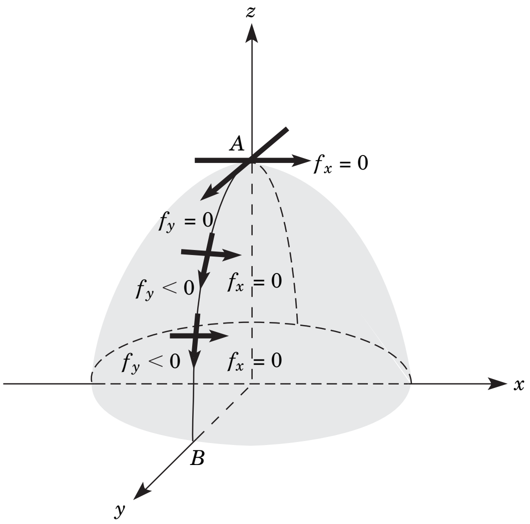


Figura 20.8 $f_x = 0$ a lo largo del trazo AB.

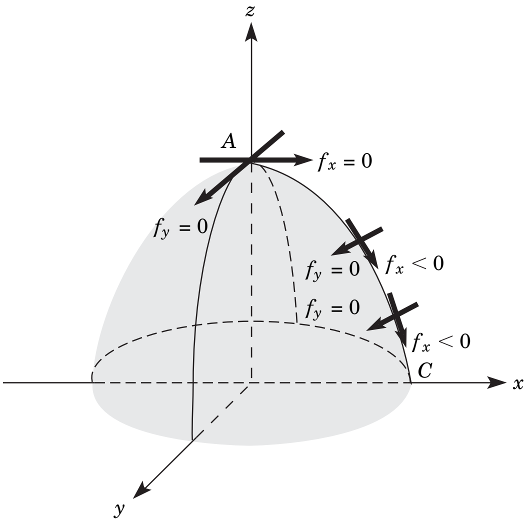


Figura 20.9 $f_y = 0$ a lo largo del trazo AC.

De manera similar, la figura 20.9 contiene una traza AC a lo largo de la cual $f_y = 0$, pero $f_x < 0$, salvo en el punto A.

Los valores de x^* y y^*, en que se satisface la ecuación (20.6), son los **valores críticos**. El punto correspondiente $(x^*, y^*, f(x^*, y^*))$ es candidato a convertirse en un máximo o mínimo relativo en f y recibe el nombre de **punto crítico**.

Ejemplo 11 Localice los puntos críticos en la gráfica de la función

$$f(x, y) = 4x^2 - 12x + y^2 + 2y - 10$$

SOLUCIÓN

Encuentre primero las expresiones de f_x y f_y

$$f_x = 8x - 12$$

$$f_y = 2y + 2$$

Para determinar los valores de x y y en que f_x y f_y son iguales a 0,

$$f_x = 0 \text{ cuando } 8x - 12 = 0$$

o un valor crítico de x es $x = \frac{3}{2}$

$$f_y = 0 \text{ cuando } 2y + 2 = 0$$

o un valor crítico de y es $y = -1$

Sustituyendo estos valores en f,

$$\begin{aligned} f(\tfrac{3}{2}, -1) &= 4(\tfrac{3}{2})^2 - 12(\tfrac{3}{2}) + (-1)^2 + 2(-1) - 10 \\ &= 9 - 18 + 1 - 2 - 10 = -20 \end{aligned}$$

El único punto crítico de f ocurre en $(\frac{3}{2}, -1, -20)$.

Ejemplo 12 Para localizar los puntos críticos en la gráfica de la función

$$f(x, y) = -2x^2 - y^2 + 8x + 10y - 5xy$$

se calculan las primeras derivadas parciales,

$$f_x = -4x + 8 - 5y$$

$$f_y = -2y + 10 - 5x$$

Los valores de x y y que hacen f_x y $f_y = 0$ se calculan al resolver las siguientes ecuaciones:

$$-4x + 8 - 5y = 0 \tag{20.7}$$

$$-2y + 10 - 5x = 0 \tag{20.8}$$

Al volver a escribir las ecuaciones anteriores queda

$$4x + 5y = 8 \tag{20.9}$$

$$5x + 2y = 10 \tag{20.10}$$

Si se multiplican ambos miembros de la ecuación (20.9) por -2 y los dos de la ecuación (20.10) por 5 y se suman las ecuaciones resultantes, se obtendrá

$$\begin{array}{rcr} -8x - 10y &=& -16 \\ 25x + 10y &=& 50 \\ \hline 17x \qquad &=& 34 \end{array}$$

y un valor crítico de x será

$$x = 2$$

Si se sustituye $x = 2$ en la ecuación (20.10), se encuentra que

$$5(2) + 2y = 10$$

$$2y = 0$$

y el valor crítico correspondiente de y es

$$y = 0$$

Si se sustituyen los valores anteriores en f,

$$\begin{aligned} f(2, 0) &= -2(2)^2 - (0)^2 + 8(2) + 10(0) - 5(2)(0) \\ &= -8 + 16 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Así pues, un punto crítico ocurre en (2, 0, 8).

Ejemplo 13 Para determinar cualquier punto crítico en la gráfica de la función

$$f(x, y) = 2x^2 + 4xy - x^2y - 4x$$

se identifican las primeras derivadas parciales y se hacen iguales a 0.

$$f_x = 4x + 4y - 2xy - 4 = 0 \tag{20.11}$$

$$f_y = 4x - x^2 = 0 \tag{20.12}$$

Estas dos ecuaciones deben resolverse simultáneamente. Sin embargo, las ecuaciones no son lineales. En la ecuación (20.12), f_y será 0 cuando

$$4x - x^2 = 0$$

$$x(4 - x) = 0$$

o cuando los valores críticos son

$$x = 0 \quad \text{y} \quad x = 4$$

Para determinar los valores de y que corresponden a estos valores críticos de x y que hacen f_x igual a 0, se sustituirán estos valores, uno a la vez, en la ecuación (20.11).

***Para x* = 0**,

$$\begin{aligned} 4(0) + 4y - 2(0)y - 4 &= 0 \\ 4y &= 4 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Por consiguiente, un punto crítico ocurre en la gráfica de f cuando $x = 0$ y cuando $y = 1$. Si $x = 0$ y $y = 1$,

$$\begin{aligned} f(0, 1) &= 2(0)^2 + 4(0)(1) - (0)^2(1) - 4(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Así, se presenta un punto crítico en (0, 1, 0).

***Para x* = 4**,

$$\begin{aligned} 4(4) + 4y - 2(4)y - 4 &= 0 \\ 16 + 4y - 8y - 4 &= 0 \\ -4y &= -12 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Puesto que

$$\begin{aligned} f(4, 3) &= 2(4)^2 + 4(4)(3) - (4)^2(3) - (4)(4) \\ &= 32 + 48 - 48 - 16 = 16 \end{aligned}$$

otro punto crítico ocurre en f en (4, 3, 16). ❑

Cómo distinguir los puntos críticos

Una vez identificado un punto crítico, es necesario determinar su naturaleza. Aparte de los puntos máximos y mínimos relativos, hay otro caso en que tanto f_x como f_y son 0.

La figura 20.10 muestra esa situación a la cual se le conoce con el nombre de ***punto en silla de montar***. Dicho punto es una parte de la superficie que tiene la forma de una silla

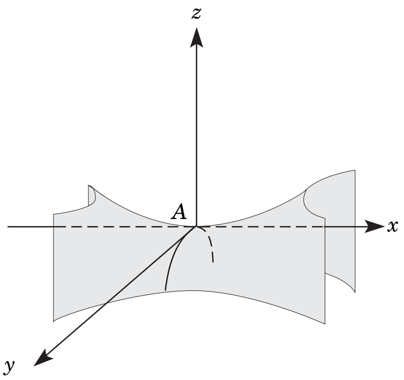


Figura 20.10 Punto en silla de montar.

de montar. En el punto A ("donde el jinete se sienta al montar un caballo"), los valores de f_x y f_y son 0. Sin embargo, la función no llega al máximo ni a un mínimo relativo en A. Si se divide a través de la superficie en el punto A con un plano que tenga la ecuación $x = 0$, el borde o traza resultante indica un máximo relativo en A. Sin embargo, si se divide a través de la superficie con el plano que se describe con la ecuación $y = 0$, el trazo resultante indica un mínimo relativo en A. La figura 20.11 contiene estas observaciones.

Las condiciones que permiten distinguir entre el máximo relativo, el mínimo relativo o los puntos en silla de montar se dan a continuación. La prueba de un punto crítico es una prueba de la segunda derivada (como se utilizó en los problemas de una sola variable) que, desde el punto de vista intuitivo, investiga las condiciones de concavidad en el punto crítico.

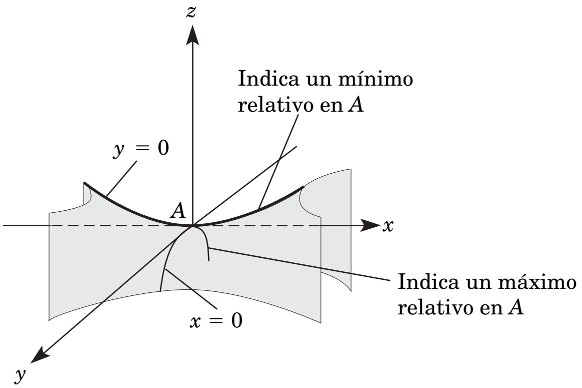


Figura 20.11 Signos contrarios de concavidad para el punto en silla de montar.

Prueba del punto crítico

Si se tiene un punto crítico de f localizado en (x^*, y^*, z^*) en que todas las segundas derivadas parciales sean continuas, determine el valor de $D(x^*, y^*)$, donde

$$D(x^*, y^*) = f_{xx}(x^*, y^*)f_{yy}(x^*, y^*) - [f_{xy}(x^*, y^*)]^2 \tag{20.13}$$

I *Si $D(x^*, y^*) > 0$, el punto crítico es*

*a) un **máximo relativo** si tanto $f_{xx}(x^*, y^*)$ como $f_{yy}(x^*, y^*)$ son negativas*

*b) un **mínimo relativo** si tanto $f_{xx}(x^*, y^*)$ como $f_{yy}(x^*, y^*)$ son positivas.*

II *Si $D(x^*, y^*) < 0$, el punto crítico es un punto en silla de montar.*

III *Si $D(x^*, y^*) = 0$, se necesitan otras técnicas (que rebasan el alcance de este libro) para determinar la naturaleza del punto crítico.*

Ejemplo 14

En el ejemplo 11 se determinó que un punto crítico ocurre en la gráfica de la función

$$f(x, y) = 4x^2 - 12x + y^2 + 2y - 10$$

Determine la naturaleza del punto crítico en $(\frac{3}{2}, -1, -20)$.

SOLUCIÓN

Del ejemplo 11,

$$f_x = 8x - 12$$
$$f_y = 2y + 2$$

Las cuatro derivadas de segundo orden son

$$f_{xx} = 8 \qquad f_{xy} = 0$$
$$f_{yy} = 2 \qquad f_{yx} = 0$$

Al evaluar $D(x^*, y^*)$ se tiene

$$\begin{aligned} D(\tfrac{3}{2}, -1) &= (8)(2) - 0^2 \\ &= 16 > 0 \end{aligned}$$

Puesto que $D(\frac{3}{2}, -1) > 0$ y $f_{xx}(\frac{3}{2}, -1) = 8$ y $f_{yy}(\frac{3}{2}, -1) = 2$, ambas mayores que 0, se puede llegar a la conclusión de que un *mínimo relativo* ocurre en $(\frac{3}{2}, -1, -20)$. La figura 20.12 es una gráfica de la función. Esta gráfica, lo mismo que varias de las siguientes se generan con computadora empleando el paquete de graficación SAS y se trazan en una graficadora Calcomp.*

Ejemplo 15 Para determinar la localización y la naturaleza de cualquier punto crítico de la función

$$f(x, y) = -2x^2 + 24x - y^2 + 30y$$

las primeras derivadas parciales son

$$f_x = -4x + 24$$
$$f_y = -2y + 30$$

Haciendo f_x y f_y iguales a 0, se tiene que

$$f_x = -4x + 24 = 0 \qquad \text{y} \qquad f_y = -2y + 30 = 0$$

Los valores críticos se identifican en

$$x = 6 \qquad \text{y} \qquad y = 15$$

Puesto que

$$\begin{aligned} f(6, 15) &= -2(6)^2 + 24(6) - (15)^2 + 30(15) \\ &= -72 + 144 - 225 + 450 \\ &= 297 \end{aligned}$$

existe un punto crítico en la gráfica de f en (6, 15, 297).

---

* SAS: Statistical Analysis System (Sistema de Análisis Estadístico), subrutina G3d.

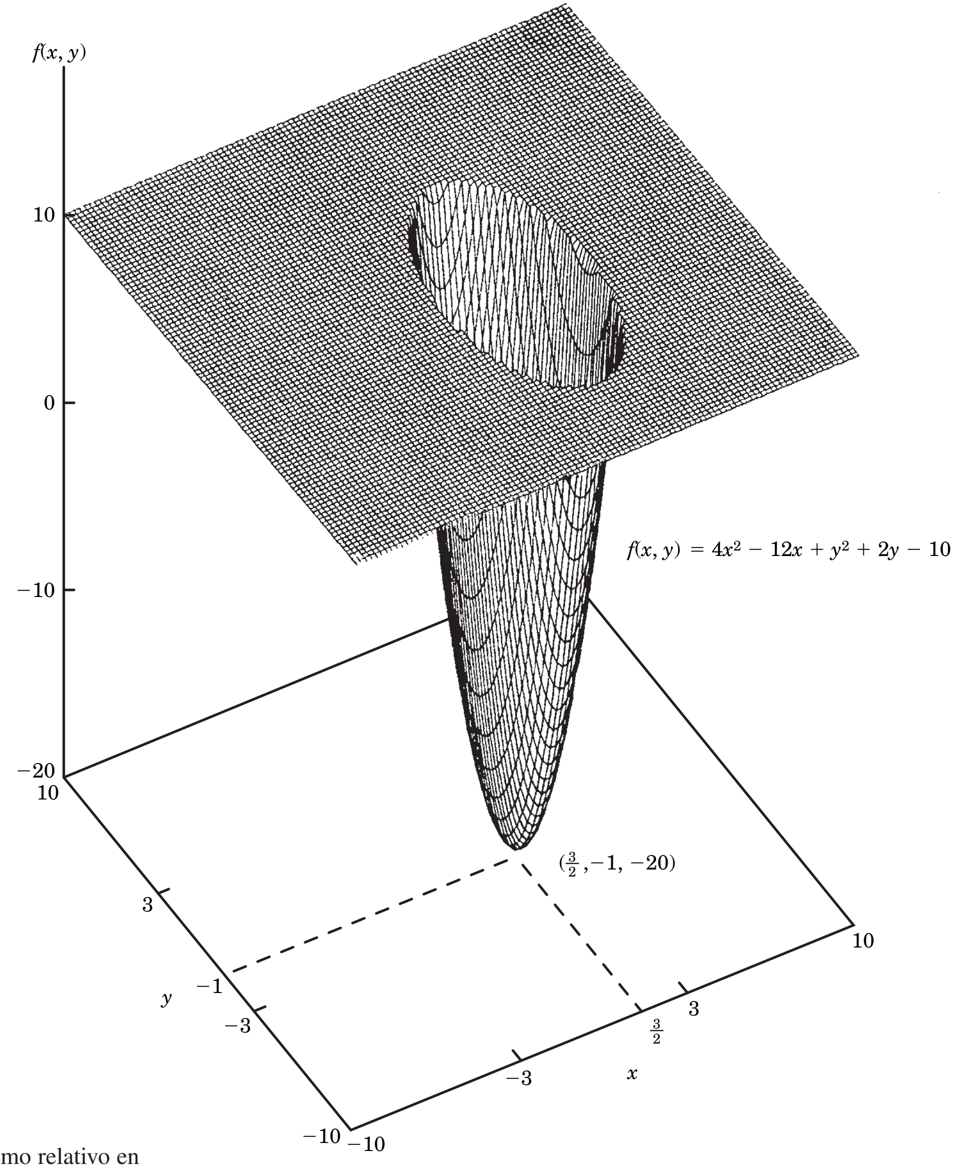


Figura 20.12 Mínimo relativo en $f(x, y) = 4x^2 - 12x + y^2 + 2y - 10$.

Para determinar la naturaleza del punto crítico, las derivadas de segundo orden son

$$f_{xx} = -4 \qquad f_{xy} = 0$$

$$f_{yy} = -2 \qquad f_{yx} = 0$$

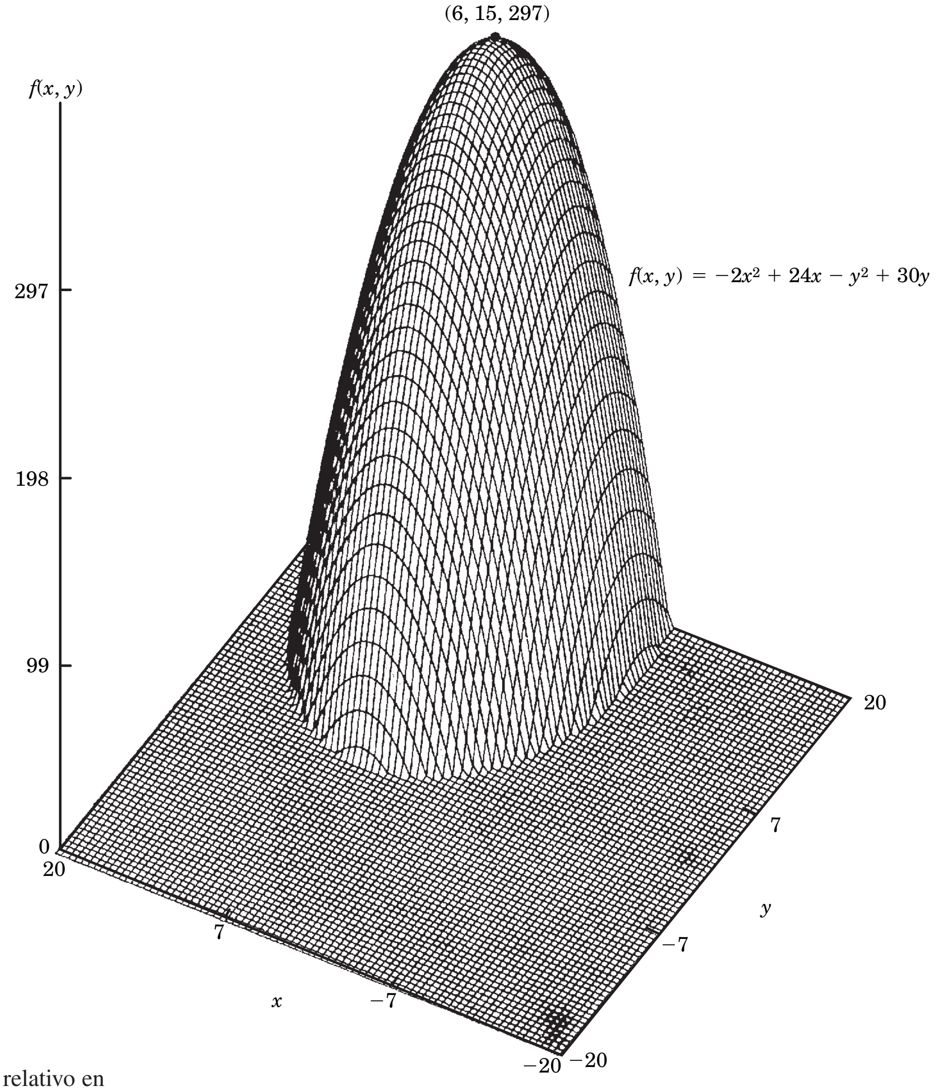


Figura 20.13 Máximo relativo en $f(x, y) = -2x^2 + 24x - y^2 + 30y$.

Al evaluar $D(x^*, y^*)$ se obtiene

$$\begin{aligned} D(6, 15) &= (-4)(-2) - 0^2 \\ &= 8 > 0 \end{aligned}$$

Puesto que $D(6, 15) > 0$ y tanto f_{xx} como f_{yy} son negativas, un máximo relativo se presenta en (6, 15, 297). La figura 20.13 es una gráfica de la función.

Ejemplo 16 En el ejemplo 13 se determinó que ocurren puntos críticos en la gráfica de la función

$$f(x, y) = 2x^2 + 4xy - x^2y - 4x$$

en (0, 1, 0) y (4, 3, 16). Para determinar la naturaleza de los dos puntos críticos, es preciso obtener todas las segundas derivadas. De acuerdo con el ejemplo 13,

$$\begin{aligned} f_x &= 4x + 4y - 2xy - 4 \\ f_y &= 4x - x^2 \end{aligned}$$

Las derivadas de segundo orden son

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 4 - 2y \qquad & f_{xy} &= 4 - 2x \\ f_{yy} &= 0 \qquad & f_{yx} &= 4 - 2x \end{aligned}$$

Evaluación de (0, 1, 0):

$$\begin{aligned} D(0, 1) &= [4 - 2(1)](0) - [4 - 2(0)]^2 \\ &= (2)(0) - 4^2 \\ &= -16 < 0 \end{aligned}$$

Como $D(0, 1) < 0$, un punto en silla de montar se presenta en *f* en (0, 1, 0).

Evaluación de (4, 3, 16):

$$\begin{aligned} D(4, 3) &= [4 - 2(3)](0) - [4 - 2(4)]^2 \\ &= (-2)(0) - (-4)^2 \\ &= -16 < 0 \end{aligned}$$

Un segundo punto en silla de montar ocurre en *f*, éste en (4, 3, 16). La figura 20.14 presenta una gráfica de la función.

Ejemplo 17 En la función

$$f(x, y) = -x^2 - y^3 + 12y^2$$

determine la localización y la naturaleza de todos los puntos críticos.

SOLUCIÓN

Si se calculan las primeras derivadas parciales y se hacen iguales a 0, se obtiene

$$f_x = -2x = 0 \quad \text{o bien un valor crítico ocurre en } x = 0$$

$$\begin{aligned} f_y &= -3y^2 + 24y = 0 \\ 3y&(-y + 8) = 0 \end{aligned}$$

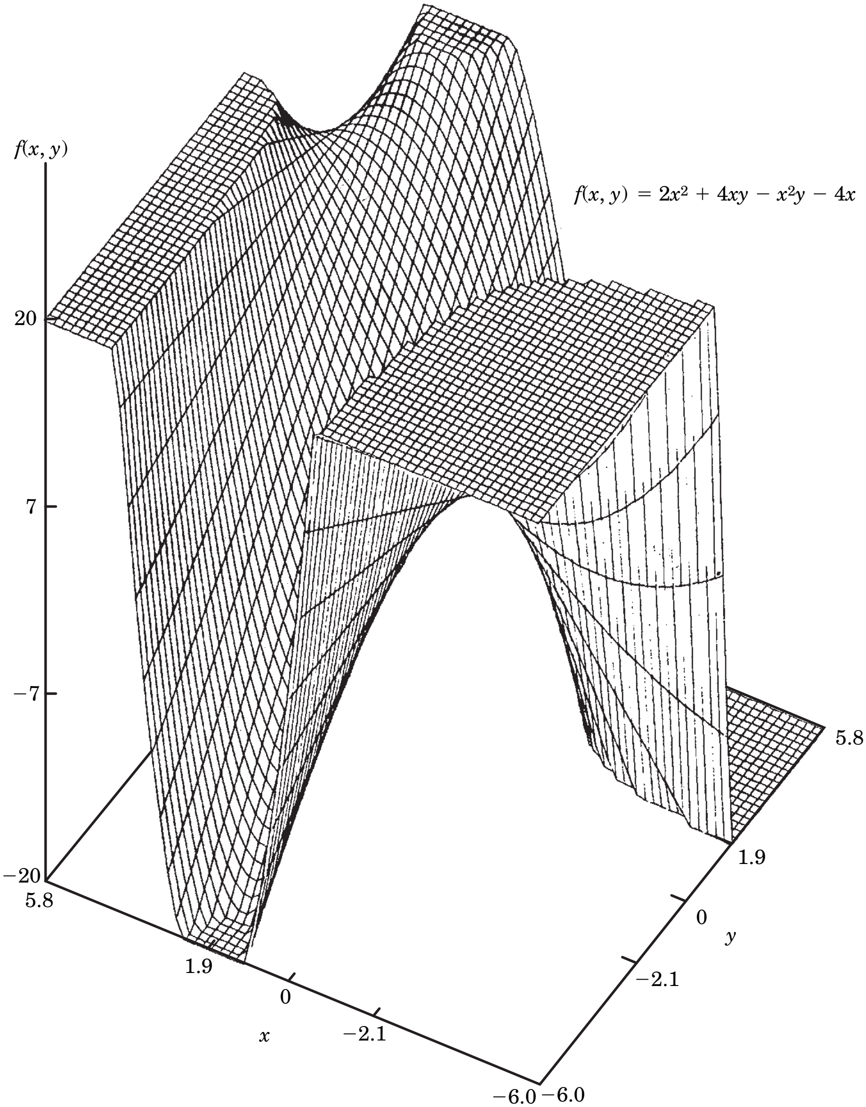


Figura 20.14 Dos puntos en silla de montar sobre $f(x, y) = 2x^2 + 4xy - x^2y - 4x$.

O bien ocurren valores críticos en

$$y = 0 \quad \text{y} \quad y = 8$$

Hay *dos* puntos críticos en f: uno asociado a los valores críticos $x = 0$ y $y = 0$. Y el otro asociado a los valores críticos $x = 0$ y $y = 8$. Verifique que los dos puntos estacionarios se presenten en (0, 0, 0) y (0, 8, 256).

Las derivadas de segundo orden son

$$f_{xx} = -2 \qquad f_{xy} = 0$$

$$f_{yy} = -6y + 24 \qquad f_{yx} = 0$$

Evaluación de (0, 0, 0):

$$\begin{aligned} D(0, 0) &= (-2)[-6(0) + 24] - 0^2 \\ &= (-2)(24) - 0 \\ &= -48 < 0 \end{aligned}$$

Por consiguiente, se tiene un punto en silla de montar en (0, 0, 0).

Evaluación de (0, 8, 256):

$$\begin{aligned} D(0, 8) &= (-2)[-6(8) + 24] - 0^2 \\ &= (-2)(-24) \\ &= 48 > 0 \end{aligned}$$

Con $D > 0$, el punto crítico es un máximo relativo o bien un mínimo relativo. Los valores de las dos derivadas parciales puras en el punto crítico son f_{xx} (0, 8) $= -2$ y $f_{yy}(0, 8) = -6(8) + 24 = -24$. Puesto que ambas son negativas, se llega a la conclusión de que se presenta un máximo relativo en la gráfica de *f* en (0, 8, 256). La figura 20.15 es una gráfica de *f* que ofrece dos perspectivas diferentes de la superficie. ❑

Sección 20.3 Ejercicios de seguimiento

En los siguientes ejercicios, determine la localización y la naturaleza de todos los puntos críticos.

1. $f(x, y) = 4x^2 - y^2 + 80x + 20y - 10$
2. $f(x, y) = x^2 + xy - 5x - 2y^2 + 2y$
3. $f(x, y) = x^3/3 - 5x^2/2 + 3y^2 - 12y$
4. $f(x, y) = -8x^2 + 12xy + 44x - 12y^2 + 12y$
5. $f(x, y) = 3x^2 - 4xy + 3y^2 + 8x - 17y + 5$
6. $f(x, y) = -x^2 + 6x - 12y + y^3 + 5$
7. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x + 6y + 10$
8. $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 16y + 22$
9. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$
10. $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$
11. $f(x, y) = xy + \ln x + y^2 - 10, x > 0$
12. $f(x, y) = 25x - 25xe^{-y} - 50y - x^2$
13. $f(x, y) = x^2/2 + 2y^2 - 20x - 40y + 100$
14. $f(x, y) = -3x^2 - 2y^2 + 45x - 30y - 50$
15. $f(x, y) = 3x^2 + y^2 + 3xy - 60x - 32y + 200$
16. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x$
17. $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$
18. $f(x, y) = 3x^2 - 4xy + 3y^2 + 8x - 17y + 5$
19. $f(x, y) = -2x^2 + 2xy - y^2 + 4x - 6y + 10$
20. $f(x, y) = x^2 + 2xy + 5y^2 + 2x + 10y - 20$
21. $f(x, y) = x^3 - y^2 - 3x + 4y + 25$

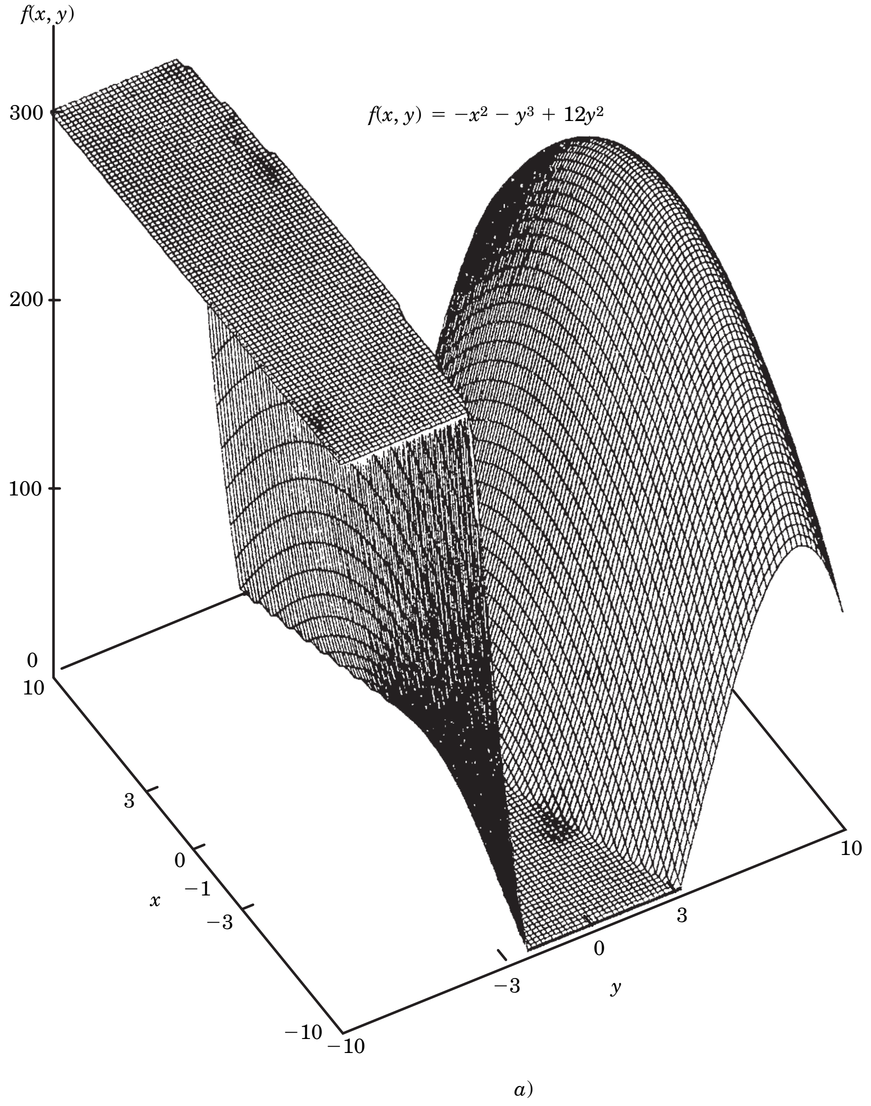


Figura 20.15 Máximo relativo y punto en silla de montar en $f(x, y) = -x^2 - y^3 + 12y^2$.

22. $f(x, y) = 2x^2 + y^3 - x - 12y + 15$
23. $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 6x + 6$
24. $f(x, y) = 4xy - x^3 - y^2$
25. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 3x + 6y + 10$

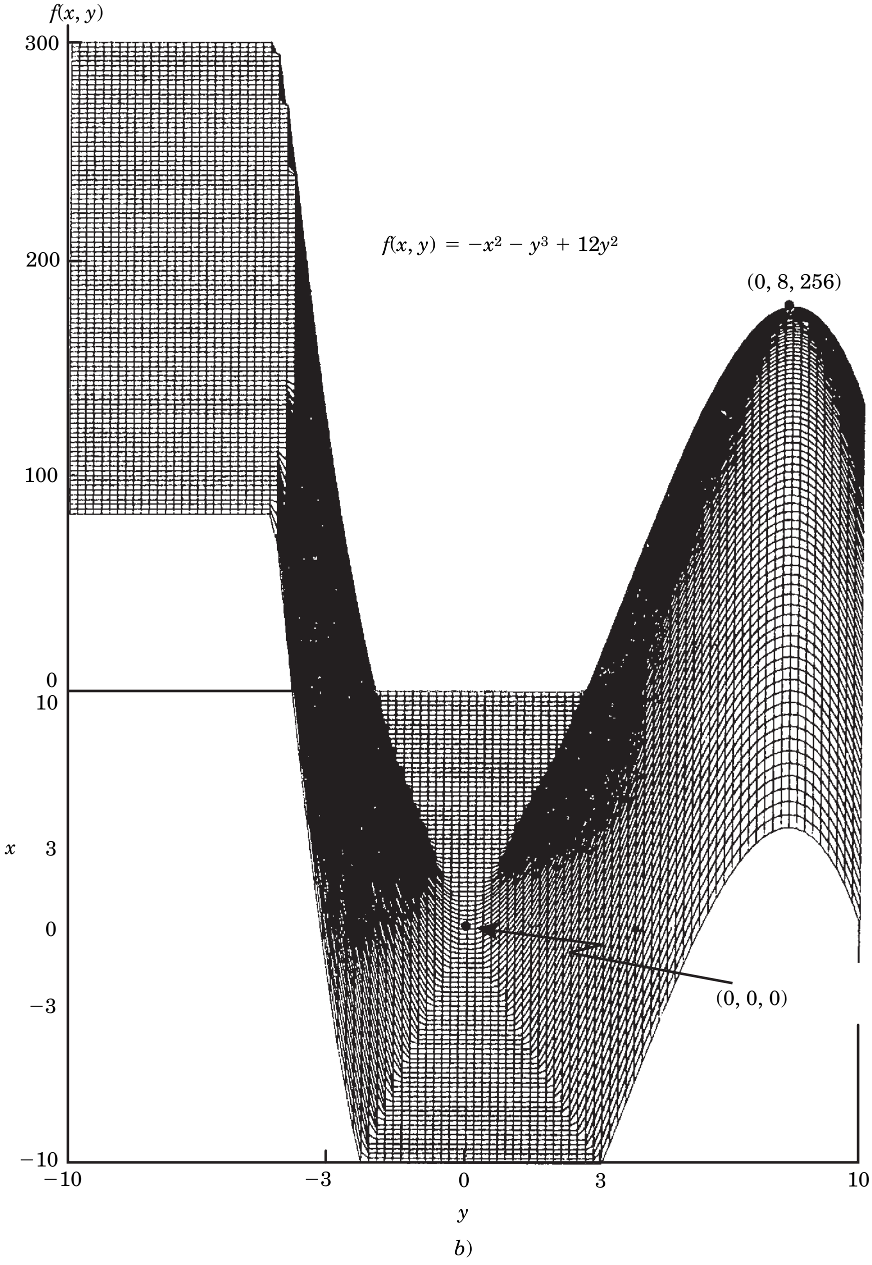


Figura 20.15 *Continuación.*

20.4 Aplicaciones de la optimización de dos variables

En esta sección se ofrecen algunas aplicaciones de la optimización de funciones bivariadas.

Ejemplo 18

(Gastos de publicidad) El ejemplo 9 se refería a un fabricante que estimaba las ventas anuales (en unidades) en función de los gastos hechos en la publicidad por radio y televisión. La función que especifica esta relación se formuló así:

$$z = 50\,000x + 40\,000y - 10x^2 - 20y^2 - 10xy$$

donde *z es el número de unidades vendidas cada año, la x indica la cantidad destinada a la publicidad por televisión y la y denota la cantidad dedicada a la publicidad por radio (x y y se dan en miles).* Determine cuánto dinero deberá invertirse en ambos tipos de publicidad a fin de maximizar el número de unidades vendidas.

SOLUCIÓN

Las primeras derivadas parciales son

$$f_x = 50\,000 - 20x - 10y$$

$$f_y = 40\,000 - 40y - 10x$$

Al establecer f_x y f_y iguales a 0, se tiene

$$20x + 10y = 50\,000$$

$$10x + 40y = 40\,000$$

Si ambos lados de la segunda ecuación se multiplican por -2 y el resultado se agrega a la primera ecuación, entonces

$$\begin{array}{r} 20x + 10y = 50\,000 \\ \underline{-20x - 80y = -80\,000} \\ -70y = -30\,000 \end{array}$$

Y un valor crítico de y es $y = 428.57$

Al sustituir y en una de las ecuaciones originales se obtiene

$$20x + 10(428.57) = 50\,000$$

$$\begin{aligned} 20x &= 50\,000 - 4\,285.7 \\ &= 45\,714.3 \end{aligned}$$

y el valor crítico correspondiente de x es

$$x = 2\,285.72$$

Las ventas totales asociadas a $x = 2\,285.72$ y $y = 428.57$ son

$$\begin{aligned} f(2\,285.72,\ 428.57) &= 50\,000(2\,285.72) + 40\,000(428.57) \\ &\quad - 10(2\,285.72)^2 - 20(428.57)^2 - 10(2\,285.72)(428.57) \\ &= 65\,714\,296.00 \text{ unidades} \end{aligned}$$

Así pues, un punto crítico ocurre en la gráfica de f en (2 285.72, 428.57, 65 714 296).

Para determinar la naturaleza del punto crítico, las segundas derivadas son

$$f_{xx} = -20 \qquad f_{xy} = -10$$

$$f_{yy} = -40 \qquad f_{yx} = -10$$

Al probar el punto crítico, se obtiene

$$\begin{aligned} D(2\,285.72, 428.57) &= (-20)(-40) - (-10)^2 \\ &= 800 - 100 = 700 > 0 \end{aligned}$$

Dado que $D > 0$ y tanto f_{xx} como f_{yy} son negativas, podría llegarse a la conclusión de que las ventas anuales se maximizan en 65 714 296 unidades cuando 2 285.72 (en miles) se destinan a la publicidad por televisión y se gastan 428.57 (en miles) en la publicidad por radio. La figura 20.16 es una gráfica de la superficie de ventas.

Ejemplo 19

(Modelo de fijación de precios) Un fabricante vende dos productos afines, cuya demanda se caracteriza por las dos siguientes funciones de demanda:

$$q_1 = 150 - 2p_1 - p_2 \qquad \textbf{(20.14)}$$

$$q_2 = 200 - p_1 - 3p_2 \qquad \textbf{(20.15)}$$

donde p_j es el precio (en dólares) del producto j y q_j denota la demanda (en miles de unidades) del producto j. El examen de estas funciones de demanda revela que los dos productos están relacionados entre sí. La demanda de uno depende no sólo del precio que se le fije a ese producto, sino además del precio que se establezca para el otro.

La compañía desea determinar el precio que deberá poner a cada producto a fin de maximizar los ingresos totales de la venta de los dos.

SOLUCIÓN

Este problema es exactamente igual a los problemas de un solo producto expuestos en el capítulo 17. La única diferencia radica en que hay dos productos y dos decisiones de establecimiento de precios que deben tomarse.

El ingreso total que se logra con la venta de los dos productos se determina mediante la función

$$\boxed{R = p_1q_1 + p_2q_2} \qquad \textbf{(20.16)}$$

Esta función se expresa en términos de cuatro variables. Como en el caso de los problemas de un solo producto, es posible sustituir el miembro derecho de las ecuaciones (20.14) y (20.15) en la ecuación (20.16) para obtener

$$\begin{aligned} R &= f(p_1, p_2) \\ &= p_1(150 - 2p_1 - p_2) + p_2(200 - p_1 - 3p_2) \\ &= 150p_1 - 2p_1^2 - p_1p_2 + 200p_2 - p_1p_2 - 3p_2^2 \\ &= 150p_1 - 2p_1^2 - 2p_1p_2 + 200p_2 - 3p_2^2 \end{aligned}$$

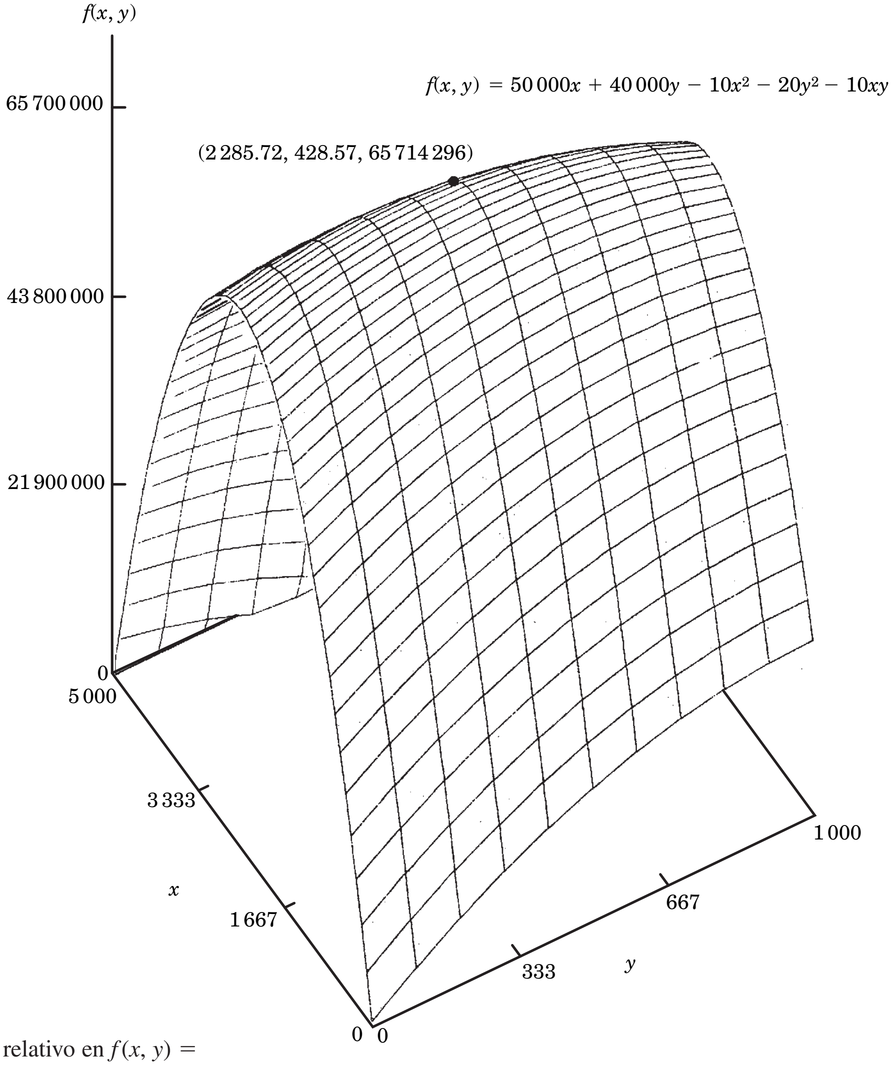


Figura 20.16 Máximo relativo en $f(x, y) = 50\,000x + 40\,000y - 10x^2 - 20y^2 - 10xy$.

Ahora podemos empezar a examinar la superficie de ingreso para los puntos de máximos relativos.

Las primeras derivadas parciales son

$$f_{p_1} = 150 - 4p_1 - 2p_2$$

$$f_{p_2} = -2p_1 + 200 - 6p_2$$

Igualando f_{p_1} y f_{p_2} a 0, se tiene

$$4p_1 + 2p_2 = 150 \qquad \textbf{(20.17)}$$

$$2p_1 + 6p_2 = 200 \qquad \textbf{(20.18)}$$

Si la ecuación (20.18) se multiplica por -2 y se agrega a la ecuación (20.17), se obtiene

$$\begin{array}{rcr} 4p_1 + 2p_2 &=& 150 \\ -4p_1 - 12p_2 &=& -400 \\ \hline -10p_2 &=& -250 \end{array}$$

o bien un valor crítico de p_2 es

$$p_2 = 25$$

La sustitución de $p_2 = 25$ en la ecuación (20.17) da

$$4p_1 + 2(25) = 150$$

$$4p_1 = 100$$

o un valor crítico de p_1 es

$$p_1 = 25$$

Si estos valores se sustituyen en f,

$$\begin{aligned} f(25, 25) &= 150(25) - 2(25)^2 - 2(25)(25) + 200(25) - 3(25)^2 \\ &= 4\,375 \end{aligned}$$

Ocurre un punto crítico en f en (25, 25, 4 375)

Las segundas derivadas son

$$f_{p_1p_1} = -4 \qquad f_{p_1p_2} = -2$$

$$f_{p_2p_2} = -6 \qquad f_{p_2p_1} = -2$$

Y

$$\begin{aligned} D(25, 25) &= (-4)(-6) - (-2)^2 \\ &= 24 - 4 = 20 > 0 \end{aligned}$$

Dado que $D(x^*, y^*) > 0$ y $f_{p_1p_1}$ y $f_{p_2p_2}$ son negativas, existirá un máximo relativo en f cuando $p_1 = 25$ y $p_2 = 25$. Los ingresos se maximizarán en un valor de \$4 375 (miles) cuando cada producto se venda en \$25. La demanda esperada con estos precios puede determinarse sustituyendo p_1 y p_2 en las ecuaciones de demanda, o sea

$$q_1 = 150 - 2(25) - (25) = 75 \text{ (mil unidades)}$$

$$q_2 = 200 - (25) - 3(25) = 100 \text{ (mil unidades)}$$

La figura 20.17 es una gráfica de la superficie de ingreso.

Ejemplo 20

(Ubicación de una clínica satélite) Una gran organización para la conservación de la salud planea situar una clínica satélite en un lugar adecuado para dar servicio a tres municipios suburbanos, cuya localización relativa se ofrece en la figura 20.18. La organización quiere escoger un lugar preliminar aplicando el siguiente criterio: determinar la ubicación (x, y) que minimice la *suma de los cuadrados* de las distancias entre cada municipio y la clínica.

SOLUCIÓN

Las incógnitas de este problema son x y y, o sea las coordenadas de la localización de la clínica satélite. Se necesita determinar una expresión del cuadrado de la distancia entre la clínica y cada uno de los municipios.

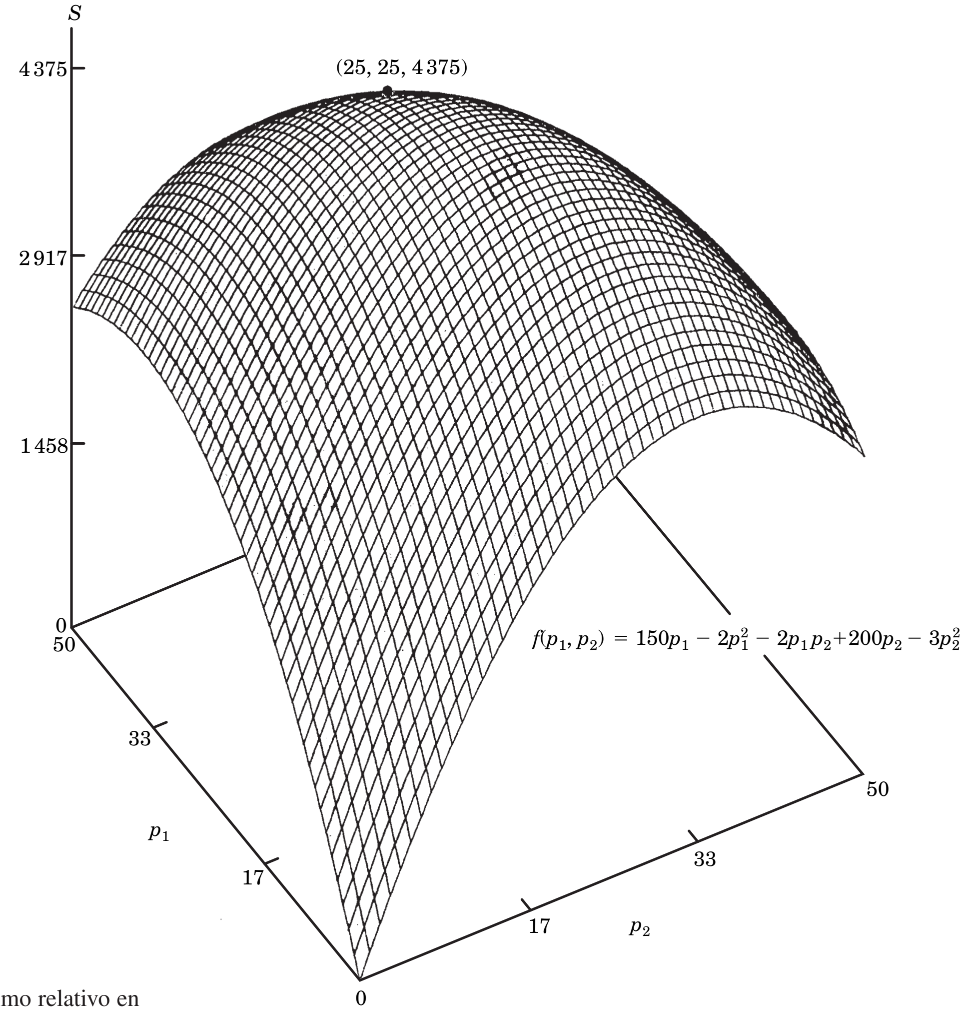


Figura 20.17 Máximo relativo en superficie de ingresos $f(p_1, p_2) = 150p_1 - 2p_1^2 - 2p_1p_2 + 200p_2 - 3p_2^2$.

Y esto se consigue con el teorema de Pitágoras.* Si se conocen dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), el cuadrado de la distancia d entre esos dos puntos se calcula mediante la ecuación

$$\boxed{d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{20.19}$$

He aquí un ejemplo: el cuadrado de la distancia entre la clínica con la localización (x, y) y el municipio A situado en (40, 20) es

$$d^2 = (x - 40)^2 + (y - 20)^2$$

---

* Véase el capítulo 17, página 845.

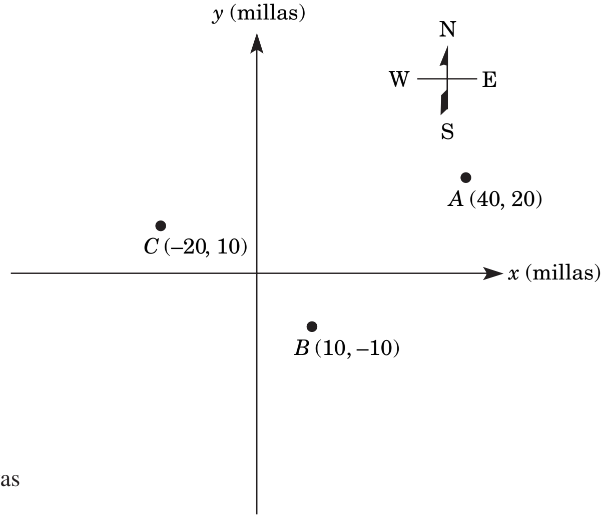


Figura 20.18 Localizaciones relativas de tres municipios suburbanos.

Al encontrar expresiones similares para el cuadrado de la distancia que separa los municipios *B* y *C* y la clínica, y al sumar las correspondientes a los tres, se obtiene

$$\begin{aligned} s &= f(x, y) \\ &= [(x - 40)^2 + (y - 20)^2] + [(x - 10)^2 + (y + 10)^2] \\ &\quad + [(x + 20)^2 + (y - 10)^2] \end{aligned}$$

El miembro derecho de esta función puede ampliarse o dejarse en esta forma, con objeto de calcular las derivadas. Se optará por no modificarlo. Las primeras derivadas parciales son

$$\begin{aligned} f_x &= 2(x - 40)(1) + 2(x - 10)(1) + 2(x + 20)(1) \\ &= 2x - 80 + 2x - 20 + 2x + 40 \\ &= 6x - 60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y &= 2(y - 20)(1) + 2(y + 10)(1) + 2(y - 10)(1) \\ &= 2y - 40 + 2y + 20 + 2y - 20 \\ &= 6y - 40 \end{aligned}$$

Si se hacen iguales a 0 las dos derivadas parciales, se obtendrán valores críticos en $x = 10$ y en $y = 6\frac{2}{3}$. Las segundas derivadas parciales son

$$f_{xx} = 6 \qquad f_{xy} = 0$$

$$f_{yy} = 6 \qquad f_{yx} = 0$$

$$D(10, 6\tfrac{2}{3}) = (6)(6) - 0^2 + 36 > 0$$

Como $D > 0$ y f_{xx} y f_{yy} son mayores que 0, se llega a la conclusión de que se presenta un mínimo relativo en f cuando $x = 10$ y cuando $y = 6\frac{2}{3}$, o cuando la clínica satélite está situada como se advierte en la figura 20.19.

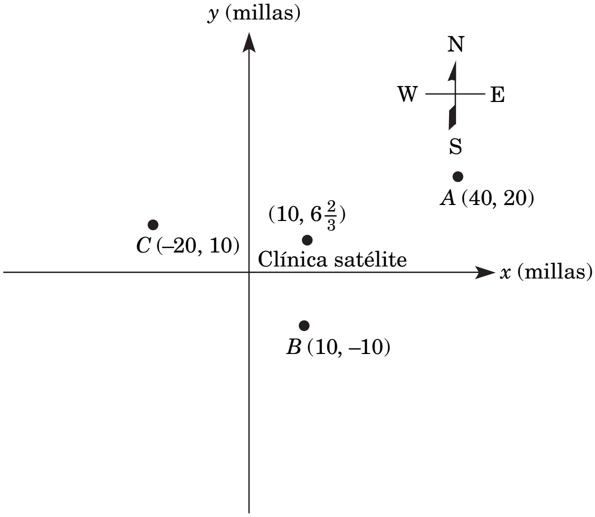


Figura 20.19 Localización propuesta de la clínica satélite.

Ejemplo 21 **(Modelo de mínimos cuadrados. Encontrar el mejor ajuste para un conjunto de puntos de datos: Escenario de motivación)** Las organizaciones reúnen datos periódicos sobre multitud de variables relacionadas con sus operaciones. Un área principal de análisis es averiguar si hay patrones en los datos: ¿se dan relaciones notorias entre las variables de interés? Por ejemplo, las funciones de demanda a las que nos hemos referido una y otra vez seguramente se determinaron recabando información sobre la demanda de un producto con distintos precios. Y el análisis de esa información se traduce en una expresión formal de la función de demanda.

Considere los cuatro puntos de datos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) y (x_4, y_4) en la figura 20.20, que se reunieron para las variables x y y. Supóngase que se cuenta con evidencia de que x y y se relacionan y de que la naturaleza de la relación es lineal. Y supóngase además que nos gustaría ajustar una recta en esos puntos, cuya ecuación se empleará como aproximación de la relación actual que existe entre x y y. Se pregunta entonces: ¿qué línea se ajusta mejor a los puntos de datos? Hay un número infinito de rectas que pueden ajustarse a ellos, todas las cuales presentan la forma general

$$\boxed{y_p = ax + b} \tag{20.20}$$

La diferencia entre cada línea será la que hay en la pendiente ***a*** y/o la coordenada y de la intercepción ***b*** con el eje y. Nótese que y_p tiene un subíndice de p en la ecuación (20.20). Ello es porque el ajuste de la línea con los puntos de datos puede servir para *predecir* valores de y, si se tiene un valor conocido de x.

En la figura 20.20, los valores pronosticados de y, conocidas las coordenadas x de los cuatro puntos de datos, están indicados en la línea. La distancia vertical que separa el punto real de datos y el punto correspondiente en la línea es una medida del error introducido al utilizar la línea para predecir la localización del punto de datos. El error, denotado por los valores d_j en la figura 20.20, recibe el nombre de ***desviación*** entre el valor real de y, y el valor pronosticado de y para el j-ésimo punto de datos, es decir,

$$\boxed{d_j = y_j - y_{p_j}} \tag{20.21}$$

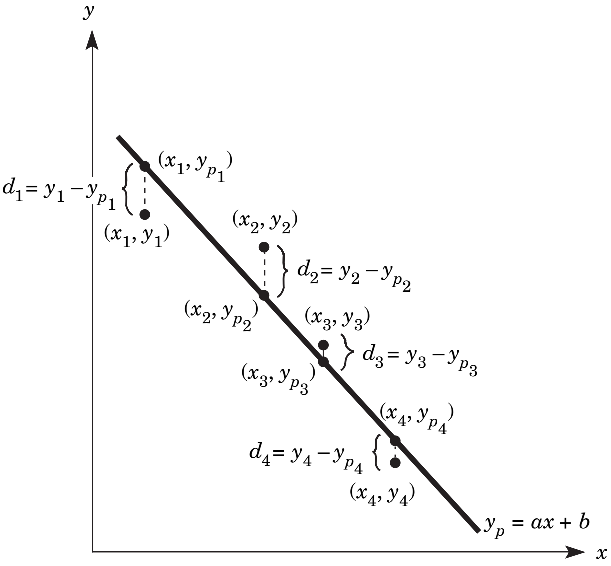


Figura 20.20 Cuatro puntos de datos muestra.

Como se desea obtener la "mejor" línea para ajustarla a los puntos de datos, la siguiente pregunta será: ¿cómo se define el adjetivo *mejor*? Uno de los métodos más comunes para encontrar la línea del mejor ajuste es el ***modelo de mínimos cuadrados***. En este modelo *mejor* se define como la línea que minimiza la suma del cuadrado de las desviaciones para todos los puntos de datos.

Dado un conjunto de *n* puntos de datos, el método de los mínimos cuadrados busca la línea que minimice

$$\begin{aligned} S &= d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n} d_j^2 \end{aligned}$$

o bien

$$\boxed{S = \sum_{j=1}^{n} (y_j - y_{p_j})^2} \tag{20.22}$$

Para cualquier línea $y_p = ax + b$ seleccionada para ajustarse a los puntos de datos, la ecuación (20.22) puede reescribirse como

$$\boxed{S = f(a, b) = \sum_{j=1}^{n} [y_j - (ax_j + b)]^2} \tag{20.23}$$

El método de los mínimos cuadrados busca los valores de a y de b que produzcan un valor mínimo para S.

En la figura 20.20 se buscará la línea que minimice

$$\begin{aligned} S &= d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 \\ &= \sum_{j=1}^{4} d_j^2 \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{4} (y_j - y_{p_j})^2$$
$$= \sum_{j=1}^{4} [y_j - (ax_j + b)]^2$$

Pongamos el simple caso de una compañía que ha reunido tres niveles diferentes de precios. La tabla 20.3 contiene las combinaciones de precio-demanda. La figura 20.21 es una gráfica de los datos. Supóngase que se desea determinar la línea del mejor ajuste para esos puntos de datos, usando para ello el modelo de mínimos cuadrados. La función de mínimos cuadrados se genera mediante la ecuación (20.23).

$$\begin{aligned} S &= f(a, b) \\ &= \sum_{j=1}^{3} [y_j - (ax_j + b)]^2 \\ &= [50 - (5a + b)]^2 + [30 - (10a + b)]^2 + [20 - (15a + b)]^2 \end{aligned}$$

Tabla 20.3

y (demanda en miles de unidades)	50	30	20
x (precio en dólares)	5	10	15

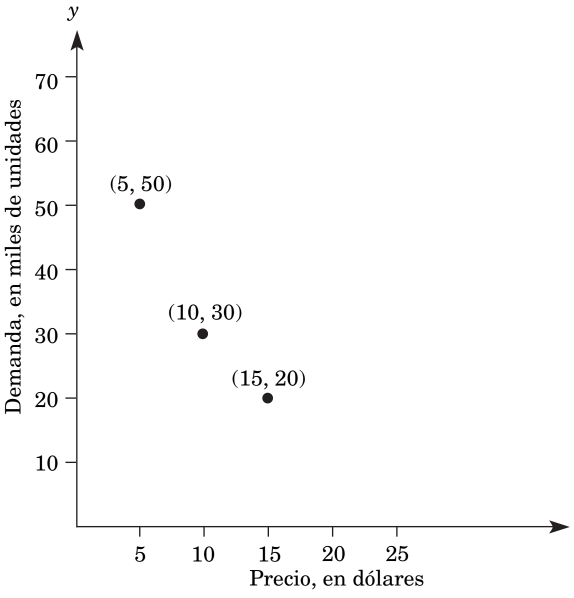


Figura 20.21 Tres puntos de datos muestra de precio/demanda.

Para determinar los valores de a y b que minimizan S, se calculan las derivadas respecto de a y b.

$$\begin{aligned} f_a = {} & 2[50 - (5a + b)](-5) + 2[30 - (10a + b)](-10) \\ & + 2[20 - (15a + b)](-15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -500 + 50a + 10b - 600 + 200a + 20b - 600 + 450a + 30b \\ &= 700a + 60b - 1\,700 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_b &= 2[50 - (5a + b)](-1) + 2[30 - (10a + b)](-1) \\ &\quad + 2[20 - (15a + b)](-1) \\ &= -100 + 10a + 2b - 60 + 20a + 2b - 40 + 30a + 2b \\ &= 60a + 6b - 200 \end{aligned}$$

Si hacemos iguales a 0 estas dos derivadas, resultarán las dos ecuaciones siguientes:

$$700a + 60b = 1\,700 \qquad \textbf{(20.24)}$$

$$60a + 6b = 200 \qquad \textbf{(20.25)}$$

La multiplicación de la ecuación (20.25) por -10 y la adición del producto a la ecuación (20.24) dan

$$\begin{array}{r} 700a + 60b = 1\,700 \\ \underline{-600a - 60b = -2\,000} \\ 100a \qquad = -300 \\ a = -3 \end{array}$$

Al sustituir $a = -3$ en la ecuación (20.25) se obtiene

$$\begin{aligned} 60(-3) + 6b &= 200 \\ 6b &= 380 \\ b &= 63\tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Para verificar que el punto crítico produce un valor mínimo de S,

$$f_{aa} = 700 \qquad f_{ab} = 60$$

$$f_{bb} = 6 \qquad f_{ba} = 60$$

$$\begin{aligned} D(-3, 63\tfrac{1}{3}) &= (700)(6) - (60)^2 \\ &= 4\,200 - 3\,600 \\ &= 600 > 0 \end{aligned}$$

Puesto que $D > 0$ y tanto f_{aa} como f_{bb} son positivas, puede llegarse a la conclusión de que la suma de los cuadrados de las desviaciones S se minimiza cuando $a = -3$ y $b = 63\frac{1}{3}$, o cuando los puntos de datos se ajustan con una línea recta teniendo una pendiente de -3 y una intersección de $63\frac{1}{3}$ con el eje y. La ecuación de esta línea es

$$y_p = -3x + 63\tfrac{1}{3}$$

La suma mínima de los cuadrados de las desviaciones puede determinarse sustituyendo $a = -3$ y $b = 63\frac{1}{3}$ en f si ese valor es de interés. ❑

NOTA Este ejemplo está dirigido para ilustrar los fundamentos para esta popular técnica de estimación. Afortunadamente, la puesta en práctica (uso) real del método de los mínimos cuadrados no requiere de la formulación de la función de la suma de los cuadrados y análisis de optimización como se demostró en este ejemplo. Por lo regular, el análisis de mínimos cuadrados se realiza al introducir los puntos de datos de muestra en una calculadora portátil o bien en cualquiera de los paquetes de programas estadísticos que se encuentran disponibles en una gran variedad en el mercado.

Sección 20.4 Ejercicios de seguimiento

1. Un fabricante estima que las ventas anuales (en unidades) son una función de los gastos hechos en la publicidad por radio y televisión. La función que especifica la relación es

$$z = 40\,000x + 60\,000y - 5x^2 - 10y^2 - 10xy$$

donde z es el número de unidades vendidas cada año, la x denota la cantidad destinada a la publicidad por televisión y la y representa la que se dedica a la publicidad por radio (tanto x como y se dan en miles de dólares).

a) Determine cuánto debería gastarse en la publicidad por radio y televisión a fin de maximizar el número de unidades vendidas.

b) ¿Cuál se espera que sea el número máximo de unidades?

2. Una compañía vende dos productos. Se estima que el ingreso total conseguido con ellos es una función del número de unidades vendidas. En concreto, la función es

$$R = 30\,000x + 15\,000y - 10x^2 - 10y^2 - 10xy$$

donde R es el ingreso total y tanto x como y indican los números de unidades vendidas de ambos productos.

a) ¿Cuántas unidades de cada producto deberían fabricarse con objeto de maximizar el ingreso total?

b) ¿Cuál es el ingreso máximo?

3. Una empresa vende dos productos, Sus funciones de demanda son

$$q_1 = 110 - 4p_1 - p_2$$

$$q_2 = 90 - 2p_1 - 3p_2$$

donde p_j es el precio del producto j y q_j indican la demanda (en miles de unidades) del producto j.

a) Determine el precio que deberá fijarse a cada producto a fin de maximizar el ingreso total que se consigue con los dos.

b) ¿Cuántas unidades se demandarán de cada producto a estos precios?

c) ¿Cuáles se espera que sean los máximos ingresos totales?

4. Una compañía planea construir una bodega que abastezca a tres grandes tiendas de departamentos. Las localizaciones relativas de las tiendas en un conjunto de ejes coordenados son (30, 10), (0, 40) y $(-30, -10)$, donde las coordenadas se expresan en millas. La figura 20.22 indica las localizaciones relativas de las tiendas de departamentos. Determine la localización de la bodega (x, y) que minimice la suma de los cuadrados de las distancias entre cada ciudad y la bodega.

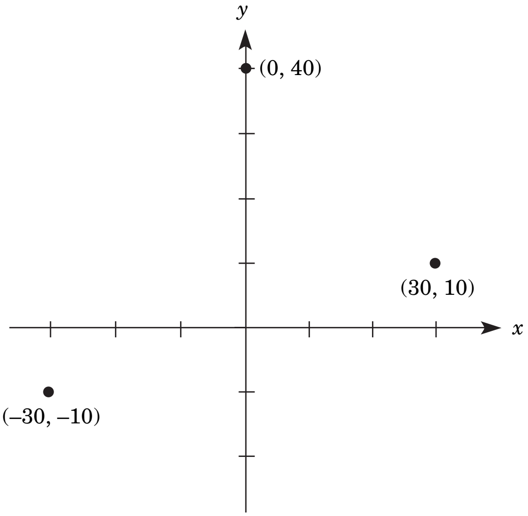


Figura 20.21 Localización de las tiendas de departamentos.

5. **Localización de aeropuertos.** Se planea un nuevo aeropuerto que dará servicio a cuatro áreas metropolitanas. Las localizaciones relativas de éstas en un conjunto de ejes coordenados son (20, 5), (0, 30), $(-30, -10)$ y $(-5, -5)$, donde las coordenadas se expresan en millas. La figura 20.23 indica las localizaciones relativas de las cuatro ciudades. Determine la ubicación del aeropuerto (x, y) que minimice la suma de los cuadrados de las distancias entre el aeropuerto y cada área metropolitana.
6. En el ejemplo 20, suponga que el número de miembros de la organización para la conservación de la salud que viven en tres municipios es 20 000, 10 000 y 30 000, respectivamente, en los municipios A, B y C. Suponga además que la organización desea conocer la localización (x, y) que minimiza la suma de los productos del número de miembros de cada municipio y el cuadrado de la distancia que separa las ciudades y la clínica.

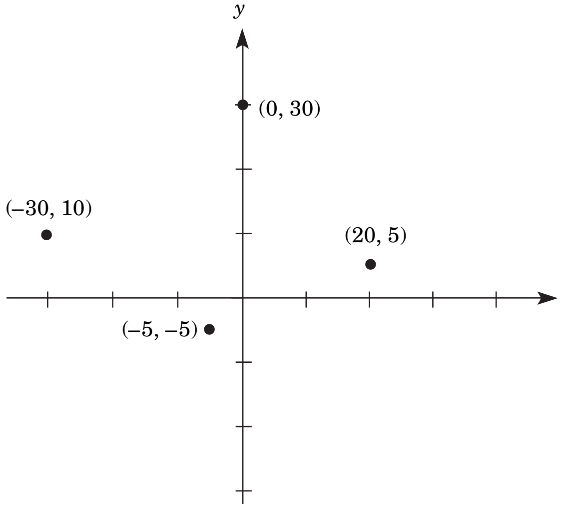


Figura 20.21 Localizaciones relativas de cuatro áreas metropolitanas.

Este objetivo puede formularse como

$$\text{minimice} \qquad \sum_{j=1}^{3} n_j d_j^2$$

donde n_j es el número de miembros que viven en la ciudad j y d_j denota la distancia entre el municipio j y la clínica. Determine la localización de la clínica.

7. Con los puntos de datos (2, 2), (−3, 17) y (10, −22), determine la ecuación de la línea del mejor ajuste utilizando el modelo de mínimos cuadrados.

8. Con los puntos de datos relativos a la relación entre precio y demanda de la tabla 20.4, determine la ecuación de la línea del mejor ajuste a esos puntos de datos empleando el modelo de mínimos cuadrados.

Tabla 20.4

y (demanda en miles de unidades)	200	160	120
x (precio en dólares)	30	40	50

20.5 Optimización de *n* variables (opcional)

Cuando una función contiene más de dos variables independientes, el proceso con que se identifican los máximos y mínimos relativos se parece mucho al que se aplica a funciones con dos variables independientes. Antes de explicar el proceso, definiremos esos extremos relativos.

Definición: Máximo relativo

Se dice que una función $y = f(x_1, x_2,..., x_n)$ tiene un ***máximo relativo*** en $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2,..., x_n = a_n$, si para todos los puntos $(x_1, x_2,..., x_n)$, suficientemente cercanos a $(a_1, a_2,..., a_n)$,

$$f(a_1, a_2,..., a_n) \geq f(x_1, x_2,..., x_n)$$

Definición: Mínimo relativo

Se dice que una función $y = f(x_1, x_2,..., x_n)$ tiene un ***mínimo relativo*** en $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2,..., x_n = a_n$, si para todos los puntos $(x_1, x_2,..., x_n)$, suficientemente cercanos a $(a_1, a_2,..., a_n)$,

$$f(a_1, a_2,..., a_n) \leq f(x_1, x_2,..., x_n)$$

Con más de dos variables independientes no es posible graficar una función. No obstante, puede afirmarse que la función $f(x_1, x_2,... x_n)$ está representada por una ***hipersuperficie*** en $(n + 1)$ dimensiones. Nuestro interés en estas funciones es identificar los equivalentes $(n + 1)$-dimensionales con sus *picos* (máximos relativos) y *valles* (mínimos relativos) en una superficie tridimensional.

Condición necesaria para los extremos relativos

> Una condición necesaria para un máximo relativo o un mínimo relativo de una función cuyas derivadas parciales f_{x_1}, f_{x_2},..., f_{x_n} existan es
>
> $$f_{x_1} = 0, f_{x_2} = 0, \ldots, f_{x_n} = 0 \tag{20.26}$$

La condición necesaria exige que todas las primeras derivadas parciales de *f* sean iguales a 0.

Ejemplo 22 Para localizar los *candidatos* a convertirse en puntos extremos relativos en

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1x_3 + 4x_3^2 - 2x_3$$

se calculan las primeras derivadas parciales

$$\begin{aligned} f_{x_1} &= 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ f_{x_2} &= -2x_1 + 4x_2 \\ f_{x_3} &= 2x_1 + 8x_3 - 2 \end{aligned}$$

Puesto que las tres derivadas deben ser 0, las tres ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 \qquad &= 0 \\ 2x_1 \qquad + 8x_3 &= 2 \end{aligned}$$

se resolverán simultáneamente. Cuando el sistema se resuelve, se identifican los valores críticos

$$x_1 = -1 \qquad x_2 = -\tfrac{1}{2} \qquad x_3 = \tfrac{1}{2}$$

Puesto que

$$f(-1, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{2}$$

se puede afirmar que el punto crítico $(-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ es un candidato a convertirse en un punto extremo. ❑

Condiciones suficientes

Como en el caso de funciones que contienen una o más variables independientes, la prueba de los puntos críticos exige el empleo de segundas derivadas. Más exactamente, la prueba hace uso de una ***matriz hessiana***, la cual es una matriz de las segundas derivadas parciales con la forma

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & f_{x_nx_3} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

En la función $f(x_1, x_2, x_3,..., x_n)$, la matriz hessiana es cuadrada y con dimensión $(n \times n)$. La diagonal principal está constituida por las segundas derivadas parciales *puras* y los elementos no diagonales son derivadas parciales *mixtas*. La matriz es también simétrica alrededor de la diagonal principal cuando las segundas derivadas parciales son continuas. En tales circunstancias, las derivadas parciales mixtas que se toman respecto de las dos mismas variables son iguales. Es decir, $f_{x_i} f_{x_j} = f_{x_j x_i}$.

Para una matriz hessiana $(n \times n)$, puede identificarse un conjunto de *n submatrices*. La primera de ellas es la submatriz (1×1) formada por el elemento situado en el renglón 1 y en la columna 1, $f_{x_1x_1}$. Denotemos esta matriz como $\mathbf{H_1}$, donde

$$\mathbf{H_1} = (f_{x_1x_1})$$

La segunda submatriz es la matriz (2×2)

$$\mathbf{H_2} = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} \end{pmatrix}$$

La tercera submatriz es la matriz (3×3)

$$\mathbf{H_3} = \begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & f_{x_1x_3} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & f_{x_2x_3} \\ f_{x_3x_1} & f_{x_3x_2} & f_{x_3x_3} \end{pmatrix}$$

La n-ésima submatriz es la matriz hessiana propiamente dicha, o sea $\mathbf{H}_n = \mathbf{H}$.

Los determinantes de estas submatrices reciben el nombre de ***menores principales***. El menor principal asociado a la i-ésima submatriz puede denotarse como Δ_i.

Condición suficiente de los extremos relativos

Si se tienen los valores críticos $x_1 = a_1, x_2 = a_2, x_3 = a_3,..., x_n = a_n$, para los cuales

$$f_{x_1} = f_{x_2} = f_{x_3} = \cdots = f_{x_n} = 0$$

y todas las derivadas de segundo orden son continuas:

I *Existe un* máximo relativo *si los menores principales* (evaluados en los valores críticos) *se alternan en el signo con los menores principales negativos de número impar y con los positivos de número par. En otras palabras,*

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, \ldots$$

II *Existe un* mínimo relativo *si todos los menores principales* (evaluados en los valores críticos) *son positivos. Es decir*,

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \ldots$$

III *Si no cumple ninguna de las dos primeras condiciones, no podrá extraerse conclusión alguna respecto del punto crítico. Se requiere un análisis ulterior en la vecindad del punto crítico para determinar su naturaleza.*

Ejemplo 23 Continuando ahora con el ejemplo 22, la matriz hessiana será

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Las submatrices y los valores correspondientes de los menores principales son

$$\mathbf{H}_1 = (2) \qquad \Delta_1 = 2$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \Delta_2 = 4$$

$$\mathbf{H}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \Delta_3 = 16$$

Dado que los menores principales Δ_1, Δ_2 y Δ_3 son positivos, se extrae la conclusión de que se presenta un mínimo relativo en el punto crítico $(-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Ejemplo 24 Localice cualquier punto crítico y determine su naturaleza en la función

$$f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^3 + 6x_1x_3 + 2x_2 - x_2^2 - 6x_3^2 + 5$$

SOLUCIÓN

Las primeras derivadas parciales se calculan y se hacen iguales a 0, de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} f_{x_1} &= -6x_1^2 + 6x_3 = 0 \\ f_{x_2} &= 2 - 2x_2 = 0 \\ f_{x_3} &= 6x_1 - 12x_3 = 0 \end{aligned}$$

Si estas ecuaciones se resuelven simultáneamente, ocurren valores críticos cuando $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_3 = 0$, y también cuando $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$ y $x_3 = \frac{1}{4}$. Si se calculan los valores correspondientes de $f(x_1, x_2, x_3)$, se podrá afirmar que ocurren puntos críticos en (0, 1, 0, 6) y en $(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 6\,\frac{1}{4})$.

Para probar la naturaleza de estos puntos críticos, se identifican las derivadas parciales y se combinan en la matriz hessiana

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -12x_1 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

Evaluación de (0, 1, 0, 6):

$$\mathbf{H}_1 = (-12(0)) = (0) \qquad \text{y} \qquad \Delta_1 = 0$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \Delta_2 = 0$$

$$\mathbf{H}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -12 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \Delta_3 = 72$$

Estos menores principales no satisfacen los requerimientos de un máximo o de un mínimo relativo; por ello no puede sacarse conclusión alguna sobre el punto crítico (0, 1, 0, 6).

Evaluación de ($\frac{1}{2}$, 1, $\frac{1}{4}$, 6 $\frac{1}{4}$)

$$\mathbf{H_1} = (-12(\tfrac{1}{2})) = (-6) \qquad \text{y} \qquad \Delta_1 = -6$$

$$\mathbf{H_2} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \Delta_2 = 12$$

$$\mathbf{H_3} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -12 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \Delta_3 = -72$$

Puesto que $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ y $\Delta_3 < 0$, se puede concluir que se presenta un máximo relativo en ($\frac{1}{2}$, 1, $\frac{1}{4}$, 6 $\frac{1}{4}$). ❑

Sección 20.5 Ejercicios de seguimiento

En las funciones siguientes, localice los puntos críticos y determine su naturaleza.

1. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 4x_1x_2 - x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_2x_3$

2. $f(x_1, x_2, x_3) = 10x_1^2 + 15x_2^2 + 5x_3^2 - 60x_1 + 90x_2 - 40x_3 + 15\,000$

3. $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2 + x_1x_3 + x_3^2 + 2$

4. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + 6x_3^2$

5. $f(x_1, x_2, x_3) = 25 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$

6. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 8x_2^3 + 4x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 3.5x_4^2 - 24x_1 + 20x_3 - 75$

7. **Modelo de asignación de precios** Una compañía fabrica tres microcomputadoras rivales. Las funciones de demanda para las tres computadoras son

$$q_1 = 4\,000 - 2p_1 + p_2 + p_3$$

$$q_2 = 6\,000 + p_1 - 3p_2 + p_3$$

$$q_3 = 5\,000 + p_1 + p_2 - 2p_3$$

donde q_i es la demanda estimada (en unidades por año) de la computadora *i* y p_i es el precio de la *i*-ésima computadora (en dólares por unidad).

a) Determine los precios que producirán el ingreso total máximo con la venta de las tres computadoras. Verifique que realmente haya identificado un máximo relativo.

b) ¿Qué cantidades deberían producirse si se asignan esos precios?

c) ¿Cuál es el máximo ingreso total?

8. **Modelo de costo conjunto** Una compañía elabora tres productos. La función del costo conjunto es

$$\begin{aligned} C &= f(q_1, q_2, q_3) \\ &= 10q_1^2 + 30q_2^2 + 20q_3^2 - 400q_1 - 900q_2 - 1\,000q_3 + 750\,000 \end{aligned}$$

donde C es el costo total (en dólares) de producir q_1, q_2 y q_3 unidades de los productos 1, 2 y 3, respectivamente.

a) Determine las cantidades que producirán un mínimo costo total. Confirme que el punto crítico sea un mínimo relativo.

b) ¿Cuál es el mínimo costo total esperado?

20.6 Optimización sujeta a restricciones (opcional)

Nuestro análisis de los métodos de optimización basados en el cálculo se centró en la ***optimización no restringida***. En muchas aplicaciones del modelado matemático interviene la optimización de una ***función objetivo*** sujeta a ciertas condiciones restrictivas, o simplemente ***restricciones***. Estas restricciones representan limitaciones capaces de influir en el grado que se optimizan las funciones objetivo. Y pueden reflejar limitaciones como escasez de recursos (por ejemplo, mano de obra, materiales o capital), poca demanda de productos, metas de ventas, etc. Los problemas que ofrece esta estructura se consideran ***problemas de optimización restringida***. Se estudió un subconjunto de ellos al examinar la programación lineal (capítulos 10 a 12). En esta sección nos ocuparemos de un método con que se resuelven ciertos problemas de optimización no lineal restringida.

Método del multiplicador de Lagrange (restricción de la igualdad)

Considérese el problema de optimización restringida

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Máximo (o mínimo) } y = f(x_1, x_2) \\ \text{sujeto a } g(x_1, x_2) = k\end{array}} \tag{20.27}$$

En la ecuación (20.27), f es la función objetivo y $g(x_1, x_2) = k$ es una restricción de *igualdad*.

Una manera de resolver este tipo de problema consiste en combinar la información de la ecuación (20.27) en la función compuesta

$$\boxed{L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) - \lambda[g(x_1, x_2) - k]} \tag{20.28}$$

Esta función compuesta recibe el nombre de ***función lagrangiana***, y la variable λ (lambda) se llama ***multiplicador de Lagrange***. La función lagrangiana se compone de la función objetivo y de un múltiplo lineal de la ecuación de restricción. En ella conviene observar que λ puede ser cualquier valor y que el término $\lambda[g(x_1, x_2) - k]$ será 0, a condición de que (x_1, x_2) sean valores que satisfagan la restricción. Así pues, el valor de la recién formada función lagrangiana L tendrá el valor de la función objetivo original f.

Con la creación de la función lagrangiana se transforma ingeniosamente el problema original de restricción en un problema no restringido que puede resolverse por procedimientos muy similares a los expuestos en la última sección. Es decir, para resolver el problema original, ecuación (20.27), se calculan las derivadas parciales de $L(x_1, x_2, \lambda)$ con respecto de x_1, x_2 y λ, para luego hacerlas iguales a 0.

Condiciones necesarias para los extremos relativos

$$\begin{aligned} L_{x_1} &= 0 \\ L_{x_2} &= 0 \\ L_\lambda &= 0 \end{aligned} \tag{20.29}$$

Ejemplo 25 Considere el problema

$$\begin{aligned} &\text{Máximo } f(x_1, x_2) = 25 - x_1^2 - x_2^2 \\ &\text{sujeto a } 2x_1 + x_2 = 4 \end{aligned}$$

Con el método del multiplicador de Lagrange se transforma este problema en la forma no restringida

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 25 - x_1^2 - x_2^2 - \lambda(2x_1 + x_2 - 4)$$

Las primeras derivadas parciales se identifican como

$$\begin{aligned} L_{x_1} &= -2x_1 - 2\lambda \\ L_{x_2} &= -2x_2 - \lambda \\ L_\lambda &= -2x_1 - x_2 + 4 \end{aligned}$$

Los valores críticos se obtienen haciendo las tres derivadas parciales iguales a cero y resolviendo simultáneamente.

$$-2x_1 \qquad - 2\lambda = 0 \tag{20.30}$$

$$-2x_2 - \lambda = 0 \tag{20.31}$$

$$-2x_1 - x_2 + 4 = 0 \tag{20.32}$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación (20.31) por -2 se obtiene

$$4x_2 + 2\lambda = 0$$

Y sumando esto a la ecuación (20.30),

$$\begin{array}{rr} 4x_2 + 2\lambda = 0 & \\ \underline{-2x_1 - 2\lambda = 0} & \textbf{(20.30)} \\ -2x_1 + 4x_2 = 0 & \textbf{(20.33)} \end{array}$$

Si se despeja x_1 en la ecuación (20.33) se obtiene

$$4x_2 = 2x_1$$

$$2x_2 = x_1 \tag{20.34}$$

Si este valor de x_1 se sustituye en la ecuación (20.32),

$$\begin{aligned} -2(2x_2) - x_2 + 4 &= 0 \\ -5x_2 &= -4 \\ x_2 &= \tfrac{4}{5} = 0.8 \end{aligned}$$

Si este valor se sustituye en la ecuación (20.34), $x_1 = 1.6$. Por otra parte, la sustitución de $x_2 = 0.8$ en la ecuación (20.31) da $\lambda = -1.6$. Por lo tanto, $x_1 = 1.6$, $x_2 = 0.8$ y $\lambda = -1.6$ son valores críticos en la función lagrangiana. Estos valores de x_1 y x_2 también representan los únicos puntos candidatos para un máximo (o mínimo) relativo. ❑

Condición suficiente

Para estimar el comportamiento de $L(x_1, x_2, \lambda)$ en cualquier valor crítico, deberá determinarse la ***matriz hessiana acotada*** $\mathbf{H}_B$, donde

$$\mathbf{H}_B = \begin{pmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} \\ g_{x_1} & L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} \\ g_{x_2} & L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} \end{pmatrix}$$

y g_{x_i}, representa la derivada parcial del lado izquierdo de la restricción tomada con respecto de x_i.

Condiciones suficientes de los extremos relativos

Dados los valores críticos $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$ y $\lambda = \lambda^*$, para los cuales $L_{x_1} = L_{x_2} = L_\lambda = 0$, el determinante de $\mathbf{H}_B$, denotado como Δ_B, se evalúa en los valores críticos.

I *Existe un* máximo relativo *si* $\Delta_B > 0$.

II *Existe un* mínimo relativo *si* $\Delta_B < 0$.

Ejemplo 26 Para determinar el comportamiento de

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 25 - x_1^2 - x_2^2 - \lambda(2x_1 + x_2 - 4)$$

cuando $x_1 = 1.6$, $x_2 = 0.8$ y $\lambda = -1.6$, se forma la matriz hessiana acotada,

$$\mathbf{H}_B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Si se aplican los métodos explicados en el capítulo 9 con que se obtiene la determinante, se encontrará que

$$\Delta_B = 10 > 0$$

lo cual implica que $L(x_1, x_2, \lambda)$ alcanza un máximo relativo cuando $x_1 = 1.6$, $x_2 = 0.8$ y $\lambda = -1.6$.

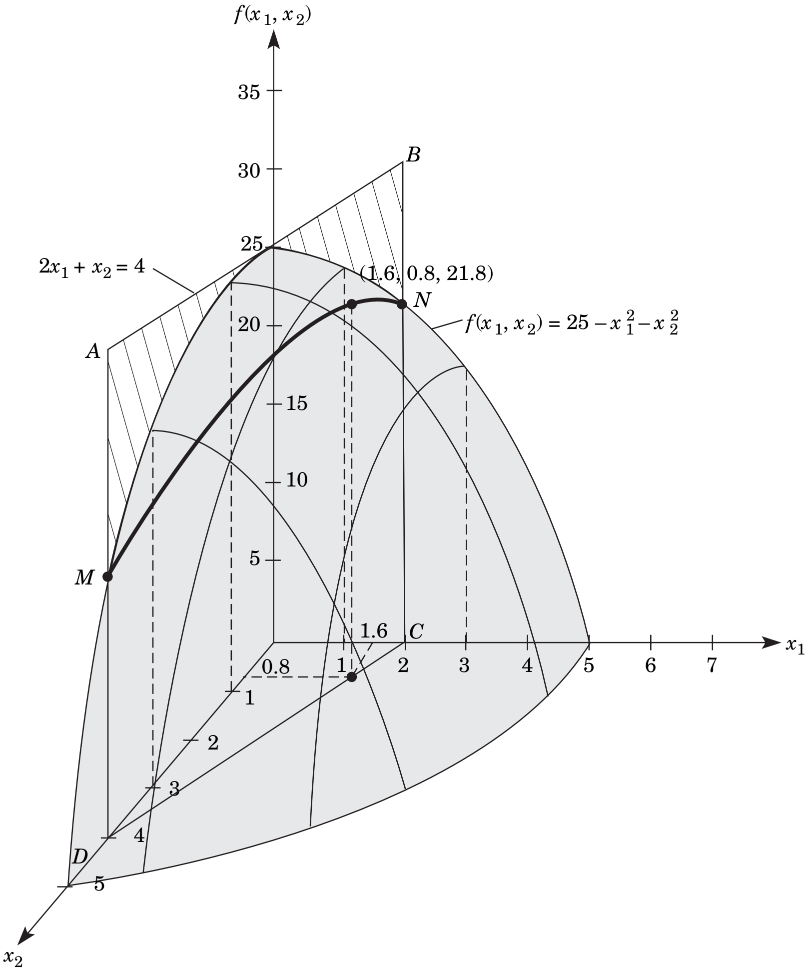


Figura 20.24 Problema de optimización restringida.

Si estos valores se sustituyen en la función lagrangiana,

$$L(1.6, 0.8, -1.6) = 25 - (1.6)^2 - (0.8)^2 - (-1.6)[2(1.6) + 0.8 - 4]$$
$$= 25 - 2.56 - 0.64 + 1.6(0) = 21.8$$

Por lo tanto, $L(x_1, x_2, \lambda)$ alcanza un valor máximo de 21.8. Éste también es el valor máximo de $f(x_1, x_2)$ en el problema original de optimización restringida del ejemplo 25.

La figura 20.24 es una representación gráfica de este problema. El lector seguramente recuerda que la superficie que representa a $f(x_1, x_2) = 25 - x_1^2 - x_2^2$ es la misma que la mostrada antes en la figura 20.4. Si no hubiera la restricción, ocurriría el máximo relativo en (0, 0, 25). La restricción $2x_1 + x_2 = 4$ exige que los únicos valores susceptibles de ser considerados se hallen en la intersección del plano *ABCD* y la superficie que representa a *f*. Dados los puntos de intersección (*MN*) entre la superficie $f(x_1, x_2)$ y el plano *ABCD*, el valor máximo de *f* se presenta en (1.6, 0.8, 21.8). ❑

NOTA La estructura de este problema se parece mucho a la del ejemplo 11 de la página 834 del capítulo 17. La ecuación (17.12) es la función objetivo; la ecuación (17.1) es una restricción. Ese problema fue resuelto al despejar una variable en términos de la otra en la ecuación (17.13) y al sustituirla en la función objetivo. Este procedimiento también puede aplicarse al ejemplo 25. ¿Por qué, entonces, se recurre al método del multiplicador de Lagrange? El ejemplo 25 es un problema relativamente simple. La estructura de la restricción o restricciones de un problema a menudo no permiten las sustituciones; ¡y es allí donde entra el multiplicador de Lagrange!

Caso de restricción de una sola igualdad con *n* variables

En un problema de la forma

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Máximo (o mínimo)} \quad y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ \text{sujeto a } g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = k\end{array}} \tag{20.35}$$

el método del multiplicador de Lagrange es ligeramente distinto al caso de dos variables independientes. He aquí la función lagrangiana correspondiente

$$\boxed{L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \lambda[g(x_1, x_2, \ldots, x_n) - k]} \tag{20.36}$$

Condición necesaria de los extremos relativos

$$\begin{aligned} L_{x_1} &= 0\\ L_{x_2} &= 0\\ &\vdots\\ L_{x_n} &= 0\\ L_{\lambda} &= 0 \end{aligned} \tag{20.37}$$

donde $L_{x_1}, L_{x_2}, \ldots, L_{x_n}, L_\lambda$ existen todas.

La matriz hessiana acotada en el caso de n variables presenta la forma

$$\mathbf{H}_B = \begin{pmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} & \cdots & g_{x_n}\\ g_{x_1} & L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & \cdots & L_{x_1x_n}\\ g_{x_2} & L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & \cdots & L_{x_2x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ g_{x_n} & L_{x_nx_1} & L_{x_nx_2} & \cdots & L_{x_nx_n} \end{pmatrix} \tag{20.38}$$

En la matriz hessiana acotada de la ecuación (20.38), varias submatrices se definen del modo siguiente:

$$\mathbf{H}_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} \\ g_{x_1} & L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} \\ g_{x_2} & L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{B_3} = \begin{pmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} & g_{x_3} \\ g_{x_1} & L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & L_{x_1x_3} \\ g_{x_2} & L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & L_{x_2x_3} \\ g_{x_3} & L_{x_3x_1} & L_{x_3x_2} & L_{x_3x_3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}_{B_n} = \mathbf{H}_{B} = \begin{pmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} & \cdots & g_{x_n} \\ g_{x_1} & L_{x_1x_1} & L_{x_1x_2} & \cdots & L_{x_1x_n} \\ g_{x_2} & L_{x_2x_1} & L_{x_2x_2} & \cdots & L_{x_2x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{x_n} & L_{x_nx_1} & L_{x_nx_2} & \cdots & L_{x_nx_n} \end{pmatrix}$$

Los menores principales para estas submatrices pueden denotarse como $\Delta_{\boldsymbol{B}_2}$, $\Delta_{\boldsymbol{B}_3}$,... $\Delta_{\boldsymbol{B}_n}$.

Condiciones suficientes de los extremos relativos

En los valores críticos $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$,..., $x_n = a_n$ y $\lambda = \lambda^*$ para los cuales

$$L_{x_1} = L_{x_2} = \cdots = L_{x_n} = L_{\lambda} = 0$$

todos los menores principales asociados con $\mathbf{H}_B$ se evalúan en los valores críticos.

I *Existe un máximo relativo si*

$$\Delta_{B_2} > 0, \Delta_{B_3} < 0, \Delta_{B_4} > 0, \ . \ . \ .$$

II *Existe un mínimo relativo si*

$$\Delta_{B_2} < 0, \Delta_{B_3} < 0, \quad \Delta_{B_4} < 0, \ . \ . \ .$$

Ejemplo 27 En el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Maximice} & f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1x_2x_3 \\ \text{sujeta a} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 24 \end{array}$$

la función lagrangiana correspondiente es

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 5x_1x_2x_3 - \lambda(x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 24)$$

Para localizar cualquier valor crítico, se calculan las primeras derivadas parciales y se hacen iguales a 0.

$$L_{x_1} = 5x_2x_3 - \lambda \qquad\qquad = 0$$

$$L_{x_2} = 5x_1x_3 - 2\lambda \qquad\qquad = 0$$

$$L_{x_3} = 5x_1x_2 - 3\lambda \qquad\qquad = 0$$

$$L_{x_3} = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 24 = 0$$

Estas cuatro ecuaciones pueden reescribirse como

$$5x_2x_3 = \lambda \tag{20.39}$$

$$5x_1x_3 = 2\lambda \tag{20.40}$$

$$5x_1x_2 = 3\lambda \tag{20.41}$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 24 \tag{20.42}$$

Si se dividen ambos lados de la ecuación (20.39) entre el miembro correspondiente de la ecuación (20.40),

$$\frac{5x_2x_3}{5x_1x_3} = \frac{\lambda}{2\lambda} \quad \text{o} \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{2}$$

De este modo

$$x_2 = \frac{x_1}{2} \tag{20.43}$$

De manera semejante, ambos miembros de la ecuación (20.39) pueden dividirse entre los dos miembros de la ecuación (20.41):

$$\frac{5x_2x_3}{5x_1x_2} = \frac{\lambda}{3\lambda} \quad \text{o} \quad \frac{x_3}{x_1} = \frac{1}{3}$$

y

$$x_3 = \frac{x_1}{3} \tag{20.44}$$

Al sustituir las ecuaciones (20.43) y (20.44) en la ecuación (20.42),

$$x_1 + 2\,\frac{x_1}{2} + 3\,\frac{x_1}{3} = 24$$

$$3x_1 = 24$$

$$x_1 = 8$$

Si este valor se sustituye en las ecuaciones (20.43), (20.44) y (20.38), se identificarán los valores críticos de $L(x_1, x_2, x_3, \lambda)$ como $x_1 = 8$, $x_2 = 4$, $x_3 = \frac{8}{3}$, y $\lambda = \frac{160}{3}$, o $53\,\frac{1}{3}$.

Para probar la naturaleza de este punto crítico, la matriz hessiana acotada se identifica como

$$\mathbf{H}_{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5x_3 & 5x_2 \\ 2 & 5x_3 & 0 & 5x_1 \\ 3 & 5x_2 & 5x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Evaluada en los valores críticos,

$$\mathbf{H}_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & \frac{40}{3} & 20 \\ 2 & \frac{40}{3} & 0 & 40 \\ 3 & 20 & 40 & 0 \end{pmatrix}$$

Los menores principales acotados son

$$\Delta_{B_2} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \frac{40}{3} \\ 2 & \frac{40}{3} & 0 \end{vmatrix} = \tfrac{160}{3}$$

$$\Delta_{B_3} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & \frac{40}{3} & 20 \\ 2 & \frac{40}{3} & 0 & 40 \\ 3 & 20 & 40 & 0 \end{vmatrix} = -4\,800$$

Puesto que $\Delta_{B_2} > 0$ y $\Delta_{B_3} < 0$, puede llegarse a la conclusión de que ocurre un máximo relativo para $L(x_1, x_2, x_3, \lambda)$ [y también para $f(x_1, x_2, x_3)$] cuando $x_1 = 8$, $x_2 = 4$, $x_3 = \frac{8}{3}$ y $\lambda = \frac{160}{3}$. El valor máximo restringido o acotado es

$$\begin{aligned} 5x_1x_2x_3 &= 5(8)(4)(\tfrac{8}{3}) \\ &= \frac{1\,280}{3} = 426\tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

❑

Interpretación de λ

Lambda es algo más que un simple artificio que permite resolver los problemas de optimización restringida. Tiene una interpretación que puede resultar de gran utilidad. En la función lagrangiana generalizada de la ecuación (20.36),

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial k} = L_k = \lambda} \qquad \textbf{(20.45)}$$

En consecuencia, λ puede interpretarse como la tasa instantánea de cambio en el valor de la función lagrangiana respecto del que se opera en la constante k del miembro derecho de la ecuación de restricción. El valor de $\lambda = \frac{160}{3}$ en la solución óptima del ejemplo precedente indica que si la constante del miembro derecho, 24, *aumenta* (disminuye) en una unidad, el valor óptimo de $f(x_1, x_2, x_3)$ *crecerá* (disminuirá) aproximadamente $\frac{160}{3}$ unidades con respecto del máximo actual de $426\frac{2}{3}$.

La interpretación de λ en la economía puede ser de mucha utilidad en problemas donde la restricción o restricciones representan cosas como escasez de recursos. Si existe la capacidad de proporcionar recursos adicionales, los valores de λ ofrecerán una pauta o lineamiento para su asignación*.

---

* Para los que estudiaron programación lineal en los capítulos 10 a 12, λ es equivalente a un *precio sombra*.

Extensiones

El método de Lagrange puede ampliarse al caso de restricciones múltiples y al de conjuntos de restricciones que comprenden tipos de restricción de desigualdad e igualdad. Sin embargo, esas situaciones rebasan el alcance de este libro.

Sección 20.6 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 8, analice la función de los extremos relativos y pruebe la naturaleza de los extremos que se encuentren.

1. $f(x_1, x_2) = -3x_1^2 - 2x_2^2 + 20x_1x_2$ sujeta a $x_1 + x_2 = 100$
2. $f(x_1, x_2) = x_1x_2$ sujeta a $x_1 + x_2 = 6$
3. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2 - 6x_2$ sujeta a $x_1 + x_2 = 42$
4. $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 6x_2^2 - x_1x_2$ sujeta a $x_1 + 2x_2 = 24$
5. $f(x_1, x_2) = 12x_1x_2 - 3x_2^2 - x_1^2$ sujeta a $x_1 + x_2 = 16$
6. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ sujeta a $x_1 - x_2 + 2x_3 = 6$
7. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2$ sujeta a $x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 16$
8. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3$ sujeta a $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 18$

9. Una compañía ha recibido una orden de 200 unidades para uno de sus productos. El pedido será surtido con la producción combinada de sus dos plantas. La función conjunta de costo de la fabricación de este producto es

$$C = f(q_1, q_2) = 2q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2 + 500$$

donde q_1 y q_2 son las cantidades producidas en las plantas 1 y 2, respectivamente. Si el objetivo es minimizar los costos totales, sujeto a la condición de suministrar 200 unidades procedentes de ambas plantas, ¿qué cantidades deberá proporcionar cada una?

10. Una fábrica elabora dos clases de productos. La función conjunta del costo es

$$C = f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2$$

donde C es el costo de la producción semanal en miles de dólares, y x_1 y x_2 indican las cantidades fabricadas de los dos productos cada semana. Si la producción semanal combinada es de 16 unidades, ¿qué cantidades de cada producto darán por resultado los costos totales mínimos?

❑ TÉRMINOS Y CONCEPTOS CLAVE

derivada parcial 975
derivada parcial mixta 984
función bivariada 970
función lagrangiana 1019
funciones de varias variables 970
hipersuperficie 1014
matriz hessiana 1015
matriz hessiana acotada 1021
máximo relativo (función bivariada) 988
máximo relativo (función de *n* variables) 1014
menores principales 1016
mínimo relativo (función bivariada) 988
mínimo relativo (función de *n* variables) 1014
modelo de mínimos cuadrados 1009
multiplicador de Lagrange 1019
optimización no restringida 1019
punto en silla de montar 992
segunda derivada parcial pura 984
traza 973

FÓRMULAS IMPORTANTES

$$D(x^*, y^*) = f_{xx}(x^*, y^*)f_{yy}(x^*, y^*) - [f_{xy}(x^*, y^*)]^2 \tag{20.13}$$

$$S = f(a, b) = \sum_{j=1}^{n} [y_j - (ax_j + b)]^2 \tag{20.23}$$

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) - \lambda[g(x_1, x_2) - k] \tag{20.28}$$

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \lambda[g(x_1, x_2, \ldots, x_n) - k] \tag{20.36}$$

EJERCICIOS ADICIONALES

SECCIÓN 20.2

Determine f_x y f_y en las siguientes funciones.

1. $f(x, y) = 6x^2 + 8x^2y + y^3$
2. $f(x, y) = 6x^2y^4 - 8x^3y^2$
3. $f(x, y) = (5x^3 + 7y^3)^4$
4. $f(x, y) = \sqrt[3]{4xy^3 + 10x}$
5. $f(x, y) = (x^2 + y)/8xy^2$
6. $f(x, y) = 3x^2(x + y^2)^3$
7. $f(x, y) = e^{4xy}$
8. $f(x, y) = e^{x/y^2}$
9. $f(x, y) = 10x^4y^5$
10. $f(x, y) = 5x^2y^5$
11. $f(x, y) = x^3/4y^2$
12. $f(x, y) = -4y^3/x^4$
13. $f(x, y) = e^{x^2y}$
14. $f(x, y) = 10e^{4x^2y^3}$
15. $f(x, y) = \ln(x/y)$
16. $f(x, y) = \ln(x^3y^4)$
17. $f(x, y) = 20x^3/\ln y$
18. $f(x, y) = 40xy^3/\ln x$

Encuentre las derivadas parciales de segundo orden en las siguientes funciones.

19. $f(x, y) = 10x^2y^3$
20. $f(x, y) = 5x^3 + 2xy^2 + 5y^2$
21. $f(x, y) = \ln xy$
22. $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$
23. $f(x, y) = (3x - 2y)^4$
24. $f(x, y) = (5x - 3y)^4$
25. $f(x, y) = \sqrt{x - y}$
26. $f(x, y) = \sqrt{10x - 5y}$
27. $f(x, y) = 25x^4y$
28. $f(x, y) = x^5y^3/2$

SECCIÓN 20.3

Para las siguientes funciones, determine la localización y naturaleza de todos los puntos críticos.

29. $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + 80x + 40y + 10$

30. $f(x, y) = 2x^2 + xy - 9x - 2y^2 + 2y$

31. $f(x, y) = x^3/3 - 5x^2/2 + 6y^2 + 36y$

32. $f(x, y) = -4x^2 + 12xy + 44x - 12y^2 + 12y$

33. $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 8x - 8y + 5$

34. $f(x, y) = -2x^2 + 16x - 75y + y^3 + 5$

35. $f(x, y) = x^3 + y^2 - 12x + 16y + 10$

36. $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 36y + 22$

37. $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + 4x - 9y + 10$

38. $f(x, y) = -4x^2 + 12x - 3y^2 + 36y - 5$

39. $f(x, y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 + 1.5y^2 - 12x - 90y$

40. $f(x, y) = xy - 1/x - 1/y$

41. $f(x, y) = 6x^2 + 30x + y^2 - 6y$

42. $f(x, y) = xy + 4\ln x + 2y^2 - 10, \quad x > 0$

SECCIÓN 20.4

43. Una empresa vende dos productos. El ingreso total anual R se comporta como una función del número de unidades vendidas. En concreto,

$$R = 400x - 4x^2 + 1\,960y - 8y^2$$

donde x y y son, respectivamente, el número de unidades vendidas de cada producto. El costo de fabricar los dos productos es

$$C = 100 + 2x^2 + 4y^2 + 2xy$$

a) Determine el número de unidades que deberán producirse y venderse a fin de maximizar la utilidad anual.
b) ¿Cuál es el ingreso total?
c) ¿Cuáles son los costos totales?
d) ¿Cuál es la utilidad máxima?

44. Una compañía vende dos productos. Las funciones de demanda de ambos son

$$q_1 = 110 - 4p_1 - p_2$$

$$q_2 = 90 - 2p_1 - 3p_2$$

donde p_j es el precio del producto j en dólares y q_j indica la demanda (en miles de unidades) del producto j.

a) Determine los precios que deberían fijarse a cada producto con el fin de maximizar el ingreso total que se consigue de ellos.
b) ¿Cuántas unidades se demandarán de cada producto con estos precios?
c) ¿Cuál se espera que sea el máximo ingreso total?

45. Con los cuatro puntos de datos $(-1, 12.5)$, $(3, 7.5)$, $(-4, 25)$ y $(10, -10)$, determine la ecuación de la línea del mejor ajuste sirviéndose del modelo de los mínimos cuadrados.

46. Con los puntos de datos $(10, 10)$, $(-8, 1)$ y $(2, 6)$, obtenga la ecuación de la línea del mejor ajuste empleando el modelo de los mínimos cuadrados.

***47.** Se va a diseñar un recipiente rectangular que tendrá un volumen de 64 000 pulgadas cúbicas. Se pretende minimizar la cantidad de material empleado en su construcción. Así pues, hay que minimizar la superficie. Si x, y y z representan las dimensiones del recipiente (en pulgadas), determine las dimensiones que minimicen la superficie. (*Sugerencia*: $V = xyz$.)

SECCIÓN 20.5

En las siguientes funciones localice los puntos críticos y determine su naturaleza.

48. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 - 8x_2 - 12x_3 + 56$

49. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 2x_1x_3$

50. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + 4x_1 - 4x_2 + 8x_3$

51. $f(x_1, x_2, x_3) = 200 - x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 20x_1 + 10x_2 + 20x_3$

SECCIÓN 20.6

Examine las siguientes funciones en busca de extremos relativos y pruebe la naturaleza de los extremos. ¿Cuál es el valor óptimo de λ?

52. $f(x_1, x_2) = 20x_1 + 10x_2 - x_1^2 - x_2^2$ sujeta a $x_1 + 2x_2 - 10 = 0$

53. $f(x_1, x_2) = -x_2^2 - 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 16x_1 + 10x_2$ sujeta a $2x_1 + x_2 - 60 = 0$

54. $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 - 60x_1 - 32x_2 + 400$ sujeta a $x_1 + x_2 - 10 = 0$

55. $f(x_1, x_2) = 2x_2^2 - 6x_1^2$ sujeta a $2x_1 + x_2 - 4 = 0$

56. Se va a diseñar un recipiente cilíndrico que contendrá 12 onzas, o 26 pulgadas cúbicas, de líquido. Determine las dimensiones (altura y radio) que darán por resultado la superficie mínima del recipiente. ¿Cuál es la superficie mínima? (Suponga que el recipiente tiene una parte superior y otra inferior.)

57. Una empresa estima que su utilidad mensual es una función de la cantidad de dinero que destina mensualmente a la publicidad por radio y televisión. La función de utilidad es

$$P = f(x, y) = \frac{80x}{5 + x} + \frac{40y}{10 + y} - 2x - 2y$$

donde P es la utilidad mensual (en miles de dólares), y tanto x como y indican el gasto mensual, tanto en publicidad por radio como por televisión, respectivamente (ambos en miles de dólares). Si el presupuesto mensual de publicidad es de \$25 000, calcule la cantidad que debería asignarse a ambos medios con objeto de maximizar la utilidad mensual. ¿Cuál es el valor óptimo de λ? Interprete el significado de ese valor.

***58.** Va a construirse un almacén que tendrá un volumen de 850 000 pies cúbicos. Debe tener cimientos rectangulares con dimensiones de x pies por y pies y una altura de z pies. Los costos de construcción se estiman a partir del área del piso y el techo, así como a partir del área de la pared. Los costos estimados son \$6 por pie cuadrado del área de la pared, \$8 por pie cuadrado del área del piso y \$6 por pie cuadrado del área del techo.

a) Formule la función de costo de la construcción de la bodega.

b) Determine las dimensiones del edificio que darán como resultado los costos mínimos de construcción.

c) ¿Cuál es el costo mínimo?

❑ EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. Dé dos interpretaciones de f_x.

2. ¿Qué es una *traza*?

3. Determine f_x y f_y, si

$$f(x, y) = 15x^3 - 4y^2 + 5x^2y^3$$

4. Determine todas las derivadas parciales de segundo orden para la función

$$f(x, y) = 8x^5 + 6x^2 + 8x^2y^3$$

5. En la función

$$f(x, y) = 3x^2 - 4xy + 3y^2 + 8x - 17y + 5$$

a) Localice los puntos críticos y determine su naturaleza.

b) ¿Qué es $f(x^*, y^*)$?

6. Un investigador de una universidad de agricultura estimó que las utilidades anuales de una granja de la localidad pueden describirse mediante la función

$$P = 1\,600x + 2\,400y - 2x^2 - 4y^2 - 4xy$$

donde P es la utilidad anual en dólares, x es el número de acres plantados con soya, y la y indica la cantidad de acres en que se plantó maíz. Determine el número de acres de cada cultivo que deberían sembrarse si el objetivo es maximizar las utilidades anuales. ¿Cuál se espera que sea la utilidad máxima?

7. Localice cualquier punto crítico y determine su naturaleza para la función

$$f(x_1, x_2, x_3) = -5x_1^2 - 8x_2^2 - 3x_3^2 + 40x_1 - 40x_2 + 24x_3 + 100$$

8. Dada la función

$$f(x_1, x_2) = -4x_1^3 + 3x_2^2 - 4x_1x_2$$

$$\text{sujeta a} \qquad x_1 - 2x_2 - 20 = 0$$

formule la función lagrangiana.

MINICASO

MODELO DE INVENTARIO DE PEDIDOS RETRASADOS

Una variante del modelo clásico de la cantidad económica de pedido EOQ (Economic Order Quantity) (minicaso del capítulo 17, página 863) admite la posibilidad de escasez de los elementos de un inventario. En este modelo, un inventario puede agotarse y seguir habiendo demanda del producto. Esto provoca escasez del mismo, y el modelo supone que esos productos pueden surtirse al reponerse las existencias. Cuando se reponen dichas existencias, la demanda de esos pedidos se surte en primer lugar, y el resto de los productos se ponen en el inventario. Este tipo de administración de inventario es muy común entre los proveedores; por ejemplo, entre los que laboran en la industria de los muebles para el hogar. Aunque los proveedores incurren en costos adicionales al permitir la escasez, esperan reducir los costos de inventario (al mantener menos inventario), así como los de pedido (al ordenar con menos frecuencia y en mayores cantidades).

En la figura 20.25 se muestra un típico ciclo de inventario aplicable a este modelo. La demanda constante origina un agotamiento lineal de las existencias a partir de un nivel máximo de L. Después de t_1 unidades de tiempo, el inventario se agota. La demanda dura un tiempo t_2 antes de que se repongan las existencias de q unidades. Durante t_2 la demanda continuada del producto ocasiona una escasez de S unidades. Por lo tanto, tras la llegada de las existencias de reposición, S unidades deberán ser asignadas para cubrir la escasez.

Si

☐ D = *demanda anual en unidades*

☐ C_o = *costo de pedido por orden*

☐ C_h = *costo de inventario por elemento al año*

☐ C_s = *costo de escasez por elemento al año*

☐ S = *escasez máxima (en unidades)*

☐ q = *cantidad de pedido*

la función relevante del costo es

$$TC = \text{costo anual por pedido} + \text{costo anual de inventario} + \text{costo anual de escasez}$$

o

$$TC = f(q, S) = \frac{D}{q}C_o + \frac{(q-S)^2}{2q}C_h + \frac{S^2C_s}{2q} \qquad \textbf{(20.46)}$$

Condiciones:

a) Si $D = 600\,000$, $C_o = \$100$, $C_h = \$0.25$ y $C_s = \$2$, determine los valores de q y S que minimizan los costos totales anuales de pedidos, mantenimiento de inventario y escasez. ¿Cuál es el costo mínimo? ¿Y cuál es el nivel máximo de inventario?

b) Con la ecuación (20.46) demuestre que las expresiones generales de q y S que producen el mínimo costo de inventario anual son

$$q^* = \sqrt{\frac{2DC_0}{C_h}\left(\frac{C_h + C_s}{C_s}\right)}$$

y

$$S^* = \sqrt{\frac{2C_0DC_h}{C_hC_s + C_s^2}}$$

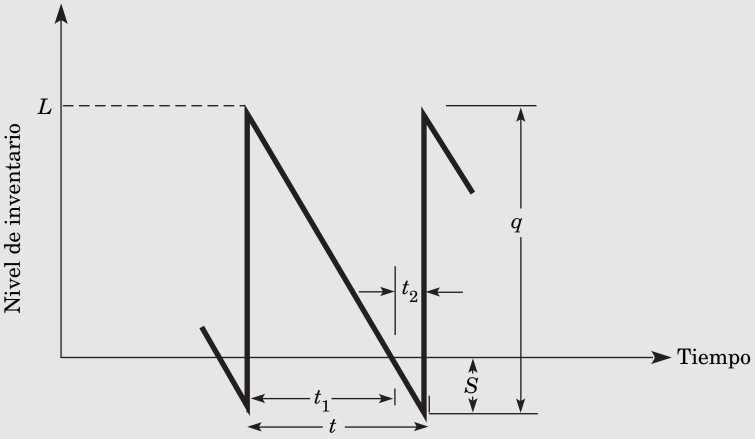


Figura 20.25 Modelo clásico de la cantidad económica de pedido: ciclo de inventario con pedidos retrasados.

Tablas de interés compuesto

Tabla I	Factor del monto compuesto $(1+i)^n$
Tabla II	Factor del valor presente $(1+i)^{-n}$
Tabla III	Factor del monto compuesto de una anualidad $\frac{(1+i)^n-1}{i}=s_{\overline{n}\rceil i}$
Tabla IV	Factor del fondo de amortización $\frac{i}{(1+i)^n-1}=\frac{1}{s_{\overline{n}\rceil i}}$
Tabla V	Factor del valor presente de una anualidad $\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}=a_{\overline{n}\rceil i}$
Tabla VI	Factor de recuperación del capital $\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}=\frac{1}{a_{\overline{n}\rceil i}}$
Tabla VII	Pago mensual por dólar del préstamo hipotecario

Tabla I Factor del monto compuesto $(1+i)^n$

	i					
n	**0.01 (1%)**	**0.015 (1½%)**	**0.02 (2%)**	**0.025 (2½%)**	**0.03 (3%)**	**0.035 (3½%)**
1	1.01000	1.01500	1.02000	1.02500	1.03000	1.03500
2	1.02010	1.03022	1.04040	1.05062	1.06090	1.07122
3	1.03030	1.04568	1.06121	1.07689	1.09273	1.10872
4	1.04060	1.06136	1.08243	1.10381	1.12551	1.14752
5	1.05101	1.07728	1.10408	1.13141	1.15927	1.18769
6	1.06152	1.09344	1.12616	1.15969	1.19405	1.22926
7	1.07214	1.10984	1.14869	1.18869	1.22987	1.27228
8	1.08286	1.12649	1.17166	1.21840	1.26677	1.31681
9	1.09369	1.14339	1.19509	1.24886	1.30477	1.36290
10	1.10462	1.16054	1.21899	1.28008	1.34392	1.41060
11	1.11567	1.17795	1.24337	1.31209	1.38423	1.45997
12	1.12683	1.19562	1.26824	1.34489	1.42576	1.51107
13	1.13809	1.21355	1.29361	1.37851	1.46853	1.56396
14	1.14947	1.23176	1.31948	1.41297	1.51259	1.61869
15	1.16097	1.25023	1.34587	1.44830	1.55797	1.67535
16	1.17258	1.26899	1.37279	1.48451	1.60471	1.73399
17	1.18430	1.28802	1.40024	1.52162	1.65285	1.79468
18	1.19615	1.30734	1.42825	1.55966	1.70243	1.85749
19	1.20811	1.32695	1.45681	1.59865	1.75351	1.92250
20	1.22019	1.34686	1.48595	1.63862	1.80611	1.98979
21	1.23239	1.36706	1.51567	1.67958	1.86029	2.05943
22	1.24472	1.38756	1.54598	1.72157	1.91610	2.13151
23	1.25716	1.40838	1.57690	1.76461	1.97359	2.20611
24	1.26973	1.42950	1.60844	1.80873	2.03279	2.28333
25	1.28243	1.45095	1.64061	1.85394	2.09378	2.36324
26	1.29526	1.47271	1.67342	1.90029	2.15659	2.44596
27	1.30821	1.49480	1.70689	1.94780	2.22129	2.53157
28	1.32129	1.51722	1.74102	1.99650	2.28793	2.62017
29	1.33450	1.53998	1.77584	2.04641	2.35657	2.71188
30	1.34785	1.56308	1.81136	2.09757	2.42726	2.80679
31	1.36133	1.58653	1.84759	2.15001	2.50008	2.90503
32	1.37494	1.61032	1.88454	2.20376	2.57508	3.00671
33	1.38869	1.63448	1.92223	2.25885	2.65234	3.11194
34	1.40258	1.65900	1.96068	2.31532	2.73191	3.22086
35	1.41660	1.68388	1.99989	2.37321	2.81386	3.33359
36	1.43077	1.70914	2.03989	2.43254	2.89828	3.45027
37	1.44508	1.73478	2.08069	2.49335	2.98523	3.57103
38	1.45953	1.76080	2.12230	2.55568	3.07478	3.69601
39	1.47412	1.78721	2.16474	2.61957	3.16703	3.82537
40	1.48886	1.81402	2.20804	2.68506	3.26204	3.95926
41	1.50375	1.84123	2.25220	2.75219	3.35990	4.09783
42	1.51879	1.86885	2.29724	2.82100	3.46070	4.24126
43	1.53398	1.89688	2.34319	2.89152	3.56452	4.38970
44	1.54932	1.92533	2.39005	2.96381	3.67145	4.54334
45	1.56481	1.95421	2.43785	3.03790	3.78160	4.70236
46	1.58046	1.98353	2.48661	3.11385	3.89504	4.86694
47	1.59626	2.01328	2.53634	3.19170	4.01190	5.03728
48	1.61223	2.04348	2.58707	3.27149	4.13225	5.21359
49	1.62835	2.07413	2.63881	3.35328	4.25622	5.39606
50	1.64463	2.10524	2.69159	3.43711	4.38391	5.58493
51	1.66108	2.13682	2.74542	3.52304	4.51542	5.78040
52	1.67769	2.16887	2.80033	3.61111	4.65089	5.98271
53	1.69447	2.20141	2.85633	3.70139	4.79041	6.19211
54	1.71141	2.23443	2.91346	3.79392	4.93412	6.40883
55	1.72852	2.26794	2.97173	3.88877	5.08215	6.63314
56	1.74581	2.30196	3.03117	3.98599	5.23461	6.86530
57	1.76327	2.33649	3.09179	4.08564	5.39165	7.10559
58	1.78090	2.37154	3.15362	4.18778	5.55340	7.35428
59	1.79871	2.40711	3.21670	4.29248	5.72000	7.61168
60	1.81670	2.44322	3.28103	4.39979	5.89160	7.87809

Tabla I **Factor del monto compuesto $(1 + i)^n$** (*continúa*)

	i					
n	**0.04 (4%)**	**0.045 ($4\frac{1}{2}$%)**	**0.05 (5%)**	**0.06 (6%)**	**0.07 (7%)**	**0.08 (8%)**
1	1.04000	1.04500	1.05000	1.06000	1.07000	1.08000
2	1.08160	1.09202	1.10250	1.12360	1.14490	1.16640
3	1.12486	1.14117	1.15762	1.19102	1.22504	1.25971
4	1.16986	1.19252	1.21551	1.26248	1.31080	1.36049
5	1.21665	1.24618	1.27628	1.33823	1.40255	1.46933
6	1.26532	1.30226	1.34010	1.41852	1.50073	1.58687
7	1.31593	1.36086	1.40710	1.50363	1.60578	1.71382
8	1.36857	1.42210	1.47746	1.59385	1.71819	1.85093
9	1.42331	1.48610	1.55133	1.68948	1.83846	1.99900
10	1.48024	1.55297	1.62889	1.79085	1.96715	2.15892
11	1.53945	1.62285	1.71034	1.89830	2.10485	2.33164
12	1.60103	1.69588	1.79586	2.01220	2.25219	2.51817
13	1.66507	1.77220	1.88565	2.13293	2.40985	2.71962
14	1.73168	1.85194	1.97993	2.26090	2.57853	2.93719
15	1.80094	1.93528	2.07893	2.39656	2.75903	3.17217
16	1.87298	2.02237	2.18287	2.54035	2.95216	3.42594
17	1.94790	2.11338	2.29202	2.69277	3.15882	3.70002
18	2.02582	2.20848	2.40662	2.85434	3.37993	3.99602
19	2.10685	2.30786	2.52695	3.02560	3.61653	4.31570
20	2.19112	2.41171	2.65330	3.20714	3.86968	4.66096
21	2.27877	2.52024	2.78596	3.39956	4.14056	5.03383
22	2.36992	2.63365	2.92526	3.60354	4.43040	5.43654
23	2.46472	2.75217	3.07152	3.81975	4.74053	5.87146
24	2.56330	2.87601	3.22510	4.04893	5.07237	6.34118
25	2.66584	3.00543	3.38635	4.29187	5.42743	6.84848
26	2.77247	3.14068	3.55567	4.54938	5.80735	7.39635
27	2.88337	3.28201	3.73346	4.82235	6.21387	7.98806
28	2.99870	3.42970	3.92013	5.11169	6.64884	8.62711
29	3.11865	3.58404	4.11614	5.41839	7.11426	9.31727
30	3.24340	3.74532	4.32194	5.74349	7.61226	10.06266
31	3.37313	3.91386	4.53804	6.08810	8.14511	10.86767
32	3.50806	4.08998	4.76494	6.45339	8.71527	11.73708
33	3.64838	4.27403	5.00319	6.84059	9.32534	12.67605
34	3.79432	4.46636	5.25335	7.25103	9.97811	13.69013
35	3.94609	4.66735	5.51602	7.68609	10.67658	14.78534
36	4.10393	4.87738	5.79182	8.14725	11.42394	15.96817
37	4.26809	5.09686	6.08141	8.63609	12.22362	17.24563
38	4.43881	5.32622	6.38548	9.15425	13.07927	18.62528
39	4.61637	5.56590	6.70475	9.70351	13.99482	20.11530
40	4.80102	5.81636	7.03999	10.28572	14.97446	21.72452
41	4.99306	6.07810	7.39199	10.90286	16.02267	23.46248
42	5.19278	6.35162	7.76159	11.55703	17.14426	25.33948
43	5.40050	6.63744	8.14967	12.25045	18.34435	27.36664
44	5.61652	6.93612	8.55715	12.98548	19.62846	29.55597
45	5.84118	7.24825	8.98501	13.76461	21.00245	31.92045
46	6.07482	7.57442	9.43426	14.59049	22.47262	34.47409
47	6.31782	7.91527	9.90597	15.46592	24.04571	37.23201
48	6.57053	8.27146	10.40127	16.39387	25.72891	40.21057
49	6.83335	8.64367	10.92133	17.37750	27.52993	43.42742
50	7.10668	9.03264	11.46740	18.42015	29.45703	46.90161
51	7.39095	9.43910	12.04077	19.52536	31.51902	50.65374
52	7.68659	9.86386	12.64281	20.69689	33.72535	54.70604
53	7.99405	10.30774	13.27495	21.93870	36.08612	59.08252
54	8.31381	10.77159	13.93870	23.25502	38.61215	63.80913
55	8.64637	11.25631	14.63563	24.65032	41.31500	68.91386
56	8.99222	11.76284	15.36741	26.12934	44.20705	74.42696
57	9.35191	12.29217	16.13578	27.69710	47.30155	80.38112
58	9.72599	12.84532	16.94257	29.35893	50.61265	86.81161
59	10.11503	13.42336	17.78970	31.12046	54.15554	93.75654
60	10.51963	14.02741	18.67919	32.98769	57.94643	101.25706

Tabla I **Factor del monto compuesto $(1 + i)^n$** (*continúa*)

	i					
n	**0.09 (9%)**	**0.10 (10%)**	**0.11 (11%)**	**0.12 (12%)**	**0.13 (13%)**	**0.14 (14%)**
1	1.09000	1.10000	1.11000	1.12000	1.13000	1.14000
2	1.18810	1.21000	1.23210	1.25440	1.27690	1.29960
3	1.29503	1.33100	1.36763	1.40493	1.44290	1.48154
4	1.41158	1.46410	1.51807	1.57352	1.63047	1.68896
5	1.53862	1.61051	1.68506	1.76234	1.84244	1.92541
6	1.67710	1.77156	1.87041	1.97382	2.08195	2.19497
7	1.82804	1.94872	2.07616	2.21068	2.35261	2.50227
8	1.99256	2.14359	2.30454	2.47596	2.65844	2.85259
9	2.17189	2.35795	2.55804	2.77308	3.00404	3.25195
10	2.36736	2.59374	2.83942	3.10585	3.39457	3.70722
11	2.58043	2.85312	3.15176	3.47855	3.83586	4.22623
12	2.81266	3.13843	3.49845	3.89598	4.33452	4.81790
13	3.06580	3.45227	3.88328	4.36349	4.89801	5.49241
14	3.34173	3.79750	4.31044	4.88711	5.53475	6.26135
15	3.64248	4.17725	4.78459	5.47357	6.25427	7.13794
16	3.97031	4.59497	5.31089	6.13039	7.06733	8.13725
17	4.32763	5.05447	5.89509	6.86604	7.98608	9.27646
18	4.71712	5.55992	6.54355	7.68997	9.02427	10.57517
19	5.14166	6.11591	7.26334	8.61276	10.19742	12.05569
20	5.60441	6.72750	8.06231	9.64629	11.52309	13.74349
21	6.10881	7.40025	8.94917	10.80385	13.02109	15.66758
22	6.65860	8.14027	9.93357	12.10031	14.71383	17.86104
23	7.25787	8.95430	11.02627	13.55235	16.62663	20.36158
24	7.91108	9.84973	12.23916	15.17863	18.78809	23.21221
25	8.62308	10.83471	13.58546	17.00006	21.23054	26.46192
26	9.39916	11.91818	15.07986	19.04007	23.99051	30.16658
27	10.24508	13.10999	16.73865	21.32488	27.10928	34.38991
28	11.16714	14.42099	18.57990	23.88387	30.63349	39.20449
29	12.17218	15.86309	20.62369	26.74993	34.61584	44.69312
30	13.26768	17.44940	22.89230	29.95992	39.11590	50.95016
31	14.46177	19.19434	25.41045	33.55511	44.20096	58.08318
32	15.76333	21.11378	28.20560	37.58173	49.94709	66.21483
33	17.18203	23.22515	31.30821	42.09153	56.44021	75.48490
34	18.72841	25.54767	34.75212	47.14252	63.77744	86.05279
35	20.41397	28.10244	38.57485	52.79962	72.06851	98.10018
36	22.25123	30.91268	42.81808	59.13557	81.43741	111.83420
37	24.25384	34.00395	47.52807	66.23184	92.02428	127.49099
38	26.43668	37.40434	52.75616	74.17966	103.98743	145.33973
39	28.81598	41.14478	58.55934	83.08122	117.50580	165.68729
40	31.40942	45.25926	65.00087	93.05097	132.78155	188.88351
41	34.23627	49.78518	72.15096	104.21709	150.04315	215.32721
42	37.31753	54.76370	80.08757	116.72314	169.54876	245.47301
43	40.67611	60.24007	88.89720	130.72991	191.59010	279.83924
44	44.33696	66.26408	98.67589	146.41750	216.49682	319.01673
45	48.32729	72.89048	109.53024	163.98760	244.64140	363.67907
46	52.67674	80.17953	121.57857	183.66612	276.44478	414.59414
47	57.41765	88.19749	134.95221	205.70605	312.38261	472.63732
48	62.58524	97.01723	149.79695	230.39078	352.99234	538.80655
49	68.21791	106.71896	166.27462	258.03767	398.88135	614.23946
50	74.35752	117.39085	184.56483	289.00219	450.73593	700.23299
51	81.04970	129.12994	204.86696	323.68245	509.33160	798.26561
52	88.34417	142.04293	227.40232	362.52435	575.54470	910.02279
53	96.29514	156.24723	252.41658	406.02727	650.36551	1037.42598
54	104.96171	171.87195	280.18240	454.75054	734.91303	1182.66562
55	114.40826	189.05914	311.00247	509.32061	830.45173	1348.23881
56	124.70501	207.96506	345.21274	570.43908	938.41045	1536.99224
57	135.92846	228.76156	383.18614	638.89177	1060.40381	1752.17115
58	148.16202	251.63772	425.33661	715.55878	1198.25630	1997.47512
59	161.49660	276.80149	472.12364	801.42583	1354.02962	2277.12163
60	176.03129	304.48164	524.05724	897.59693	1530.05347	2595.91866

Tabla I **Factor del monto compuesto $(1 + i)^n$** (*continúa*)

	i					
n	**0.15 (15%)**	**0.16 (16%)**	**0.17 (17%)**	**0.18 (18%)**	**0.19 (19%)**	**0.20 (20%)**
1	1.15000	1.16000	1.17000	1.18000	1.19000	1.20000
2	1.32250	1.34560	1.36890	1.39240	1.41610	1.44000
3	1.52087	1.56090	1.60161	1.64303	1.68516	1.72800
4	1.74901	1.81064	1.87389	1.93878	2.00534	2.07360
5	2.01136	2.10034	2.19245	2.28776	2.38635	2.48832
6	2.31306	2.43640	2.56516	2.69955	2.83976	2.98598
7	2.66002	2.82622	3.00124	3.18547	3.37932	3.58318
8	3.05902	3.27841	3.51145	3.75886	4.02139	4.29982
9	3.51788	3.80296	4.10840	4.43545	4.78545	5.15978
10	4.04556	4.41144	4.80683	5.23384	5.69468	6.19174
11	4.65239	5.11726	5.62399	6.17593	6.77667	7.43008
12	5.35025	5.93603	6.58007	7.28759	8.06424	8.91610
13	6.15279	6.88579	7.69868	8.59936	9.59645	10.69932
14	7.07571	7.98752	9.00745	10.14724	11.41977	12.83918
15	8.13706	9.26552	10.53872	11.97375	13.58953	15.40702
16	9.35762	10.74800	12.33030	14.12902	16.17154	18.48843
17	10.76126	12.46768	14.42646	16.67225	19.24413	22.18611
18	12.37545	14.46251	16.87895	19.67325	22.90052	26.62333
19	14.23177	16.77652	19.74838	23.21444	27.25162	31.94800
20	16.36654	19.46076	23.10560	27.39303	32.42942	38.33760
21	18.82152	22.57448	27.03355	32.32378	38.59101	46.00512
22	21.64475	26.18640	31.62925	38.14206	45.92331	55.20614
23	24.89146	30.37622	37.00623	45.00763	54.64873	66.24737
24	28.62518	35.23642	43.29729	53.10901	65.03199	79.49685
25	32.91895	40.87424	50.65783	62.66863	77.38807	95.39622
26	37.85680	47.41412	59.26966	73.94898	92.09181	114.47546
27	43.53531	55.00038	69.34550	87.25980	109.58925	137.37055
28	50.06561	63.80044	81.13423	102.96656	130.41121	164.84466
29	57.57545	74.00851	94.92705	121.50054	155.18934	197.81359
30	66.21177	85.84988	111.06465	143.37064	184.67531	237.37631
31	76.14354	99.58586	129.94564	169.17735	219.76362	284.85158
32	87.56507	115.51959	152.03640	199.62928	261.51871	341.82189
33	100.69983	134.00273	177.88259	235.56255	311.20726	410.18627
34	115.80480	155.44317	208.12263	277.96381	370.33664	492.22352
35	133.17552	180.31407	243.50347	327.99729	440.70061	590.66823
36	153.15185	209.16432	284.89906	387.03680	524.43372	708.80187
37	176.12463	242.63062	333.33191	456.70343	624.07613	850.56225
38	202.54332	281.45151	389.99833	538.91004	742.65059	1020.67470
39	232.92482	326.48376	456.29805	635.91385	883.75421	1224.80964
40	267.86355	378.72116	533.86871	750.37834	1051.66751	1469.77157
41	308.04308	439.31654	624.62639	885.44645	1251.48433	1763.72588
42	354.24954	509.60719	730.81288	1044.82681	1489.26636	2116.47106
43	407.38697	591.14434	855.05107	1232.89563	1772.22696	2539.76527
44	468.49502	685.72744	1000.40975	1454.81685	2108.95009	3047.71832
45	538.76927	795.44383	1170.47941	1716.68388	2509.65060	3657.26199
46	619.58466	922.71484	1369.46091	2025.68698	2986.48422	4388.71439
47	712.52236	1070.34921	1602.26927	2390.31063	3553.91622	5266.45726
48	819.40071	1241.60509	1874.65504	2820.56655	4229.16030	6319.74872
49	942.31082	1440.26190	2193.34640	3328.26853	5032.70076	7583.69846
50	1083.65744	1670.70380	2566.21528	3927.35686	5988.91390	9100.43815
51	1246.20606	1938.01641	3002.47188	4634.28109	7126.80754	10920.52578
52	1433.13697	2248.09904	3512.89210	5468.45169	8480.90098	13104.63094
53	1648.10751	2607.79488	4110.08376	6452.77300	10092.27216	15725.55712
54	1895.32364	3025.04207	4808.79800	7614.27214	12009.80387	18870.66855
55	2179.62218	3509.04880	5626.29366	8984.84112	14291.66661	22644.80226
56	2506.56551	4070.49660	6582.76358	10602.11252	17007.08327	27173.76271
57	2882.55034	4721.77606	7701.83339	12510.49278	20238.42909	32608.51525
58	3314.93289	5477.26023	9011.14507	14762.38148	24083.73061	39130.21830
59	3812.17282	6353.62187	10543.03973	17419.61014	28659.63943	46956.26196
60	4383.99875	7370.20137	12335.35648	20555.13997	34104.97092	56347.51435

Tabla II Factor del valor presente $(1 + i)^{-n}$

	i					
n	0.01 (1%)	0.015 ($1\frac{1}{2}$%)	0.02 (2%)	0.025 ($2\frac{1}{2}$%)	0.03 (3%)	0.035 ($3\frac{1}{2}$%)
1	0.99010	0.98522	0.98039	0.97561	0.97087	0.96618
2	0.98030	0.97066	0.96117	0.95181	0.94260	0.93351
3	0.97059	0.95632	0.94232	0.92860	0.91514	0.90194
4	0.96098	0.94218	0.92385	0.90595	0.88849	0.87144
5	0.95147	0.92826	0.90573	0.88385	0.86261	0.84197
6	0.94205	0.91454	0.88797	0.86230	0.83748	0.81350
7	0.93272	0.90103	0.87056	0.84127	0.81309	0.78599
8	0.92348	0.88771	0.85349	0.82075	0.78941	0.75941
9	0.91434	0.87459	0.83676	0.80073	0.76642	0.73373
10	0.90529	0.86167	0.82035	0.78120	0.74409	0.70892
11	0.89632	0.84893	0.80426	0.76214	0.72242	0.68495
12	0.88745	0.83639	0.78849	0.74356	0.70138	0.66178
13	0.87866	0.82403	0.77303	0.72542	0.68095	0.63940
14	0.86996	0.81185	0.75788	0.70773	0.66112	0.61778
15	0.86135	0.79985	0.74301	0.69047	0.64186	0.59689
16	0.85282	0.78803	0.72845	0.67362	0.62317	0.57671
17	0.84438	0.77639	0.71416	0.65720	0.60502	0.55720
18	0.83602	0.76491	0.70016	0.64117	0.58739	0.53836
19	0.82774	0.75361	0.68643	0.62553	0.57029	0.52016
20	0.81954	0.74247	0.67297	0.61027	0.55368	0.50257
21	0.81143	0.73150	0.65978	0.59539	0.53755	0.48557
22	0.80340	0.72069	0.64684	0.58086	0.52189	0.46915
23	0.79544	0.71004	0.63416	0.56670	0.50669	0.45329
24	0.78757	0.69954	0.62172	0.55288	0.49193	0.43796
25	0.77977	0.68921	0.60953	0.53939	0.47761	0.42315
26	0.77205	0.67902	0.59758	0.52623	0.46369	0.40884
27	0.76440	0.66899	0.58586	0.51340	0.45019	0.39501
28	0.75684	0.65910	0.57437	0.50088	0.43708	0.38165
29	0.74934	0.64936	0.56311	0.48866	0.42435	0.36875
30	0.74192	0.63976	0.55207	0.47674	0.41199	0.35628
31	0.73458	0.63031	0.54125	0.46511	0.39999	0.34423
32	0.72730	0.62099	0.53063	0.45377	0.38834	0.33259
33	0.72010	0.61182	0.52023	0.44270	0.37703	0.32134
34	0.71297	0.60277	0.51003	0.43191	0.36604	0.31048
35	0.70591	0.59387	0.50003	0.42137	0.35538	0.29998
36	0.69892	0.58509	0.49022	0.41109	0.34503	0.28983
37	0.69200	0.57644	0.48061	0.40107	0.33498	0.28003
38	0.68515	0.56792	0.47119	0.39128	0.32523	0.27056
39	0.67837	0.55953	0.46195	0.38174	0.31575	0.26141
40	0.67165	0.55126	0.45289	0.37243	0.30656	0.25257
41	0.66500	0.54312	0.44401	0.36335	0.29763	0.24403
42	0.65842	0.53509	0.43530	0.35448	0.28896	0.23578
43	0.65190	0.52718	0.42677	0.34584	0.28054	0.22781
44	0.64545	0.51939	0.41840	0.33740	0.27237	0.22010
45	0.63905	0.51171	0.41020	0.32917	0.26444	0.21266
46	0.63273	0.50415	0.40215	0.32115	0.25674	0.20547
47	0.62646	0.49670	0.39427	0.31331	0.24926	0.19852
48	0.62026	0.48936	0.38654	0.30567	0.24200	0.19181
49	0.61412	0.48213	0.37896	0.29822	0.23495	0.18532
50	0.60804	0.47500	0.37153	0.29094	0.22811	0.17905
51	0.60202	0.46798	0.36424	0.28385	0.22146	0.17300
52	0.59606	0.46107	0.35710	0.27692	0.21501	0.16715
53	0.59016	0.45426	0.35010	0.27017	0.20875	0.16150
54	0.58431	0.44754	0.34323	0.26358	0.20267	0.15603
55	0.57853	0.44093	0.33650	0.25715	0.19677	0.15076
56	0.57280	0.43441	0.32991	0.25088	0.19104	0.14566
57	0.56713	0.42799	0.32344	0.24476	0.18547	0.14073
58	0.56151	0.42167	0.31710	0.23879	0.18007	0.13598
59	0.55595	0.41544	0.31088	0.23297	0.17483	0.13138
60	0.55045	0.40930	0.30478	0.22728	0.16973	0.12693

Tabla II **Factor del valor presente $(1 + i)^{-n}$** (*continúa*)

	i					
n	**0.04 (4%)**	**0.045 ($4\frac{1}{2}$%)**	**0.05 (5%)**	**0.06 (6%)**	**0.07 (7%)**	**0.08 (8%)**
1	0.96154	0.95694	0.95238	0.94340	0.93458	0.92593
2	0.92456	0.91573	0.90703	0.89000	0.87344	0.85734
3	0.88900	0.87630	0.86384	0.83962	0.81630	0.79383
4	0.85480	0.83856	0.82270	0.79209	0.76290	0.73503
5	0.82193	0.80245	0.78353	0.74726	0.71299	0.68058
6	0.79031	0.76790	0.74622	0.70496	0.66634	0.63017
7	0.75992	0.73483	0.71068	0.66506	0.62275	0.58349
8	0.73069	0.70319	0.67684	0.62741	0.58201	0.54027
9	0.70259	0.67290	0.64461	0.59190	0.54393	0.50025
10	0.67556	0.64393	0.61391	0.55839	0.50835	0.46319
11	0.64958	0.61620	0.58468	0.52679	0.47509	0.42888
12	0.62460	0.58966	0.55684	0.49697	0.44401	0.39711
13	0.60057	0.56427	0.53032	0.46884	0.41496	0.36770
14	0.57748	0.53997	0.50507	0.44230	0.38782	0.34046
15	0.55526	0.51672	0.48102	0.41727	0.36245	0.31524
16	0.53391	0.49447	0.45811	0.39365	0.33873	0.29189
17	0.51337	0.47318	0.43630	0.37136	0.31657	0.27027
18	0.49363	0.45280	0.41552	0.35034	0.29586	0.25025
19	0.47464	0.43330	0.39573	0.33051	0.27651	0.23171
20	0.45639	0.41464	0.37689	0.31180	0.25842	0.21455
21	0.43883	0.39679	0.35894	0.29416	0.24151	0.19866
22	0.42196	0.37970	0.34185	0.27751	0.22571	0.18394
23	0.40573	0.36335	0.32557	0.26180	0.21095	0.17032
24	0.39012	0.34770	0.31007	0.24698	0.19715	0.15770
25	0.37512	0.33273	0.29530	0.23300	0.18425	0.14602
26	0.36069	0.31840	0.28124	0.21981	0.17220	0.13520
27	0.34682	0.30469	0.26785	0.20737	0.16093	0.12519
28	0.33348	0.29157	0.25509	0.19563	0.15040	0.11591
29	0.32065	0.27902	0.24295	0.18456	0.14056	0.10733
30	0.30832	0.26700	0.23138	0.17411	0.13137	0.09938
31	0.29646	0.25550	0.22036	0.16425	0.12277	0.09202
32	0.28506	0.24450	0.20987	0.15496	0.11474	0.08520
33	0.27409	0.23397	0.19987	0.14619	0.10723	0.07889
34	0.26355	0.22390	0.19035	0.13791	0.10022	0.07305
35	0.25342	0.21425	0.18129	0.13011	0.09366	0.06763
36	0.24367	0.20503	0.17266	0.12274	0.08754	0.06262
37	0.23430	0.19620	0.16444	0.11579	0.08181	0.05799
38	0.22529	0.18775	0.15661	0.10924	0.07646	0.05369
39	0.21662	0.17967	0.14915	0.10306	0.07146	0.04971
40	0.20829	0.17193	0.14205	0.09722	0.06678	0.04603
41	0.20028	0.16453	0.13528	0.09172	0.06241	0.04262
42	0.19257	0.15744	0.12884	0.08653	0.05833	0.03946
43	0.18517	0.15066	0.12270	0.08163	0.05451	0.03654
44	0.17805	0.14417	0.11686	0.07701	0.05095	0.03383
45	0.17120	0.13796	0.11130	0.07265	0.04761	0.03133
46	0.16461	0.13202	0.10600	0.06854	0.04450	0.02901
47	0.15828	0.12634	0.10095	0.06466	0.04159	0.02686
48	0.15219	0.12090	0.09614	0.06100	0.03837	0.02487
49	0.14634	0.11569	0.09156	0.05755	0.03632	0.02303
50	0.14071	0.11071	0.08720	0.05429	0.03395	0.02132
51	0.13530	0.10594	0.08305	0.05122	0.03173	0.01974
52	0.13010	0.10138	0.07910	0.04832	0.02965	0.01828
53	0.12509	0.09701	0.07533	0.04558	0.02771	0.01693
54	0.12028	0.09284	0.07174	0.04300	0.02590	0.01567
55	0.11566	0.08884	0.06833	0.04057	0.02420	0.01451
56	0.11121	0.08501	0.06507	0.03827	0.02262	0.01344
57	0.10693	0.08135	0.06197	0.03610	0.02114	0.01244
58	0.10282	0.07785	0.05902	0.03406	0.01976	0.01152
59	0.09886	0.07450	0.05621	0.03213	0.01847	0.01067
60	0.09506	0.07129	0.05354	0.03031	0.01726	0.00988

Tabla II Factor del valor presente $(1 + i)^{-n}$ (*continúa*)

	i					
n	**0.09 (9%)**	**0.10 (10%)**	**0.11 (11%)**	**0.12 (12%)**	**0.13 (13%)**	**0.14 (14%)**
1	0.91743	0.90909	0.90090	0.89286	0.88496	0.87719
2	0.84168	0.82645	0.81162	0.79719	0.78315	0.76947
3	0.77218	0.75131	0.73119	0.71178	0.69305	0.67497
4	0.70843	0.68301	0.65873	0.63552	0.61332	0.59208
5	0.64993	0.62092	0.59345	0.56743	0.54276	0.51937
6	0.59627	0.56447	0.53464	0.50663	0.48032	0.45559
7	0.54703	0.51316	0.48166	0.45235	0.42506	0.39964
8	0.50187	0.46651	0.43393	0.40388	0.37616	0.35056
9	0.46043	0.42410	0.39092	0.36061	0.33288	0.30751
10	0.42241	0.38554	0.35218	0.32197	0.29459	0.26974
11	0.38753	0.35049	0.31728	0.28748	0.26070	0.23662
12	0.35553	0.31863	0.28584	0.25668	0.23071	0.20756
13	0.32618	0.28966	0.25751	0.22917	0.20416	0.18207
14	0.29925	0.26333	0.23199	0.20462	0.18068	0.15971
15	0.27454	0.23939	0.20900	0.18270	0.15989	0.14010
16	0.25187	0.21763	0.18829	0.16312	0.14150	0.12289
17	0.23107	0.19784	0.16963	0.14564	0.12522	0.10780
18	0.21199	0.17986	0.15282	0.13004	0.11081	0.09456
19	0.19449	0.16351	0.13768	0.11611	0.09806	0.08295
20	0.17843	0.14864	0.12403	0.10367	0.08678	0.07276
21	0.16370	0.13513	0.11174	0.09256	0.07680	0.06383
22	0.15018	0.12285	0.10067	0.08264	0.06796	0.05599
23	0.13778	0.11168	0.09069	0.07379	0.06014	0.04911
24	0.12640	0.10153	0.08170	0.06588	0.05323	0.04308
25	0.11597	0.09230	0.07361	0.05882	0.04710	0.03779
26	0.10639	0.08391	0.06631	0.05252	0.04168	0.03315
27	0.09761	0.07628	0.05974	0.04689	0.03689	0.02908
28	0.08955	0.06934	0.05382	0.04187	0.03264	0.02551
29	0.08215	0.06304	0.04849	0.03738	0.02889	0.02237
30	0.07537	0.05731	0.04368	0.03338	0.02557	0.01963
31	0.06915	0.05210	0.03935	0.02980	0.02262	0.01722
32	0.06344	0.04736	0.03545	0.02661	0.02002	0.01510
33	0.05820	0.04306	0.03194	0.02376	0.01772	0.01325
34	0.05339	0.03914	0.02878	0.02121	0.01568	0.01162
35	0.04899	0.03558	0.02592	0.01894	0.01388	0.01019
36	0.04494	0.03235	0.02335	0.01691	0.01228	0.00894
37	0.04123	0.02941	0.02104	0.01510	0.01087	0.00784
38	0.03783	0.02673	0.01896	0.01348	0.00962	0.00688
39	0.03470	0.02430	0.01708	0.01204	0.00851	0.00604
40	0.03184	0.02209	0.01538	0.01075	0.00753	0.00529
41	0.02921	0.02009	0.01386	0.00960	0.00666	0.00464
42	0.02680	0.01826	0.01249	0.00857	0.00590	0.00407
43	0.02458	0.01660	0.01125	0.00765	0.00522	0.00357
44	0.02255	0.01509	0.01013	0.00683	0.00462	0.00313
45	0.02069	0.01372	0.00913	0.00610	0.00409	0.00275
46	0.01898	0.01247	0.00823	0.00544	0.00362	0.00241
47	0.01742	0.01134	0.00741	0.00486	0.00320	0.00212
48	0.01598	0.01031	0.00668	0.00434	0.00283	0.00186
49	0.01466	0.00937	0.00601	0.00388	0.00251	0.00163
50	0.01345	0.00852	0.00542	0.00346	0.00222	0.00143
51	0.01234	0.00774	0.00488	0.00309	0.00196	0.00125
52	0.01132	0.00704	0.00440	0.00276	0.00174	0.00110
53	0.01038	0.00640	0.00396	0.00246	0.00154	0.00096
54	0.00953	0.00582	0.00357	0.00220	0.00136	0.00085
55	0.00874	0.00529	0.00322	0.00196	0.00120	0.00074
56	0.00802	0.00481	0.00290	0.00175	0.00107	0.00065
57	0.00736	0.00437	0.00261	0.00157	0.00094	0.00057
58	0.00675	0.00397	0.00235	0.00140	0.00083	0.00050
59	0.00619	0.00361	0.00212	0.00125	0.00074	0.00044
60	0.00568	0.00328	0.00191	0.00111	0.00065	0.00039

Tabla II **Factor del valor presente $(1 + i)^{-n}$** (*continúa*)

	i					
n	**0.15 (15%)**	**0.16 (16%)**	**0.17 (17%)**	**0.18 (18%)**	**0.19 (19%)**	**0.20 (20%)**
1	0.86957	0.86207	0.85470	0.84746	0.84034	0.83333
2	0.75614	0.74316	0.73051	0.71818	0.70616	0.69444
3	0.65752	0.64066	0.62437	0.60863	0.59342	0.57870
4	0.57175	0.55229	0.53365	0.51579	0.49867	0.48225
5	0.49718	0.47611	0.45611	0.43711	0.41905	0.40188
6	0.43233	0.41044	0.38984	0.37043	0.35214	0.33490
7	0.37594	0.35383	0.33320	0.31393	0.29592	0.27908
8	0.32690	0.30503	0.28478	0.26604	0.24867	0.23257
9	0.28426	0.26295	0.24340	0.22546	0.20897	0.19381
10	0.24718	0.22668	0.20804	0.19106	0.17560	0.16151
11	0.21494	0.19542	0.17781	0.16192	0.14757	0.13459
12	0.18691	0.16846	0.15197	0.13722	0.12400	0.11216
13	0.16253	0.14523	0.12989	0.11629	0.10421	0.09346
14	0.14133	0.12520	0.11102	0.09855	0.08757	0.07789
15	0.12289	0.10793	0.09489	0.08352	0.07359	0.06491
16	0.10686	0.09304	0.08110	0.07078	0.06184	0.05409
17	0.09293	0.08021	0.06932	0.05998	0.05196	0.04507
18	0.08081	0.06914	0.05925	0.05083	0.04367	0.03756
19	0.07027	0.05961	0.05064	0.04308	0.03670	0.03130
20	0.06110	0.05139	0.04328	0.03651	0.03084	0.02608
21	0.05313	0.04430	0.03699	0.03094	0.02591	0.02174
22	0.04620	0.03819	0.03162	0.02622	0.02178	0.01811
23	0.04017	0.03292	0.02702	0.02222	0.01830	0.01509
24	0.03493	0.02838	0.02310	0.01883	0.01538	0.01258
25	0.03038	0.02447	0.01974	0.01596	0.01292	0.01048
26	0.02642	0.02109	0.01687	0.01352	0.01086	0.00874
27	0.02297	0.01818	0.01442	0.01146	0.00912	0.00728
28	0.01997	0.01567	0.01233	0.00971	0.00767	0.00607
29	0.01737	0.01351	0.01053	0.00823	0.00644	0.00506
30	0.01510	0.01165	0.00900	0.00697	0.00541	0.00421
31	0.01313	0.01004	0.00770	0.00591	0.00455	0.00351
32	0.01142	0.00866	0.00658	0.00501	0.00382	0.00293
33	0.00993	0.00746	0.00562	0.00425	0.00321	0.00244
34	0.00864	0.00643	0.00480	0.00360	0.00270	0.00203
35	0.00751	0.00555	0.00411	0.00305	0.00227	0.00169
36	0.00653	0.00478	0.00351	0.00258	0.00191	0.00141
37	0.00568	0.00412	0.00300	0.00219	0.00160	0.00118
38	0.00494	0.00355	0.00256	0.00186	0.00135	0.00098
39	0.00429	0.00306	0.00219	0.00157	0.00113	0.00082
40	0.00373	0.00264	0.00187	0.00133	0.00095	0.00068
41	0.00325	0.00228	0.00160	0.00113	0.00080	0.00057
42	0.00282	0.00196	0.00137	0.00096	0.00067	0.00047
43	0.00245	0.00169	0.00117	0.00081	0.00056	0.00039
44	0.00213	0.00146	0.00100	0.00069	0.00047	0.00033
45	0.00186	0.00126	0.00085	0.00058	0.00040	0.00027
46	0.00161	0.00108	0.00073	0.00049	0.00033	0.00023
47	0.00140	0.00093	0.00062	0.00042	0.00028	0.00019
48	0.00122	0.00081	0.00053	0.00035	0.00024	0.00016
49	0.00106	0.00069	0.00046	0.00030	0.00020	0.00013
50	0.00092	0.00060	0.00039	0.00025	0.00017	0.00011
51	0.00080	0.00052	0.00033	0.00022	0.00014	0.00009
52	0.00070	0.00044	0.00028	0.00018	0.00012	0.00008
53	0.00061	0.00038	0.00024	0.00015	0.00010	0.00006
54	0.00053	0.00033	0.00021	0.00013	0.00008	0.00005
55	0.00046	0.00028	0.00018	0.00011	0.00007	0.00004
56	0.00040	0.00025	0.00015	0.00009	0.00006	0.00004
57	0.00035	0.00021	0.00013	0.00008	0.00005	0.00003
58	0.00030	0.00018	0.00011	0.00007	0.00004	0.00003
59	0.00026	0.00016	0.00009	0.00006	0.00003	0.00002
60	0.00023	0.00014	0.00008	0.00005	0.00003	0.00002

Tabla III **Factor del monto compuesto de una anualidad** $\frac{(1+i)^n - 1}{i} = s_{\overline{n|}i}$

	i					
n	**0.01 (1%)**	**0.015 ($1\frac{1}{2}$%)**	**0.02 (2%)**	**0.025 ($2\frac{1}{2}$%)**	**0.03 (3%)**	**0.035 ($3\frac{1}{2}$%)**
1	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
2	2.01000	2.01500	2.02000	2.02500	2.03000	2.03500
3	3.03010	3.04522	3.06040	3.07562	3.09090	3.10622
4	4.06040	4.09090	4.12161	4.15252	4.18363	4.21494
5	5.10101	5.15227	5.20404	5.25633	5.30914	5.36247
6	6.15202	6.22955	6.30812	6.38774	6.46841	6.55015
7	7.21354	7.32299	7.43428	7.54743	7.66246	7.77941
8	8.28567	8.43284	8.58297	8.73612	8.89234	9.05169
9	9.36853	9.55933	9.75463	9.95452	10.15911	10.36850
10	10.46221	10.70272	10.94972	11.20338	11.46388	11.73139
11	11.56683	11.86326	12.16872	12.48347	12.80780	13.14199
12	12.68250	13.04121	13.41209	13.79555	14.19203	14.60196
13	13.80933	14.23683	14.68033	15.14044	15.61779	16.11303
14	14.94742	15.45038	15.97394	16.51895	17.08632	17.67699
15	16.09690	16.68214	17.29342	17.93193	18.59891	19.29568
16	17.25786	17.93237	18.63929	19.38022	20.15688	20.97103
17	18.43044	19.20136	20.01207	20.86473	21.76159	22.70502
18	19.61475	20.48938	21.41231	22.38635	23.41444	24.49969
19	20.81090	21.79672	22.84056	23.94601	25.11687	26.35718
20	22.01900	23.12367	24.29737	25.54466	26.87037	28.27968
21	23.23919	24.47052	25.78332	27.18327	28.67649	30.26947
22	24.47159	25.83758	27.29898	28.86286	30.53678	32.32890
23	25.71630	27.22514	28.84496	30.58443	32.45288	34.46041
24	26.97346	28.63352	30.42186	32.34904	34.42647	36.66653
25	28.24320	30.06302	32.03030	34.15776	36.45926	38.94986
26	29.52563	31.51397	33.67091	36.01171	38.55304	41.31310
27	30.82089	32.98668	35.34432	37.91200	40.70963	43.75906
28	32.12910	34.48148	37.05121	39.85980	42.93092	46.29063
29	33.45039	35.99870	38.79223	41.85630	45.21885	48.91080
30	34.78489	37.53868	40.56808	43.90270	47.57542	51.62268
31	36.13274	39.10176	42.37944	46.00027	50.00268	54.42947
32	37.49407	40.68829	44.22703	48.15028	52.50276	57.33450
33	38.86901	42.29861	46.11157	50.35403	55.07784	60.34121
34	40.25770	43.93309	48.03380	52.61289	57.73018	63.45315
35	41.66028	45.59209	49.99448	54.92821	60.46208	66.67401
36	43.07688	47.27597	51.99437	57.30141	63.27594	70.00760
37	44.50765	48.98511	54.03425	59.73395	66.17422	73.45787
38	45.95272	50.71989	56.11494	62.22730	69.15945	77.02889
39	47.41225	52.48068	58.23724	64.78298	72.23423	80.72491
40	48.88637	54.26789	60.40198	67.40255	75.40126	84.55028
41	50.37524	56.08191	62.61002	70.08762	78.66330	88.50954
42	51.87899	57.92314	64.86222	72.83981	82.02320	92.60737
43	53.39778	59.79199	67.15947	75.66080	85.48389	96.84863
44	54.93176	61.68887	69.50266	78.55232	89.04841	101.23833
45	56.48107	63.61420	71.89271	81.51613	92.71986	105.78167
46	58.04589	65.56841	74.33056	84.55403	96.50146	110.48403
47	59.62634	67.55194	76.81718	87.66789	100.39650	115.35097
48	61.22261	69.56522	79.35352	90.85958	104.40840	120.38826
49	62.83483	71.60870	81.94059	94.13107	108.54065	125.60185
50	64.46318	73.68283	84.57940	97.48435	112.79687	130.99791
51	66.10781	75.78807	87.27099	100.92146	117.18077	136.58284
52	67.76889	77.92489	90.01641	104.44449	121.69620	142.36324
53	69.44658	80.09376	92.81674	108.05561	126.34708	148.34595
54	71.14105	82.29517	95.67307	111.75700	131.13749	154.53806
55	72.85246	84.52960	98.58653	115.55092	136.07162	160.94689
56	74.58098	86.79754	101.55826	119.43969	141.15377	167.58003
57	76.32679	89.09951	104.58943	123.42569	146.38838	174.44533
58	78.09006	91.43600	107.68122	127.51133	151.78003	181.55092
59	79.87096	93.80754	110.83484	131.69911	157.33343	188.90520
60	81.66967	96.21465	114.05154	135.99159	163.05344	196.51688

Tabla III **Factor del monto compuesto de una anualidad** $\frac{(1+i)^n - 1}{i} = s_{\overline{n}|i}$ (*continúa*)

	i					
n	**0.04 (4%)**	**0.045 ($4\frac{1}{2}$%)**	**0.05 (5%)**	**0.06 (6%)**	**0.07 (7%)**	**0.08 (8%)**
1	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
2	2.04000	2.04500	2.05000	2.06000	2.07000	2.08000
3	3.12160	3.13702	3.15250	3.18360	3.21490	3.24640
4	4.24646	4.27819	4.31012	4.37462	4.43994	4.50611
5	5.41632	5.47071	5.52563	5.63709	5.75074	5.86660
6	6.63298	6.71689	6.80191	6.97532	7.15329	7.33593
7	7.89829	8.01915	8.14201	8.39384	8.65402	8.92280
8	9.21423	9.38001	9.54911	9.89747	10.25980	10.63663
9	10.58280	10.80211	11.02656	11.49132	11.97799	12.48756
10	12.00611	12.28821	12.57789	13.18079	13.81645	14.48656
11	13.48635	13.84118	14.20679	14.97164	15.78360	16.64549
12	15.02581	15.46403	15.91713	16.86994	17.88845	18.97713
13	16.62684	17.15991	17.71298	18.88214	20.14064	21.49530
14	18.29191	18.93211	19.59863	21.01507	22.55049	24.21492
15	20.02359	20.78405	21.57856	23.27597	25.12902	27.15211
16	21.82453	22.71934	23.65749	25.67253	27.88805	30.32428
17	23.69751	24.74171	25.84037	28.21288	30.84022	33.75023
18	25.64541	26.85508	28.13238	30.90565	33.99903	37.45024
19	27.67123	29.06356	30.53900	33.75999	37.37896	41.44626
20	29.77808	31.37142	33.06595	36.78559	40.99549	45.76196
21	31.96920	33.78314	35.71925	39.99273	44.86518	50.42292
22	34.24797	36.30338	38.50521	43.39229	49.00574	55.45676
23	36.61789	38.93703	41.43048	46.99583	53.43614	60.89330
24	39.08260	41.68920	44.50200	50.81558	58.17667	66.76476
25	41.64591	44.56521	47.72710	54.86451	63.24904	73.10594
26	44.31174	47.57064	51.11345	59.15638	68.67647	79.95442
27	47.08421	50.71132	54.66913	63.70577	74.48382	87.35077
28	49.96758	53.99333	58.40258	68.52811	80.69769	95.33883
29	52.96629	57.42303	62.32271	73.63980	87.34653	103.96594
30	56.08494	61.00707	66.43885	79.05819	94.46079	113.28321
31	59.32834	64.75239	70.76079	84.80168	102.07304	123.34587
32	62.70147	68.66625	75.29883	90.88978	110.21815	134.21354
33	66.20953	72.75623	80.06377	97.34316	118.93343	145.95062
34	69.85791	77.03026	85.06696	104.18375	128.25876	158.62667
35	73.65222	81.49662	90.32031	111.43478	138.23688	172.31680
36	77.59831	86.16397	95.83632	119.12087	148.91346	187.10215
37	81.70225	91.04134	101.62814	127.26812	160.33740	203.07032
38	85.97034	96.13820	107.70955	135.90421	172.56102	220.31595
39	90.40915	101.46442	114.09502	145.05846	185.64029	238.94122
40	95.02552	107.03032	120.79977	154.76197	199.63511	259.05652
41	99.82654	112.84669	127.83976	165.04768	214.60957	280.78104
42	104.81960	118.92479	135.23175	175.95054	230.63224	304.24352
43	110.01238	125.27640	142.99334	187.50758	247.77650	329.58301
44	115.41288	131.91384	151.14301	199.75803	266.12085	356.94965
45	121.02939	138.84997	159.70016	212.74351	285.74931	386.50562
46	126.87057	146.09821	168.68516	226.50812	306.75176	418.42607
47	132.94539	153.67263	178.11942	241.09861	329.22439	452.90015
48	139.26321	161.58790	188.02539	256.56453	353.27009	490.13216
49	145.83373	169.85936	198.42666	272.95840	378.99900	530.34274
50	152.66708	178.50303	209.34800	290.33590	406.52893	573.77016
51	159.77377	187.53566	220.81540	308.75606	435.98595	620.67177
52	167.16472	196.97477	232.85617	328.28142	467.50497	671.32551
53	174.85131	206.83863	245.49897	348.97831	501.23032	726.03155
54	182.84536	217.14637	258.77392	370.91701	537.31644	785.11408
55	191.15917	227.91796	272.71262	394.17203	575.92859	848.92320
56	199.80554	239.17427	287.34825	418.82235	617.24359	917.83706
57	208.79776	250.93711	302.71566	444.95169	661.45065	992.26402
58	218.14967	263.22928	318.85144	472.64879	708.75219	1072.64514
59	227.87566	276.07460	335.79402	502.00772	759.36484	1159.45676
60	237.99069	289.49795	353.58372	533.12818	813.52038	1253.21330

Tabla III **Factor del monto compuesto de una anualidad** $\frac{(1+i)^n - 1}{i} = s_{\overline{n}|i}$ (*continúa*)

	i					
n	**0.09 (9%)**	**0.10 (10%)**	**0.11 (11%)**	**0.12 (12%)**	**0.13 (13%)**	**0.14 (14%)**
1	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
2	2.09000	2.10000	2.11000	2.12000	2.13000	2.14000
3	3.27810	3.31000	3.34210	3.37440	3.40690	3.43960
4	4.57313	4.64100	4.70973	4.77933	4.84980	4.92114
5	5.98471	6.10510	6.22780	6.35285	6.48027	6.61010
6	7.52333	7.71561	7.91286	8.11519	8.32271	8.53552
7	9.20043	9.48717	9.78327	10.08901	10.40466	10.73049
8	11.02847	11.43589	11.85943	12.29969	12.75726	13.23276
9	13.02104	13.57948	14.16397	14.77566	15.41571	16.08535
10	15.19293	15.93742	16.72201	17.54874	18.41975	19.33730
11	17.56029	18.53117	19.56143	20.65458	21.81432	23.04452
12	20.14072	21.38428	22.71319	24.13313	25.65018	27.27075
13	22.95338	24.52271	26.21164	28.02911	29.98470	32.08865
14	26.01919	27.97498	30.09492	32.39260	34.88271	37.58107
15	29.36092	31.77248	34.40536	37.27971	40.41746	43.84251
16	33.00340	35.94973	39.18995	42.75328	46.67173	50.98035
17	36.97370	40.54470	44.50084	48.88367	53.73906	59.11760
18	41.30134	45.59917	50.39594	55.74971	61.72514	68.39407
19	46.01846	51.15909	56.93949	63.43968	70.74941	78.96923
20	51.16012	57.27500	64.20283	72.05244	80.94683	91.02493
21	56.76453	64.00250	72.26514	81.69874	92.46992	104.76842
22	62.87334	71.40275	81.21431	92.50258	105.49101	120.43600
23	69.53194	79.54302	91.14788	104.60289	120.20484	138.29704
24	76.78981	88.49733	102.17415	118.15524	136.83147	158.65862
25	84.70090	98.34706	114.41331	133.33387	155.61956	181.87083
26	93.32398	109.18177	127.99877	150.33393	176.85010	208.33274
27	102.72313	121.09994	143.07864	169.37401	200.84061	238.49933
28	112.96822	134.20994	159.81729	190.69889	227.94989	272.88923
29	124.13536	148.63093	178.39719	214.58275	258.58338	312.09373
30	136.30754	164.49402	199.02088	241.33268	293.19922	356.78685
31	149.57522	181.94342	221.91317	271.29261	332.31511	407.73701
32	164.03699	201.13777	247.32362	304.84772	376.51608	465.82019
33	179.80032	222.25154	275.52922	342.42945	426.46317	532.03501
34	196.98234	245.47670	306.83744	384.52098	482.90338	607.51991
35	215.71075	271.02437	341.58955	431.66350	546.68082	693.57270
36	236.12472	299.12681	380.16441	484.46312	618.74933	791.67288
37	258.37595	330.03949	422.98249	543.59869	700.18674	903.50708
38	282.62978	364.04343	470.51056	609.83053	792.21101	1030.99808
39	309.06646	401.44778	523.26673	684.01020	896.19845	1176.33781
40	337.88245	442.59256	581.82607	767.09142	1013.70424	1342.02510
41	369.29187	487.85181	646.82693	860.14239	1146.48579	1530.90861
42	403.52813	537.63699	718.97790	964.35948	1296.52895	1746.23582
43	440.84566	592.40069	799.06547	1081.08262	1466.07771	1991.70883
44	481.52177	652.64076	887.96267	1211.81253	1657.66781	2271.54807
45	525.85873	718.90484	986.63856	1358.23003	1874.16463	2590.56480
46	574.18602	791.79532	1096.16880	1522.21764	2118.80603	2954.24387
47	626.86276	871.97485	1217.74737	1705.88375	2395.25082	3368.83801
48	684.28041	960.17234	1352.69958	1911.58980	2707.63342	3841.47534
49	746.86565	1057.18957	1502.49653	2141.98058	3060.62577	4380.28188
50	815.08356	1163.90853	1668.77115	2400.01825	3459.50712	4994.52135
51	889.44108	1281.29938	1853.33598	2689.02044	3910.24304	5694.75433
52	970.49077	1410.42932	2058.20294	3012.70289	4419.57464	6493.01994
53	1058.83494	1552.47225	2285.60526	3375.22724	4995.11934	7403.04273
54	1155.13009	1708.71948	2538.02184	3781.25451	5645.48485	8440.46872
55	1260.09180	1880.59142	2818.20424	4236.00505	6380.39789	9623.13434
56	1374.50006	2069.66057	3129.20671	4745.32565	7210.84961	10971.37314
57	1499.20506	2277.61562	3474.41944	5315.76473	8149.26006	12508.36538
58	1635.13352	2506.37719	3857.60558	5954.65650	9209.66387	14260.53654
59	1783.29553	2758.01490	4282.94220	6670.21528	10407.92017	16258.01165
60	1944.79213	3034.81640	4755.06584	7471.64111	11761.94979	18535.13328

Tabla III **Factor del monto compuesto de una anualidad** $\dfrac{(1+i)^n-1}{i} = s_{\overline{n}|i}$ (*continúa*)

	i					
n	**0.15 (15%)**	**0.016 (16%)**	**0.17 (17%)**	**0.18 (18%)**	**0.19 (19%)**	**0.20 (20%)**
1	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
2	2.15000	2.16000	2.17000	2.18000	2.19000	2.20000
3	3.47250	3.50560	3.53890	3.57240	3.60610	3.64000
4	4.99337	5.06650	5.14051	5.21543	5.29126	5.36800
5	6.74238	6.87714	7.01440	7.15421	7.29660	7.44160
6	8.75374	8.97748	9.20685	9.44197	9.68295	9.92992
7	11.06680	11.41387	11.77201	12.14152	12.52271	12.91590
8	13.72682	14.24009	14.77325	15.32700	15.90203	16.49908
9	16.78584	17.51851	18.28471	19.08585	19.92341	20.79890
10	20.30372	21.32147	22.39311	23.52131	24.70886	25.95868
11	24.34928	25.73290	27.19994	28.75514	30.40355	32.15042
12	29.00167	30.85017	32.82393	34.93107	37.18022	39.58050
13	34.35192	36.78620	39.40399	42.21866	45.24446	48.49660
14	40.50471	43.67199	47.10267	50.81802	54.84091	59.19592
15	47.58041	51.65951	56.11013	60.96527	66.26068	72.03511
16	55.71747	60.92503	66.64885	72.93901	79.85021	87.44213
17	65.07509	71.67303	78.97915	87.06804	96.02175	105.93056
18	75.83636	84.14072	93.40561	103.74028	115.26588	128.11667
19	88.21181	98.60323	110.28456	123.41353	138.16640	154.74000
20	102.44358	115.37975	130.03294	146.62797	165.41802	186.68800
21	118.81012	134.84051	153.13854	174.02100	197.84744	225.02560
22	137.63164	157.41499	180.17209	206.34479	236.43846	271.03072
23	159.27638	183.60138	211.80134	244.48685	282.36176	326.23686
24	184.16784	213.97761	248.80757	289.49448	337.01050	392.48424
25	212.79302	249.21402	292.10486	342.60349	402.04249	471.98108
26	245.71197	290.08827	342.76268	405.27211	479.43056	567.37730
27	283.56877	337.50239	402.03234	479.22109	571.52237	681.85276
28	327.10408	392.50277	471.37783	566.48089	681.11162	819.22331
29	377.16969	456.30322	552.51207	669.44745	811.52283	984.06797
30	434.74515	530.31172	647.43912	790.94799	966.71217	1181.88157
31	500.95692	616.16161	758.50377	934.31863	1151.38748	1419.25788
32	577.10046	715.74746	888.44941	1103.49598	1371.15110	1704.10946
33	664.66552	831.26706	1040.48581	1303.12526	1632.66981	2045.93136
34	765.36535	965.26979	1218.36839	1538.68781	1943.87708	2456.11762
35	881.17016	1120.71295	1426.49102	1816.65161	2314.21372	2948.34115
36	1014.34568	1301.02703	1669.99450	2144.64890	2754.91433	3539.00937
37	1167.49753	1510.19135	1954.89356	2531.68570	3279.34805	4247.81125
38	1343.62216	1752.82197	2288.22547	2988.38913	3903.42418	5098.37350
39	1546.16549	2034.27348	2678.22379	3527.29918	4646.07477	6119.04820
40	1779.09031	2360.75724	3134.52184	4163.21303	5529.82898	7343.85784
41	2046.95385	2739.47840	3668.39055	4913.59137	6581.49649	8813.62941
42	2354.99693	3178.79494	4293.01695	5799.03782	7832.98082	10577.35529
43	2709.24647	3688.40213	5023.82983	6843.86463	9322.24718	12693.82635
44	3116.63344	4279.54648	5878.88090	8076.76026	11094.47414	15233.59162
45	3585.12846	4965.27391	6879.29065	9531.57711	13203.42423	18281.30994
46	4123.89773	5760.71774	8049.77006	11248.26098	15713.07483	21938.57193
47	4743.48239	6683.43257	9419.23097	13273.94796	18699.55905	26327.28631
48	5456.00475	7753.78179	11021.50024	15664.25859	22253.47527	31593.74358
49	6275.40546	8995.38687	12896.15528	18484.82514	26482.63557	37913.49229
50	7217.71628	10435.64877	15089.50167	21813.09367	31515.33633	45497.19075
51	8301.37372	12106.35258	17655.71696	25740.45053	37504.25023	54597.62890
52	9547.57978	14044.36899	20658.18884	30374.73162	44631.05777	65518.15468
53	10980.71674	16292.46803	24171.08094	35843.18331	53111.95875	78622.78562
54	12628.82425	18900.26291	28281.16470	42295.95631	63204.23091	94348.34274
55	14524.14789	21925.30498	33089.96270	49910.22844	75214.03479	113219.01129
56	16703.77008	25434.35377	38716.25636	58895.06957	89505.70140	135863.81354
57	19210.33559	29504.85038	45299.01994	69497.18209	106512.78466	163037.57625
58	22092.88593	34226.62644	53000.85333	82007.67486	126751.21375	195646.09150
59	25407.81882	39703.88667	62011.99840	96770.05634	150834.94436	234776.30980
60	29219.99164	46057.50853	72555.03813	114189.66648	179494.58379	281723.57177

Tabla IV Factor del fondo de amortización $\frac{i}{(1+i)^n - 1} = \frac{1}{s_{\overline{n}|i}}$

	i					
n	**0.01 (1%)**	**0.015 ($1\frac{1}{2}$%)**	**0.02 (2%)**	**0.025 ($2\frac{1}{2}$%)**	**0.03 (3%)**	**0.035 ($3\frac{1}{2}$%)**
1	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
2	0.49751	0.49628	0.49505	0.49383	0.49261	0.49140
3	0.33002	0.32838	0.32675	0.32514	0.32353	0.32193
4	0.24628	0.24444	0.24262	0.24082	0.23903	0.23725
5	0.19604	0.19409	0.19216	0.19025	0.18835	0.18648
6	0.16255	0.16053	0.15853	0.15655	0.15460	0.15267
7	0.13863	0.13656	0.13451	0.13250	0.13051	0.12854
8	0.12069	0.11858	0.11651	0.11447	0.11246	0.11048
9	0.10674	0.10461	0.10252	0.10046	0.09843	0.09645
10	0.09558	0.09343	0.09133	0.08926	0.08723	0.08524
11	0.08645	0.08429	0.08218	0.08011	0.07808	0.07609
12	0.07885	0.07668	0.07456	0.07249	0.07046	0.06848
13	0.07241	0.07024	0.06812	0.06605	0.06403	0.06206
14	0.06690	0.06472	0.06260	0.06054	0.05853	0.05657
15	0.06212	0.05994	0.05783	0.05577	0.05377	0.05183
16	0.05794	0.05577	0.05365	0.05160	0.04961	0.04768
17	0.05426	0.05208	0.04997	0.04793	0.04595	0.04404
18	0.05098	0.04881	0.04670	0.04467	0.04271	0.04082
19	0.04805	0.04588	0.04378	0.04176	0.03981	0.03794
20	0.04542	0.04325	0.04116	0.03915	0.03722	0.03536
21	0.04303	0.04087	0.03878	0.03679	0.03487	0.03304
22	0.04086	0.03870	0.03663	0.03465	0.03275	0.03093
23	0.03889	0.03673	0.03467	0.03270	0.03081	0.02902
24	0.03707	0.03492	0.03287	0.03091	0.02905	0.02727
25	0.03541	0.03326	0.03122	0.02928	0.02743	0.02567
26	0.03387	0.03173	0.02970	0.02777	0.02594	0.02421
27	0.03245	0.03032	0.02829	0.02638	0.02456	0.02285
28	0.03112	0.02900	0.02699	0.02509	0.02329	0.02160
29	0.02990	0.02778	0.02578	0.02389	0.02211	0.02045
30	0.02875	0.02664	0.02465	0.02278	0.02102	0.01937
31	0.02768	0.02557	0.02360	0.02174	0.02000	0.01837
32	0.02667	0.02458	0.02261	0.02077	0.01905	0.01744
33	0.02573	0.02364	0.02169	0.01986	0.01816	0.01657
34	0.02484	0.02276	0.02082	0.01901	0.01732	0.01576
35	0.02400	0.02193	0.02000	0.01821	0.01654	0.01500
36	0.02321	0.02115	0.01923	0.01745	0.01580	0.01428
37	0.02247	0.02041	0.01851	0.01674	0.01511	0.01361
38	0.02176	0.01972	0.01782	0.01607	0.01446	0.01298
39	0.02109	0.01905	0.01717	0.01544	0.01384	0.01239
40	0.02046	0.01843	0.01656	0.01484	0.01326	0.01183
41	0.01985	0.01783	0.01597	0.01427	0.01271	0.01130
42	0.01928	0.01726	0.01542	0.01373	0.01219	0.01080
43	0.01873	0.01672	0.01489	0.01322	0.01170	0.01033
44	0.01820	0.01621	0.01439	0.01273	0.01123	0.00988
45	0.01771	0.01572	0.01391	0.01227	0.01079	0.00945
46	0.01723	0.01525	0.01345	0.01183	0.01036	0.00905
47	0.01677	0.01480	0.01302	0.01141	0.00996	0.00867
48	0.01633	0.01437	0.01260	0.01101	0.00958	0.00831
49	0.01591	0.01396	0.01220	0.01062	0.00921	0.00796
50	0.01551	0.01357	0.01182	0.01026	0.00887	0.00763
51	0.01513	0.01319	0.01146	0.00991	0.00853	0.00732
52	0.01476	0.01283	0.01111	0.00957	0.00822	0.00702
53	0.01440	0.01249	0.01077	0.00925	0.00791	0.00674
54	0.01406	0.01215	0.01045	0.00895	0.00763	0.00647
55	0.01373	0.01183	0.01014	0.00865	0.00735	0.00621
56	0.01341	0.01152	0.00985	0.00837	0.00708	0.00597
57	0.01310	0.01122	0.00956	0.00810	0.00683	0.00573
58	0.01281	0.01094	0.00929	0.00784	0.00659	0.00551
59	0.01252	0.01066	0.00902	0.00759	0.00636	0.00529
60	0.01224	0.01039	0.00877	0.00735	0.00613	0.00509

Tabla IV **Factor del fondo de amortización** $\frac{i}{(1+i)^n - 1} = \frac{1}{s_{\overline{n|}i}}$ (*continúa*)

	i					
n	**0.04 (4%)**	**0.045 ($4\frac{1}{2}$%)**	**0.05 (5%)**	**0.06 (6%)**	**0.07 (7%)**	**0.08 (8%)**
1	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
2	0.49020	0.48900	0.48780	0.48544	0.48309	0.48077
3	0.32035	0.31877	0.31721	0.31411	0.31105	0.30803
4	0.23549	0.23374	0.23201	0.22859	0.22523	0.22192
5	0.18463	0.18279	0.18097	0.17740	0.17389	0.17046
6	0.15076	0.14888	0.14702	0.14336	0.13980	0.13632
7	0.12661	0.12470	0.12282	0.11914	0.11555	0.11207
8	0.10853	0.10661	0.10472	0.10104	0.09747	0.09401
9	0.09449	0.09257	0.09069	0.08702	0.08349	0.08008
10	0.08329	0.08138	0.07950	0.07587	0.07238	0.06903
11	0.07415	0.07225	0.07039	0.06679	0.06336	0.06008
12	0.06655	0.06467	0.06283	0.05928	0.05590	0.05270
13	0.06014	0.05828	0.05646	0.05296	0.04965	0.04652
14	0.05467	0.05282	0.05102	0.04758	0.04434	0.04130
15	0.04994	0.04811	0.04634	0.04296	0.03979	0.03683
16	0.04582	0.04402	0.04227	0.03895	0.03586	0.03298
17	0.04220	0.04042	0.03870	0.03544	0.03243	0.02963
18	0.03899	0.03724	0.03555	0.03236	0.02941	0.02670
19	0.03614	0.03441	0.03275	0.02962	0.02675	0.02413
20	0.03358	0.03188	0.03024	0.02718	0.02439	0.02185
21	0.03128	0.02960	0.02800	0.02500	0.02229	0.01983
22	0.02920	0.02755	0.02597	0.02305	0.02041	0.01803
23	0.02731	0.02568	0.02414	0.02128	0.01871	0.01642
24	0.02559	0.02399	0.02247	0.01968	0.01719	0.01498
25	0.02401	0.02244	0.02095	0.01823	0.01581	0.01368
26	0.02257	0.02102	0.01956	0.01690	0.01456	0.01251
27	0.02124	0.01972	0.01829	0.01570	0.01343	0.01145
28	0.02001	0.01852	0.01712	0.01459	0.01239	0.01049
29	0.01888	0.01741	0.01605	0.01358	0.01145	0.00962
30	0.01783	0.01639	0.01505	0.01265	0.01059	0.00883
31	0.01686	0.01544	0.01413	0.01179	0.00980	0.00811
32	0.01595	0.01456	0.01328	0.01100	0.00907	0.00745
33	0.01510	0.01374	0.01249	0.01027	0.00841	0.00685
34	0.01431	0.01298	0.01176	0.00960	0.00780	0.00630
35	0.01358	0.01227	0.01107	0.00897	0.00723	0.00580
36	0.01289	0.01161	0.01043	0.00839	0.00672	0.00534
37	0.01224	0.01098	0.00984	0.00786	0.00624	0.00492
38	0.01163	0.01040	0.00928	0.00736	0.00580	0.00454
39	0.01106	0.00986	0.00876	0.00689	0.00539	0.00419
40	0.01052	0.00934	0.00828	0.00646	0.00501	0.00386
41	0.01002	0.00886	0.00782	0.00606	0.00466	0.00356
42	0.00954	0.00841	0.00739	0.00568	0.00434	0.00329
43	0.00909	0.00798	0.00699	0.00533	0.00404	0.00303
44	0.00866	0.00758	0.00662	0.00501	0.00376	0.00280
45	0.00826	0.00720	0.00626	0.00470	0.00350	0.00259
46	0.00788	0.00684	0.00593	0.00441	0.00326	0.00239
47	0.00752	0.00651	0.00561	0.00415	0.00304	0.00221
48	0.00718	0.00619	0.00532	0.00390	0.00283	0.00204
49	0.00686	0.00589	0.00504	0.00366	0.00264	0.00189
50	0.00655	0.00560	0.00478	0.00344	0.00246	0.00174
51	0.00626	0.00533	0.00453	0.00324	0.00229	0.00161
52	0.00598	0.00508	0.00429	0.00305	0.00214	0.00149
53	0.00572	0.00483	0.00407	0.00287	0.00200	0.00138
54	0.00547	0.00461	0.00386	0.00270	0.00186	0.00127
55	0.00523	0.00439	0.00367	0.00254	0.00174	0.00118
56	0.00500	0.00418	0.00348	0.00239	0.00162	0.00109
57	0.00479	0.00399	0.00330	0.00225	0.00151	0.00101
58	0.00458	0.00380	0.00314	0.00212	0.00141	0.00093
59	0.00439	0.00362	0.00298	0.00199	0.00132	0.00086
60	0.00420	0.00345	0.00283	0.00188	0.00123	0.00080

Tabla IV Factor del fondo de amortización $\dfrac{i}{(1+i)^n-1} = \dfrac{1}{s_{\overline{n}|i}}$ (*continúa*)

	i					
n	**0.09 (9%)**	**0.10 (10%)**	**0.11 (11%)**	**0.12 (12%)**	**0.13 (13%)**	**0.14 (14%)**
1	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
2	0.47847	0.47619	0.47393	0.47170	0.46948	0.46729
3	0.30505	0.30211	0.29921	0.29635	0.29352	0.29073
4	0.21867	0.21547	0.21233	0.20923	0.20619	0.20320
5	0.16709	0.16380	0.16057	0.15741	0.15431	0.15128
6	0.13292	0.12961	0.12638	0.12323	0.12015	0.11716
7	0.10869	0.10541	0.10222	0.09912	0.09611	0.09319
8	0.09067	0.08744	0.08432	0.08130	0.07839	0.07557
9	0.07680	0.07364	0.07060	0.06768	0.06487	0.06217
10	0.06582	0.06275	0.05980	0.05698	0.05429	0.05171
11	0.05695	0.05396	0.05112	0.04842	0.04584	0.04339
12	0.04965	0.04676	0.04403	0.04144	0.03899	0.03667
13	0.04357	0.04078	0.03815	0.03568	0.03335	0.03116
14	0.03843	0.03575	0.03323	0.03087	0.02867	0.02661
15	0.03406	0.03147	0.02907	0.02682	0.02474	0.02281
16	0.03030	0.02782	0.02552	0.02339	0.02143	0.01962
17	0.02705	0.02466	0.02247	0.02046	0.01861	0.01692
18	0.02421	0.02193	0.01984	0.01794	0.01620	0.01462
19	0.02173	0.01955	0.01756	0.01576	0.01413	0.01266
20	0.01955	0.01746	0.01558	0.01388	0.01235	0.01099
21	0.01762	0.01562	0.01384	0.01224	0.01081	0.00954
22	0.01590	0.01401	0.01231	0.01081	0.00948	0.00830
23	0.01438	0.01257	0.01097	0.00956	0.00832	0.00723
24	0.01302	0.01130	0.00979	0.00846	0.00731	0.00630
25	0.01181	0.01017	0.00874	0.00750	0.00643	0.00550
26	0.01072	0.00916	0.00781	0.00665	0.00565	0.00480
27	0.00973	0.00826	0.00699	0.00590	0.00498	0.00419
28	0.00885	0.00745	0.00626	0.00524	0.00439	0.00366
29	0.00806	0.00673	0.00561	0.00466	0.00387	0.00320
30	0.00734	0.00608	0.00502	0.00414	0.00341	0.00280
31	0.00669	0.00550	0.00451	0.00369	0.00301	0.00245
32	0.00610	0.00497	0.00404	0.00328	0.00266	0.00215
33	0.00556	0.00450	0.00363	0.00292	0.00234	0.00188
34	0.00508	0.00407	0.00326	0.00260	0.00207	0.00165
35	0.00464	0.00369	0.00293	0.00232	0.00183	0.00144
36	0.00424	0.00334	0.00263	0.00206	0.00162	0.00126
37	0.00387	0.00303	0.00236	0.00184	0.00143	0.00111
38	0.00354	0.00275	0.00213	0.00164	0.00126	0.00097
39	0.00324	0.00249	0.00191	0.00146	0.00112	0.00085
40	0.00296	0.00226	0.00172	0.00130	0.00099	0.00075
41	0.00271	0.00205	0.00155	0.00116	0.00087	0.00065
42	0.00248	0.00186	0.00139	0.00104	0.00077	0.00057
43	0.00227	0.00169	0.00125	0.00092	0.00068	0.00050
44	0.00208	0.00153	0.00113	0.00083	0.00060	0.00044
45	0.00190	0.00139	0.00101	0.00074	0.00053	0.00039
46	0.00174	0.00126	0.00091	0.00066	0.00047	0.00034
47	0.00160	0.00115	0.00082	0.00059	0.00042	0.00030
48	0.00146	0.00104	0.00074	0.00052	0.00037	0.00026
49	0.00134	0.00095	0.00067	0.00047	0.00033	0.00023
50	0.00123	0.00086	0.00060	0.00042	0.00029	0.00020
51	0.00112	0.00078	0.00054	0.00037	0.00026	0.00018
52	0.00103	0.00071	0.00049	0.00033	0.00023	0.00015
53	0.00094	0.00064	0.00044	0.00030	0.00020	0.00014
54	0.00087	0.00059	0.00039	0.00026	0.00018	0.00012
55	0.00079	0.00053	0.00035	0.00024	0.00016	0.00010
56	0.00073	0.00048	0.00032	0.00021	0.00014	0.00009
57	0.00067	0.00044	0.00029	0.00019	0.00012	0.00008
58	0.00061	0.00040	0.00026	0.00017	0.00011	0.00007
59	0.00056	0.00036	0.00023	0.00015	0.00010	0.00006
60	0.00051	0.00033	0.00021	0.00013	0.00009	0.00005

Tabla IV **Factor del fondo de amortización** $\frac{i}{(1+i)^n - 1} = \frac{1}{s_{\overline{n}|i}}$ (*continúa*)

n	0.15 (15%)	0.16 (16%)	0.17 (17%)	0.18 (18%)	0.19 (19%)	0.20 (20%)
1	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
2	0.46512	0.46296	0.46083	0.45872	0.45662	0.45455
3	0.28798	0.28526	0.28257	0.27992	0.27731	0.27473
4	0.20027	0.19738	0.19453	0.19174	0.18899	0.18629
5	0.14832	0.14541	0.14256	0.13978	0.13705	0.13438
6	0.11424	0.11139	0.10861	0.10591	0.10327	0.10071
7	0.09036	0.08761	0.08495	0.08236	0.07985	0.07742
8	0.07285	0.07022	0.06769	0.06524	0.06289	0.06061
9	0.05957	0.05708	0.05469	0.05239	0.05019	0.04808
10	0.04925	0.04690	0.04466	0.04251	0.04047	0.03852
11	0.04107	0.03886	0.03676	0.03478	0.03289	0.03110
12	0.03448	0.03241	0.03047	0.02863	0.02690	0.02526
13	0.02911	0.02718	0.02538	0.02369	0.02210	0.02062
14	0.02469	0.02290	0.02123	0.01968	0.01823	0.01689
15	0.02102	0.01936	0.01782	0.01640	0.01509	0.01388
16	0.01795	0.01641	0.01500	0.01371	0.01252	0.01144
17	0.01537	0.01395	0.01266	0.01149	0.01041	0.00944
18	0.01319	0.01188	0.01071	0.00964	0.00868	0.00781
19	0.01134	0.01014	0.00907	0.00810	0.00724	0.00646
20	0.00976	0.00867	0.00769	0.00682	0.00605	0.00536
21	0.00842	0.00742	0.00653	0.00575	0.00505	0.00444
22	0.00727	0.00635	0.00555	0.00485	0.00423	0.00369
23	0.00628	0.00545	0.00472	0.00409	0.00354	0.00307
24	0.00543	0.00467	0.00402	0.00345	0.00297	0.00255
25	0.00470	0.00401	0.00342	0.00292	0.00249	0.00212
26	0.00407	0.00345	0.00292	0.00247	0.00209	0.00176
27	0.00353	0.00296	0.00249	0.00209	0.00175	0.00147
28	0.00306	0.00255	0.00212	0.00177	0.00147	0.00122
29	0.00265	0.00219	0.00181	0.00149	0.00123	0.00102
30	0.00230	0.00189	0.00154	0.00126	0.00103	0.00085
31	0.00200	0.00162	0.00132	0.00107	0.00087	0.00070
32	0.00173	0.00140	0.00113	0.00091	0.00073	0.00059
33	0.00150	0.00120	0.00096	0.00077	0.00061	0.00049
34	0.00131	0.00104	0.00082	0.00065	0.00051	0.00041
35	0.00113	0.00089	0.00070	0.00055	0.00043	0.00034
36	0.00099	0.00077	0.00060	0.00047	0.00036	0.00028
37	0.00086	0.00066	0.00051	0.00039	0.00030	0.00024
38	0.00074	0.00057	0.00044	0.00033	0.00026	0.00020
39	0.00065	0.00049	0.00037	0.00028	0.00022	0.00016
40	0.00056	0.00042	0.00032	0.00024	0.00018	0.00014
41	0.00049	0.00037	0.00027	0.00020	0.00015	0.00011
42	0.00042	0.00031	0.00023	0.00017	0.00013	0.00009
43	0.00037	0.00027	0.00020	0.00015	0.00011	0.00008
44	0.00032	0.00023	0.00017	0.00012	0.00009	0.00007
45	0.00028	0.00020	0.00015	0.00010	0.00008	0.00005
46	0.00024	0.00017	0.00012	0.00009	0.00006	0.00005
47	0.00021	0.00015	0.00011	0.00008	0.00005	0.00004
48	0.00018	0.00013	0.00009	0.00006	0.00004	0.00003
49	0.00016	0.00011	0.00008	0.00005	0.00004	0.00003
50	0.00014	0.00010	0.00007	0.00005	0.00003	0.00002
51	0.00012	0.00008	0.00006	0.00004	0.00003	0.00002
52	0.00010	0.00007	0.00005	0.00003	0.00002	0.00002
53	0.00009	0.00006	0.00004	0.00003	0.00002	0.00001
54	0.00008	0.00005	0.00004	0.00002	0.00002	0.00001
55	0.00007	0.00005	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001
56	0.00006	0.00004	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001
57	0.00005	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001	0.00001
58	0.00005	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001	0.00001
59	0.00004	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001	0.00000
60	0.00003	0.00002	0.00001	0.00001	0.00001	0.00000

Tabla V Factor del valor presente de una anualidad $\dfrac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n} = a_{\overline{n}|i}$

	i					
n	**0.01 (1%)**	**0.015 (1½%)**	**0.02 (2%)**	**0.025 (2½%)**	**0.03 (3%)**	**0.035 (3½%)**
1	0.99010	0.98522	0.98039	0.97561	0.97087	0.96618
2	1.97040	1.95588	1.94156	1.92742	1.91347	1.89969
3	2.94099	2.91220	2.88388	2.85602	2.82861	2.80164
4	3.90197	3.85438	3.80773	3.76197	3.71710	3.67308
5	4.85343	4.78264	4.71346	4.64583	4.57971	4.51505
6	5.79548	5.69719	5.60143	5.50813	5.41719	5.32855
7	6.72819	6.59821	6.47199	6.34939	6.23028	6.11454
8	7.65168	7.48593	7.32548	7.17014	7.01969	6.87396
9	8.56602	8.36052	8.16224	7.97087	7.78611	7.60769
10	9.47130	9.22218	8.98259	8.75206	8.53020	8.31661
11	10.36763	10.07112	9.78685	9.51421	9.25262	9.00155
12	11.25508	10.90751	10.57534	10.25776	9.95400	9.66333
13	12.13374	11.73153	11.34837	10.98318	10.63496	10.30274
14	13.00370	12.54338	12.10625	11.69091	11.29607	10.92052
15	13.86505	13.34323	12.84926	12.38138	11.93794	11.51741
16	14.71787	14.13126	13.57771	13.05500	12.56110	12.09412
17	15.56225	14.90765	14.29187	13.71220	13.16612	12.65132
18	16.39827	15.67256	14.99203	14.35336	13.75351	13.18968
19	17.22601	16.42617	15.67846	14.97889	14.32380	13.70984
20	18.04555	17.16864	16.35143	15.58916	14.87747	14.21240
21	18.85698	17.90014	17.01121	16.18455	15.41502	14.69797
22	19.66038	18.62082	17.65805	16.76541	15.93692	15.16712
23	20.45582	19.33086	18.29220	17.33211	16.44361	15.62041
24	21.24339	20.03041	18.91393	17.88499	16.93554	16.05837
25	22.02316	20.71961	19.52346	18.42438	17.41315	16.48151
26	22.79520	21.39863	20.12104	18.95061	17.87684	16.89035
27	23.55961	22.06762	20.70690	19.46401	18.32703	17.28536
28	24.31644	22.72672	21.28127	19.96489	18.76411	17.66702
29	25.06579	23.37608	21.84438	20.45355	19.18845	18.03577
30	25.80771	24.01584	22.39646	20.93029	19.60044	18.39205
31	26.54229	24.64615	22.93770	21.39541	20.00043	18.73628
32	27.26959	25.26714	23.46833	21.84918	20.38877	19.06887
33	27.98969	25.87895	23.98856	22.29188	20.76579	19.39021
34	28.70267	26.48173	24.49859	22.72379	21.13184	19.70068
35	29.40858	27.07559	24.99862	23.14516	21.48722	20.00066
36	20.10751	27.66068	25.48884	23.55625	21.83225	20.29049
37	30.79951	28.23713	25.96945	23.95732	22.16724	20.57053
38	31.48466	28.80505	26.44064	24.34860	22.49246	20.84109
39	32.16303	29.36458	26.90259	24.73034	22.80822	21.10250
40	32.83469	29.91585	27.35548	25.10278	23.11477	21.35507
41	33.49969	30.45896	27.79949	25.46612	23.41240	21.59910
42	34.15811	30.99405	28.23479	25.82061	23.70136	21.83486
43	34.81001	31.52123	28.66156	26.16645	23.98190	22.06269
44	35.45545	32.04062	29.07996	26.50385	24.25427	22.28279
45	36.09451	32.55234	29.49016	26.83302	24.51871	22.49545
46	36.72724	33.05649	29.89231	27.15417	24.77545	22.70092
47	37.35370	33.55319	30.28658	27.46748	25.02471	22.89944
48	37.97396	34.04255	30.67312	27.77315	25.26671	23.09124
49	38.58808	34.52468	31.05208	28.07137	25.50166	23.27656
50	39.19612	34.99969	31.42361	28.36231	25.72976	23.45562
51	39.79814	35.46767	31.78785	28.64616	25.95123	23.62862
52	40.39419	35.92874	32.14495	28.92308	26.16624	23.79576
53	40.98435	36.38300	32.49505	29.19325	26.37499	23.95726
54	41.56866	36.83054	32.83828	29.45683	26.57766	24.11330
55	42.14719	37.27147	33.17479	29.71398	26.77443	24.26405
56	42.71999	37.70588	33.50469	29.96486	26.96546	24.40971
57	43.28712	38.13387	33.82813	30.20962	27.15094	24.55045
58	43.84863	38.55554	34.14523	30.44841	27.33101	24.68642
59	44.40459	38.97097	34.45610	30.68137	27.50583	24.81780
60	44.95504	39.38027	34.76089	30.90866	27.67556	24.94473

Tabla V Factor del valor presente de una anualidad $\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = a_{\overline{n}|i}$ (*continúa*)

	i					
n	**0.04 (4%)**	**0.045 ($4\frac{1}{2}$%)**	**0.05 (5%)**	**0.06 (6%)**	**0.07 (7%)**	**0.08 (8%)**
1	0.96154	0.95694	0.95238	0.94340	0.93458	0.92593
2	1.88609	1.87267	1.85941	1.83339	1.80802	1.78326
3	2.77509	2.74896	2.72325	2.67301	2.62432	2.57710
4	3.62990	3.58753	3.54595	3.46511	3.38721	3.31213
5	4.45182	4.38998	4.32948	4.21236	4.10020	3.99271
6	5.24214	5.15787	5.07569	4.91732	4.76654	4.62288
7	6.00205	5.89270	5.78637	5.58238	5.38929	5.20637
8	6.73274	6.59589	6.46321	6.20979	5.97130	5.74664
9	7.43533	7.26879	7.10782	6.80169	6.51523	6.24689
10	8.11090	7.91272	7.72173	7.36009	7.02358	6.71008
11	8.76048	8.52892	8.30641	7.88687	7.49867	7.13896
12	9.38507	9.11858	8.86325	8.38384	7.94269	7.53608
13	9.98565	9.68285	9.39357	8.85268	8.35765	7.90378
14	10.56312	10.22283	9.89864	9.29498	8.74547	8.24424
15	11.11839	10.73955	10.37966	9.71225	9.10791	8.55948
16	11.65230	11.23402	10.83777	10.10590	9.44665	8.85137
17	12.16567	11.70719	11.27407	10.47726	9.76322	9.12164
18	12.65930	12.15999	11.68959	10.82760	10.05909	9.37189
19	13.13394	12.59329	12.08532	11.15812	10.33560	9.60360
20	13.59033	13.00794	12.46221	11.46992	10.59401	9.81815
21	14.02916	13.40472	12.82115	11.76408	10.83553	10.01680
22	14.45112	13.78442	13.16300	12.04158	11.06124	10.20074
23	14.85684	14.14777	13.48857	12.30338	11.27219	10.37106
24	15.24696	14.49548	13.79864	12.55036	11.46933	10.52876
25	15.62208	14.82821	14.09394	12.78336	11.65358	10.67478
26	15.98277	15.14661	14.37519	13.00317	11.82578	10.80998
27	16.32959	15.45130	14.64303	13.21053	11.98671	10.93516
28	16.66306	15.74287	14.89813	13.40616	12.13711	11.05108
29	16.98371	16.02189	15.14107	13.59072	12.27767	11.15841
30	17.29203	16.28889	15.37245	13.76483	12.40904	11.25778
31	17.58849	16.54439	15.59281	13.92909	12.53181	11.34980
32	17.87355	16.78889	15.80268	14.08404	12.64656	11.43500
33	18.14765	17.02286	16.00255	14.23023	12.75379	11.51389
34	18.41120	17.24676	16.19290	14.36814	12.85401	11.58693
35	18.66461	17.46101	16.37419	14.49825	12.94767	11.65457
36	18.90828	17.66604	16.54685	14.62099	13.03521	11.71719
37	19.14258	17.86224	16.71129	14.73678	13.11702	11.77518
38	19.36786	18.04999	16.86789	14.84602	13.19347	11.82887
39	19.58448	18.22966	17.01704	14.94907	13.26493	11.87858
40	19.79277	18.40158	17.15909	15.04630	13.33171	11.92461
41	19.99305	18.56611	17.29437	15.13802	13.39412	11.96723
42	20.18563	18.72355	17.42321	15.22454	13.45245	12.00670
43	20.37079	18.87421	17.54591	15.30617	13.50696	12.04324
44	20.54884	19.01838	17.66277	15.38318	13.55791	12.07707
45	20.72004	19.15635	17.77407	15.45583	13.60552	12.10840
46	20.88465	19.28837	17.88007	15.52437	13.65002	12.13741
47	21.04294	19.41471	17.98102	15.58903	13.69161	12.16427
48	21.19513	19.53561	18.07716	15.65003	13.73047	12.18914
49	21.34147	19.65130	18.16872	15.70757	13.76680	12.21216
50	21.48218	19.76201	18.25593	15.76186	13.80075	12.23348
51	21.61749	19.86795	18.33898	15.81308	13.83247	12.25323
52	21.74758	19.96933	18.41807	15.86139	13.86212	12.27151
53	21.87267	20.06634	18.49340	15.90697	13.88984	12.28843
54	21.99296	20.15918	18.56515	15.94998	13.91573	12.30410
55	22.10861	20.24802	18.63347	15.99054	13.93994	12.31861
56	22.21982	20.33303	18.69854	16.02881	13.96256	12.33205
57	22.32675	20.41439	18.76052	16.06492	13.98370	12.34449
58	22.42957	20.49224	18.81954	16.09898	14.00346	12.35601
59	22.52843	20.56673	18.87575	16.13111	14.02192	12.36668
60	22.62349	20.63802	18.92929	16.16143	14.03918	12.37655

Tabla V Factor del valor presente de una anualidad $\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = a_{\overline{n}|i}$ (*continúa*)

	i					
n	**0.09 (9%)**	**0.10 (10%)**	**0.11 (11%)**	**0.12 (12%)**	**0.13 (13%)**	**0.14 (14%)**
1	0.91743	0.90909	0.90090	0.89286	0.88496	0.87719
2	1.75911	1.73554	1.71252	1.69005	1.66810	1.64666
3	2.53129	2.48685	2.44371	2.40183	2.36115	2.32163
4	3.23972	3.16987	3.10245	3.03735	2.97447	2.91371
5	3.88965	3.79079	3.69590	3.60478	3.51723	3.43308
6	4.48592	4.35526	4.23054	4.11141	3.99755	3.88867
7	5.03295	4.86842	4.71220	4.56376	4.42261	4.28830
8	5.53482	5.33493	5.14612	4.96764	4.79877	4.63886
9	5.99525	5.75902	5.53705	5.32825	5.13166	4.94637
10	6.41766	6.14457	5.88923	5.65022	5.42624	5.21612
11	6.80519	6.49506	6.20652	5.93770	5.68694	5.45273
12	7.16073	6.81369	6.49236	6.19437	5.91765	5.66029
13	7.48690	7.10336	6.74987	6.42355	6.12181	5.84236
14	7.78615	7.36669	6.98187	6.62817	6.30249	6.00207
15	8.06069	7.60608	7.19087	6.81086	6.46238	6.14217
16	8.31256	7.82371	7.37916	6.97399	6.60388	6.26506
17	8.54363	8.02155	7.54879	7.11963	6.72909	6.37286
18	8.75563	8.20141	7.70162	7.24967	6.83991	6.46742
19	8.95011	8.36492	7.83929	7.36578	6.93797	6.55037
20	9.12855	8.51356	7.96333	7.46944	7.02475	6.62313
21	9.29224	8.64869	8.07507	7.56200	7.10155	6.68696
22	9.44243	8.77154	8.17574	7.64465	7.16951	6.74294
23	9.58021	8.88322	8.26643	7.71843	7.22966	6.79206
24	9.70661	8.98474	8.34814	7.78432	7.28288	6.83514
25	9.82258	9.07704	8.42174	7.84314	7.32998	6.87293
26	9.92897	9.16095	8.48806	7.89566	7.37167	6.90608
27	10.02658	9.23722	8.54780	7.94255	7.40856	6.93515
28	10.11613	9.30657	8.60162	7.98442	7.44120	6.96066
29	10.19828	9.36961	8.65011	8.02181	7.47009	6.98304
30	10.27365	9.42691	8.69379	8.05518	7.49565	7.00266
31	10.34280	9.47901	8.73315	8.08499	7.51828	7.01988
32	10.40624	9.52638	8.76860	8.11159	7.53830	7.03498
33	10.46444	9.56943	8.80054	8.13535	7.55602	7.04823
34	10.51784	9.60857	8.82932	8.15656	7.57170	7.05985
35	10.56682	9.64416	8.85524	8.17550	7.58557	7.07005
36	10.61176	9.67651	8.87859	8.19241	7.59785	7.07899
37	10.65299	9.70592	8.89963	8.20751	7.60872	7.08683
38	10.69082	9.73265	8.91859	8.22099	7.61833	7.09371
39	10.72552	9.75696	8.93567	8.23303	7.62684	7.09975
40	10.75736	9.77905	8.95105	8.24378	7.63438	7.10504
41	10.78657	9.79914	8.96491	8.25337	7.64104	7.10969
42	10.81337	9.81740	8.97740	8.26194	7.64694	7.11376
43	10.83795	9.83400	8.98865	8.26959	7.65216	7.11733
44	10.86051	9.84909	8.99878	8.27642	7.65678	7.12047
45	10.88120	9.86281	9.00791	8.28252	7.66086	7.12322
46	10.90018	9.87528	9.01614	8.28796	7.66448	6.12563
47	10.91760	9.88662	9.02355	8.29282	7.66768	7.12774
48	10.93358	9.89693	9.03022	8.29716	7.67052	7.12960
49	10.94823	9.90630	9.03624	8.30104	7.67302	7.13123
50	10.96168	9.91481	9.04165	8.30450	7.67524	7.13266
51	10.97402	9.92256	9.04653	8.30759	7.67720	7.13391
52	10.98534	9.92960	9.05093	8.31035	7.67894	7.13501
53	10.99573	9.93600	9.05489	8.31281	7.68048	7.13597
54	11.00525	9.94182	9.05846	9.31501	7.68184	7.13682
55	11.01399	9.94711	9.06168	8.31697	7.68304	7.13756
56	11.02201	9.95191	9.06457	8.31872	7.68411	7.13821
57	11.02937	9.95629	9.06718	8.32029	7.68505	7.13878
58	11.03612	9.96026	9.06954	8.32169	7.68589	7.13928
59	11.04231	9.96387	9.07165	8.32294	7.68663	7.13972
60	11.04799	9.96716	9.07356	8.32405	7.68728	7.14011

Tabla V Factor del valor presente de una anualidad $\dfrac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} = a_{\overline{n}|i}$ (*continúa*)

	i					
n	**0.15 (15%)**	**0.16 (16%)**	**0.17 (17%)**	**0.18 (18%)**	**0.19 (19%)**	**0.20 (20%)**
1	0.86957	0.86207	0.85470	0.84746	0.84034	0.83333
2	1.62571	1.60523	1.58521	1.56564	1.54650	1.52778
3	2.28323	2.24589	2.20958	2.17427	2.13992	2.10648
4	2.85498	2.79818	2.74324	2.69006	2.63859	2.58873
5	3.35216	3.27429	3.19935	3.12717	3.05763	2.99061
6	3.78448	3.68474	3.58918	3.49760	3.40978	3.32551
7	4.16042	4.03857	3.92238	3.81153	3.70570	3.60459
8	4.48732	4.34359	4.20716	4.07757	3.95437	3.83716
9	4.77158	4.60654	4.45057	4.30302	4.16333	4.03097
10	5.01877	4.83323	4.65860	4.49409	4.33893	4.19247
11	5.23371	5.02864	4.83641	4.65601	4.48650	4.32706
12	5.42062	5.19711	4.98839	4.79322	4.61050	4.43922
13	5.58315	5.34233	5.11828	4.90951	4.71471	4.53268
14	5.72448	5.46753	5.22930	5.00806	4.80228	4.61057
15	5.84737	5.57546	5.32419	5.09158	4.87586	4.67547
16	5.95423	5.66850	5.40529	5.16235	4.93770	4.72956
17	6.04716	5.74870	5.47461	5.22233	4.98966	4.77463
18	6.12797	5.81785	5.53385	5.27316	5.03333	4.81219
19	6.19823	5.87746	5.58449	5.31624	5.07003	4.84350
20	6.25933	5.92884	5.62777	5.35275	5.10086	4.86958
21	6.31246	5.97314	5.66476	5.38368	5.12677	4.89132
22	6.35866	6.01133	5.69637	5.40990	5.14855	4.90943
23	6.39884	6.04425	5.72340	5.43212	5.16685	4.92453
24	6.43377	6.07263	5.74649	5.45095	5.18223	4.93710
25	6.46415	6.09709	5.76623	5.46691	5.19515	4.94759
26	6.49056	6.11818	5.78311	5.48043	5.20601	4.95632
27	6.51353	6.13636	5.79753	5.49189	5.21513	4.96360
28	6.53351	6.15204	5.80985	5.50160	5.22280	4.96967
29	6.55088	6.16555	5.82039	5.50983	5.22924	4.97472
30	6.56598	6.17720	5.82939	5.51681	5.23466	4.97894
31	6.57911	6.18724	5.83709	5.52272	5.23921	4.98245
32	6.59053	6.19590	5.84366	5.52773	5.24303	4.98537
33	6.60046	6.20336	5.84928	5.53197	5.24625	4.98781
34	6.60910	6.20979	5.85409	5.53557	5.24895	4.98984
35	6.61661	6.21534	5.85820	5.53862	5.25122	4.99154
36	6.62314	6.22012	5.86171	5.54120	5.25312	4.99295
37	6.62881	6.22424	5.86471	5.54339	5.25472	4.99412
38	6.63375	6.22779	5.86727	5.54525	5.25607	4.99510
39	6.63805	6.23086	5.86946	5.54682	5.25720	4.99592
40	6.64178	6.23350	5.87133	5.54815	5.25815	4.99660
41	6.64502	6.23577	5.87294	5.54928	5.25895	4.99717
42	6.64785	6.23774	5.87430	5.55024	5.25962	4.99764
43	6.65030	6.23943	5.87547	5.55105	5.26019	4.99803
44	6.65244	6.24089	5.87647	5.55174	5.26066	4.99836
45	6.65429	6.24214	5.87733	5.55232	5.26106	4.99863
46	6.65591	6.24323	5.87806	5.55281	5.26140	4.99886
47	6.65731	6.24416	5.87868	5.55323	5.26168	4.99905
48	6.65853	6.24497	5.87922	5.55359	5.26191	4.99921
49	6.65959	6.24566	5.87967	5.55389	5.26211	4.99934
50	6.66051	6.24626	5.88006	5.55414	5.26228	4.99945
51	6.66132	6.24678	5.88039	5.55436	5.26242	4.99954
52	6.66201	6.24722	5.88068	5.55454	5.26254	4.99962
53	6.66262	6.24760	5.88092	5.55469	5.26264	4.99968
54	6.66315	6.24793	5.88113	5.55483	5.26272	4.99974
55	6.66361	6.24822	5.88131	5.55494	5.26279	4.99978
56	6.66401	6.24846	5.88146	5.55503	5.26285	4.99982
57	6.66435	6.24868	5.88159	5.55511	5.26290	4.99985
58	6.66466	6.24886	5.88170	5.55518	5.26294	4.99987
59	6.66492	6.24902	5.88180	5.55524	5.26297	4.99989
60	6.66515	6.24915	5.88188	5.55529	5.26300	4.99991

Tabla VI **Factor de recuperación del capital** $\dfrac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1} = \dfrac{1}{a_{\overline{n}|i}}$

	i					
n	**0.01 (1%)**	**0.015 (1.5%)**	**0.02 (2%)**	**0.025 (2½%)**	**0.03 (3%)**	**0.035 (3½%)**
1	1.01000	1.01500	1.02000	1.02500	1.03000	1.03500
2	0.50751	0.51128	0.51505	0.51883	0.52261	0.52640
3	0.34002	0.34338	0.34675	0.35014	0.35353	0.35693
4	0.25628	0.25944	0.26262	0.26582	0.26903	0.27225
5	0.20604	0.20909	0.21216	0.21525	0.21835	0.22148
6	0.17255	0.17553	0.17853	0.18155	0.18460	0.18767
7	0.14863	0.15156	0.15451	0.15750	0.16051	0.16354
8	0.13069	0.13358	0.13651	0.13947	0.14246	0.14548
9	0.11674	0.11961	0.12252	0.12546	0.12843	0.13145
10	0.10558	0.10843	0.11133	0.11426	0.11723	0.12024
11	0.09645	0.09929	0.10218	0.10511	0.10808	0.11109
12	0.08885	0.09168	0.09456	0.09749	0.10046	0.10348
13	0.08241	0.08524	0.08812	0.09105	0.09403	0.09706
14	0.07690	0.07972	0.08260	0.08554	0.08853	0.09157
15	0.07212	0.07494	0.07783	0.08077	0.08377	0.08683
16	0.06794	0.07077	0.07365	0.07660	0.07961	0.08268
17	0.06426	0.06708	0.06997	0.07293	0.07595	0.07904
18	0.06098	0.06381	0.06670	0.06967	0.07271	0.07582
19	0.05805	0.06088	0.06378	0.06676	0.06981	0.07294
20	0.05542	0.05825	0.06116	0.06415	0.06722	0.07036
21	0.05303	0.05587	0.05878	0.06179	0.06487	0.06804
22	0.05086	0.05370	0.05663	0.05965	0.06275	0.06593
23	0.04889	0.05173	0.05467	0.05770	0.06081	0.06402
24	0.04707	0.04992	0.05287	0.05591	0.05905	0.06227
25	0.04541	0.04826	0.05122	0.05428	0.05743	0.06067
26	0.04387	0.04673	0.04970	0.05277	0.05594	0.05921
27	0.04245	0.04532	0.04829	0.05138	0.05456	0.05785
28	0.04112	0.04400	0.04699	0.05009	0.05329	0.05660
29	0.03990	0.04278	0.04578	0.04889	0.05211	0.05545
30	0.03875	0.04164	0.04465	0.04778	0.05102	0.05437
31	0.03768	0.04057	0.04360	0.04674	0.05000	0.05337
32	0.03667	0.03958	0.04261	0.04577	0.04905	0.05244
33	0.03573	0.03864	0.04169	0.04486	0.04816	0.05157
34	0.03484	0.03776	0.04082	0.04401	0.04732	0.05076
35	0.03400	0.03693	0.04000	0.04321	0.04654	0.05000
36	0.03321	0.03615	0.03923	0.04245	0.04580	0.04928
37	0.03247	0.03541	0.03851	0.04174	0.04511	0.04861
38	0.03176	0.03472	0.03782	0.04107	0.04446	0.04798
39	0.03109	0.03405	0.03717	0.04044	0.04384	0.04739
40	0.03046	0.03343	0.03656	0.03984	0.04326	0.04683
41	0.02985	0.03283	0.03597	0.03927	0.04271	0.04630
42	0.02928	0.03226	0.03542	0.03873	0.04219	0.04580
43	0.02873	0.03172	0.03489	0.03822	0.04170	0.04533
44	0.02820	0.03121	0.03439	0.03773	0.04123	0.04488
45	0.02771	0.03072	0.03391	0.03727	0.04079	0.04445
46	0.02723	0.03025	0.03345	0.03683	0.04036	0.04405
47	0.02677	0.02980	0.03302	0.03641	0.03996	0.04367
48	0.02633	0.02937	0.03260	0.03601	0.03958	0.04331
49	0.02591	0.02896	0.03220	0.03562	0.03921	0.04296
50	0.02551	0.02857	0.03182	0.03526	0.03887	0.04263
51	0.02513	0.02819	0.03146	0.03491	0.03853	0.04232
52	0.02476	0.02783	0.03111	0.03457	0.03822	0.04202
53	0.02440	0.02749	0.03077	0.03425	0.03791	0.04174
54	0.02406	0.02715	0.03045	0.03395	0.03763	0.04147
55	0.02373	0.02683	0.03014	0.03365	0.03735	0.04121
56	0.02341	0.02652	0.02985	0.03337	0.03708	0.04097
57	0.02310	0.02622	0.02956	0.03310	0.03683	0.04073
58	0.02281	0.02594	0.02929	0.03284	0.03659	0.04051
59	0.02252	0.02566	0.02902	0.03259	0.03636	0.04029
60	0.02224	0.02539	0.02877	0.03235	0.03613	0.04009

Tabla VI **Factor de recuperación del capital** $\dfrac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = \dfrac{1}{a_{\overline{n}|i}}$ (*continúa*)

	i					
n	**0.04 (4%)**	**0.045 ($4\frac{1}{2}$%)**	**0.05 (5%)**	**0.06 (6%)**	**0.07 (7%)**	**0.08 (8%)**
1	1.04000	1.04500	1.05000	1.06000	1.07000	1.08000
2	0.53020	0.53400	0.53780	0.54544	0.55309	0.56077
3	0.36035	0.36377	0.36721	0.37411	0.38105	0.38803
4	0.27549	0.27874	0.28201	0.28859	0.29523	0.23019
5	0.22463	0.22779	0.23097	0.23740	0.24389	0.25046
6	0.19076	0.19388	0.19702	0.20336	0.20980	0.21632
7	0.16661	0.16970	0.17282	0.17914	0.18555	0.19207
8	0.14853	0.15161	0.15472	0.16104	0.16747	0.17401
9	0.13449	0.13757	0.14069	0.14702	0.15349	0.16008
10	0.12329	0.12638	0.12950	0.13587	0.14238	0.14903
11	0.11415	0.11725	0.12039	0.12679	0.13336	0.14008
12	0.10655	0.10967	0.11283	0.11928	0.12590	0.13270
13	0.10014	0.10328	0.10646	0.11296	0.11965	0.12652
14	0.09467	0.09782	0.10102	0.10758	0.11434	0.12130
15	0.08994	0.09311	0.09634	0.10296	0.10979	0.11683
16	0.08582	0.08902	0.09227	0.09895	0.10586	0.11298
17	0.08220	0.08542	0.08870	0.09544	0.10243	0.10963
18	0.07899	0.08224	0.08555	0.09236	0.09941	0.10670
19	0.07614	0.07941	0.08275	0.08962	0.09675	0.10413
20	0.07358	0.07688	0.08024	0.08718	0.09439	0.10185
21	0.07128	0.07460	0.07800	0.08500	0.09229	0.09983
22	0.06920	0.07255	0.07597	0.08305	0.09041	0.09803
23	0.06731	0.07068	0.07414	0.08128	0.08871	0.09642
24	0.06559	0.06899	0.07247	0.07968	0.08719	0.09498
25	0.06401	0.06744	0.07095	0.07823	0.08581	0.09368
26	0.06257	0.06602	0.06956	0.07690	0.08456	0.09251
27	0.06124	0.06472	0.06829	0.07570	0.08343	0.09145
28	0.06001	0.06352	0.06712	0.07459	0.08239	0.09049
29	0.05888	0.06241	0.06605	0.07358	0.08145	0.08962
30	0.05783	0.06139	0.06505	0.07265	0.08059	0.08883
31	0.05686	0.06044	0.06413	0.07179	0.07980	0.08811
32	0.05595	0.05956	0.06328	0.07100	0.07907	0.08745
33	0.05510	0.05874	0.06249	0.07027	0.07841	0.08685
34	0.05431	0.05798	0.06176	0.06960	0.07780	0.08630
35	0.05358	0.05727	0.06107	0.06897	0.07723	0.08580
36	0.05289	0.05661	0.06043	0.06839	0.07672	0.08534
37	0.05224	0.05598	0.05984	0.06786	0.07624	0.08492
38	0.05163	0.05540	0.05928	0.06736	0.07580	0.08454
39	0.05106	0.05486	0.05876	0.06689	0.07539	0.08419
40	0.05052	0.05434	0.05828	0.06646	0.07501	0.08386
41	0.05002	0.05386	0.05782	0.06606	0.07466	0.08356
42	0.04954	0.05341	0.05739	0.06568	0.07434	0.08329
43	0.04909	0.05298	0.05699	0.06533	0.07404	0.08303
44	0.04866	0.05258	0.05662	0.06501	0.07376	0.08280
45	0.04826	0.05220	0.05626	0.06470	0.07350	0.08259
46	0.04788	0.05184	0.05593	0.06441	0.07326	0.08239
47	0.04752	0.05151	0.05561	0.06415	0.07304	0.08221
48	0.04718	0.05119	0.05532	0.06390	0.07283	0.08204
49	0.04686	0.05089	0.05504	0.06366	0.07264	0.08189
50	0.04655	0.05060	0.05478	0.06344	0.07246	0.08174
51	0.04626	0.05033	0.05453	0.06324	0.07229	0.08161
52	0.04598	0.05008	0.05429	0.06305	0.07214	0.08149
53	0.04572	0.04983	0.05407	0.06287	0.07200	0.08138
54	0.04547	0.04961	0.05386	0.06270	0.07186	0.08127
55	0.04523	0.04939	0.05367	0.06254	0.07174	0.08118
56	0.04500	0.04918	0.05348	0.06239	0.07162	0.08109
57	0.04479	0.04899	0.05330	0.06225	0.07151	0.08101
58	0.04458	0.04880	0.05314	0.06212	0.07141	0.08093
59	0.04439	0.04862	0.05298	0.06199	0.07132	0.08086
60	0.04420	0.04845	0.05283	0.06188	0.07123	0.08080

Tabla VI **Factor de recuperación del capital** $\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1} = \frac{1}{a_{\overline{n|}i}}$ (*continúa*)

	i					
n	**0.09 (9%)**	**0.10 (10%)**	**0.11 (11%)**	**0.12 (12%)**	**0.13 (13%)**	**0.14 (14%)**
1	1.09000	1.10000	1.11000	1.12000	1.13000	1.14000
2	0.56847	0.57619	0.58393	0.59170	0.59948	0.60729
3	0.39505	0.40211	0.40921	0.41635	0.42352	0.43073
4	0.30867	0.31547	0.32233	0.32923	0.33619	0.34320
5	0.25709	0.26380	0.27057	0.27741	0.28431	0.29128
6	0.22292	0.22961	0.23638	0.24323	0.25015	0.25716
7	0.19869	0.20541	0.21222	0.21912	0.22611	0.23319
8	0.18067	0.18744	0.19432	0.20130	0.20839	0.21557
9	0.16680	0.17364	0.18060	0.18768	0.19487	0.20217
10	0.15582	0.16275	0.16980	0.17698	0.18429	0.19171
11	0.14695	0.15396	0.16112	0.16842	0.17584	0.18339
12	0.13965	0.14676	0.15403	0.16144	0.16899	0.17667
13	0.13357	0.14078	0.14815	0.15568	0.16335	0.17116
14	0.12843	0.13575	0.14323	0.15087	0.15867	0.16661
15	0.12406	0.13147	0.13907	0.14682	0.15474	0.16281
16	0.12030	0.12782	0.13552	0.14339	0.15143	0.15962
17	0.11705	0.12466	0.13247	0.14046	0.14861	0.15692
18	0.11421	0.12193	0.12984	0.13794	0.14620	0.15462
19	0.11173	0.11955	0.12756	0.13576	0.14413	0.15266
20	0.10955	0.11746	0.12558	0.13388	0.14235	0.15099
21	0.10762	0.11562	0.12384	0.13224	0.14081	0.14954
22	0.10590	0.11401	0.12231	0.13081	0.13948	0.14830
23	0.10438	0.11257	0.12097	0.12956	0.13832	0.14723
24	0.10302	0.11130	0.11979	0.12846	0.13731	0.14630
25	0.10181	0.11017	0.11874	0.12750	0.13643	0.14550
26	0.10072	0.10916	0.11781	0.12665	0.13565	0.14480
27	0.09973	0.10826	0.11699	0.12590	0.13498	0.14419
28	0.09885	0.10745	0.11626	0.12524	0.13439	0.14366
29	0.09806	0.10673	0.11561	0.12466	0.13387	0.14320
30	0.09734	0.10608	0.11502	0.12414	0.13341	0.14280
31	0.09669	0.10550	0.11451	0.12369	0.13301	0.14245
32	0.09610	0.10497	0.11404	0.12328	0.13266	0.14215
33	0.09556	0.10450	0.11363	0.12292	0.13234	0.14188
34	0.09508	0.10407	0.11326	0.12260	0.13207	0.14165
35	0.09464	0.10369	0.11293	0.12232	0.13183	0.14144
36	0.09424	0.10334	0.11263	0.12206	0.13162	0.14126
37	0.09387	0.10303	0.11236	0.12184	0.13143	0.14111
38	0.09354	0.10275	0.11213	0.12164	0.13126	0.14097
39	0.09324	0.10249	0.11191	0.12146	0.13112	0.14085
40	0.09296	0.10226	0.11172	0.12130	0.13099	0.14075
41	0.09271	0.10205	0.11155	0.12116	0.13087	0.14065
42	0.09248	0.10186	0.11139	0.12104	0.13077	0.14057
43	0.09227	0.10169	0.11125	0.12092	0.13068	0.14050
44	0.09208	0.10153	0.11113	0.12083	0.13060	0.14044
45	0.09190	0.10139	0.11101	0.12074	0.13053	0.14039
46	0.09174	0.10126	0.11091	0.12066	0.13047	0.14034
47	0.09160	0.10115	0.11082	0.12059	0.13042	0.14030
48	0.09146	0.10104	0.11074	0.12052	0.13037	0.14026
49	0.09134	0.10095	0.11067	0.12047	0.13033	0.14023
50	0.09123	0.10086	0.11060	0.12042	0.13029	0.14020
51	0.09112	0.10078	0.11054	0.12037	0.13026	0.14018
52	0.09103	0.10071	0.11049	0.12033	0.13023	0.14015
53	0.09094	0.10064	0.11044	0.12030	0.13020	0.14014
54	0.09087	0.10059	0.11039	0.12026	0.13018	0.14012
55	0.09079	0.10053	0.11035	0.12024	0.13016	0.14010
56	0.09073	0.10048	0.11032	0.12021	0.13014	0.14009
57	0.09067	0.10044	0.11029	0.12019	0.13012	0.14008
58	0.09061	0.10040	0.11026	0.12017	0.13011	0.14007
59	0.09056	0.10036	0.11023	0.12015	0.13010	0.14006
60	0.09051	0.10033	0.11021	0.12013	0.13009	0.14005

Tabla VI **Factor de recuperación del capital** $\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1} = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$ (*continúa*)

	i					
n	**0.15 (15%)**	**0.16 (16%)**	**0.17 (17%)**	**0.18 (18%)**	**0.19 (19%)**	**0.20 (20%)**
1	1.15000	1.16000	1.17000	1.18000	1.19000	1.20000
2	0.61512	0.62296	0.63083	0.63872	0.64662	0.65455
3	0.43798	0.44526	0.45257	0.45992	0.46731	0.47473
4	0.35027	0.35738	0.36453	0.37174	0.37899	0.38629
5	0.29832	0.30541	0.31256	0.31978	0.32705	0.33438
6	0.26424	0.27139	0.27861	0.28591	0.29327	0.30071
7	0.24036	0.24761	0.25495	0.26236	0.26985	0.27742
8	0.22285	0.23022	0.23769	0.24524	0.25289	0.26061
9	0.20957	0.21708	0.22469	0.23239	0.24019	0.24808
10	0.19925	0.20690	0.21466	0.22251	0.23047	0.23852
11	0.19107	0.19886	0.20676	0.21478	0.22289	0.23110
12	0.18448	0.19241	0.20047	0.20863	0.21690	0.22526
13	0.17911	0.18718	0.19538	0.20369	0.21210	0.22062
14	0.17469	0.18290	0.19123	0.19968	0.20823	0.21689
15	0.17102	0.17936	0.18782	0.19640	0.20509	0.21388
16	0.16795	0.17641	0.18500	0.19371	0.20252	0.21144
17	0.16537	0.17395	0.18266	0.19149	0.20041	0.20944
18	0.16319	0.17188	0.18071	0.18964	0.19868	0.20781
19	0.16134	0.17014	0.17907	0.18810	0.19724	0.20646
20	0.15976	0.16867	0.17769	0.18682	0.19605	0.20536
21	0.15842	0.16742	0.17653	0.18575	0.19505	0.20444
22	0.15727	0.16635	0.17555	0.18485	0.19423	0.20369
23	0.15628	0.16545	0.17472	0.18409	0.19354	0.20307
24	0.15543	0.16467	0.17402	0.18345	0.19297	0.20255
25	0.15470	0.16401	0.17342	0.18292	0.19249	0.20212
26	0.15407	0.16345	0.17292	0.18247	0.19209	0.20176
27	0.15353	0.16296	0.17249	0.18209	0.19175	0.20147
28	0.15306	0.16255	0.17212	0.18177	0.19147	0.20122
29	0.15265	0.16219	0.17181	0.18149	0.19123	0.20102
30	0.15230	0.16189	0.17154	0.18126	0.19103	0.20085
31	0.15200	0.16162	0.17132	0.18107	0.19087	0.20070
32	0.15173	0.16140	0.17113	0.18091	0.19073	0.20059
33	0.15150	0.16120	0.17096	0.18077	0.19061	0.20049
34	0.15131	0.16104	0.17082	0.18065	0.19051	0.20041
35	0.15113	0.16089	0.17070	0.18055	0.19043	0.20034
36	0.15099	0.16077	0.17060	0.18047	0.19036	0.20028
37	0.15086	0.16066	0.17051	0.18039	0.19030	0.20024
38	0.15074	0.16057	0.17044	0.18033	0.19026	0.20020
39	0.15065	0.16049	0.17037	0.18028	0.19022	0.20016
40	0.15056	0.16042	0.17032	0.18024	0.19018	0.20014
41	0.15049	0.16037	0.17027	0.18020	0.19015	0.20011
42	0.15042	0.16031	0.17023	0.18017	0.19013	0.20009
43	0.15037	0.16027	0.17020	0.18015	0.19011	0.20008
44	0.15032	0.16023	0.17017	0.18012	0.19009	0.20007
45	0.15028	0.16020	0.17015	0.18010	0.19008	0.20005
46	0.15024	0.16017	0.17012	0.18009	0.19006	0.20005
47	0.15021	0.16015	0.17011	0.18008	0.19005	0.20004
48	0.15018	0.16013	0.17009	0.18006	0.19004	0.20003
49	0.15016	0.16011	0.17008	0.18005	0.19004	0.20003
50	0.15014	0.16010	0.17007	0.18005	0.19003	0.20002
51	0.15012	0.16008	0.17006	0.18004	0.19003	0.20002
52	0.15010	0.16007	0.17005	0.18003	0.19002	0.20002
53	0.15009	0.16006	0.17004	0.18003	0.19002	0.20001
54	0.15008	0.16005	0.17004	0.18002	0.19002	0.20001
55	0.15007	0.16005	0.17003	0.18002	0.19001	0.20001
56	0.15006	0.16004	0.17003	0.18002	0.19001	0.20001
57	0.15005	0.16003	0.17002	0.18001	0.19001	0.20001
58	0.15005	0.16003	0.17002	0.18001	0.19001	0.20001
59	0.15004	0.16003	0.17002	0.18001	0.19001	0.20000
60	0.15003	0.16002	0.17001	0.18001	0.19001	0.20000

Tabla VII Pago mensual por dólar del préstamo hipotecario

Tasa de interés anual	Periodo hipotecario 15 años (180 pagos)	 20 años (240 pagos)	 25 años (300 pagos)	 30 años (360 pagos)
7.50	0.00927012	0.00805593	0.00738991	0.00699214
7.75	0.00941276	0.00820948	0.00755329	0.00716412
8.00	0.00955652	0.00836440	0.00771816	0.00733764
8.25	0.00970140	0.00852065	0.00788450	0.00751266
8.50	0.00984740	0.00867823	0.00805227	0.00768913
8.75	0.00999448	0.00883710	0.00822143	0.00786700
9.00	0.01014266	0.00899725	0.00839196	0.00804622
9.25	0.01029192	0.00915866	0.00856381	0.00822675
9.50	0.01044224	0.00932131	0.00873696	0.00840854
9.75	0.01059362	0.00948516	0.00891137	0.00859154
10.00	0.01074605	0.00965021	0.00908700	0.00877572
10.25	0.01089951	0.00981643	0.00926383	0.00896101
10.50	0.01105399	0.00998380	0.00944182	0.00914739
10.75	0.01120948	0.01015229	0.00962093	0.00933481
11.00	0.01136597	0.01032188	0.00980113	0.00952323
11.25	0.01152345	0.01049256	0.00998240	0.00971261
11.50	0.01168190	0.01066430	0.01016469	0.00990291
11.75	0.01184131	0.01083707	0.01034798	0.01009410
12.00	0.01200168	0.01101086	0.01053224	0.01028613
12.25	0.01216299	0.01118565	0.01071744	0.01047896
12.50	0.01232522	0.01136140	0.01090354	0.01067258
12.75	0.01248837	0.01153817	0.01109052	0.01086693
13.00	0.01265242	0.01171576	0.01127835	0.01106200
13.25	0.01281736	0.01189431	0.01146700	0.01145412
13.50	0.01298319	0.01207375	0.01165645	0.01165113
13.75	0.01314987	0.01225405	0.01184666	0.01184872
14.00	0.01331741	0.01243521	0.01203761	0.01884872
14.25	0.01348580	0.01261719	0.01222928	0.01204687
14.50	0.01365501	0.01279998	0.01242163	0.01224556
14.75	0.01382504	0.01298355	0.01261465	0.01244476
15.00	0.01399587	0.01316790	0.01280831	0.01264444
15.25	0.01416750	0.01335299	0.01300258	0.01284459
15.50	0.01433990	0.01353881	0.01319745	0.01304517
15.75	0.01451308	0.01372534	0.01339290	0.01324617
16.00	0.01468701	0.01391256	0.01358889	0.01344757
16.25	0.01486168	0.01410046	0.01378541	0.01364935
16.50	0.01503709	0.01428901	0.01398245	0.01385148
16.75	0.01521321	0.01447820	0.01417998	0.01405396
17.00	0.01539004	0.01466801	0.01437797	0.01425675
17.25	0.01556757	0.01485842	0.01457641	0.01445986
17.50	0.01574578	0.01504942	0.01477530	0.01466325
17.75	0.01592467	0.01524099	0.01497460	0.01486692
18.00	0.01610421	0.01543312	0.01517430	0.01507085
18.25	0.01628440	0.01562578	0.01537439	0.01527503
18.50	0.01646523	0.01581897	0.01557484	0.01547945
18.75	0.01664669	0.01601266	0.01577565	0.01568408
19.00	0.01682876	0.01620685	0.01597680	0.01588892
19.25	0.01701143	0.01640152	0.01617827	0.01609397
19.50	0.01719470	0.01659665	0.01638006	0.01629920
19.75	0.01737855	0.01679223	0.01658215	0.01650461
20.00	0.01756297	0.01698825	0.01678452	0.01671019

APÉNDICE A

Revisión de álgebra (opcional)

A.1 EL SISTEMA DE LOS NÚMEROS REALES
A.2 POLINOMIOS
A.3 FACTORIZACIÓN
A.4 FRACCIONES
A.5 EXPONENTES Y RADICALES

El álgebra es el único requisito para utilizar este libro. En este apéndice se ofrece un repaso general de álgebra. Para guiarlo en su revisión de álgebra se recomienda realizar el siguiente examen de la materia. Su finalidad es ayudarle a diagnosticar en qué áreas necesita un repaso ulterior. Los resultados del examen le servirán de guía al estudiar las secciones A.1 a la A.5.

EVALUACIÓN PRELIMINAR DE ÁLGEBRA

	SECCIÓN CORRESPONDIENTE EN EL APÉNDICE
1. $\lvert -10 \rvert =$	A.1
2. $x^3 \cdot x^4 =$	A.2
3. $[(x^3)^2]^3 =$	A.2
4. $x^5/x^3 =$	A.2
5. $(4x - 2y + z) - (-3x + 4y - 2z) =$	A.2
6. $\dfrac{2x^2(3x^3)}{(-2x^2)^2} =$	A.2
7. Factorizar $2a^3b^2c + 4a^2bc^2$.	A.3

8. Factorizar $x^2 - 4$. A.3

9. Factorizar $x^2 - 5x + 4$. A.3

10. $\frac{1}{5} + \frac{2}{15} - \frac{1}{6} =$ A.4

11. $\dfrac{2x^2}{3} \div \dfrac{4x^3}{9} =$ A.4

12. $x^{1/2}x^{4/3} =$ A.5

13. $\sqrt[3]{a^2b}\,\sqrt[3]{ab^2} =$ A.5

14. $3\sqrt{2} - 2\sqrt{8} =$ A.5

15. $\sqrt{\dfrac{4a^2}{9}} =$ A.5

16. Exprese $x^{2/3}$ en forma de radical. A.5

❑ RESPUESTAS A LA EVALUACIÓN PRELIMINAR DE ÁLGEBRA

1. 10 **2.** x^7 **3.** x^{18} **4.** x^2 **5.** $7x - 6y + 3z$ **6.** $3x/2$
7. $2a^2bc(ab + 2c)$ **8.** $(x + 2)(x - 2)$ **9.** $(x - 4)(x - 1)$ **10.** $\frac{1}{6}$
11. $3/2x$ **12.** $x^{11/6}$ **13.** ab **14.** $-\sqrt{2}$ **15.** $2a/3$ **16.** $\sqrt[3]{x^2}$

A.1 El sistema de los números reales

Números reales

En este libro nos hemos ocupado de las matemáticas de los ***números reales***. Como se aprecia en la figura A.1, el sistema de números reales está constituido por números racionales e irracionales. Los ***números racionales*** son aquellos que pueden expresarse como la ***razón***, o cociente, de dos enteros, siendo el divisor un entero no cero. En consecuencia, un número racional es aquel que puede expresarse en la forma a/b, donde a y b son enteros y b no es 0 (establecido como $b \neq 0$). Los números $\frac{1}{5}$, $-\frac{2}{7}$, $\frac{23}{455}$ y $137/(-750)$ son ejemplos de números racionales.

Dado que cualquier entero a puede escribirse en forma de cociente $a/1$, todos los enteros son además números racionales. He aquí algunos ejemplos: $-5 = -5/1$ y $54 = 54/1$. Se

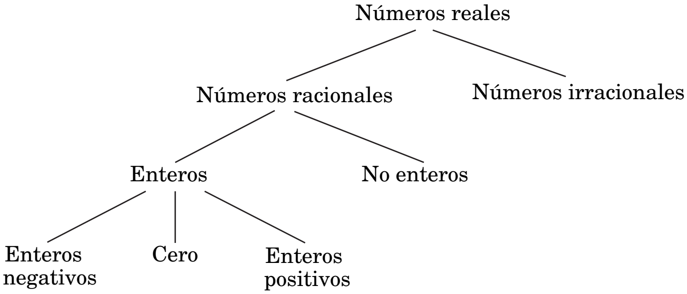


Figura A.1 Sistema de números reales.

considera que el cero es un entero (ni negativo ni positivo), y puede escribirse en forma de cociente $0/b = 0$, $b \neq 0$.

Los ***números irracionales*** son números reales que no pueden expresarse como la razón de dos enteros. Números como $\pi = 3.14159265\ldots$ (que es la razón de la circunferencia de un círculo con su diámetro), $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$, $\sqrt{3} = 1.7321\ldots$ y $\sqrt{5} = 2.2361\ldots$ son ejemplos de números irracionales.

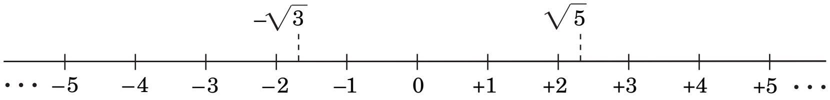


Figura A.2 Recta numérica.

El conjunto de los números reales puede representarse mediante una ***recta numérica*** (véase la figura A.2). La recta numérica tiene un punto cero, denominado ***origen***, que sirve para representar el número real 0. A cada punto de la recta numérica corresponde un número real. La correspondencia estriba en que el número real representado por un punto es igual a la ***distancia dirigida*** que se recorre al pasar del origen a ese punto. Se considera que los movimientos de la izquierda a la derecha a lo largo de la recta numérica se encuentran en una dirección positiva. Así, los puntos situados a la derecha del origen corresponden a números reales positivos, y los situados a la izquierda corresponden a números reales negativos. Obsérvese que a cada número real corresponde un solo punto en la recta numérica.

Los ***símbolos de desigualdad*** $>$ o $<$ sirven para indicar que dos números no son iguales, pero que pueden compararse. Cuando uno de ellos se coloca entre dos números, se "abre" en dirección del número más grande. Cuando se tienen dos números reales a y b, la notación $a > b$ se lee "a es mayor que b". La proposición $a > b$ implica que en la recta numérica real a está situada a la derecha de b.

Valor absoluto

El ***valor absoluto*** de un número real es la magnitud o tamaño del número sin el signo. La notación $|a|$ expresa el valor absoluto de a.

Definición: Valor absoluto

Para cualquier número real a,

$$|a| = \begin{cases} a \text{ si } a \text{ es positiva o cero} \\ -a \text{ si } a \text{ es negativa} \end{cases}$$

Ejemplo 1

El valor absoluto de $+5$ es $|+5| = 5$. El valor absoluto de -20 es $|-20| = 20$. El valor absoluto de 0 es $|0| = 0$. ❑

El concepto de valor absoluto se explica con mayor detalle en el capítulo 1.

Sección A.1 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 12, coloque el símbolo de desigualdad ($<$ o $>$) entre los dos números dados para indicar la relación apropiada de desigualdad.

1. 10 ______ 6
2. 8 ______ 3
3. -1 ______ -4
4. 2 ______ -3
5. 20 ______ 10
6. -5 ______ -2
7. -10 ______ -15
8. 5 ______ 0
9. -3 ______ 0
10. 0 ______ -2
11. 1 ______ -1
12. 3 ______ 1
13. $|-5| =$
14. $|-3| =$
15. $|-5-10| =$
16. $|-10+5| =$
17. $|16| =$
18. $|2| =$
19. $|10-(4-3)| =$
20. $|-5-(-5+2)| =$

A.2 Polinomios

Exponentes enteros positivos

Cuando un número real a se multiplica por sí mismo, a ese producto se le denota mediante $a \cdot a$, o bien aa. Si el mismo número se multiplica por sí mismo cinco veces, el producto se expresa con $aaaaa$. Una notación abreviada que puede utilizarse para expresar estos productos es

$$aa = a^2$$

y

$$aaaaa = a^5$$

El número escrito arriba y a la derecha de a recibe el nombre de *exponente*. El exponente indica el número de veces que a se repite como factor.

Definición

Si n es un entero positivo y a es un número real cualquiera,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ factores}}$$

El término a^n puede expresarse con palabras como "a elevada a la n-ésima potencia", donde se considera que a es la ***base*** y que n es el exponente o ***potencia***.

Ejemplo 2

a) $(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = (-2)^6$
b) $(5)(5)(5) = (5)^3$
c) $aaaabbb = a^4b^3$
d) $aa/(bbbb) = a^2/b^4$ ❑

Definición

Si n es un entero positivo y $a \neq 0$,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplo 3

a) $a^{-2} = 1/a^2$

b) $(2)^{-3} = 1/(2)^3 = \frac{1}{8}$ ❑

Definición

Si a es real y no es igual a 0, $a^0 = 1$.

Ejemplo 4

a) $(10)^0 = 1$

b) $(4x)^0 = 1, x \neq 0$

c) $-5y^0 = -5(1) = -5, y \neq 0$ ❑

Las siguientes leyes de los exponentes son aplicables cuando a y b son números reales cualesquiera, y m y n son enteros positivos.

Leyes de los exponentes

I $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

II $(a^m)^n = a^{mn}$

III $(ab)^n = a^n b^n$

IV $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ *donde* $a \neq 0$

V $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$ *donde* $b \neq 0$

Ejemplo 5

a) $(b^5)(b) = b^{5+1} = b^6$

b) $(-2)^3(-2)^2 = (-2)^{3+2} = (-2)^5$

c) $(2)(2)^3(2)^{-2} = (2^{1+3})(2^{-2}) = (2^4)(2^{-2}) = 2^2 = 4$

d) $(a^2)^3 = a^{2\cdot 3} = a^6$

e) $[(3)^2]^4 = (3)^{2\cdot 4} = 3^8$

f) $[(-1)^3]^5 = (-1)^{3\cdot 5} = (-1)^{15} = -1$

g) $(ab)^4 = a^4b^4$

h) $(2x)^3 = (2)^3(x)^3 = 8x^3$

i) $\dfrac{a^6}{a^3} = a^{6-3} = a^3$

j) $\dfrac{x^2}{x^4} = x^{2-4} = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$

k) $(2)^3/(2)^7 = (2)^{3-7} = (2)^{-4} = 1/(2)^4 = \frac{1}{16}$

l) $(x/y)^5 = x^5/y^5$

m) $(2a/5b^2)^3 = (2a)^3/(5b^2)^3 = 8a^3/125b^6$

n) $x^5/x^5 = x^{5-5} = x^0 = 1$ ❑

Expresiones polinomiales

En esta sección se explicarán algunas definiciones y terminología de gran importancia. Primero, las ***constantes*** son cantidades o magnitudes cuyo valor no cambia. Una constante puede representarse con una letra o con el número real que equivalga a la constante. Por ejemplo, 5 es una constante, lo mismo que la letra b si $b = -20$. Las ***variables*** son cantidades cuyo valor puede cambiar. Generalmente se simbolizan mediante letras. Así, la letra t puede servir para representar la temperatura medida cada hora en una ciudad mediante la escala Fahrenheit o Celsius. El valor de t diferirá entre una hora y la siguiente.

Una ***expresión algebraica*** es un conjunto de constantes y variables unidas por una serie de adiciones, sustracciones, multiplicaciones, divisiones, signos radicales y paréntesis u otros símbolos de agrupamiento. Por ejemplo,

$$5x^2y - 10x^3 + 75$$

es una expresión algebraica. Esta expresión consta de los tres *términos* $5x^2y$, $10x^3$ y 75. Un ***término*** se compone de un solo número o del producto de un número y las potencias de una o más variables. El término $5x^2y$ se compone de los ***factores*** 5, x^2 y y. El factor constante 5 recibe el nombre de *coeficiente* del término. En este libro, ***coeficiente*** se referirá siempre a una constante que sea factor en un término. Por ejemplo, 10 es el coeficiente en el término $10x^3$. El término 75 de la expresión algebraica no contiene variables y se llama ***término constante***.

Un ***polinomio*** es la suma de uno o más términos, con las siguientes restricciones:

❑ Los términos de un polinomio constan de un número o del producto de un número y las potencias *enteras positivas* de una o más variables. Esta definición excluye términos que tengan variables bajo un signo de radical o los que contengan variables en el denominador.

❑ Un polinomio compuesto por un término se denomina ***monomio***. El que tenga dos términos recibe el nombre de ***binomio***. Si un polinomio consta de tres términos se llama ***trinomio***. Se da el nombre de polinomio a la expresión algebraica que tenga más de tres términos.

Ejemplo 6

a) La expresión algebraica 25 es un polinomio que tiene un término; por lo tanto, se le llama monomio.

b) La expresión algebraica $5x^2 - 2x + 1$ es un polinomio compuesto de tres términos; por eso se le da el nombre de trinomio.

c) La expresión algebraica $2x^2y/z$ no es un polinomio porque la variable z aparece en el denominador del término.

d) La expresión algebraica $\sqrt{x}$ no es un polinomio porque la variable aparece debajo de un radical.

e) La expresión algebraica $x^5 - 2x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 9$ es un polinomio que consta de seis términos. ❑

El ***grado de un término*** es la suma de los exponentes de las variables contenidas en él. En el caso de uno que incluya una variable, el grado es simplemente el exponente de esta última. El grado del término $5x^3$ es 3, puesto que el exponente es 3. El grado del término $5x^2y^3z$ es 6 porque la suma de los exponentes de x, de y y de z es 6. El grado de un término constante no cero es 0. Como un ejemplo, el término -20 puede escribirse en la forma equivalente $-20x^0$. Así pues, el grado del término es 0.

Además de la clasificación de los términos por el grado, los polinomios pueden clasificarse atendiendo a su grado. El ***grado de un polinomio*** se define como el grado del término de mayor grado en el polinomio.

Ejemplo 7

a) El polinomio $2x^3 - 4x^2 + x - 10$ tiene términos de grados 3, 2, 1 y 0, respectivamente. Por tanto, el grado del polinomio es 3.

b) El polinomio $4x^2y^3 - 6xy^5 + 2xy$ tiene términos de grados 5, 6 y 2, respectivamente. En consecuencia, el grado del polinomio es 6. ❑

Adición y sustracción de polinomios

Al sumar y restar polinomios se combinan términos semejantes. Los ***términos semejantes*** son aquellos que contienen las mismas variables elevadas a una misma potencia. Se considera que los términos $3x$ y $-4x$ son semejantes por contener ambos la variable x elevada (implícitamente) a su primera potencia. El hecho de que sus coeficientes (3 y -4) sean diferentes no influye en la semejanza de los términos. Todas las constantes reales son consideradas como términos semejantes. Las constantes -5 y 18 pueden considerarse que tienen la forma $-5x^0$ y $18x^0$ que las califica como términos semejantes.

Cuando se suman o restan polinomios, pueden combinarse términos y obtenerse una forma más simple. Así, los términos semejantes $4x$ y $3x$ se sumarán del siguiente modo:

$$\begin{aligned} 4x + 3x &= (4 + 3)x \\ &= 7x \end{aligned}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned} 5xy^2 - 2xy^2 + 6xy^2 &= [5 + (-2) + 6]xy^2 \\ &= 9xy^2 \end{aligned}$$

Los términos que no son semejantes no pueden combinarse en una forma más simple (el conocido problema de sumar "manzanas y naranjas"). La suma $5x + 2y$ no puede escribirse en una forma más simple.

Cuando se suman o restan polinomios, se identificarán y combinarán los términos semejantes. Los términos no semejantes se suman o restan como se ha indicado. Con los siguientes ejemplos se explica este proceso.

Ejemplo 8

$$\begin{aligned}(2x^2 - 5x + 10) + (4x^2 + 3x - 5) &= 2x^2 - 5x + 10 + 4x^2 + 3x - 5\\ &= 2x^2 + 4x^2 - 5x + 3x + 10 - 5\\ &= 6x^2 - 2x + 5\end{aligned}$$

Ejemplo 9

$$\begin{aligned}(5x^2y + 2xy^2 - 4y^3) - (-3x^2y + y^3 - 10) &= 5x^2y + 2xy^2 - 4y^3 + 3x^2y - y^3 + 10\\ &= 5x^2y + 3x^2y + 2xy^2 - 4y^3 - y^3 + 10\\ &= 8x^2y + 2xy^2 - 5y^3 + 10\end{aligned}$$

❑

Multiplicación de polinomios

Todas las reglas y propiedades de la multiplicación para números reales se aplican cuando se multiplican polinomios. Se expondrán dos casos de multiplicación: 1) la multiplicación de dos monomios y 2) la multiplicación de dos polinomios.

Multiplicación de monomios

Para multiplicar dos monomios, se multiplican sus coeficientes y luego los términos variables usando las reglas de los exponentes.

Ejemplo 10

a) $(2x)(3x) = (2)(3)xx = 6x^2$

b) $(5x^2)(-2x^3) = (5)(-2)x^2x^3 = -10x^5$

c) $(3ab^2)(6a^3b) = (3)(6)aa^3b^2b = 18a^4b^3$

d) $(mn^2)(4m^2n^3)(-3m^3n) = -12m^6n^6$ ❑

Multiplicación de polinomios

Para multiplicar dos polinomios, se multiplica *cada* término de un polinomio por *todo* término del otro polinomio.

Ejemplo 11

a) $(2)(4x - 2y) = (2)(4x) + (2)(-2y) = 8x - 4y$

b) $$\begin{aligned}4x^2y(x^2 + 2x - 1) &= 4x^2y(x^2) + (4x^2y)(2x) + (4x^2y)(-1)\\ &= 4x^4y + 8x^3y - 4x^2y\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}(2x - 6)(4x + 7) &= (2x)(4x + 7) + (-6)(4x + 7)\\ &= 8x^2 + 14x - 24x - 42\\ &= 8x^2 - 10x - 42\end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned}(5x^2 - 2x)(x^3 + 2x^2 - 5x) &= (5x^2)(x^3 + 2x^2 - 5x) + (-2x)(x^3 + 2x^2 - 5x)\\ &= 5x^5 + 10x^4 - 25x^3 - 2x^4 - 4x^3 + 10x^2\\ &= 5x^5 + 8x^4 - 29x^3 + 10x^2\end{aligned}$$

❑

División de polinomios

El único tipo de división de polinomios requerido *explícitamente* en este libro será la división de un polinomio entre un monomio. Cuando se necesite dividir dos polinomios, el cociente puede obtenerse con sólo simplificar las formas factorizadas de ambos. La factorización de polinomios se repasa en la siguiente sección.

División de monomios

Para dividir un monomio entre otro monomio, se dividen los coeficientes de cada monomio y las variables haciendo uso de las reglas apropiadas de los exponentes.

Ejemplo 12

a) $\frac{12x^5}{3x^2} = \left(\frac{12}{3}\right)\left(\frac{x^5}{x^2}\right) = 4x^{5-2} = 4x^3$

b) $\frac{-8x^3y^2}{2xy^2} = \left(\frac{-8}{2}\right)\left(\frac{x^3}{x}\right)\left(\frac{y^2}{y^2}\right) = -4x^{3-1}y^{2-2} = -4x^2(1) = -4x^2$ ❑

División de un polinomio entre un monomio

Para dividir un polinomio entre un monomio, se divide cada término del polinomio entre el monomio y se obtiene la suma algebraica de cada cociente.

Ejemplo 13

a) $\frac{4x^3 - 8x^2 + 6x}{2x} = \frac{4x^3}{2x} - \frac{8x^2}{2x} + \frac{6x}{2x} = 2x^2 - 4x + 3$

b) $\frac{24a^4b^5 + 18a^2b^3}{-3a^2b^4} = \frac{24a^4b^5}{-3a^2b^4} + \frac{18a^2b^3}{-3a^2b^4} = -8a^2b - \frac{6}{b}$ ❑

NOTA Siempre se puede verificar la respuesta en una división con sólo multiplicar la respuesta por el divisor. Si la respuesta es correcta, este producto deberá ser igual al dividendo (numerador).

Sección A.2 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 12, exprese con exponentes las operaciones indicadas.

1. $(5)(5)(5)(5)$

2. $(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)$

3. $(3)(3)(-2)(-2)(-2)$

4. $(7)(7)(7)/[(3)(3)]$

5. $(-x)(-x)(-x)$

6. $aaa/(bb)$

7. $aabbbcc$

8. $xxyyyy/(zzz)$

9. $xxxx/yyzzzz$

10. $ppqqq/rrrrss$

11. $(xy)(xy)(xy)(xy)$

12. $(abc)(abc)(abc)/(3)(3)(3)(3)(3)$

En los ejercicios 13 a 32 realice las operaciones indicadas.

13. $(2)^3(2)^4$
14. $(3)^3(3)^2$
15. x^3x^5
16. yy^4y^3
17. $x^2y^3x^3y$
18. aa^3a^2a
19. $(x^2)^3$
20. $(a^2)^5$
21. $(x^3)^2(x^2)^4$
22. $a^3(a^3)^4$
23. $[(a^2)^3]^2$
24. $[(-1)^4]^3$
25. $(3x^2)^3$
26. $(5a^3)^2$
27. $(2m^3)^2$
28. $(4b^4)^3$
29. $12(a^2)^4(b)^3$
30. $2(2x^2)^3(3y^3)^2$
31. $[(2x^2)^3]^4$
32. $[2(3a^2)^3]^2$

En los ejercicios 33 a 40 reescriba la expresión, empleando exponentes positivos.

33. a^{-4}
34. $(xy)^{-2}$
35. $(\frac{1}{2})^{-3}$
36. x^{-1}
37. $(\frac{1}{3})^{-4}$
38. $(abc)^{-3}$
39. $(xy)^{-5}$
40. $(4x)^{-2}$

En los ejercicios 41 a 60 efectúe la operación indicada.

41. x^3/x
42. m^7/m^4
43. $(2)^5/(2)^8$
44. x^6/x^6
45. $(3)^4/(3)^3$
46. $(2x^2)^2/2(x^2)$
47. $(xy)^0$
48. $-(25x^0)^2$
49. $(x/y)^3$
50. $(\frac{4}{5})^3$
51. $(x^2/y)^4$
52. $(xy/z)^3$
53. $(a^2b/c^3)^4$
54. $(2x^2/5yz^3)^3$
55. $(3xy^2/z^3)^3$
56. $[(x^2/y)^3]^2$
57. $-5[2(x^0)^5]^2$
58. $2a^2[a^3/4b]^2$
59. $(a^2/b^3)^2(b^2/a^3)^3$
60. $(ab/c)^3(c/ab)^3$

En los ejercicios 61 a 94 efectúe la operación indicada.

61. $10x + 3x$
62. $5x^2 - 4x^2 + 2x^2$
63. $(5y^3 - 2y^2 + y) + (4y^2 - 5y)$
64. $(2m^2 - 3m) + (4m^2 + 2m) - (m^2 + 6)$
65. $(40x^3y^2 - 25xy^3) - (15x^3y^2)$
66. $abc - cab - 4bac$
67. $(x - 2y) - (2x - 3y) + (x - y)$
68. $(-5x)(4x^2)$
69. $(7x^3)(3xy^2)$
70. $(3x^2)(2x)(-4x^3)$
71. $(a^2)(4a^5)(-2a^3)$
72. $5x(x - 10)$
73. $(-2x^2)(x^2 - y)$
74. $2a(a^2 - 2a + 5)$
75. $x^2y(x^2 - 2xy + y^2)$
76. $(x - 5)(x + 6)$
77. $(a + b)(a + b)$
78. $(2x - 3)(2x - 3)$
79. $(a - b)(a - b)$
80. $(x + 4)(x - 4)$
81. $(x - 2)(x^2 - 4x + 4)$
82. $21x^5/(3x)$
83. $16x^2y^3/(4xy^2)$
84. $10a^4b^2/(5ab^2)$
85. $-9xy^2/(3xy^3)$
86. $25a^2bc^3/(5ab^2c^4)$
87. $(15x^2 - 24x)/(3x)$
88. $(4x^3y - 2x^2y + 8xy)/(2x)$
89. $(12a^3 - 9a^2 + 6a)/(-3a)$
90. $(3x^2yz^3 - 4xy^2z)/(-xyz)$
91. $(4x^6 + 6x^3 - 8x^2)/(2x)$
92. $(8a^3b^2c - 4a^2b^3c^2)/4a^2bc$
93. $(48x^3y^2 - 16x^2y^4 + 24xy^3)/-4xy^2$
94. $(-12x^8y^6z^2 + 28x^5y^4z^5)/(-4x^3y)$

A.3 Factorización

En la presente sección se analizará la ***factorización de polinomios***. Factorizar un polinomio significa expresarlo como el producto de dos o más polinomios. ***La ley distributiva de la multiplicación*** es

$$a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

El binomio de la derecha del signo de igualdad puede expresarse como el producto de los polinomios a y $b + c$. Estos dos polinomios se consideran los factores de la expresión $a \cdot b + a \cdot c$. En la multiplicación de polinomios se dan los factores y hay que encontrar el producto. En la factorización se conoce el producto y se deben obtener los polinomios que, al ser multiplicados, darán el producto.

Factores monomiales

La ley distributiva constituye un ejemplo de ***factores monomiales***. Es decir,

$$ab + ac = a(b + c)$$

indica que los dos términos del miembro izquierdo del signo de igualdad contienen un factor común a. Éste puede representar a cualquier monomio. Por ejemplo, el polinomio $2x + 2y$ puede reescribirse en la *forma factorizada* $2(x + y)$, puesto que cada término posee un factor común de 2.

Ejemplo 14

a) Los términos del polinomio $x^3 - x^2 + x$ tienen un factor común x. Puede reescribirse el polinomio así

$$x^3 - x^2 + x = x(x^2 - x + 1)$$

b) Los términos del polinomio $6x^2y^3 - 10xy^2$ tienen un factor común $2xy^2$. Al factorizar $2xy^2$ en cada término se obtiene

$$6x^2y^3 - 10xy^2 = 2xy^2(3xy - 5)$$ ❑

Generalmente nos interesa factorizar polinomios *completamente*. Ello significa que los factores no puedan factorizarse más. El miembro derecho de la ecuación

$$x^3y^2 + x^4y^3 = xy(x^2y + x^3y^2)$$

no está factorizado por completo. El término x^2y puede factorizarse en todos los términos dentro del paréntesis. El polinomio estará totalmente factorizado cuando se escriba como $x^3y^2(1 + xy)$.

La meta en la factorización de un monomio suele ser identificar el *mayor* factor común monomial. Y ese factor es el que contiene el máximo factor numérico común y las potencias más altas de las variables comunes a todos los términos.

Polinomios cuadráticos

A un polinomio de segundo grado se le llama a menudo polinomio *cuadrático.* Veremos con frecuencia este tipo de polinomios y su factorización será muy importante. En concreto, se quiere expresar los polinomios cuadráticos, de ser posible, como el producto de dos polinomios de primer grado. El proceso de factorización incluye a menudo el método de tanteo. Algunas veces resulta fácil, otras es desalentador en extremo. Los siguientes casos le ayudarán al lector a entender mejor esto.

Caso 1

$$x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$$

Considérese el producto $(x + a)(x + b)$. La multiplicación de los dos binomios da

$$\begin{aligned}(x + a)(x + b) &= x^2 + ax + bx + ab \\ &= x^2 + (a + b)x + ab\end{aligned}$$

El resultado de la multiplicación es un trinomio con un término x^2, un término x y un término constante. Nótense los coeficientes de los términos del trinomio. El término x^2 tiene un coeficiente igual a 1; el término x tiene un coeficiente $a + b$, que es igual a la suma de las constantes contenidas en los ***factores binomiales***; y el término constante ab es el producto de las dos constantes contenidas en los factores binomiales. Al factorizar un trinomio que tenga esta forma, el objetivo será determinar los valores de a y b que generen el coeficiente de x, o sea el término medio del polinomio, y el término constante.

Ejemplo 15 Para obtener los factores $x^2 - 5x + 6$, se buscan los valores de a y b tales que

$$(x + a)(x + b) = x^2 - 5x + 6$$

El coeficiente del término intermedio es -5. De acuerdo con lo que se acaba de explicar, los valores de a y b han de ser tales que $a + b = -5$. Y el tercer término del trinomio es 6, lo cual indica que $ab = 6$. Al aplicar un procedimiento de tanteo, debería llegarse a la conclusión de que los valores que cumplen con las dos condiciones son -2 y -3. No importa cuál de ellos sea asignado a a y b. Los factores binomiales son $(x - 2)(x - 3)$ o $(x - 3)(x - 2)$.

Ejemplo 16 Para obtener los factores de $m^2 + 6m - 21$, se buscan valores de a y b tales que

$$(m + a)(m + b) = m^2 + 6m - 21$$

Según lo que se ha dicho antes, las relaciones entre a y b son

$$a + b = 6$$

y

$$ab = -21$$

Verifique que no haya valores reales (enteros) de a y b que satisfagan las ecuaciones anteriores. Así pues, no es posible factorizar esta expresión cuadrática. ❑

Caso 2

$$acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$$

Considérese el producto

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

Suponiendo que a y c sean enteros, ninguno de los cuales es 1, el producto será un trinomio que difiere del caso 1 en que el coeficiente del término x^2 es un entero distinto de 1. Cuando un trinomio contiene un coeficiente entero de ese tipo en el término x^2, los factores binomiales incluyen cuatro constantes que es preciso identificar. El coeficiente del término x^2 es el producto de a y c, el coeficiente del término x es $ad + bc$ y el término constante es igual al producto bd. Puede ser difícil identificar los valores de las cuatro constantes que cumplan con estas condiciones. Compruebe que, cuando $a = 1$ y $c = 1$, el caso 2 corresponde simplemente al caso 1.

Ejemplo 17 Para encontrar los factores $6x^2 - 25x + 25$, se buscan los valores de a, b, c y d tales que

$$6x^2 - 25x + 25 = (ax + b)(cx + d)$$

Las condiciones que han de cumplirse son

$$ac = 6$$

$$ad + bc = -25$$

y

$$bd = 25$$

Verifique que los valores $a = 3$, $b = -5$, $c = 2$ y $d = -5$ satisfagan las condiciones. Y que,

$$(3x - 5)(2x - 5) = 6x^2 - 25x + 25$$

Ejemplo 18 El primer paso en la factorización es buscar factores monomiales comunes. En el trinomio $12x^2 - 27x + 6$, puede factorizarse 3 en cada término, o

$$12x^2 - 27x + 6 = 3(4x^2 - 9x + 2)$$

El siguiente paso será determinar si el *factor* trinomial puede factorizarse. De ser así,

$$ac = 4$$

$$ad + bc = -9$$

y $$bd = 2$$

Los valores que cumplen las condiciones señaladas son $a = 1$, $b = -2$, $c = 4$ y $d = -1$. Por consiguiente,

$$12x^2 - 27x + 6 = 3(x - 2)(4x - 1)$$ ❑

Caso 3

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$$

Este caso requiere factorizar la ***diferencia entre cuadrados perfectos***. El binomio por factorizar es la diferencia entre los cuadrados de las dos cantidades, x y a. Este binomio puede factorizarse como el producto de la *suma* y la *diferencia* de x y a.

Ejemplo 19

$$\begin{aligned} x^2 - 9 &= (x)^2 - (3)^2 \\ &= (x + 3)(x - 3) \end{aligned}$$

Ejemplo 20

$$\begin{aligned} 16x^4 - 81 &= (4x^2)^2 - (9)^2 \\ &= (4x^2 + 9)(4x^2 - 9) \end{aligned}$$

Sin embargo, el binomio $4x^2 - 9$ es la diferencia entre dos cuadrados. En consecuencia,

$$16x^4 - 81 = (4x^2 + 9)(2x + 3)(2x - 3)$$ ❑

Otras formas especiales

Las siguientes reglas de factorización se aplican con menor frecuencia en el libro.

Caso 4

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Este caso requiere factorizar la ***diferencia entre dos cubos***.

Ejemplo 21

a) $x^3 - 1 = (x)^3 - (1)^3 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$
b) $8x^3 - 64 = (2x)^3 - (4)^3 = (2x - 4)(4x^2 + 8x + 16)$
c) $m^3 - n^3 = (m - n)(m^2 + mn + n^2)$ ❑

Caso 5

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Este caso incluye la factorización de la ***suma de dos cubos***.

Ejemplo 22

a) $x^3 + 8 = (x)^3 + (2)^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$
b) $27y^3 + 64 = (3y)^3 + (4)^3 = (3y + 4)(9y^2 - 12y + 16)$

❑

Sección A.3 Ejercicios de seguimiento

Factorice por completo (de ser posible) los polinomios en los siguientes ejercicios. ¡No olvide verificar sus respuestas!

1. $2ax - 8a^3$
2. $21m^2 - 7mn$
3. $4x^3y - 6xy^3 + 8x^2y^2$
4. $65a^3b^2 - 13a^2b^3$
5. $9a^3 - 15a^2 - 27a$
6. $x^2 - 8x + 12$
7. $x^2 + x + 3$
8. $x^2 + 7x + 12$
9. $p^2 + 9p - 36$
10. $x^2 - 2x - 15$
11. $r^2 - 21r - 22$
12. $x^2 - 16x + 48$
13. $x^5 + y^5$
14. $9x^2 + 12x + 4$
15. $6m^2 - 19m + 3$
16. $2x^2 - 7x - 4$
17. $8x^2 - 2x - 3$
18. $2x^3 + 4x^2 - 42x$
19. $x^4 - 81$
20. $100x^2 - 225$
21. $81x^4 - 625$
22. $10x^2 + 13x - 3$
23. $x^2 + 4$
24. $27 - 8m^3$
25. $1 + 8x^3$
26. $a^3 - 125$
27. $x^4 - x^3 - 2x^2$
28. $4x^6 - 4x^2$
29. $x^3 - 3x^2 - 40x$
30. $8 - 6x + x^2$
31. $x^5 - 4x^4 - 21x^3$
32. $x^6 - x^5$
33. $a^5b - 81ab$
34. $a^2b^3y^4 - 625a^2b^3$
35. $162uv - 2u^5v$
36. $6x^4y^3 + x^3y^3 - 5x^2y^3$

A.4 Fracciones

Las ***fracciones***, o ***números racionales***, constituyen una parte importante del sistema de números reales. En la presente sección se describen algunas reglas muy útiles para efectuar cálculos con fracciones.

Adición y sustracción de fracciones

Regla 1: Denominador común

Si dos fracciones tienen el mismo denominador, su suma (diferencia) se obtiene sumando (restando) sus numeradores y colocando el resultado sobre el común denominador.

Ejemplo 23

a) $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3 + 2}{7} = \frac{5}{7}$

b) $\frac{7}{8} - \frac{4}{8} = \frac{7 - 4}{8} = \frac{3}{8}$

❑

Regla 2: Denominadores diferentes

Para sumar (restar) dos fracciones de diferentes denominadores, se reformulan como fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. La suma (diferencia) se calcula después aplicando para ello la regla 1.

Al aplicar la regla 2, *cualquier* denominador común puede identificarse cuando se obtengan las fracciones equivalentes. Sin embargo, se acostumbra identificar el ***mínimo común múltiplo*** (mcm) o el ***mínimo común denominador*** (mcd).

El procedimiento con que se obtiene el mínimo común denominador se explica a continuación:

1. *Escriba cada denominador en una forma completamente factorizada.*
2. *El mínimo común denominador es un producto de los factores. Para obtenerlo, cada factor distinto se incluye el mayor número de veces que aparece en cualquiera de los denominadores.*

Ejemplo 24 Para calcular el mínimo común denominador de las fracciones $\frac{5}{8}$ y $\frac{3}{20}$, se factoriza por completo cada denominador:

$$8 = 8 \cdot 1 = 4 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$$

$$20 = 20 \cdot 1 = 10 \cdot 2 \cdot 1 = 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$$

Estos denominadores se factorizan por completo, puesto que los factores puede expresarse sólo como el producto de sí mismo y de 1 (suponiendo que estemos buscando factores de valores enteros). A ese tipo de factores se les llama ***factores primos***.

Al formar el mínimo común denominador, *cada factor primo diferente se incluye el mayor número de veces que aparece en cualquiera de los denominadores.* Esos factores son 2, 5 y 1. Por lo tanto,

$$\text{mcd} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1 = 40$$

Ejemplo 25 Determine la suma $\frac{5}{8} + \frac{3}{20}$.

SOLUCIÓN

Una vez identificado el mínimo común denominador en el último ejemplo, hay que reformular cada fracción con el común denominador 40. Al expresar de nuevo las fracciones y al aplicar la regla 1, se obtiene

$$\frac{5}{8} + \frac{3}{20} = \frac{5 \cdot 5}{8 \cdot 5} + \frac{3 \cdot 2}{20 \cdot 2} = \frac{25}{40} + \frac{6}{40} = \frac{25 + 6}{40} = \frac{31}{40}$$

Ejemplo 26 Determine la diferencia $3/(4x) - 5/(6x^2)$.

SOLUCIÓN

Factorizando cada denominador, se obtiene

$$4x = 4 \cdot x \cdot 1 = 2 \cdot 2 \cdot x \cdot 1$$

$$6x^2 = 6 \cdot x \cdot x \cdot 1 = 3 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot 1$$

Los factores distintos de estos denominadores son 2, 3, x y 1, y así

$$\begin{aligned}\text{mcd} &= 2\cdot 2\cdot 3\cdot x\cdot x\cdot 1\\ &= 12x^3\end{aligned}$$

Las fracciones, cuando se reformulan en términos del mínimo común denominador, producen

$$\begin{aligned}\frac{3}{4x}-\frac{5}{6x^2} &= \frac{3\cdot 3x}{4x\cdot 3x}-\frac{5\cdot 2}{6x^2\cdot 2}\\ &= \frac{9x}{12x^2}-\frac{10}{12x^2}\\ &= \frac{9x-10}{12x^2}\end{aligned}$$

Ejemplo 27 Para obtener la suma algebraica $3/(x-1) - 5x/(x+1) + x^2/(x^2-1)$, primero se determina el mínimo común denominador, o

$$\text{mcd} = (x+1)(x-1)\cdot 1 = (x^2-1)$$

Las tres fracciones se reformulan empleando el mínimo común denominador y se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{3}{x-1}-\frac{5x}{x+1}+\frac{x^2}{x^2-1} &= \frac{3\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)}-\frac{5x(x-1)}{(x+1)(x-1)}+\frac{x^2}{x^2-1}\\ &= \frac{3(x+1)-5x(x-1)+x^2}{x^2-1}\\ &= \frac{3x+3-5x^2+5x+x^2}{x^2-1}\\ &= \frac{-4x^2+8x+3}{x^2-1}\end{aligned}$$

❑

Multiplicación y división

Regla 3: Multiplicación

El producto de dos o más fracciones se calcula al dividir el producto de sus numeradores entre el producto de sus denominadores. Es decir,

$$\frac{a}{b}\,\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

Ejemplo 28 *a*) $\frac{3}{5}\,\frac{2}{7}=\frac{(3)(2)}{(5)(7)}=\frac{6}{35}$

b) $\dfrac{15}{x}\dfrac{x^2}{3} = \dfrac{15x^2}{3x} = \dfrac{5x}{1} = 5x$

c) $\dfrac{x-1}{10}\dfrac{15}{x^2-1} = \dfrac{(15)\cancel{(x-1)}}{(10)\cancel{(x-1)}(x+1)} = \dfrac{3}{2(x+1)}$ ❑

Regla 4: División

El cociente de dos fracciones simples se puede determinar al invertir la fracción del divisor y efectuar la multiplicación por la fracción del dividendo. Esto es,

$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b}\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Ejemplo 29

a) $\dfrac{-\frac{5}{12}}{\frac{3}{4}} = \left(-\dfrac{5}{12}\right)\left(\dfrac{4}{3}\right) = -\dfrac{20}{36} = -\dfrac{5}{9}$

b) $\dfrac{\frac{4}{10}}{2} = \dfrac{\frac{4}{10}}{2/1} = \left(\dfrac{4}{10}\right)\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5}$

c) $\dfrac{3x^2/4}{9x/2} = \dfrac{3x^2}{4}\dfrac{2}{9x} = \dfrac{6x^2}{36x} = \dfrac{x}{6}$

d) $\dfrac{1-2/x}{4/x} = \dfrac{x/x-2/x}{4/x} = \dfrac{(x-2)/x}{4/x} = \dfrac{x-2}{x}\dfrac{x}{4} = \dfrac{x-2}{4}$ ❑

Sección A.4 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 25 realice las operaciones indicadas.

1. $\frac{1}{5} + \frac{5}{30}$

2. $\frac{2}{7} - \frac{4}{21}$

3. $\frac{1}{3} - \frac{5}{8} + \frac{5}{12}$

4. $\frac{4}{25} - \frac{3}{10} + \frac{7}{5}$

5. $\dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}$

6. $\dfrac{5}{2a} + \dfrac{6}{a^3}$

7. $\dfrac{5x}{x^2-4} + \dfrac{x}{x-2}$

8. $\dfrac{5}{1} + \dfrac{1}{x}$

9. $\dfrac{10}{1} - \dfrac{2}{x^2}$

10. $\dfrac{4}{a} + \dfrac{3}{2ab}$

11. $\dfrac{3a}{a+1} - \dfrac{5}{a^2+2a+1}$

12. $\frac{3}{11}\,\frac{33}{6}$

13. $(\frac{1}{5})(\frac{10}{3})(-\frac{9}{2})$

14. $\left(\dfrac{1}{x}\right)\left(\dfrac{2x^3}{3}\right)\left(\dfrac{6}{5}\right)$

15. $\left(\dfrac{ab}{c}\right)\left(\dfrac{c^2}{3a^2b}\right)\left(\dfrac{1}{abc}\right)$

16. $\left(\dfrac{5}{x-4}\right)\left(\dfrac{x^2-16}{10}\right)\left(\dfrac{x+4}{2}\right)$

17. $\frac{7}{27} \div \frac{5}{9}$

18. $3x^2/5 \div x/5$

19. $a^2b/(5c) \div 3c^2/(10ab)$

20. $abc/8 \div 3a^2b/4$

21. $\dfrac{x-1}{x^2-5x-4} \div \dfrac{x-1}{x-4}$

22. $\dfrac{1-2/(3x)}{3/x+4}$

23. $\dfrac{x^2-1}{x^2} \div \dfrac{x-1}{x^3}$

24. $\dfrac{x^2+x-6}{x^2+x-2} \div \dfrac{x^2-9}{x^2-1}$

25. $\left[\dfrac{x^2+x-2}{x^2+x-6} \div \dfrac{x^2+7x+10}{x^2-x-2}\right] \cdot \dfrac{x^2+x-6}{x^2+3x+2}$

A.5 Exponentes y radicales

En la sección A.2 se explicaron las primeras cinco leyes de los exponentes:

I $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

II $(a^m)^n = a^{mn}$

III $(ab)^n + a^n b^n$

IV $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \qquad a \neq 0$

V $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}, \qquad b \neq 0$

Recuérdese que los exponentes se restringieron a valores enteros.

Exponentes fraccionarios

En ocasiones se tiene que trabajar con exponentes fraccionarios. Las leyes de los exponentes son válidas para cualquier valor real de *m* y *n*. En el siguiente ejemplo se explica la aplicación de las leyes de los exponentes cuando éstos son fracciones.

Ejemplo 30

a) $x^{1/2} \cdot x^{1/2} = x^{1/2+1/2} = x$

b) $x^{3/2} \cdot x^{1/3} = x^{3/2+1/3} = x^{9/6+2/6} = x^{11/6}$

c) $(x^{1/2})^4 = x^{(1/2)(4)} = x^2$

d) $(x^{2/3})^{-3} = x^{(2/3)(-3)} = x^{-2} = 1/x^2$

e) $(2x^{1/4})^4 = (2)^4(x^{1/4})^4 = 16x$

f) $x^{3/4}/x^{1/2} = x^{3/4-1/2} = x^{3/4-2/4} = x^{1/4}$

g) $x^{5/8}/x^{3/4} = x^{5/8-3/4} = x^{5/8-6/8}$
$= x^{-1/8} = 1/x^{1/8}$

h) $(x/y)^{1/2} = x^{1/2}/y^{1/2}$

❑

Radicales

Con frecuencia se necesita determinar el valor de *x* que satisfaga una ecuación de la forma

$$x^n = a$$

Por ejemplo, ¿qué valores de *x* satisfacen las siguientes ecuaciones?

$$x^2 = 4 \qquad x^3 = 8 \qquad x^4 = 81$$

En la primera ecuación se quiere determinar el valor de *x* que, al ser multiplicado por sí mismo, dé un producto igual a 4. El lector debería concluir que los valores de +2 y −2 satisfacen la ecuación, esto es, hacen iguales los miembros izquierdo y derecho de la misma. De modo similar, la segunda ecuación busca el valor de x que, cuando se eleva al cubo, genera un producto de 8. Un valor de $+2$ satisface esta ecuación. Verifique que $+3$ y -3 satisfagan la tercera ecuación.

Definición

Si $a^n = b$, entonces a se denomina la n-ésima raíz de b.

La n-ésima raíz de b se expresa con $\sqrt[n]{b}$, donde el símbolo $\sqrt{}$ es el ***signo del radical***, n es el ***índice*** y b es el ***radicando***. Así pues, puede formularse:

$$\boxed{\text{Si } a^n = b, \text{ entonces } a = \sqrt[n]{b}.}$$

Haciendo referencia a las tres ecuaciones anteriores,

$$\text{Si } x^2 = 4 \qquad x = \sqrt[2]{4} = \sqrt{4}$$

donde se dice que x es igual a la ***raíz cuadrada*** de 4. Si *ningún índice aparece con el signo del radical, el índice será implícitamente 2.*

En la segunda ecuación se puede formular

$$\text{Si } \quad x^3 = 8 \qquad x = \sqrt[3]{8}$$

donde se dice que x es la ***raíz cúbica*** de 8. Y para la tercera ecuación,

$$\text{Si } \quad x^4 = 81 \qquad x = \sqrt[4]{81}$$

donde se dice que x es la ***raíz cuarta*** de 81.

Como se ha visto en el caso de estas ecuaciones, puede haber más de una raíz n-ésima de un número real. Por lo regular, estamos interesados en determinar sólo una de ellas: la ***raíz n-ésima principal***. Dada $\sqrt[n]{b}$:

1. *La raíz n-ésima principal es positiva si b es positiva.*
2. *La raíz n-ésima principal es negativa si b es negativa y n es impar.*

Los siguientes ejemplos contienen la raíz n-ésima principal.

Ejemplo 31

a) $\sqrt{9} = 3$
b) $\sqrt[3]{-27} = -3$
c) $\sqrt[5]{32} = 2$
d) $\sqrt[5]{-243} = -3$ ❑

Las siguientes leyes son aplicables a los cálculos cuando intervienen radicales.

Leyes de radicales

I $(\sqrt[n]{a})^n = a$

II $a\sqrt[n]{x} + b\sqrt[n]{x} = (a + b)\sqrt[n]{x}$

III $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$

IV $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ *para* $b \neq 0$

V $b^{m/n} = (\sqrt[n]{b})^m = \sqrt[n]{b^m}$

Ejemplo 32

a) $(\sqrt{4})^2 = (2)^2 = 4$

b) $(\sqrt[5]{36})^5 = 36$

c) $(\sqrt[3]{-8})^3 = (-2)^3 = -8$

d) $\sqrt[3]{a} - 3\sqrt[3]{a} + 5\sqrt[3]{a} = 3\sqrt[3]{a}$

e) $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ no se puede simplificar si se utilizan las leyes de los radicales porque los índices sobre los dos radicales son diferentes.

f) $\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2}$ no se puede simplificar si se utilizan las leyes de los radicales porque los radicales no son iguales.

g) $\sqrt[3]{128} = \sqrt[3]{(64)(2)} = \sqrt[3]{64}\,\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$

h) $\sqrt{x^3} = \sqrt{x^2 \cdot x} = \sqrt{x^2}\,\sqrt{x} = x\sqrt{x},\ x \geq 0$

i) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \sqrt{4}/\sqrt{9} = \frac{2}{3}$

j) $\sqrt[3]{(-1)/125} = \sqrt[3]{-1}/\sqrt[3]{125} = -1/5$

k) $x^{1/2} = \sqrt{x}$

l) $x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$

m) $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$

n) $(64)^{2/3} = \sqrt[3]{(64)^2} = (\sqrt[3]{64})^2 = 4^2 = 16$

o) $(49)^{-1/2} = 1/(49)^{1/2} = 1/\sqrt{49} = \frac{1}{7}$ ❑

Sección A.5 Ejercicios de seguimiento

En los ejercicios 1 a 14, efectúe las operaciones indicadas.

1. $a^{3/2} \cdot a^{4/3}$
2. $b^{1/6} \cdot b^{1/4}$
3. $x^{1/3} \cdot x^{2/5} \cdot x^{3/10}$
4. $(x^{1/2})^{2/3}$
5. $(a^{3/2})^{5/6}$
6. $(2x^{3/4})^4$
7. $(-3x^{2/3})^3$
8. $x^{5/2}/x^{1/2}$
9. $a^{3/2}/a^{1/6}$
10. $(x^4y^2)^{1/2}$
11. $(x^{2/3} \cdot x^{4/5})^2$
12. $(a^6b^{15})^{1/3}$
13. $(x^{2/5} \cdot x^{1/3}) \div x^{3/5}$
14. $(2a^{2/3})^5 \div 4a^{1/3}$

En los ejercicios 15 a 28, determine la raíz *n*-ésima principal.

15. $\sqrt{625}$
16. $\sqrt[4]{625}$

17. $\sqrt[3]{-a^3}$
18. $\sqrt[5]{-1}$
19. $\sqrt[3]{-8x^6}$
20. $\sqrt[3]{27a^9}$
21. $\sqrt{144x^6}$
22. $\sqrt[3]{-64x^3y^6}$
23. $\sqrt[4]{16a^8b^4}$
24. $\sqrt[3]{x^{12}y^{21}}$
25. $\sqrt[5]{a^{15}b^5c^{30}}$
26. $\sqrt[5]{-32x^{20}y^{40}}$
27. $\sqrt[4]{1\,296a^8}$
28. $\sqrt{900a^2b^6c^4}$

En los ejercicios 29 a 44, simplifique las expresiones de los radicales.

29. $2\sqrt{7} + 3\sqrt{7}$
30. $5\sqrt{x} - 3\sqrt{x}$
31. $\sqrt{32} + 3\sqrt{2}$
32. $2\sqrt{45} - 2\sqrt{5}$
33. $4\sqrt{x} - \sqrt{x^3}$
34. $\sqrt{20} - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{45}$
35. $\sqrt{2}\,\sqrt{8}$
36. $\sqrt[3]{5}\,\sqrt[3]{10}\,\sqrt[3]{5}$
37. $\sqrt{\frac{64}{9}}$
38. $\sqrt[3]{-\frac{1}{27}}$
39. $\sqrt{625x^2/(49y^4)}$
40. $\sqrt[4]{1/(81a^8)}$
41. $\sqrt[3]{\dfrac{64x^6}{27y^9}}$
42. $\sqrt[4]{10}\,\sqrt[4]{100}\,\sqrt[4]{10}$
43. $\dfrac{\sqrt{2}\,\sqrt{8}\,\sqrt{4}}{\sqrt[3]{32}\,\sqrt[3]{2}}$
44. $\dfrac{\sqrt{x^3y^5}\,\sqrt{xy^3}}{\sqrt[4]{x^7y^2}\,\sqrt[4]{xy^6}}$

En los ejercicios 45 a 56, exprese el término en forma de radical.

45. $x^{2/3}$
46. $x^{1/5}$
47. $(ab)^{3/5}$
48. $(xy)^{3/4}$
49. $x^{-1/2}$
50. $a^{-2/3}$
51. $(8)^{-1/3}$
52. $(32)^{-1/5}$
53. $a^{3/5}$
54. $(x + y)^{2/3}$
55. $(100 - x)^{1/4}$
56. $(64x^{12}y^{24})^{1/6}$

En los ejercicios 57 a 68, exprese el término usando exponentes fraccionales.

57. $\sqrt{45x}$
58. $\sqrt[3]{a^2}$
59. $\sqrt[4]{x^3}$
60. $\sqrt{xy}$
61. $\sqrt[3]{x^5}$
62. $\sqrt[5]{(ab)^3}$
63. $\sqrt{x^4}$
64. $\sqrt[3]{(-1)^9}$
65. $\sqrt{x + y}$
66. $\sqrt[3]{(x - y)^2}$
67. $\sqrt[4]{(3 - x)^3}$
68. $\sqrt[5]{(x - 2x + y)^2}$

APÉNDICE B

Notación de sumatoria

La letra griega Σ (sigma) es el símbolo matemático que denota la operación de suma o adición. Suministra una especie de notación "abreviada" para representar la adición. La expresión

$$\sum_{j=l}^{u} f(j) \tag{B.1}$$

se lee "la sumatoria de $f(j)$, donde j va desde l hasta u". A la derecha de Σ se encuentra la función o expresión general que se va a sumar. La letra j debajo de la Σ es el índice de la sumatoria. Este índice se incrementa en una unidad a la vez desde un límite inferior l hasta un límite superior u. Para cada valor de j, se evalúa $f(j)$ y se suma a los otros valores de $f(j)$.

Supongamos que deseamos sumar los enteros positivos desde 1 hasta 10. Una forma de representar esto es por medio de la expresión

$$\sum_{j=1}^{10} j$$

El equivalente desarrollado de esta expresión es

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

A continuación se presentan otros ejemplos de la notación de sumatoria.

$$\sum_{j=5}^{8} j^2 = (5)^2 + (6)^2 + (7)^2 + (8)^2 = 174$$

$$\sum_{i=1}^{4} (i^3 - 1) = [(1)^3 - 1] + [(2)^3 - 1] + [(3)^3 - 1] + [(4)^3 - 1] = 96$$

$$\sum_{i=1}^{3} (-3i) = (-3)(1) + (-3)(2) + (-3)(3) = -18$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_j = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

Nótese que el nombre del índice no está restringido a j.

La notación de sumatoria puede suministrar bastante eficacia al expresar la operación de suma. Es una manera conveniente de representar sistemas de ecuaciones. Y tiene un valor particular cuando la computadora pueda utilizarse para realizar los cálculos.

RESPUESTAS SELECTAS

Ejercicios de seguimiento y evaluaciones de los capítulos

CAPÍTULO 1

SECCIÓN 1.1

1. $x = 3$; **3.** $x = 4$; **5.** $x = -18$; **7.** $t = -1$; **9.** $t = 1$; **11.** $t = 16$; **13.** $x = -1$; **15.** $t = 5$; **17.** no hay raíces; **19.** $x = 3$; **21.** $x = 6$; **23.** $x = 5$

SECCIÓN 1.2

1. $x = -3, 2$; **3.** $x = -1$; **5.** $x = -2, 5$; **7.** $t = -\frac{1}{2}, -4$; **9.** $y = -\frac{1}{2}, 2$; **11.** $r = -4, 4$; **13.** no puede factorizarse (no hay raíces reales si se resuelve usando la fórmula cuadrática); **15.** $y = \frac{1}{2}, -5$; **17.** $x = -2, -6$; **19.** $r = -1$; **21.** no hay raíces; **23.** $x = -4, 1$; **25.** no hay raíces; **27.** no hay raíces; **29.** no hay raíces; **31.** no hay raíces

SECCIÓN 1.3

1., 3., 5., 7., 9., 11., 13., 15. véanse las figuras (p. A-26); **17.** $x \geq -10$; **19.** no hay solución; **21.** $x \leq 4$; **23.** $x \geq -6$; **25.** $-36 \leq x \leq -4$; **27.** no hay solución; **29.** $-18 \leq x \leq 7$; **31.** $20 \leq x \leq 40$; **33.** $-4 \leq x \leq 4$; **35** $-6 \leq x \leq 3$; **37.** $x \leq -1$ o $x \geq 3$; **39.** $-\frac{1}{2} < x < 2$; **41.** $x < -5$ o $x > 3$; **43.** $-5 < x < 5$

SECCIÓN 1.4

1. $x = -8, 8$; **3.** no hay solución; **5.** $x = 3, 9$; **7.** $x = -10, 4$; **9.** $x = 2, 3$; **11.** $x = -\frac{1}{3}, -9$; **13.** $x = -2, \frac{12}{5}$; **15.** $-1 < x < 1$; **17.** $x =$ cualquier número real; **19.** $-2.5 \leq x \leq 2.5$; **21.** $-5 < x < 15$; **23.** $x < -1$ o $x > 4$; **25.** no hay solución; **27.** $t \geq 24$ o $t \leq -24$; **29.** $x = 0, x \leq -2$, o $x \geq 2$

SECCIÓN 1.5

1. $(1.5, 3.5)$; **3.** $(7.5, -1)$ **5.** $(7.5, 15)$; **7.** $(-2, 15)$; **9.** $(6, -8)$; **11.** $(7.5, -3)$; **13.** $(0, 0)$; **15.** $\sqrt{52} = 7.21$; **17.** 5; **19.** $\sqrt{85} = 9.219$; **21.** $\sqrt{244} = 15.62$; **23.** $\sqrt{116} = 10.77$; **25.** 5; **27.** $\sqrt{41} = 6.40$; **29.** $\sqrt{68} = 8.246$

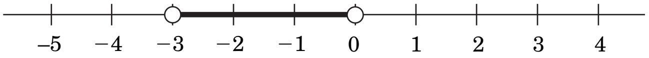
EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. no hay raíces; **2.** no hay raíces; **3.** $x = 3, 4$; **4.** $x \geq 4$; **5.** $-2 \leq x \leq -1$; **6.** $x = 8$; **7.** $-20 \leq x \leq -4$; **8.** *a*) $(1, -2)$, *b*) $\sqrt{500} = 22.36$

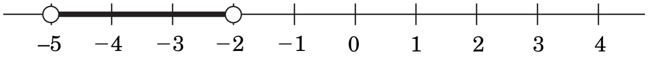
CAPÍTULO 2

SECCIÓN 2.1

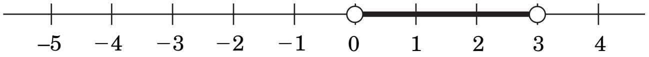
1. lineal (L); **3.** L; **5.** no lineal (NL); **7.** L; **9.** L; **11.** L; **13.** L; **15.** NL; **17.** L; **19.** *a*) $a = 8, b = 0, c = 120$, *b*) $(15, 10)$, *c*) no hay par de valores; x debe ser igual a 15, *d*) $S = \{(x, y) \mid x = 15$ y la y es cualquier número real$\}$; **21.** *a*) $(2, 7, 1)$, *b*) $(0, 0, 0)$; **23.** *a*) $(4, 2, 20, 15)$, *b*) sin valores, *c*) $(0, 0, 20, 0)$; **25.** *a*) $8x_1 + 24x_2 + 16x_3 = 120$, *b*) 15 onzas de alimento 1, 5 onzas de alimento 2, 7.5 onzas de alimento 3; **27.** *a*) $30x_1 + 60x_2 + 50x_3 + 80x_4 = 15\,000$, *b*) $x_1 = 500, x_2 = 250, x_3 = 300, x_4 = 187.5$; *c*) $x_1 = 500$ (tanto peso como volumen), $x_2 = 200$ (peso), $x_3 = 240$ (peso), $x_4 = 120$ (peso);



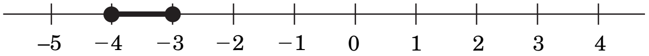
Ejercicio 1



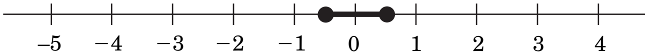
Ejercicio 3



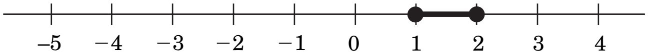
Ejercicio 5



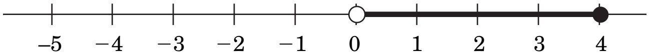
Ejercicio 7



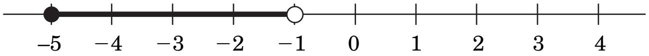
Ejercicio 9



Ejercicio 11



Ejercicio 13



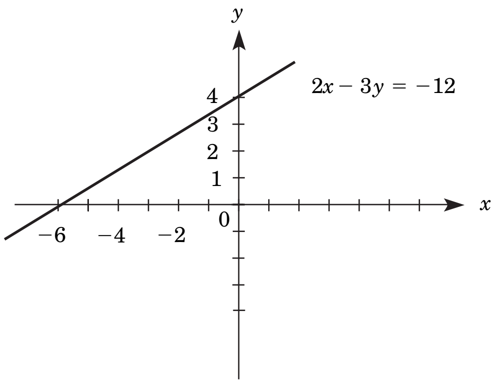
Ejercicio 15

Sec. 1.3, ejercicios 1, 3, 5,
7, 9, 11, 13, 15

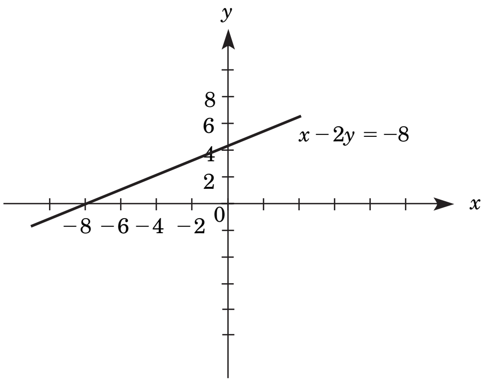
29. *a*) $150\,000x_1 + 180\,000x_2 + 250\,000x_3 = 100\,000\,000$, *b*) 196 millas, *c*) 666.67 (o 666) autobuses, 555.55 (o 555) vagones, o 400 millas de repavimentado

SECCIÓN 2.2

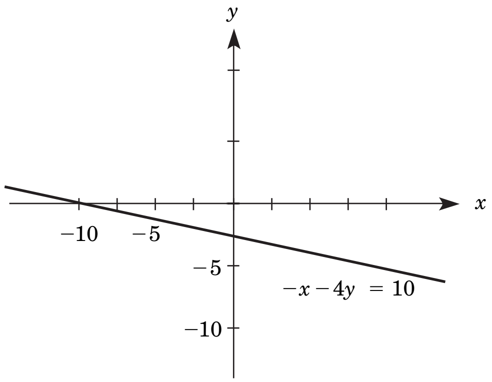
1. (8, 0) y (0,– 6); **3.** (– 9, 0) y (0, 3); **5.** (– 3, 0), sin intersección en *y*;
7. (0, 0) tiene tanto intersecciones en *x* como en *y*; **9.** (2.5, 0) y (0, – 4);
11. (– 18, 0) y (0, 6); **13.** sin intersección en *x,* (0, 6); **15.** (0, *t*/*b*), (*t*/*a*, 0);
17. sin intersección en *y* a menos que $q = 0$, en este caso, es número infinito, (*q*/*p*, 0);
19. sin intersección en *x* a menos que $s = 0$ (luego, es número infinito), (0, – *s*/*r*);
21., 23., 25., 27., 29., 31., 33. y **35.** véanse figuras (pp. R-3 y R-4);
37. $y = 0, x = 0$; **39.** $m = -3$; **41.** $m = 3.5$; **43.** $m = -2.5$; **45.** $m = -3$;
47. indefinido; **49.** $m = 0$; **51.** $m = 2$; **53.** $m = b/a$; **55.** $m = 1$;
57. $m = 0$; **59.** $m = -1$



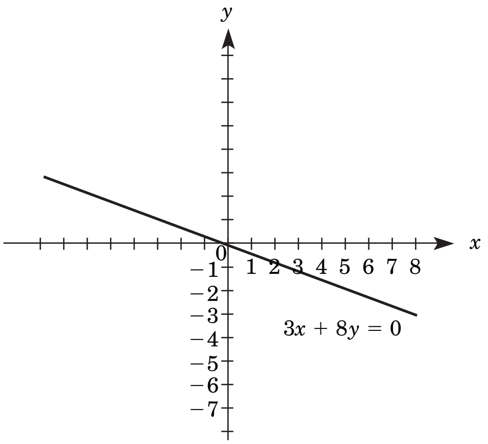
Sec. 2.2, ejercicio 21



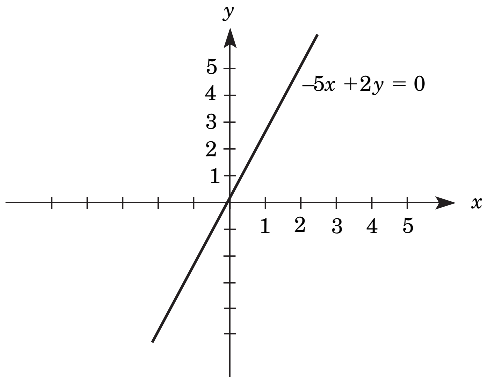
Sec. 2.2, ejercicio 23



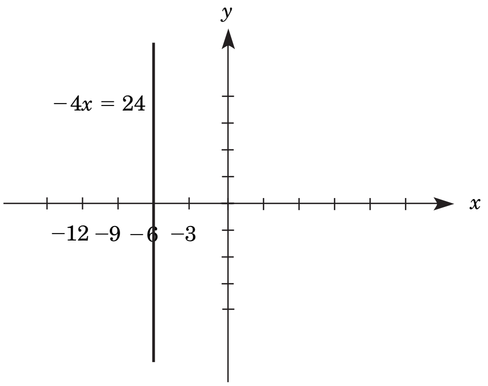
Sec. 2.2, ejercicio 25



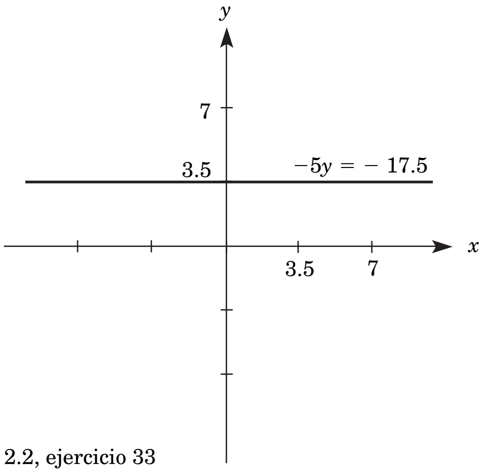
Sec. 2.2, ejercicio 27



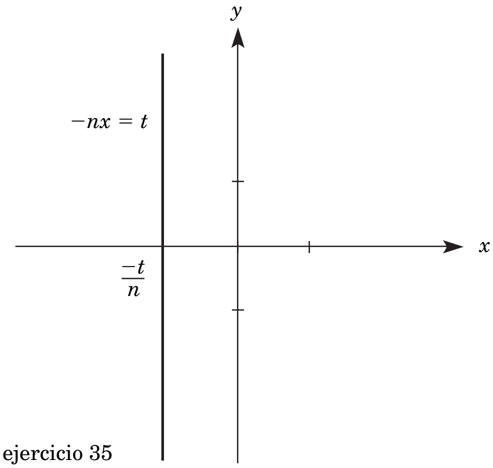
Sec. 2.2, ejercicio 29



Sec. 2.2, ejercicio 31



Sec. 2.2, ejercicio 33



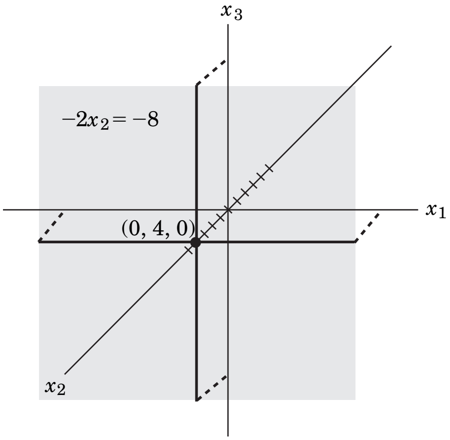
Sec. 2.2, ejercicio 35

SECCIÓN 2.3

1. $y = \frac{3}{2}x - 7.5, m = \frac{3}{2}, (0, -7.5)$; **3.** $y = \frac{4}{3}x - 6, m = \frac{4}{3}, (0, -6)$; **5.** $y = x + 8$, $m = 1, (0, 8)$; **7.** $y = -x/2 - 6, m = -\frac{1}{2}, (0, -6)$; **9.** $y = \frac{3}{5}x + 4, m = \frac{3}{5}, (0, 4)$; **11.** $y = -\frac{3}{2}x, m = -\frac{3}{2}, (0, 0)$; **13.** $y = \frac{4}{3}x, m = \frac{4}{3}, (0, 0)$; **15.** $y = x/3 + \frac{5}{3}, m = \frac{1}{3}, (0, \frac{5}{3})$; **17.** no se tiene una forma dependiente-intersección ($x = 0$), pendiente indefinida, número infinito de intersecciones en y; **19.** $y = 3, m = 0, (0, 3)$; **21.** $y = -(m/n)x + p/n$, $m = -m/n, (0, p/n)$; **23.** $y = c/d, \; m = 0, (0, c/d)$; **25.** *b*) $m = 1.2, (0, 29.6)$, *c*) Cada año, el número de mujeres con edades de 35 a 44 años en actividades laborales se incrementa en 1.2 millones; en 1981 habían 29.6 millones de mujeres en actividades productivas, *d*) 46.4 millones en 1995, 52.4 millones en 2000; **27.** *a*) $m = \frac{5}{9}, (0, -\frac{160}{9})$, *b*) Para un incremento en la temperatura de 1°F, la temperatura en grados Celsius (escala centígrada) aumenta en $\frac{5}{9}$ de un grado, 0°F corresponde a $-(\frac{160}{9})$°C, *c*) $F = \frac{9}{5}C + 32$; **29.** *a*) (8, 0) y (0, 60 000), *b*) Después de 8 años, el valor del libro es 0; cuando está nuevo, el valor del libro es de $60 000, c) Por cada año que la máquina envejece, el valor del libro disminuye en $7 500; **31.** $y = -\frac{2}{3}x + 33.33$, por cada unidad adicional producida del producto 1, la producción del producto 2 debe disminuir en $\frac{2}{3}$ de unidad; si no se producen unidades del producto 1, deben producirse 33.33 unidades del producto 2; (50, 0) si todas las horas de trabajo se destinan al producto 1, pueden producirse 50 unidades

SECCIÓN 2.4

1. $y = -2x + 10$; **3.** $y = x/2 + \frac{3}{4}$; **5.** $y = -rx - t/2$; **7.** $y = -3x + 10$; **9.** $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$; **11.** $y = 2.5x + 10$; **13.** $y = 5.6x - 18.24$; **15.** $y = wx + q - wp$; **17.** no hay forma de pendiente-intersección, $x = -3$; **19.** $y = v$; **21.** $y = -4x - 11$; **23.** $y = -42x + 1\,080$; **25.** $y = -1.042x + 20.994$; **27.** $y = [(d - b)/(c - a)]x + (bc - ad)/(c - a)$; **29.** $y = b$; **31.** $y = \frac{3}{4}x - \frac{11}{2}$; **33.** *a*) pendiente indefinida; $x = 7$, *b*) $m = 0, y = 2$; **35.** $y = -\frac{1}{4}x - 6$; **37.** *a*) $V = -3\,500t + 18\,000$, *b*) el valor disminuye $3 500 por año; cuando la máquina es nueva, el valor es de $18 000, *c*) (5.14, 0), la máquina alcanzará un valor de 0 después de 5.14 años; **39.** $F = 1.8C + 32$, por cada grado de incremento en la temperatura con la escala Celsius o centígrada, la temperatura en la escala Fahrenheit se incrementa en 1.8°. A una temperatura de 0°C, la temperatura equivalente en grados Fahrenheit es de 32°. Para (−17.77, 0), una temperatura de −17.77°C equivale a 0°F; **41.** *a*) error = 0.12, *b*) junio 30, 1991: real = $12.93, pronóstico = $13.00, error = $0.07; marzo 31, 1992: real = $13.43, pronóstico = $13.72, error = $0.29



Sec. 2.5, ejercicio 5

SECCIÓN 2.5

1. $A(0, 4, 0)$, $B(3, 4, 0)$, $C(3, 0, 0)$, $D(-6, 0, 0)$, $E(-6, 0, 6)$, $F(-6, -2, 6)$, $G(0, -2, 6)$, $H(0, 0, 6)$, $I(0, -2, 0)$; **3.** (7.5, 0, 0), (0, −5, 0), (0, 0, 15); **5.** Véase la figura; **7.** Los planos son paralelos al eje de la variable no considerada e intersecan los ejes de las dos variables consideradas.

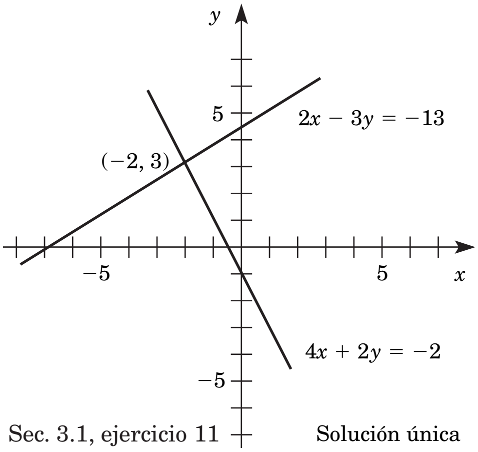
SECCIÓN 2.6

1. $0 \leq x_1 \leq 300$, $0 \leq x_2 \leq 200$, $0 \leq x_3 \leq 750$, $0 \leq x_4 \leq 1\,000$; **3.** $0 \leq x_1 \leq 142\,857$, $0 \leq x_2 \leq 83\,333$, $0 \leq x_3 \leq 40\,000$, $0 \leq x_4 \leq 50\,000$, $0 \leq x_5 \leq 10\,000$, $0 \leq x_6 \leq 20\,000$; **5.** puente aéreo de emergencia; **7.** $5x_1 + 3.5x_2 + 7.5x_3 = 240$, $x_1 = 48$, $x_2 = 68.57$, $x_3 = 32$; **9.** $25\,000x_1 + 18\,000x_2 + 15\,000x_3 = 10\,000\,000$, solamente TV: \$400 (miles), solamente radio: \$555.56 (miles), solamente periódicos: \$666.67 (miles).

CAPÍTULO 3

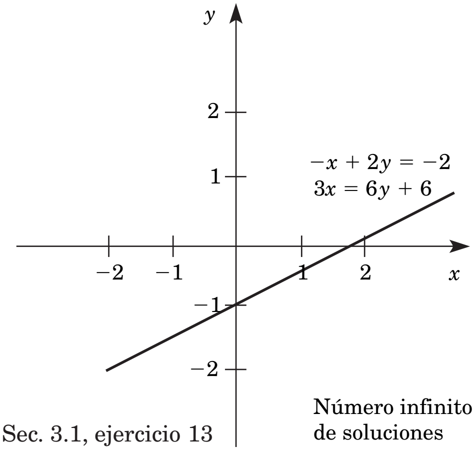
SECCIÓN 3.1

1. infinito; **3.** única; **5.** no hay solución; **7.** infinito; **9.** única; **11.**, **13.**, **15.**, **17.**, **19.** véanse las figuras (pp. R-5 y R-6); **21.** no hay solución;



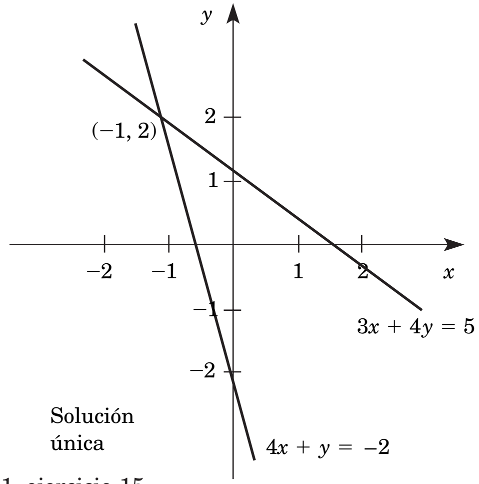
Sec. 3.1, ejercicio 11

Solución única

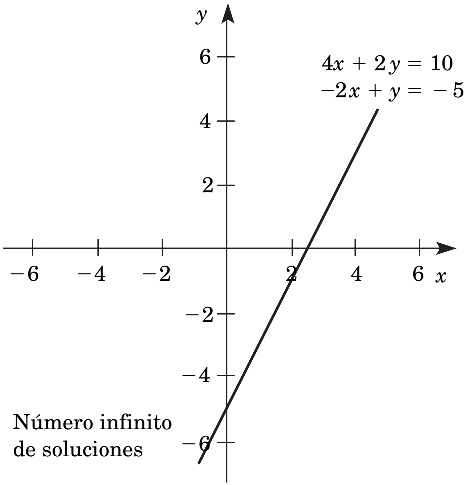


Sec. 3.1, ejercicio 13

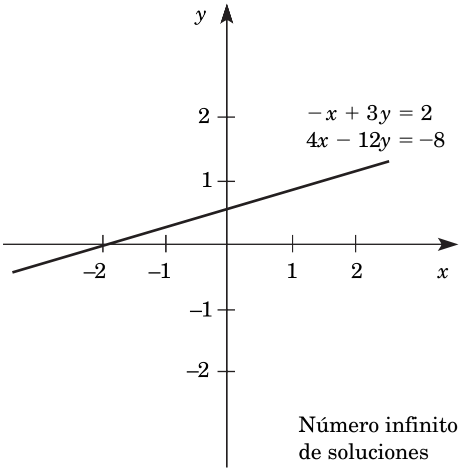
Número infinito de soluciones



Sec. 3.1, ejercicio 15



Sec. 3.1, ejercicio 17



Sec. 3.1, ejercicio 19

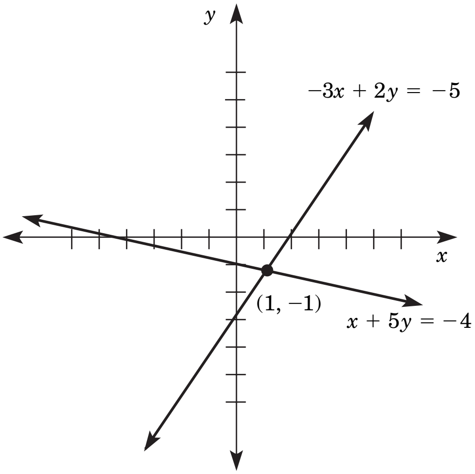
23. $x = 0, y = 4$; **25.** $x = 3, y = -3$; **27.** $x = -10.5, y = -36$; **29.** no hay solución;
31. $x = 5, y = -2$; **33.** $x = -2, y = -3$

SECCIÓN 3.2

1. $x = 3, y = 1$; **3.** $x = 5, y = 10$; **5.** número infinito de soluciones, y arbitraria y $x = 2y - 4$; **7.** no hay solución; **9.** $x = 1, y = -4$; **11.** número infinito de soluciones, y arbitraria y $x = 2y + 8$; **13.** $x = 0, y = -2$; **15.** número infinito de soluciones, y arbitraria y $x = \frac{1}{2}y + \frac{7}{4}$; **17.** $x = -3, y = -3$; **19.** $x = -\frac{2}{11}, y = -\frac{21}{11}$

SECCIÓN 3.3

1. no hay solución; **3.** $x_1 = 5, x_2 = 10, x_3 = 0$; **5.** $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 3$
7. $x_1 = 4, x_2 = -2, x_3 = 1$; **9.** número infinito de soluciones, x_3 arbitraria, $x_1 = -\frac{14}{3}x_3 - 48$, $x_2 = -\frac{13}{3}x_3 - 66$ **11.** $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 2$; **13.** no hay solución;



Cap. 3, evaluación del capítulo, problema 1

15. número infinito de soluciones, x_2 arbitraria, x_3 arbitraria, $x_1 = 2x_2 - x_3 - 10$; **17.** no hay solución; **19.** número infinito de soluciones, x_2 arbitraria, x_3 arbitraria y $x_1 = \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 - 1$; **21.** *a*), *c*), *d*), *e*) única, ninguna solución, o un número infinito de ellas, *b*) ninguna solución o un número infinito de ellas

SECCIÓN 3.4

1. $x_1 = 200, x_2 = 350, x_3 = 100$; **3.** $x_1 = 100, x_2 = 200$ y $x_3 = 200$;
5. una mezcla compuesta de solamente 60 000 galones del componente 2;
7. 3 onzas del alimento 1, 2 del alimento 2, y 4 del alimento 3

EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. véase la figura; **2.** $x = 3, y = -5$; **3.** *a*) única, ninguna solución, o un número infinito de ellas, *b*) ninguna solución o un número infinito de ellas; **4.** un número infinito de soluciones, x_3 arbitraria, $x_1 = -\frac{3}{2}x_3 + 5, x_2 = -\frac{1}{4}x_3 - \frac{10}{4}$; **5.** *a*) no hay solución, *b*) $x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 1\ x_4 = 3$; **6.** $x_1 = 10, x_2 = -5, x_3 = 10$, no hay combinación de los tres productos que podría usar las capacidades semanales de los tres departamentos

CAPÍTULO 4

SECCIÓN 4.1

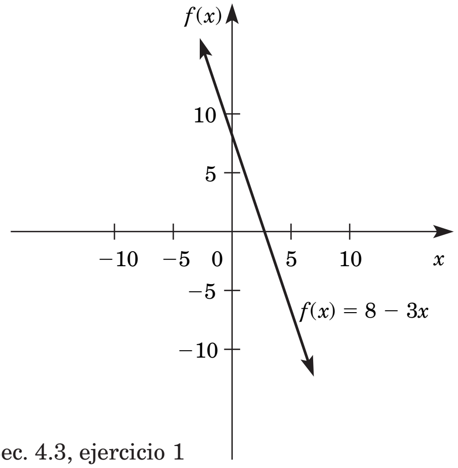
1. $-10, -20, 5a + 5b - 10$; **3.** $4, 6, -a - b + 4$; **5.** $b, -2m + b, ma + mb + b$;
7. $-9, -5, a^2 + 2ab + b^2 - 9$; **9.** $-5, -3, a^2 + 2ab + b^2 + a + b - 5$;
11. $-10, -18, a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 10$; **13.** $0, 16, (a + b)^4$;
15. $4, 0, a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 2a - 2b + 4$; **17.** todos son números reales;
19. todos son números reales; **21.** todos son números reales; **23.** todos son números reales;
25. $x \geq -4$; **27.** $t \leq -8$; **29.** todos son números reales; **31.** $x \neq 4$;
33. $u \neq 1 + \sqrt{6}$ o $1 - \sqrt{6}$; **35.** $x \geq 8$; **37.** $h > 2, h \leq -2$ excepto $h \neq -3$;
39. $x \geq -3$ o $x \leq -5$; **41.** $0 \leq x \leq 50\,000$, $80\,000 \leq C(x) \leq 830\,000$;
43. $0 \leq p \leq 6\,000$, $0 \leq q \leq 180\,000$; **45.** $10 \leq x \leq 500$, $\$175 \leq p \leq \$1\,400$;
47. $200 \leq k \leq 1\,500$, $\$24 \leq c \leq \$147.50$; **49.** *a*) $C = 6x + 250\,000$, *b*) 1 450 000, *c*) $0 \leq x \leq 300\,000$, $\$250\,000 \leq C \leq \$2\,050\,000$
51. $p = \begin{cases} 200 & n \leq 60, \\ 200 - 2(n - 60) & n > 60, \end{cases}$ **53.** *a*) 0, *b*) 8, *c*) 1 300, *d*) $2x^2 + 5xy + y^3$; **55.** *a*) 4, *b*) 9, *c*) 36; **57.** *a*) -5, *b*) 7; **59.** *a*) 110, *b*) -16, *c*) $ab - 5cd$; **61.** *a*) $q_1 = 130$ (miles), $q_2 = 60$ (miles), *b*) $q_1 = 60$ (miles), $q_2 = 70$ (miles); **63.** $S = 2.5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 60$, \$295

SECCIÓN 4.2

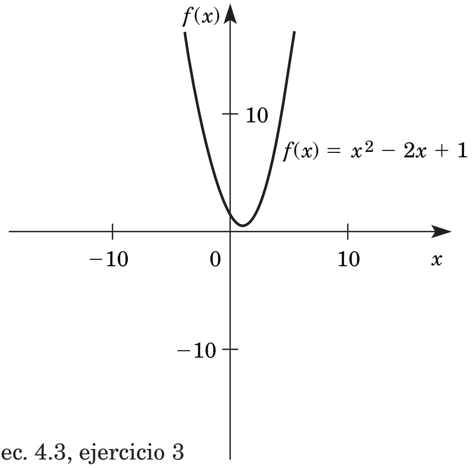
1. no se puede clasificar (todavía); **3.** lineal; **5.** constante; **7.** lineal; **9.** no se puede clasificar (todavía); **11.** racional; **13.** no se puede clasificar; **15.** constante; **17.** no se puede clasificar; **19.** racional; **21.** no se puede clasificar; **23.** constante; **25.** todos los números reales; **27.** todos los números reales *excepto* aquéllos producidos en $h(x) = 0$; **29.** *a*) lineal, *b*) \$11 000, *c*) $t = 6.67$ años; **31.** *a*) cuadrática, *b*) \$10 000, *c*) $p = \$0$ o \$30; **33.** *a*) cuadrática, *b*) \$31 455 000; **35.** *a*) cuadrática, *b*) 225, *c*) \$45; **37.** *a*) $x^2 - 2x + 7$, *b*) $-2x^3 + 10x^2 + 6x - 30$, *c*) $(x^2 - 3)/(10 - 2x)$; **39.** *a*) $x^2 - 12x + 42$, *b*) 70, *c*) 31; **41.** *a*) $x^6 + 2x^3$, *b*) 0, *c*) 80; **43.** *a*) $(2)^{x+2}$, *b*) 32, *c*) 1

SECCIÓN 4.3

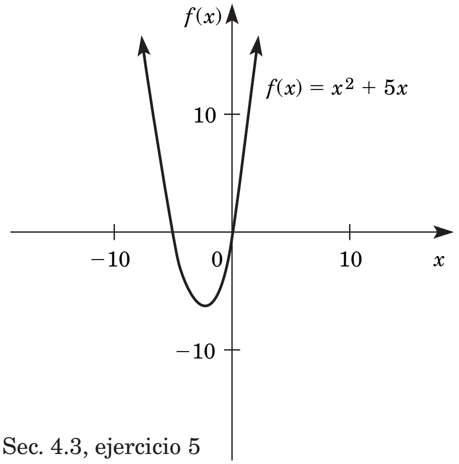
1., **3.**, **5.**, **7.**, **9.**, **11.**, **13.**, **15.** véanse las figuras; **17.** *c*), *d*) y *e*) son funciones; **19.** para $f(x) + c$, todos los puntos sobre la gráfica de $f(x)$ serían elevados por c unidades relativas al eje y; para $f(x) - c$, la gráfica de $f(x)$ sería disminuida por c unidades



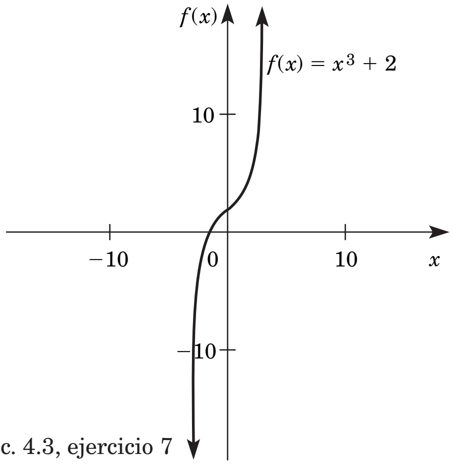
Sec. 4.3, ejercicio 1



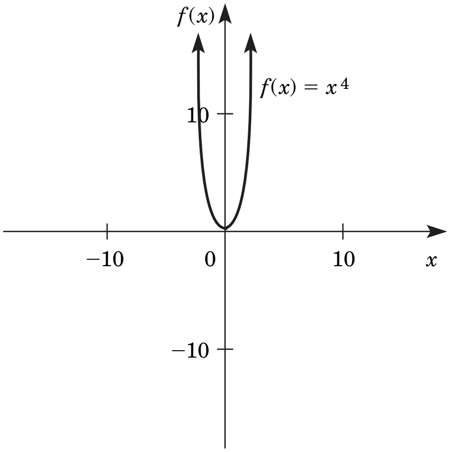
Sec. 4.3, ejercicio 3



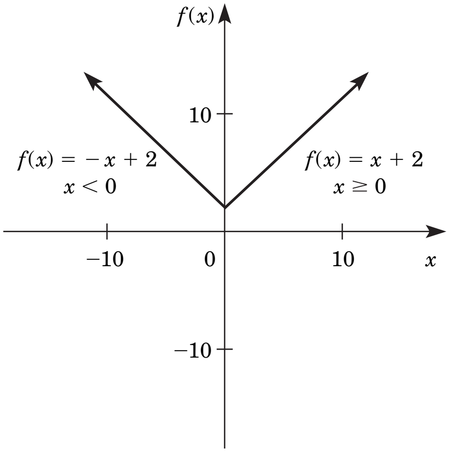
Sec. 4.3, ejercicio 5



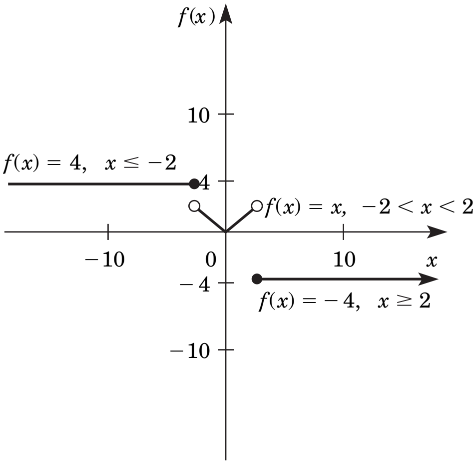
Sec. 4.3, ejercicio 7



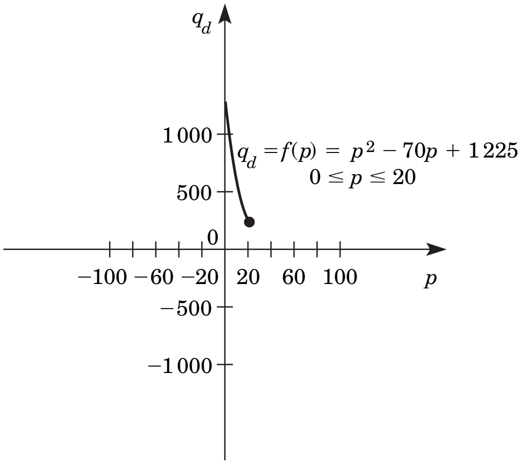
Sec. 4.3, ejercicio 9



Sec. 4.3, ejercicio 11



Sec. 4.3, ejercicio 13



Sec. 4.3, ejercicio 15

EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. $x \geq 2, x \leq -3$; **2.** $0 \leq t \leq 8, 0 \leq V \leq 36\,000$;

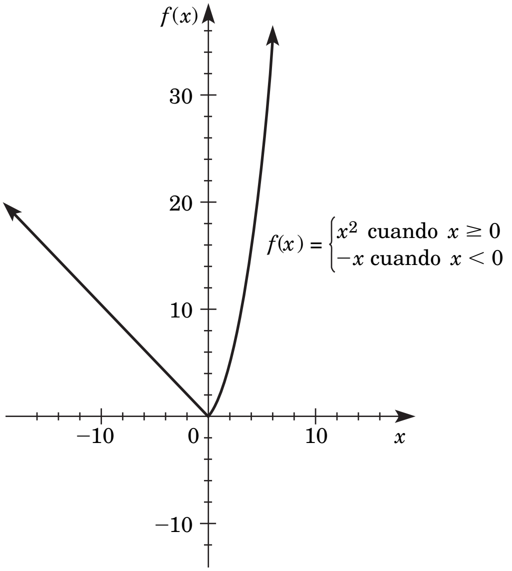
3. $p = \begin{cases} 450 & n \leq 150 \\ 450 - 2.5(n - 150) & n > 150 \end{cases}$; **4.** *a*) $(x^2 + 10x + 25)/(-2x - 9)$, *b*) 0;

5. *a*) no se puede clasificar; *b*) racional; *c*) cuadrática; *d*) lineal; **6.** véase la figura (p. R-10)

CAPÍTULO 5

SECCIÓN 5.1

1. $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 + a_0$;
3. $y = 5x_1 + 3x_2 + 25$ cuando $x_1 + x_2 \leq 80$, $y = 5x_1 + 3x_2 + 25 + 2.5(x_1 + x_2 - 80) = 7.5x_1 + 5.5x_2 - 175$ cuando $x_1 + x_2 > 80$;
5. *a*) $R = 500x_1 + 1\,000x_2 + 1\,500x_3$, *b*) $C = 275x_1 + 550x_2 + 975x_3 + 25\,000\,000$, *c*) $P = 225x_1 + 450x_2 + 525x_3 - 25\,000\,000$, *d*) \$2 750 000; **7.** *a*) $R = 0.33x$,

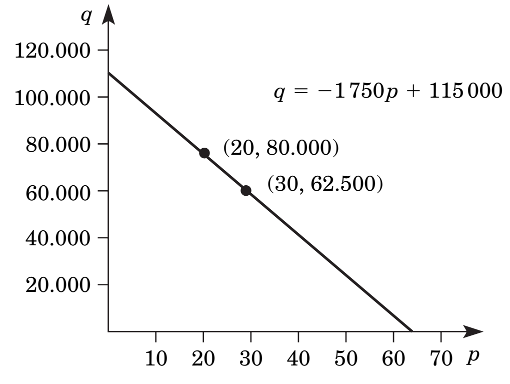


Cap. 4, evaluación del capítulo, problema 6

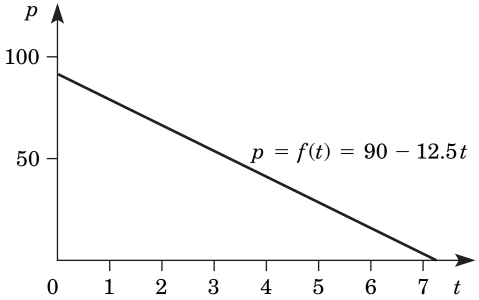
b) $C = 0.18x + 10\,500$, *c*) $P = 0.15x - 10\,500$, *d*) $= -\$1\,500$, *e*) 70 000 millas;
9. *a*) $R = 1.299x_1 + 1.379x_2$, *b*) $C = 1.219x_1 + 1.289x_2$, *c*) $P = 0.08x_1 + 0.09x_2$, *d*) \$11 600

SECCIÓN 5.2

1. $V = f(t) = 80\,000 - 13\,333.33t$; **3.** $V = f(t) = 300\,000 - 37\,500t$; **5.** $V = f(t) = 25\,000 - 6\,466.67t$; **7.** *a*) $q = 115\,000 - 1\,750p$, *b*) \$37.14, *c*) por cada cada \$1 de aumento en el precio, la demanda decae (disminuye) en 1 750 unidades, *d*) $0 \leq p \leq 65.71$, $0 \leq q \leq 115\,000$, *e*) véase la figura; **9.** *a*) $q = 10\,800p - 15\,200$, *b*) \$5.57, *c*) (1.407, 0), para que cualquier suministro ingrese al mercado, el precio de venta debe exceder \$1.407; **11.** *a*) En el momento de la sentencia de divorcio, los pagos de manutención para los hijos se hacen en el 90 por ciento de los casos, *b*) por cada año que pasa desde la fecha de la sentencia de divorcio, el porcentaje de casos en los que se paga la manutención a los hijos decrece en un 12.5 por ciento, *c*) 27.5 por ciento; *d*) véase la figura. **13.** *a*) $p = f(a) = -3a + 153$, *b*) a medida que la edad se incrementa en 1 año, la probabilidad de matrimonio disminuye en 3 por ciento; una mujer soltera, recién nacida, tiene un 153 por ciento de casarse (lo que no es significativo), *c*) la intersección en p no es significativa, *d*) $f(20) = 93$, $f(30) = 63$, $f(40) = 33$, $f(50) = 3$; **15.** *a*) $E = f(t) = 79.327t + 1\,512.02$, *b*) los gastos por estudiante se han incrementado



Sec. 5.2, ejercicio 7*e*



Sec. 5.2, ejercicio 11*d*

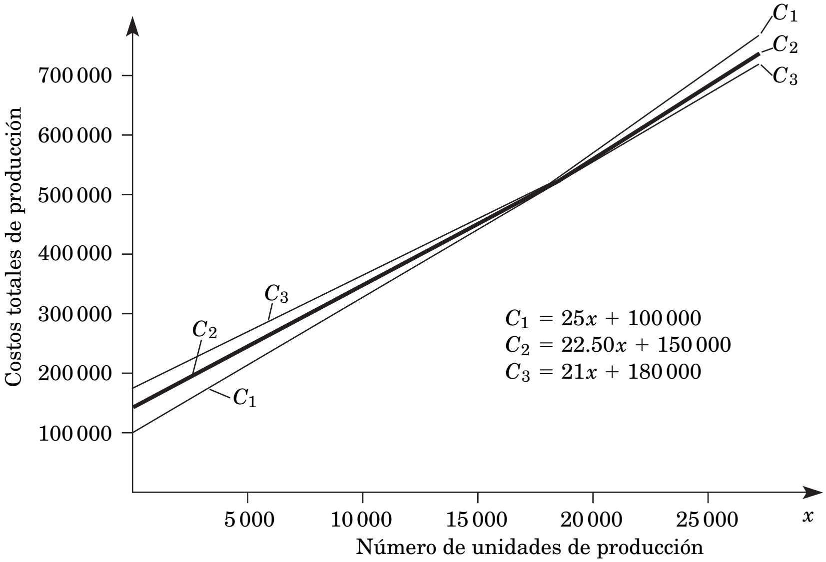
a una tasa de aproximadamente \$79.327 por año; en 1955 la tasa de gastos era de aproximadamente \$1 512.02, c) \$5 081.735; **17.** *a*) $V = f(t) = 1.267t + 8.133$, *b*) el porcentaje de oficinas vacantes se incrementa cada año en 1.267; en 1985, la tasa estimada de vacantes fue de 8.133 por ciento; c) 20.803 por ciento; **19.** $p_1 = 5, p_2 = 3, q_1 = 70, q_2 = 90$

SECCIÓN 5.3

1. 37 500; **3.** \$50; **5**. *a*) 11 111.11, *b*) 37 777.78, *c*) \$9.07, *d*) \$350 000; **7.** *a*) 8 000, *b*) 10 000, *c*) \$3 750 pérdida; **9.** *a*) 60,000, *b*) la máquina más costosa (\$520 000); **11.** *a*) 40 000 líneas, *b*) \$75 000/\$67 500, *c*) \$1.25/línea; **13.** *a*) 2 000, *b*) 8 000 PacPerson, 6 000 Astervoid, 3 000 Haley's, 2 000 Black Hole; **15.** *a*) máquina 1 si la salida $\leq$ 40 000; máquina 2 si la salida está entre 40 000 y 51 428.57 unidades; máquina 4 si la salida es mayor que 51 428.57

EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. *a*) $P = f(x) = 40x - 200\,000$, *b*) 23 750; **2.** *a*) $n = f(t) = -6\,000t + 245\,000$, *b*) para cada año, la transportación disminuye en aproximadamente 6 000 pasajeros, *c*) 131 000, *d*) $t = 10.833$ (entre 1991 y 1992); **3.** *a*) $N = f(t) = 217.5t + 1\,720$, *b*) el número promedio de residentes se incrementó aproximadamente en 217.5/año; en 1984, el número promedio de residentes se estimó en 1 720; *d*) 3 025; **4.** máquina 1 para $x \leq 20\,000$; máquina 3 para $x \geq 20\,000$, ver figura; **5.** *a*) se incrementa x_{BE}, *b*) disminuye x_{BE}, *c*) disminuye x_{BE}

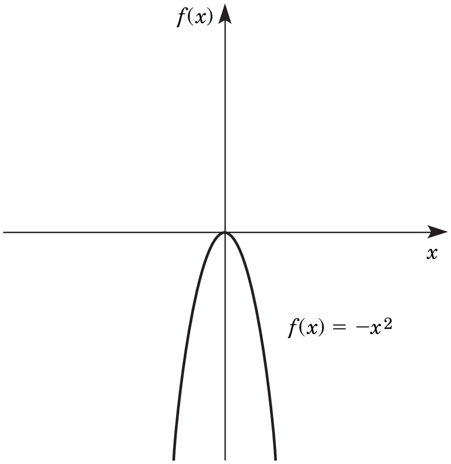


Cap. 5, evaluación del capítulo, problema 4

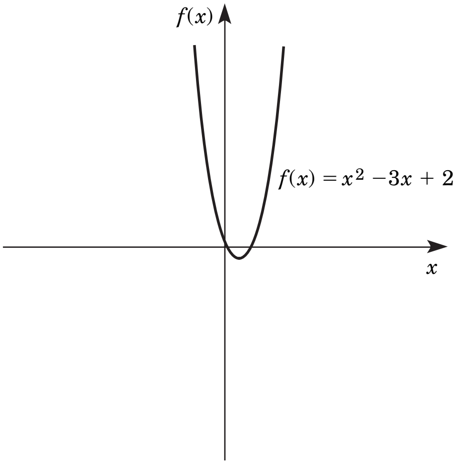
CAPÍTULO 6

SECCIÓN 6.1

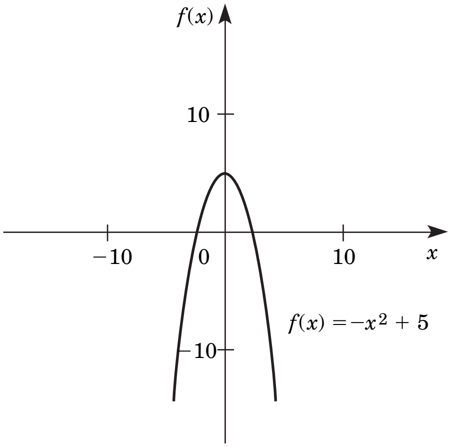
1. $a = 4, b = 0, c = -20$; **3.** no cuadrática; **5.** $a = 1, b = -8, c = 16$; **7.** $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}, c = \frac{5}{3}$; **9.** no cuadrática; **11.** $a = 1, b = 0, c = -2$; **13.** $a = 20, b = 4, c = -5$; **15.** $a = 1, b = -8, c = 16$; **17.** hacia abajo, intersección en y, intersección en x y vértice en $(0, 0)$, véase la figura; **19.** hacia arriba, intersección en y en $(0, 2)$, intersecciones en x en $(1, 0)$ y $(2, 0)$, vértice en $(1.5, -0.25)$, véase la figura; **21.** hacia abajo, intersección en y en $(0, 5)$, intersecciones en x en $(2.236, 0)$ y $(-2.236, 0)$, vértice en $(0, 5)$, ver figura; **23.** hacia arriba, intersección en y en $(0, 0)$, intersecciones en x en $(0, 0)$ y $(20, 0)$, vértice en $(10, -50)$, ver figura; **25.** hacia abajo, intersección en y en $(0, -9)$, no hay intersecciones en x, vértice en $(0, -9)$, ver figura; **27.** hacia arriba, intersección en y en $(0, 4)$, no hay intersecciones en x, vértice en $(0, 4)$, ver figura; **29.** hacia arriba, intersección en y en $(0, -12)$, intersecciones en x en $(-\frac{3}{2}, 0)$ y $(-\frac{4}{3}, 0)$ vértice en $(-\frac{1}{12}, -\frac{289}{24})$ ver figura; **31.** hacia abajo, intersección en y en $(0, 0)$,



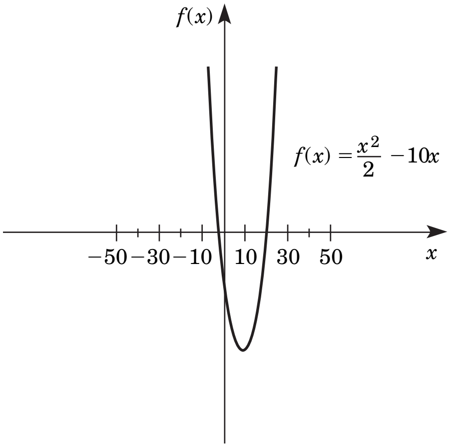
Sec. 6.1, ejercicio 17



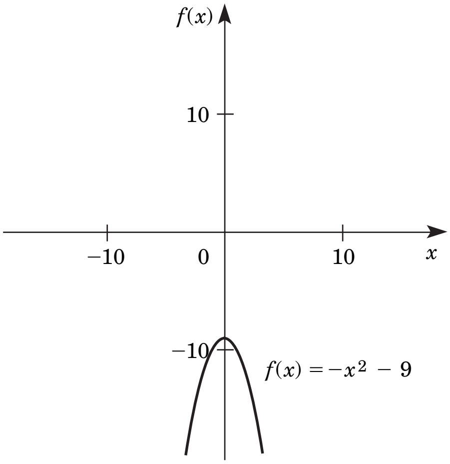
Sec. 6.1, ejercicio 19



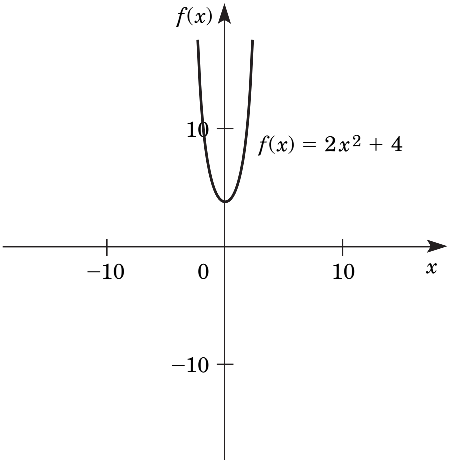
Sec. 6.1, ejercicio 21



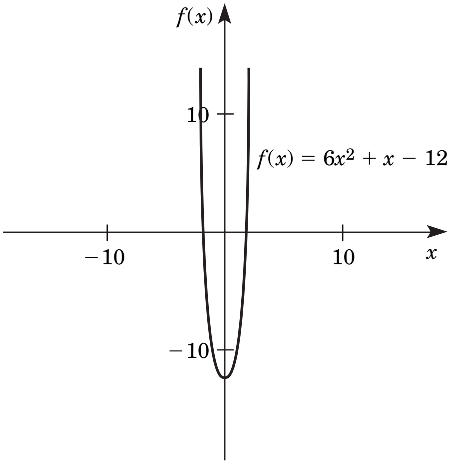
Sec. 6.1, ejercicio 23



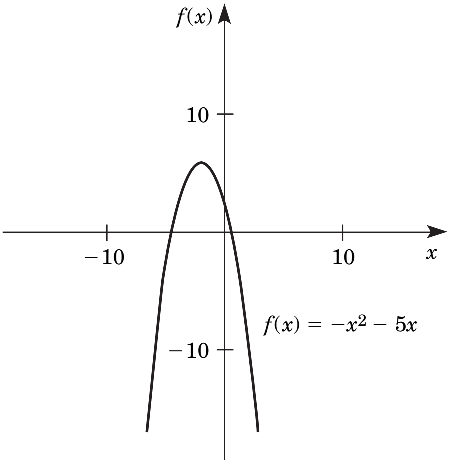
Sec. 6.1, ejercicio 25



Sec. 6.1, ejercicio 27



Sec. 6.1, ejercicio 29

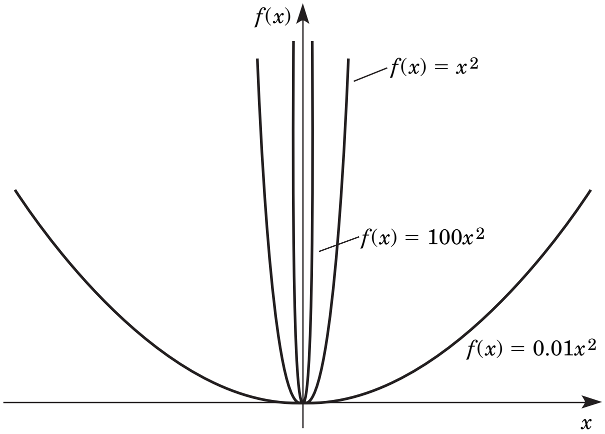


Sec. 6.1, ejercicio 31

intersecciones en x en (0, 0) y (−5, 0), vértice en (−2.5, 6.25), ver figura; **33.** ver figura (p. R-14); **35.** $f(x) = -3x^2 + 2x$; **37.** $n = f(t) = 4t^2 - 41.167t + 125$, 32.831, más allá del vértice de la parábola; función de estimación no válida

SECCIÓN 6.2

1. $R = g(p) = 600\,000p - 2\,500p^2$, cóncava hacia abajo, (0, 0), \$23 750 000, 475 000 unidades, \$120; **3.** $R = g(p) = 30\,000p - 25p^2$, cóncava hacia abajo, (0, 0), \$1 710 000, 28 500 unidades, \$600; **5.** $R = f(q) = 160q - q^2/15$; **7.** *a*) $q_s = f(p) = 3p^2 - 1\,200$, *c*) (20, 0) a precios de \$20 (o menores), no se surten unidades, o, para unidades que se surtan, el precio debe ser mayor que \$20, *d*) 9 600; **9.** *a*) $q_s = f(p) = 3p^2 - 4\,200$, *b*) $p \geq 37.416$, *c*) (37.416, 0), para $p \leq 37.416$, no se surten unidades, *d*) 25 800 unidades; **11.** $q_d = f(p) = 3p^2 - 240p + 4\,800$, 3 675 unidades; **13.** \$75, 5 225 unidades; **15.** *a*) $S = f(x) = (x - 12)^2 + (x - 20)^2 + (x - 30)^2 = 3x^2 - 124x + 1\,444$, *b*) $x = 20.67$;



Sec. 6.1, ejercicio 33

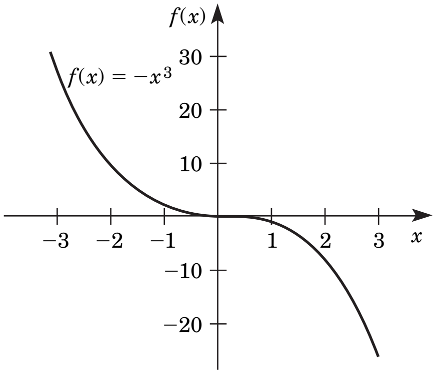
17. *a)* $S = f(x) = 10\,000\,(10 - x)^2 + 6\,000\,(50 - x)^2 + 18\,000\,(70 - x)^2 = 34\,000x^2 - 3\,320\,000\,x + 104\,200\,000$, *b)* $x = 48.82$; **19.** $n = f(t) = 687.5t^2 + 125t + 2\,000$; 86 562.5 empleados

SECCIÓN 6.3

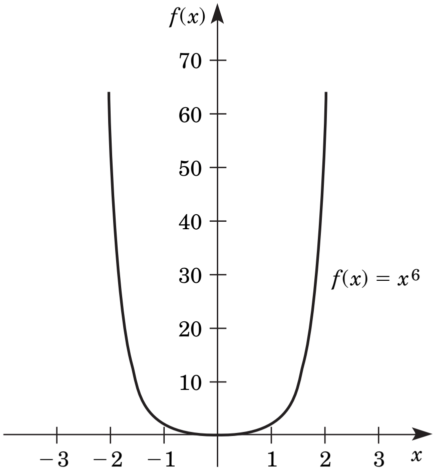
1. *a)* tercer grado, *b)* cuando $x \to \infty, f(x) \to -\infty$; cuando $x \to -\infty, f(x) \to \infty$;
3. *a)* octavo grado, *b)* cuando $x \to \infty, f(x) \to \infty$; cuando $x \to -\infty, f(x) \to \infty$;
5. *a)* séptimo grado, *b)* cuando $x \to \infty, f(x) \to \infty$; cuando $x \to -\infty, f(x) \to -\infty$;
7. *a)* noveno grado, *b)* cuando $x \to \infty, f(x) \to \infty$; cuando $x \to -\infty, f(x) \to -\infty$;
9. *a)* quinto grado, *b)* cuando $x \to \infty, f(x) \to -\infty$; cuando $x \to -\infty, f(x) \to \infty$;
11. *a)* octavo grado, *b)* cuando $x \to \infty, f(x) \to -\infty$; cuando $x \to -\infty, f(x) \to -\infty$;
13. *a)* quinto grado, *b)* cuando $x \to \infty, f(x) \to -\infty$; cuando $x \to -\infty, f(x) \to \infty$;
15. *a)* sexto grado, *b)* cuando $x \to \infty, f(x) \to \infty$; cuando $x \to -\infty, f(x) \to \infty$;
17., **19.**, **21.**, **23.**, **25.** véanse las figuras; **27.** ver figura, 1 082.5 personas

EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

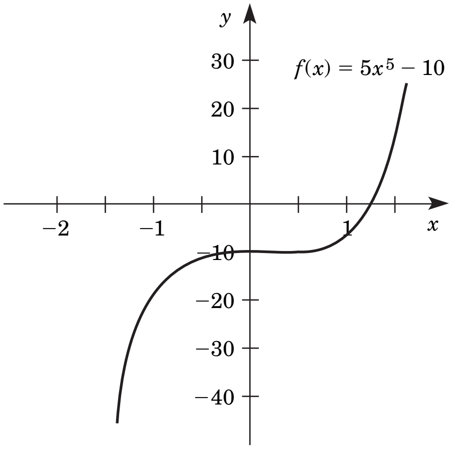
1. *a)* hacia arriba; *b)* (0, −20), *c)* (1.696, 0) y (−2.946, 0), *d)* (−0.625, −21.5625);
2. *a)* $R = f(p) = 360\,000p - 45p^2$, *b)* \$4 000;



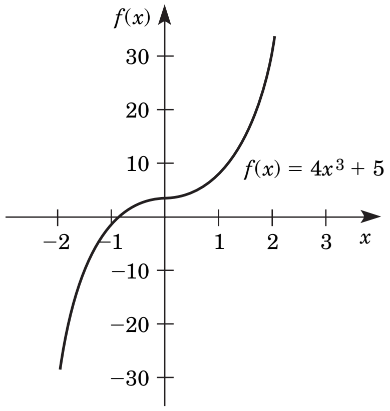
Sec. 6.3, ejercicio 17



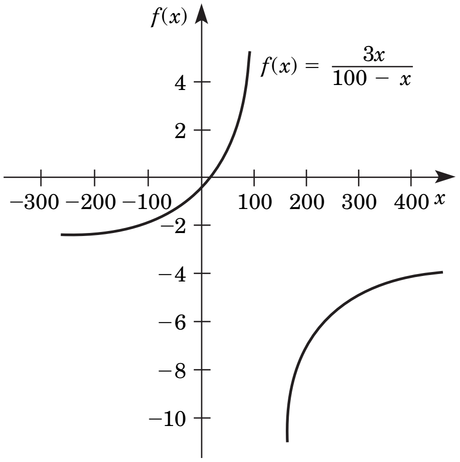
Sec. 6.3, ejercicio 19



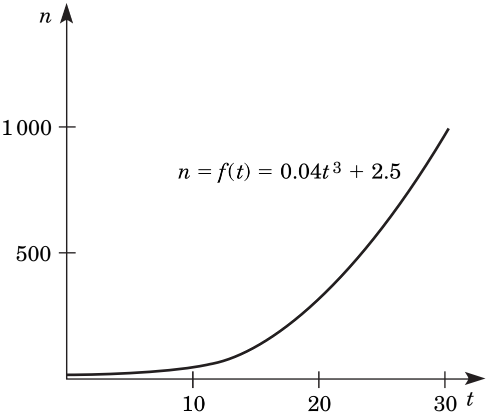
Sec. 6.3, ejercicio 21



Sec. 6.3, ejercicio 23



Sec. 6.3, ejercicio 25



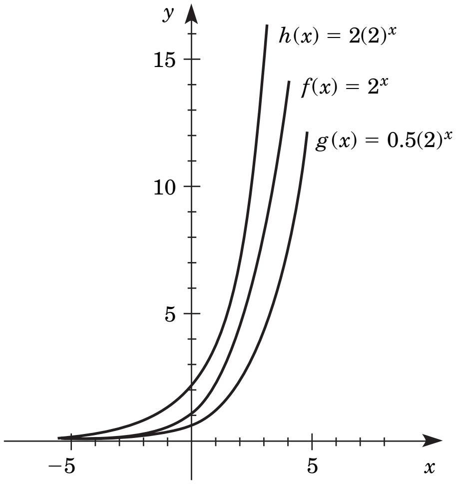
Sec. 6.3, ejercicio 27

3. $I = f(t) = 0.144t^2 - 0.201t + 0.6$, \$29.985 mil millones; **4.** *a*) quinceavo grado, cuando $x \rightarrow \infty, f(x) \rightarrow -\infty$; cuando $x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow \infty$; *b*) doceavo grado, cuando $x \rightarrow \infty, f(x) \rightarrow -\infty$; cuando $x \rightarrow -\infty, f(x) \rightarrow -\infty$; **5.** $V = f(x) = (24 - 2x)(16 - 2x)(x) = 384x - 80x^2 + 4x^3$

CAPÍTULO 7

SECCIÓN 7.1

1. *a*), *b*), *c*), *e*), *g*) y *h*) son funciones exponenciales **3.** *a*) ver figura, *b*) entre mayor sea la magnitud de a, mayor será la tasa de incremento en $f(x)$ a medida que x aumente su valor; **5.** *a*) I. el dominio es el conjunto de los números reales, II. la gráfica de f se encuentra completamente sobre el eje x, III. la gráfica de f es asintótica con respecto a la línea $y = c$, IV. la intersección en y se presenta en $(0, c + 1)$; *b*) I. el dominio es el conjunto de los números reales, II. la gráfica de f se encuentra arriba y abajo del eje x, III. la gráfica de f es asintótica con respecto a la línea $y = c$, IV. la intersección se presenta en $(0, c + 1)$; **7.** $f(0) = 1, f(-3) = 1/\sqrt{8} = 0.3535$, $f(1) = \sqrt{2} = 1.414$; **9.** $f(0) = 1$,

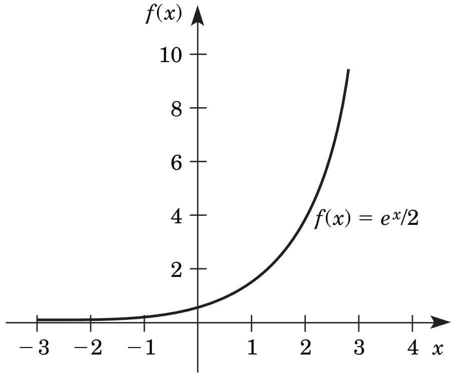


Sec. 7.1, ejercicio 3*a*

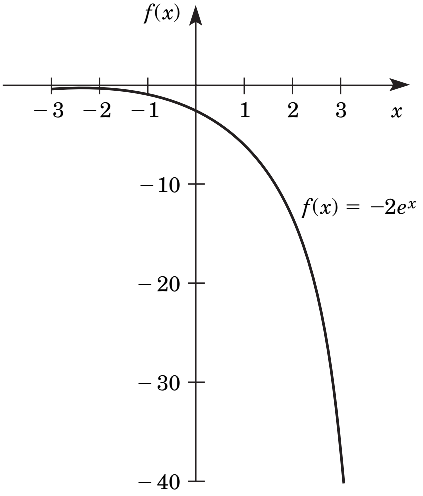
$f(-3) = 4.482, f(1) = 0.6065$; **11.** $f(0) = 1, f(-3) = 90.017, f(1) = 1.649$; **13.** $f(0) = 0$, $f(-3) = 9.975, f(1) = -63.89$; **15.** $f(0)= 2.5, f(-3) = 50.214, f(1) = 0.9197$; **17.** $f(0) = 81$, $f(-3) = 0.0041, f(1) = 27$; **19.** $f(0) = 9, f(-3) = 11.99, f(1) = -10.167$; **21.** $f(0) = -4$, $f(-3) = -0.199, f(1) = -6.873$; **23.**, **25.**, **27.**, **29.**, **31.** véanse las figuras; **33.** $f(x) = e^{0.69x^2}$; **35.** $f(x) = e^{0.405x}$; **37.** $f(t) = 10e^{-1.2t}$; **39.** $f(t) = -2e^{4.5t}$ **41.** $f(u) = 5e^{0.429u}$; **43.** $f(z) = e^{3.91z}$; **45.** $f(x) = e^{1.0986x^2 - 0.3465x}$; **47.** *a*) $A = f(t) = 300(\frac{1}{2})^t$, *b*) $f(2) = 75$ mg, $f(2.5) = 53.03$ mg, $f(6) = 4.6875$ mg

SECCIÓN 7.2

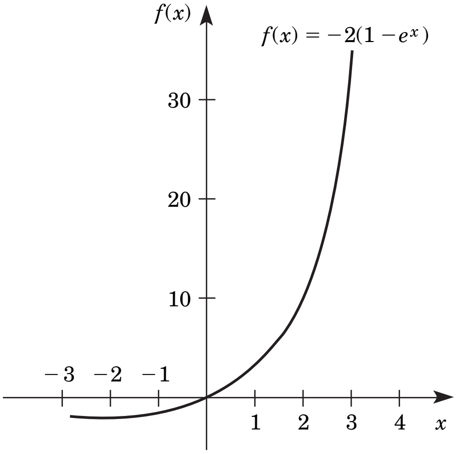
1. *a*) $V = 200\,000e^{0.08t}$, *b*) \$298 364.94, \$445 108.19; **3.** 8.66 años, 17.328 años; **5.** *a*) \$2 339 646.80, *b*) \$8 372 897.50, *c*) 4.77 años; **7.** *a*) $P = f(t) = 40e^{0.025t}$, *b*) 51.36 millones, 74.729 millones; **9.** *a*) 5 563.85 toneladas, *b*) en 5.875 años; **11.** 23.1 años;



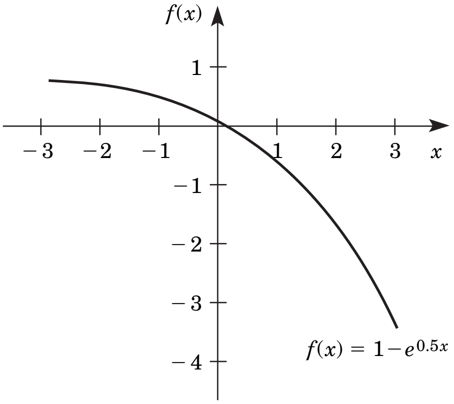
Sec. 7.1, ejercicio 23



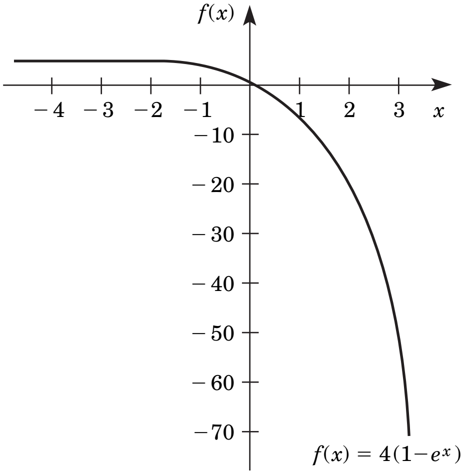
Sec. 7.1, ejercicio 25



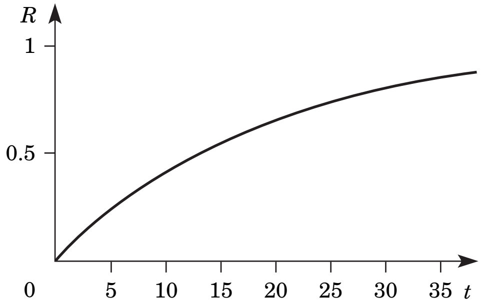
Sec. 7.1, ejercicio 27



Sec. 7.1, ejercicio 29



Sec. 7.1, ejercicio 31

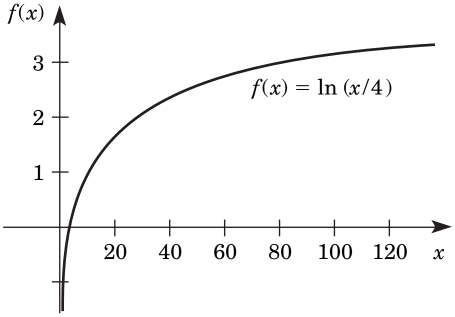


Sec. 7.2, ejercicio 17*b*

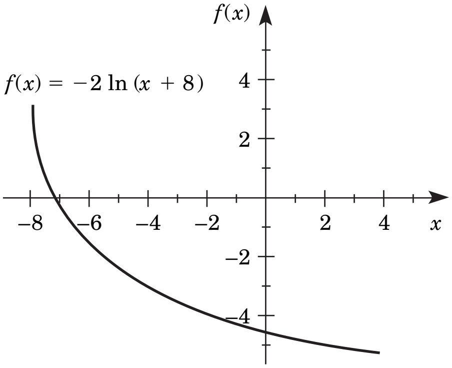
13. 17.328 años (o durante 1977); **15.** *a*) 19.67 por ciento, 31.6 por ciento, *b*) 0.5 (o 50 por ciento); **17.** *a*) 4.88 por ciento, 22.12 por ciento, 39.35 por ciento, 63.21 por ciento, *b*) véase la figura; **19.** $R = g(p) = 10\,000\,pe^{-0.1p}$, $g(10) = \$36\,787.94$, $f(10) = 3\,678.79$ unidades; **21.** *a*) $f(0) = pe^{-c}$, *b*) p

SECCIÓN 7.3

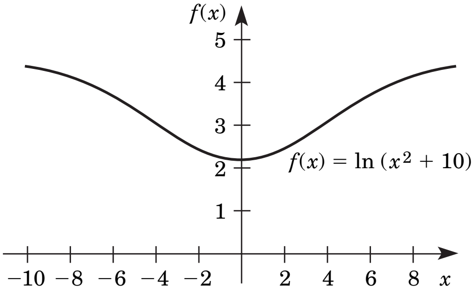
1. $\log_5 25 = 2$; **3.** $\log_4 64 = 3$; **5.** $\log_7 343 = 3$; **7.** $\log_8 4\,096 = 4$; **9.** $\log_4 4\,096 = 6$; **11.** $\log_5 0.04 = -2$; **13.** $\log_{0.2} 625 = -4$; **15.** $\log_{0.4} 15.625 = -3$; **17.** $\log_2 0.0625 = -4$; **19.** $\log_{0.2} 125 = -3$; **21.** $2^7 = 128$; **23.** $4^3 = 64$; **25.** $3^6 = 729$; **27.** $2^{-4} = 0.0625$; **29.** $5^5 = 3\,125$; **31.** $0.1^{-4} = 10\,000$; **33.** $0.2^{-2} = 25$; **35.** $0.25^{-3} = 64$; **37.** $e^{1.6094} = 5$; **39.** $e^{4.6052} = 100$; **41.** 6.3969; **43.** 4.3820; **45.** −2.3026; **47.** −0.2877; **49.** −4.6052; **51.** 9.2103 **53.** 6.6201 **55.** 7.7832 **57.** 13.8155; **59.** 6.5147; **61.** $x = 27.299$; **63.** $x = 2, -2$, o 1; **65.** $x = \pm\sqrt{3/(e-1)} = \pm 1.3214$; **67.** $x = -1.8444$; **69.** $x = -11.0904$; **71.** $x = 1.4756$; **73** $x = -1.6094$; **75.** $x = -3, 3, 1$; **77.** no hay solución; **79.** $x = -2.4079$; **81., 83., 85., 87., 89.** véanse las figuras; **92.** $R = f(t) = 71e^{0.0518t}$;



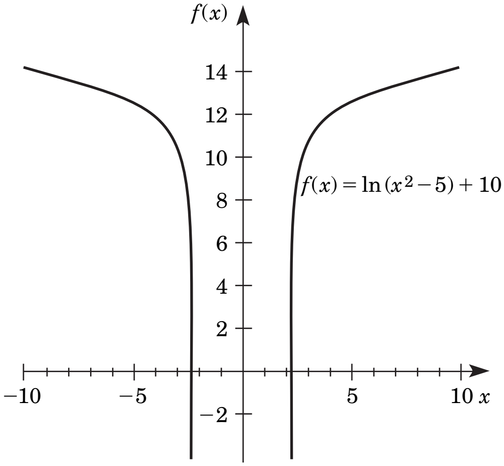
Sec. 7.3, ejercicio 81



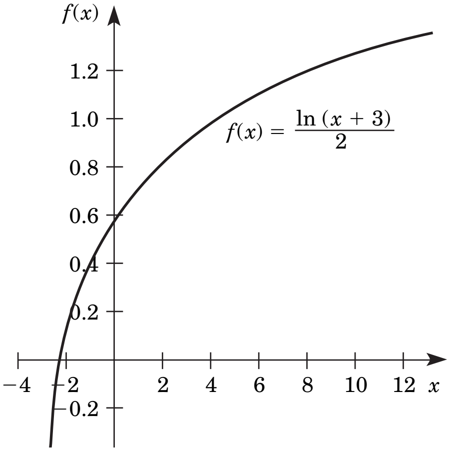
Sec. 7.3, ejercicio 83



Sec. 7.3, ejercicio 85



Sec. 7.3, ejercicio 87



Sec. 7.3, ejercicio 89

94. *a*) $(e^{c/a} - b, 0)$, *b*) $(a, a \ln b - c)$; **97.** *a*) \$4.37, \$5.53; **99.** *a*) $P = 10^5 e^{0.6t}$, *b*) 1.155 horas, *c*) 1.831 horas; **101.** 1.98 horas, 0.822 horas; **103.** $k = 0.0000347$; **105.** *a*) 90 por ciento, 57.81 por ciento, 43.95 por ciento

EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. 0.0817; **2.** \$276 091.48, \$256 091.48; **3.** $\log_3 6\,561 = 8$; **4.** $N = f(x) = 5\,000\,000(1 - e^{-0.075x}) - 6\,000x$; **5.** $x = 121.51$; **6.** *a*) $V = 281\,158e^{-0.1703t}$, *b*) 10.14 años

CAPÍTULO 8

SECCIÓN 8.1

1. \$36 000; **3.** \$10 500, \$420 000;

5.

Periodo semestral	**Principal (*P*)**	**Interés (*I*)**	**Cantidad compuesta (*S* = *P* + *I*)**
1	\$10 000	\$400	\$10 400.00
2	10 400	416	10 816.00
3	10 816	432.64	11 248.64
4	11 248.64	449.95	11 698.59

\$1 698.59 de intereses; **7.** *a*) \$11 716.60, *b*) trimestralmente por \$18.01

SECCIÓN 8.2

1. \$13 416.80, \$5 416.80; **3.** \$79 304.25, \$54 304.25; **5.** \$1 342 530, \$842 530; **7.** \$45 152.75, \$20 152.75; **9.** *a*) \$2.54035, \$1.54035, *b*) \$2.57508, \$1.57508, *c*) \$2.58707, \$1.58707; **11.** 21 159; **13.** \$19 529.47; **15.** \$14 849.40, \$5 150.60; **17.** \$27 644, \$22 356; **19.** \$81 860, \$118 140; **21.** entre 16 y 17 periodos semestrales, o precisamente arriba de 8 años; **23.** entre 37 y 38 trimestres, o durante el segundo trimestre del décimo año; **25.** *a*) 16.64 por ciento, *b*) 16.986 por ciento; **27.** *a*) 6.09 por ciento, *b*) 6.136 por ciento; **29.** apenas por debajo del 8 por ciento; **31.** entre el 10 y el 12 por ciento

SECCIÓN 8.3

1. *a*) \$72 432.80, *b*) \$22 432.80; **3.** *a*) \$58 198.73, *b*) \$31 198.73; **5.** *a*) \$61 051.00, *b*) \$62 889.45, *c*) \$63 861.65; **7.** \$14 832, \$25 840; **9.** \$24 840, \$506 400; **11.** \$745.60, \$1 052.80

SECCIÓN 8.4

1. \$160 441.50; **3.** \$140 939.40; **5.** \$10 465.15; **7.** \$112 387.60; **9.** *a*) \$490 907.50, *b*) \$509 092.50; **11.** \$44 245; **13.** \$481 125; **15.** \$236 200; **17.** *a*) \$78 022, *b*) \$118 132; **19.** *a*) \$498.15, *b*) \$2 933.40; **21.** \$772.02, \$185 284.80, \$105 284.80 **23.** \$786.33, \$235 899, \$145 899; **25.** \$817.83, \$245 349, \$155 349; **27.** \$1 198.06, \$287 534.40, \$167 534.40; **29.** \$53.73, \$12 895.20; **31.** \$63.43, \$19 029; **33.** \$64.27, \$19 281; **35.** \$81.66, \$19 598.40; **37.** \$79 433.84; **39.** \$147 569.68

SECCIÓN 8.5

1. \$274 474, sí; **3.** \$245 146, sí; **5.** \$419 412, sí; **7.** entre el 15 y 16 por ciento

EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. \$101 118.50; **2.** \$81 630 **3.** *a*) \$134 351.85, *b*) \$34,351.85; **4.** \$6 360, \$16 400; **5.** \$21 225; **6.** 12.551 por ciento; **7.** \$125.46; **8.** sí, \$4 019.19

CAPÍTULO 9

SECCIÓN 9.2

1. $(1 \times 4), \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$; **3.** $(4 \times 2), \begin{pmatrix} 0 & 5 & -6 & -2 \\ 1 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$; **5.** $(3 \times 3), \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

7. $(4 \times 1), (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)$; **9.** $(5 \times 3), \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$; **11.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

SECCIÓN 9.3

1. $\begin{pmatrix} -7 & -10 \\ -13 & -12 \end{pmatrix}$; **3.** $\begin{pmatrix} 84 & 89 \\ -13 & -20 \end{pmatrix}$; **5.** $\begin{pmatrix} -70 & 125 \\ 70 & 30 \end{pmatrix}$; **7.** 4;

9. no se puede realizar; **11.** $ax + by$; **13.** -2; **15.** $ae + bf + cg + dh$;

17. $\begin{pmatrix} 8 & 24 \\ -67 & 60 \end{pmatrix}$; **19.** $(20 \quad -8)$; **21.** $\begin{pmatrix} 10 & -5 & 10 \\ 0 & 13 & 0 \end{pmatrix}$; **23.** no puede hacerse;

25. $\begin{pmatrix} 8 & 27 & 26 \\ -3 & -16 & 6 \\ 2 & 2 & 29 \end{pmatrix}$; **27.** $\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$; **29.** no puede hacerse; **31.** $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 6 \\ -2 & -10 & -3 \end{pmatrix}$;

33. $\begin{pmatrix} -2 & -4 & 0 & 12 & 16 \\ 18 & 1 & 0 & 11 & 24 \\ -24 & -8 & 0 & 8 & 0 \\ -6 & -7 & 0 & 19 & 24 \end{pmatrix}$; **35.** $\begin{pmatrix} 20 & -34 & 39 & -27 \\ 3 & -6 & 9 & -2 \\ -10 & 0 & 40 & -30 \end{pmatrix}$; **37.** $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -10 \end{pmatrix}$;

39. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \end{pmatrix}$; **41.** $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \\ i \end{pmatrix}$;

43. $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$; **45.** $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ -18 \\ 125 \end{pmatrix}$

SECCIÓN 9.4

1. $\Delta = -5$; **3.** $\Delta = -26$; **5.** $\Delta = 28$; **7.** $\Delta = 1$; **9.** $\Delta = 140$;

11. $\Delta = -120$; **13.** $\Delta = 188$; **15.** $\Delta = 80$; **17.** $\begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$; **19.** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

21. $\begin{pmatrix} -12 & 10 & -6 \\ -18 & 2 & -22 \\ -16 & -4 & -8 \end{pmatrix}$; **23.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; **25.** $\begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$; **27.** $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -8 & 10 \end{pmatrix}$;

29. $\begin{pmatrix} -24 & 6 & -42 \\ -24 & 0 & -48 \\ -56 & 4 & -92 \end{pmatrix}$; **31.** $\begin{pmatrix} -80 & -50 & -55 \\ -100 & -250 & 25 \\ -160 & -100 & 40 \end{pmatrix}$; **33.** $\begin{pmatrix} -8 & 16 & 8 \\ 5 & -28 & -17 \\ 17 & -76 & -29 \end{pmatrix}$;

35. $\Delta = -12$; **37.** $\Delta = 1$; **39.** $\Delta = -52$; **41.** $\Delta = 0$; **43.** $\Delta = -8$; **45.** $\Delta = 70$;
47. $\Delta = 48$; **49.** $\Delta = -1\,500$; **51.** $\Delta = -48$; **53.** $\Delta = 1\,260$; **55.** $\Delta = -876$;
57. $x_1 = -3, x_2 = 2$; **59.** $x_1 = -10, x_2 = 15$; **61.** no hay solución; **63.** $x_1 = 1, x_2 = 4,$
$x_3 = -2$; **65.** $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 4$; **67.** no hay solución;

SECCIÓN 9.5

1. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$; **3.** no existe inversa; **5.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; **7.** $\begin{pmatrix} -0.375 & 0.75 & 0.125 \\ 0.375 & 0.25 & -0.125 \\ -0.125 & -0.75 & 0.375 \end{pmatrix}$;
9. $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$; **11.** $\begin{pmatrix} 1.4 & 0.2 & -0.4 \\ 1.2 & -0.4 & -0.2 \\ -1.6 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$; **13.** $\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; **15.** no existe inversa;
17. $\frac{1}{26}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$; **19.** no existe inversa; **21.** $\begin{pmatrix} -1.6 & 0.6 & 0.8 \\ 3.8 & -0.8 & -1.4 \\ -1.2 & 0.2 & 0.6 \end{pmatrix}$ **23.** $x_1 = 2, x_2 = 3$;
25. o no hay solución o hay un número infinito de ellas; **27.** $x_1 = 24, x_2 = 35$;
29. $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1$; **31.** $x_1 = 2, x_2 = 3$; **33.** $x_1 = 3, x_2 = -2, x_3 = 1$;
35. $x_1 = 6, x_2 = -3$; **37.** o no hay solución o hay un número infinito de ellas;
39. $x_1 = 4, x_2 = -2$; **41.** o no hay solución o hay un número infinito de ellas;
43. $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = -4$; **45.** $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &= 17 \\ x_1 + 2x_2 &= 10 \end{aligned}$, (4, 3); **47.** $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$, (2, 7, −5)

SECCIÓN 9.6

1. Demócrata: 96 850, Republicanos: 98 850, Independiente: 104 300; **3.** T_1: la marca 3 finalmente tiene el 100 por ciento del mercado, T_2: las marcas 2 y 3 tendrán cada una el 50 por ciento del mercado; **5.** $P_n = 23.333$ millones, $P_s = 46.667$ millones:

7.
$$\text{De}\quad \begin{array}{c|cccc} & & \text{a} & & \\ & A & B & C & D \\ \hline A & 0 & 0 & 1 & 0 \\ B & 1 & 0 & 1 & 0 \\ C & 1 & 1 & 0 & 1 \\ D & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad \text{De}\quad \begin{array}{c|cccc} & & \text{a} & & \\ & A & B & C & D \\ \hline A & 1 & 1 & 0 & 1 \\ B & 1 & 1 & 1 & 1 \\ C & 1 & 0 & 3 & 0 \\ D & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array};$$

Matriz adyacente

9. *a*) industria 1 \$381 181 180, industria 2 \$322 122 120, industria 3 \$446 246 270,

$$b)\ \text{Proveedor}\quad \begin{array}{c|ccc} & & \text{Usuario} & \\ & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 95.295 & 96.637 & 89.249 \\ 2 & 76.236 & 96.637 & 89.249 \\ 3 & 152.472 & 32.212 & 111.562 \end{array}$$

(medido en millones de dólares)

11. $a)\ D = N^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53\,000 \\ 120\,000 \\ 115\,000 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{mediano} \\ \text{compacto} \\ \text{subcompacto} \end{matrix}$

$b)\ P = RD = \begin{pmatrix} 454\,600 \\ 2\,171\,000 \\ 195\,200 \\ 1\,682\,000 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{correas de ventilador} \\ \text{bujías} \\ \text{baterías} \\ \text{llantas} \end{matrix}$ $\qquad c)\ T = CP = (\$67\,031\,050)$

$$d)\ P^t \begin{pmatrix} 1.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.80 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30.00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 35.00 \end{pmatrix} = (\$568\,250\ \ \$1\,736\,800\ \ \$5\,856\,000\ \ \$58\,870\,000)$$

$$\text{o,}\quad C\begin{pmatrix} 454\,600 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\,171\,000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 195\,200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\,682\,000 \end{pmatrix} = (\$568\,250 \quad \$1\,736\,800 \quad \$5\,856\,000 \quad \$58\,870\,000)$$

EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 1 & -3 & -2 \\ -6 & 10 & -4 \\ 8 & 5 & 19 \end{pmatrix}$; **2.** $ae + bf + cg + dh$; **3.** *a*) no se puede multiplicar, *b*) $\begin{pmatrix} -14 & -90 \\ 32 & 137 \\ -6 & -139 \end{pmatrix}$, *c*) no se puede multiplicar, *d*) no se puede multiplicar;

4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix}$; **5.** $\Delta = 504$; **6.** no existe la inversa; **7.** $3x_1 + 7x_2 = 15$
$2x_1 + 5x_2 = 11$

CAPÍTULO 10

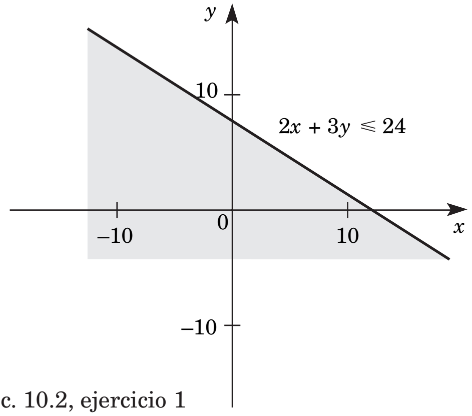
SECCIÓN 10.2

1., 3., 5., 7., 9. véanse las figuras; **11., 13., 15., 17., 19.** véanse las figuras; **21.** $z = 160$ cuando $x_1 = 0$ y $x_2 = 20$ (ver figura); **23.** $z = 270$ cuando $x_1 = 3$ y $x_2 = 9$ (ver figura); **25.** $z = 160$ cuando $x_1 = 0$ y $x_2 = 20$ (ver figura); **27.** las soluciones óptimas alternativas a lo largo del segmento de línea que une a (0, 12) y (12, 6), $z = 96$ (ver figura); **29.** las soluciones óptimas alternativas a lo largo del segmento de línea que une a $(\frac{4}{3}, \frac{10}{3})$ y (2.5, 1), $z = 24$ (ver figura); **31.** no hay solución factible (ver figura);

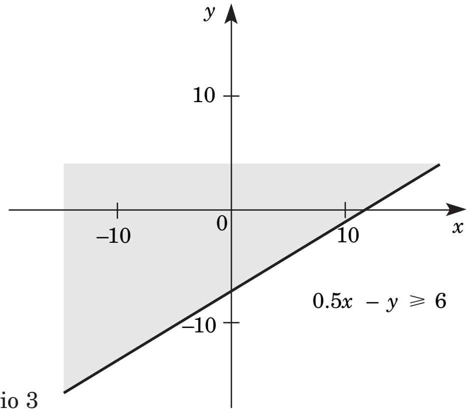
33. *a*) Maximice $z = 3x_1 + 4x_2$ *b*) $z = 85$, $x_1 = 15$ y $x_2 = 10$; *c*) la ganancia será

$$\begin{aligned} \text{sujeta a}\quad 2x_1 + 3x_2 &\le 60 \\ 4x_1 + 2x_2 &\le 80 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

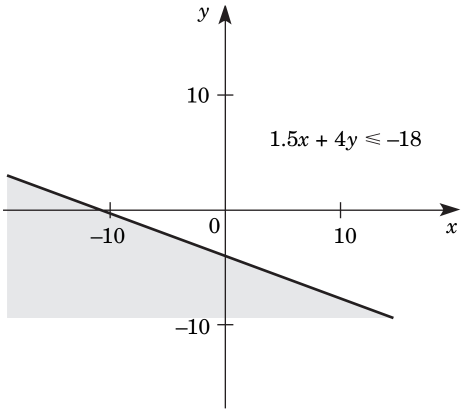
maximizada a $85/semana si se producen y venden 15 unidades del producto *A* y 10 unidades del producto *B*; las capacidades de trabajo semanales en ambos departamentos se consumen por completo;



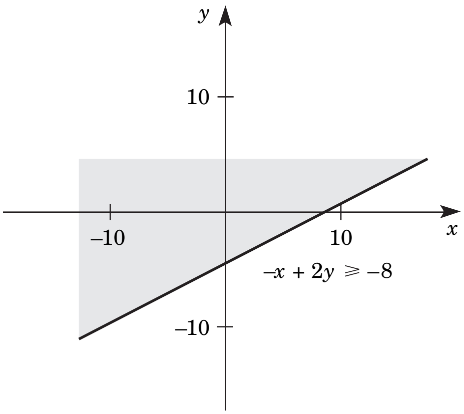
Sec. 10.2, ejercicio 1



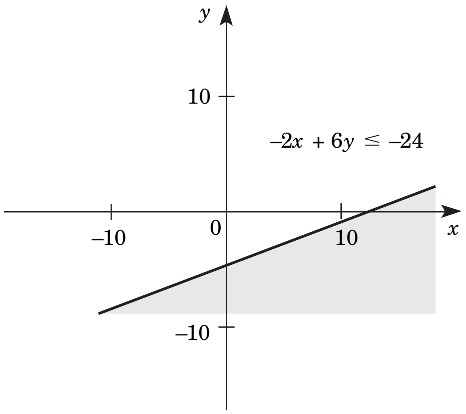
Sec. 10.2, ejercicio 3



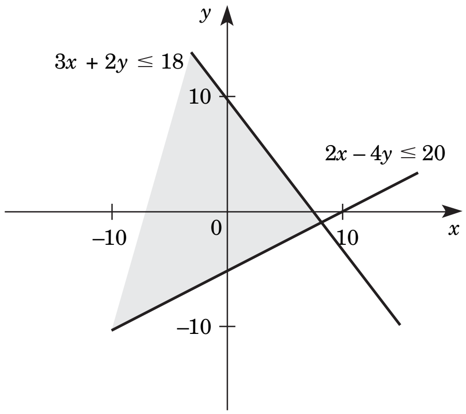
Sec. 10.2, ejercicio 5



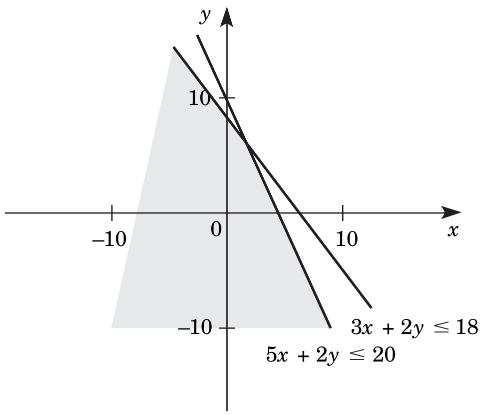
Sec. 10.2, ejercicio 7



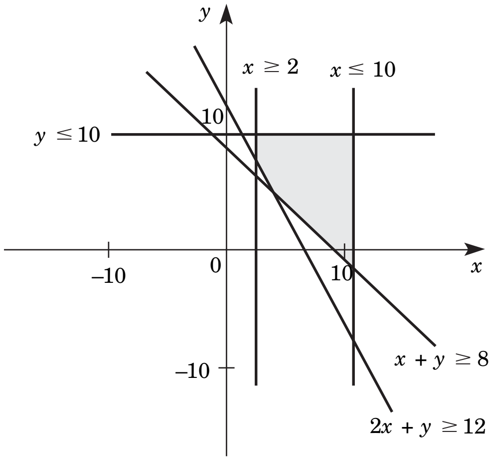
Sec. 10.2, ejercicio 9



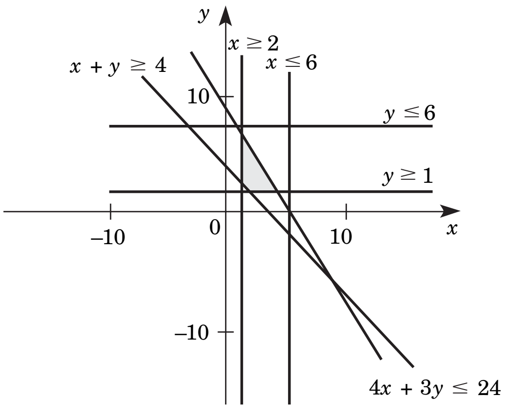
Sec. 10.2, ejercicio 11



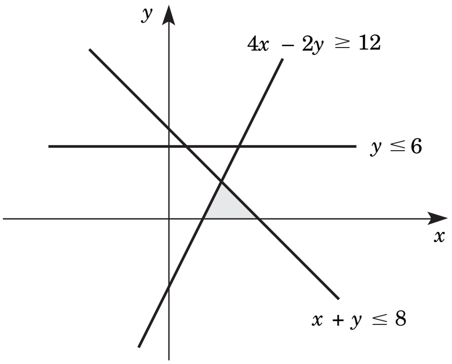
Sec. 10.2, ejercicio 13



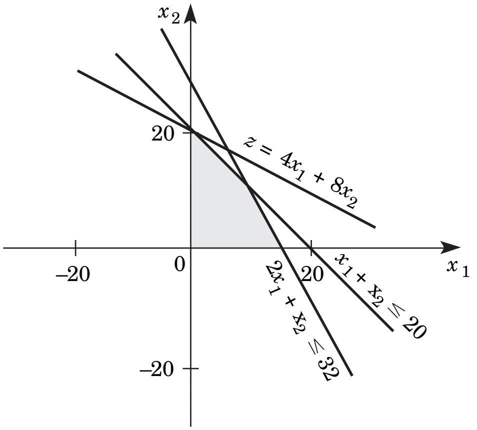
Sec. 10.2, ejercicio 15



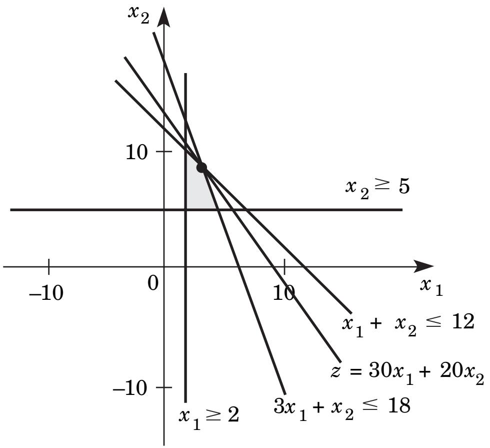
Sec. 10.2, ejercicio 17



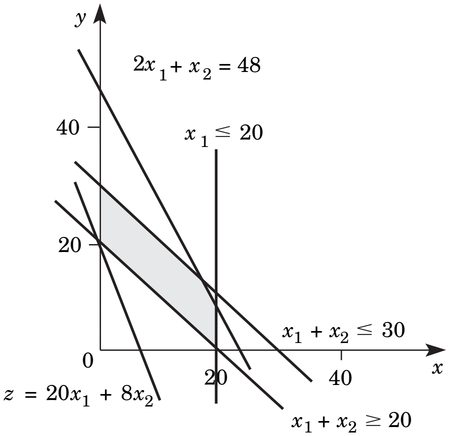
Sec. 10.2, ejercicio 19



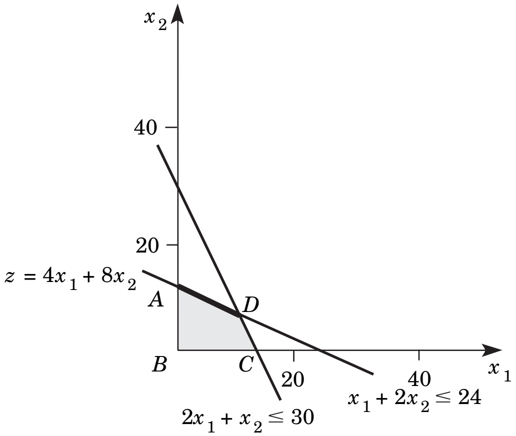
Sec. 10.2, ejercicio 21



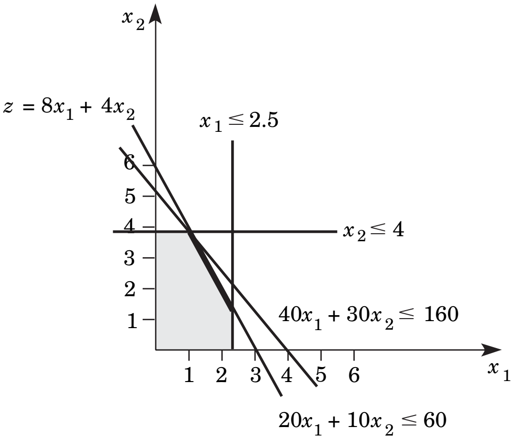
Sec. 10.2, ejercicio 23



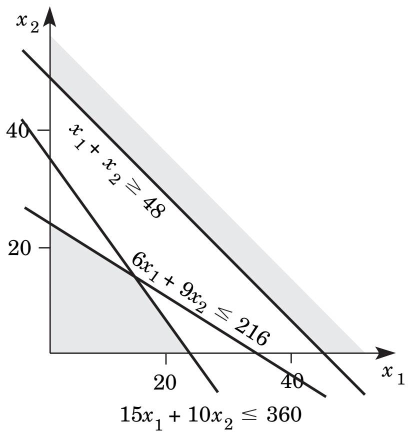
Sec. 10.2, ejercicio 25



Sec. 10.2, ejercicio 27



Sec. 10.2, ejercicio 29



Sec. 10.2, ejercicio 31

35. *a*) Minimice $z = 0.12x_1 + 0.15x_2$ sujeta a

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\ge 18 \\ 4x_1 + 2x_2 &\ge 22 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

b) El costo es minimizado a \$0.975 por alimento si se sirven 3.75 onzas del alimento 1 y 3.5 onzas del alimento 2; se alcanzará el 100 por ciento del MDR (Requerimiento Mínimo Diario) para ambas vitaminas.

SECCIÓN 10.3

1. *a*) agregue las restricciones $x_1 \ge 44, x_2 \ge 36, x_3 \ge 50, x_4 \ge 30, x_5 \ge 80,$ $x_6 \ge 24$, *b*) $x_3 \ge x_4$, *c*) $x_3 + x_6 \ge 30$, *d*) $x_5 \ge 1.4x_6$, *e*) $x_2 \le 0.8x_1$;

3. x_j = número de onzas del alimento j

Minimice $z = 0.15x_1 + 0.18x_2 + 0.22x_3$

$$\begin{aligned} \text{sujeta a } 20x_1 + 40x_2 + 30x_3 &\ge 240 \\ 10x_1 + 25x_2 + 15x_3 &\ge 120 \\ 20x_1 + 30x_2 + 25x_3 &\ge 180 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\ge 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

5. x_{ij} = miles de galones transportados de la planta $_i$ hasta el depósito $_j$

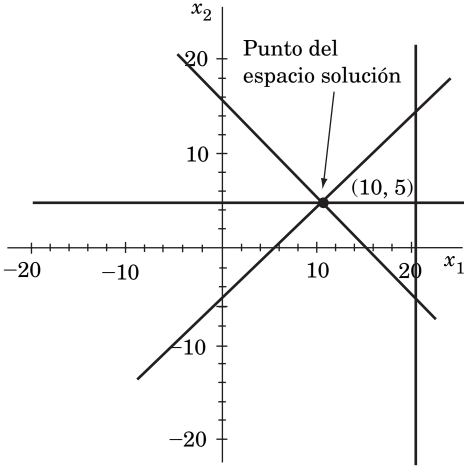
Minimice $z = 50x_{11} + 40x_{12} + 35x_{13} + 20x_{14} + 30x_{21} + 45x_{22} + 40x_{23} + 60x_{24} + 60x_{31} + 25x_{32} + 50x_{33} + 30x_{34}$

$$\begin{array}{lllll} \text{sujeta a } x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & & & \le & 1000 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & & \le & 1400 \\ & & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} & \le & 1800 \\ x_{11} & + x_{21} & + x_{31} & = & 800 \\ \quad x_{12} & \quad + x_{22} & \quad + x_{32} & = & 750 \\ \qquad x_{13} & \qquad + x_{23} & \qquad + x_{33} & = & 650 \\ \qquad\quad x_{14} & \qquad\quad + x_{24} & \qquad\quad + x_{34} & = & 900 \\ & & x_{ij} & \ge & 0 \text{ para toda } i, j \end{array}$$

7. *a*) $x_1 + x_2 + x_3 \ge 50$, *b*) $x_1 \le 2x_2$, *c*) $x_2 = x_3$, *d*) $x_2 \le 0.5\,(x_1 + x_2 + x_3)$;

9. x_{ij} = número de libras del componente i utilizado en la mezcla j

Maximice $z = 0.6x_{11} + 0.75x_{12} + 1.15x_{13} + 0.45x_{21} + 0.6x_{22} + 1.00x_{23} + 0.35x_{31} + 0.5x_{32} + 0.9x_{33} + 0.5x_{41} + 0.65x_{42} + 1.05x_{43}$



Cap. 10, evaluación del capítulo, problema 1

sujeta a

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} &\le 80\,000 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} &\le 40\,000 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} &\le 30\,000 \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} &\le 50\,000 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &\ge 50\,000 \\
x_{23} &\ge 0.3\,(x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43}) \\
x_{21} &\le 0.2\,(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}) \\
x_{33} &= 0.25\,(x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43}) \\
x_{41} &\ge 0.4\,(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41}) \\
x_{42} &\le 0.18\,(x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}) \\
x_{ij} &\ge 0 \qquad \text{para toda } i, j
\end{aligned}$$

EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. ver figura;

2. Maximice $z = 20x_1 + 10x_2 + 50x_3 + 25x_4 + 2x_5$

sujeta a

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + 0.5x_3 + 1.6x_4 + 0.75x_5 &\le 120 \\
1.5x_1 + 0.8x_2 + 1.5x_3 + 1.2x_4 + 2.25x_5 &\le 150 \\
x_1 &\ge 20 \\
x_2 &\ge 10 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\le 75 \\
x_3 &= x_5 \\
x_1 + x_2 &\le 0.5\,(x_3 + x_4 + x_5) \\
x_3 &\ge x_1 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\ge 0
\end{aligned}$$

3. z maximizada a 30 cuando $x_1 = 8$ y $x_2 = 6$

CAPÍTULO 11

SECCIÓN 11.1

1.

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 - E_1 + A_1 &= 15 \\
-3x_1 + 2x_3 - E_2 + A_2 &= 5 \\
4x_1 - 2x_2 + x_3 + S_3 &= 24 \\
x_1, x_2, x_3, E_1, A_1, E_2, A_2, S_3 &\ge 0;
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - E_1 + A_1 & = & 25 \\
x_1 - 3x_2 + 2x_4 - E_2 + A_2 & = & 20 \\
3x_1 - 4x_4 + A_3 & = & 10 \\
5x_1 - x_2 + 3x_3 + 8x_4 + S_4 & = & 125 \\
x_1 - E_5 + A_5 & = & 5 \\
x_3 + S_6 & = & 30
\end{array}$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, E_1, A_1, E_2, A_2, A_3, S_4, E_5, A_5, S_6 \geq 0$;

5.

$$\begin{array}{rcl}
50x_1 + 30x_2 + 20x_3 - E_1 + A_1 & = & 290 \\
20x_1 + 10x_2 + 30x_3 - E_2 + A_2 & = & 200 \\
10x_1 + 50x_2 + 20x_3 - E_3 + A_3 & = & 210 \\
x_1 + x_2 + x_3 - E_4 + A_4 & = & 9
\end{array}$$

$x_1, x_2, x_3, E_1, E_2, E_3, E_4, A_1, A_2, A_3, A_4 \geq 0$;

7.

$$\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + S_1 & = & 1\,000 \\
x_1 + S_2 & = & 200 \\
x_2 + S_3 & = & 180 \\
x_3 + S_4 & = & 250 \\
x_4 + S_5 & = & 150 \\
x_5 + S_6 & = & 400 \\
x_6 + S_7 & = & 120 \\
x_5 - E_8 + A_8 & = & 200 \\
x_1 + x_2 - E_9 + A_9 & = & 300
\end{array}$$

$x_1, \ldots, x_6, S_1, \ldots, S_7, E_8, E_9, A_8, A_9 \geq 0$;

9. 67 variables totales, 20 de holgura, 12 de superávit, 20 artificiales; **11.** *a*) restricciones 1 y 2 son $\leq$, la restricción 3 es $\geq$, *b*) 2 de holgura, 1 superávit y 1 artificial, *c*) 3 básicas, 3 no básicas, *d*) A: básica (x_2, S_1, S_2), no básica (x_1, E_3, A_3), B: básica (x_2, S_1, E_3), no básica (x_1, S_2, A_3), C: básica (x_1, x_2, E_3), no básica (S_1, S_2, A_3), D: básica (x_1, x_2, S_2), no básica (S_1, E_3, A_3); **13.** *a*) todas las restricciónes $\geq$, *b*) 4 variables artificiales y 4 de superávit, *c*) 4 variables básicas y 6 no básicas, *d*) A: básicas (x_2, E_2, E_3, E_4), no básicas $x_1, E_1, A_1, A_2, A_3, A_4$), C: básicas (x_1, x_2, E_1, E_4), no básicas ($E_2, E_3, A_1, A_2, A_3, A_4$)

SECCIÓN 11.2

1. *a*)

$$\begin{array}{rcl}
5x_1 + 4x_2 + S_1 & = & 48 \\
2x_1 + 5x_2 + S_2 & = & 26 \\
x_1, x_2, S_1, S_2 & \geq & 0
\end{array}$$

b)

Solución	Conjunto de variables igual a cero	Valor de otras variables	z
1	x_1, x_2	$S_1 = 48, S_2 = 26$	0
2	x_1, S_1	$S_2 = -34, x_2 = 12$	
3	x_1, S_2	$S_1 = 27.2, x_2 = 5.2$	52
4	x_2, S_1	$x_1 = 9.6, S_2 = 6.8$	134.4
5	x_2, S_2	$x_1 = 13, S_1 = -17$	
6	S_1, S_2	$x_1 = 8, x_2 = 2$	132

c) soluciones factibles 1, 3, 4 y 6, *e*) el máximo de 134.4 se alcanza cuando $x_1 = 9.6$, $S_2 = 6.8$ y $x_2 = S_1 = 0$;

3. Variables básicas	z	x_1	x_2	S_1	S_2	b_i	**Renglón núm.**	r_i
	1	-4	-2	0	0	0	(0)	
S_1	0	1	1	1	0	50	(1)	50
S_2	0	⑥	0	0	1	240	(2)	40*
	1	0	-2	0	$\frac{2}{3}$	160	(0)	
S_1	0	0	①	1	$-\frac{1}{6}$	10	(1)	10*
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{6}$	40	(2)	
	1	0	0	2	$\frac{1}{3}$	180	(0)	
x_2	0	0	1	1	$-\frac{1}{6}$	10	(1)	
x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{6}$	40	(2)	

z maximizada para el valor de 180 cuando $x_1 = 40$ y $x_2 = 10$;

5. Variables básicas	z	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b_i	**Renglón núm.**	r_i
	1	-10	-12	0	0	0	0	(0)	
S_1	0	1	1	1	0	0	150	(1)	150
S_2	0	3	⑥	0	1	0	300	(2)	50*
S_3	0	4	2	0	0	1	160	(3)	80
	1	-4	0	0	2	0	600	(0)	
S_1	0	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{6}$	0	100	(1)	200
x_2	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{6}$	0	50	(2)	100
S_3	0	③	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	60	(3)	20*
	1	0	0	0	$\frac{14}{9}$	$\frac{4}{3}$	680	(0)	
S_1	0	0	0	1	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{6}$	90	(1)	
x_2	0	0	1	0	$\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{6}$	40	(2)	
x_1	0	1	0	0	$-\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	20	(3)	

z maximizada para el valor de 680 cuando $x_1 = 20$, $x_2 = 40$ y $S_1 = 90$;

7.

Variables básicas	z	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	b_i	**Renglón núm.**	r_i
	1	-10	-3	-4	0	0	0	0	(0)	
S_1	0	⑧	2	3	1	0	0	400	(1)	50*
S_2	0	4	3	0	0	1	0	200	(2)	50
S_3	0	0	0	1	0	0	1	40	(3)	
	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	0	0	500	(0)	
x_1	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	50	(1)	200
S_2	0	0	②	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	(2)	0*
S_3	0	0	0	1	0	0	1	40	(3)	
	1	0	0	$-\frac{5}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{1}{4}$	0	500	(0)	
x_1	0	1	0	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{8}$	0	50	(1)	88.88
x_2	0	0	1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	0	(2)	
S_3	0	0	0	①	0	0	1	40	(3)	40*
	1	0	0	0	$\frac{9}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	525	(0)	
x_1	0	1	0	0	$\frac{3}{16}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{9}{16}$	27.5	(1)	
x_2	0	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	30	(2)	
x_3	0	0	0	1	0	0	1	40	(3)	

z maximizada para el valor de 525 cuando $x_1 = 27.5$, $x_2 = 30$ y $x_3 = 40$;

9.

	z	x_1	x_2	E_1	A_1	S_2	E_3	A_3	b_i	**Renglón núm.**	r_i
	1	-3	-6	0	$-M$	0	0	$-M$	0	(0)	
A_1	0	4	1	-1	1	0	0	0	20	(1)	
S_2	0	1	1	0	0	1	0	0	20	(2)	
A_3	0	1	1	0	0	0	-1	-1	10	(3)	
	1	$5M-3$	$2M-6$	$-M$	0	0	$-M$	0	$30M$	(0)	
A_1	0	4	1	-1	1	0	0	0	20	(1)	5*
S_2	0	1	1	0	0	1	0	0	20	(2)	20
A_3	0	1	1	0	0	0	-1	1	10	(3)	10
	1	0	$\dfrac{3M-21}{4}$	$\dfrac{M-3}{4}$	$\dfrac{3-5M}{4}$	0	$-M$	0	$15+5M$	(0)	
x_1	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	5	(1)	20
S_2	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	0	0	15	(2)	20
A_3	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	-1	1	5	(3)	$\frac{20}{3}$*
	1	0	0	1	$-M-1$	0	-7	$7-M$	50	(0)	
x_1	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	(1)	
S_2	0	0	0	0	0	1	1	-1	10	(2)	
x_2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{20}{3}$	(3)	20*
	1	0	-3	0	$-M$	0	-3	$3-M$	30	(0)	
x_1	0	1	1	0	0	0	-1	1	10	(1)	
S_2	0	0	0	0	0	1	1	-1	10	(2)	
E_1	0	0	3	1	-1	0	-4	4	20	(3)	

z maximizada para el valor de 30 cuando $x_1 = 10$, $S_2 = 10$ y $E_1 = 20$;

SECCIÓN 11.3

1.

Variables básicas	z	x_1	x_2	S_1	S_2	b_i	**Renglón núm.**	r_i
	1	−4	−2	0	0	0	(0)	
S_1	0	1	1	1	0	15	(1)	15
S_2	0	②	1	0	1	20	(2)	10*
	1	0	0	0	2	40	(0)	
S_1	0	0	$\textcircled{\tfrac{1}{2}}$	1	$-\frac{1}{2}$	5	(1)	10*
x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	10	(2)	20

La solución óptima existe cuando $x_1 = 10$ y $S_1 = 5$, produciendo $z = 40$. Sin embargo, el coeficiente del renglón (0) de cero para x_2 indica que existe una solución óptima alternativa.

Variables básicas	z	x_1	x_2	S_1	S_2	b_i	**Renglón núm.**	r_i
	1	0	0	0	2	40	(0)	
x_2	0	0	1	2	−1	10	(1)	
x_1	0	1	0	−1	1	5	(2)	

Se presenta una solución óptima alternativa cuando $x_1 = 5$, $x_2 = 10$ y $z = 40$; **3.** Se presentan soluciones óptimas alternativas cuando $x_1 = 4$, $x_2 = 8$ y $z = 48$ o cuando $x_1 = 8$ y $S_1 = 12$; **5.** no existe solución factible; **7.** se presenta una solución óptima cuando $x_1 = 200$, $x_2 = 133.33$, $S_1 = 333.33$ y $z = 11\,666.67$

SECCIÓN 11.4

5. z se maximiza en 660 cuando $x_2 = 35$, $x_3 = 30$ y $S_3 = 5$. *Precios sombra*: restricción 1, 6.333; restricción 2, 0.333; restricción 3, 0. *Análisis de sensibilidad para coeficientes de función objetivo*: variable no básica c_1, delta = 11, límite superior = 13.

Variable básicas	**Delta inferior**	**Delta superior**	**Límite inferior**	**Límite superior**
c_2	−14.67	4.00	−2.67	16.00
c_3	−2.00	sin límite	6.00	sin límite

Constantes del lado derecho:

Restricción	**Delta inferior**	**Delta superior**	**Límite inferior**	**Límite superior**
1	−84.00	1.818	16.00	101.818
2	−180.00	20.000	−100.00	100.000
3	−5.00	sin límite	295.00	sin límite

7. z minimizada en \$3 925 cuando $x_{11} = 300$, $x_{13} = 500$, $x_{22} = 350$ y $x_{24} = 350$

SECCIÓN 11.5

1. Minimice $z = 45y_1 + 30y_2 + 50y_3$

$$\begin{aligned} \text{sujeta a } \quad y_1 + 4y_2 - y_3 &\geq 3 \\ y_1 + 5y_2 + 3y_3 &\geq 4 \\ y_1 - 3y_2 - 4y_3 &\geq 2 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

3. Maximice $z = 60y_1 + 25y_2 + 35y_3$

$$\begin{array}{rl} \text{sujeta a } & 5y_1 + y_2 \geq 20 \\ & -3y_1 + y_2 - y_3 \geq 15 \\ & 10y_1 + y_2 + 4y_3 \geq 18 \\ & 4y_1 + 7y_3 = 10 \\ & y_1 \geq 0 \\ & y_2 \text{ sin restricciones} \\ & y_3 \leq 0 \end{array}$$

5. Maximice $z = 45y_1 + 24y_2 + 20y_3$

$$\begin{array}{rl} \text{sujeta a } & y_1 + 3y_2 \leq 4 \\ & y_1 + 5y_2 \leq 5 \\ & y_1 + 7y_3 = 2 \\ & y_1 - 2y_2 - 5y_3 \leq 3 \\ & y_1 + 3y_3 = 1 \\ & y_1 \text{ sin restricciones} \\ & y_2 \leq 0 \\ & y_3 \geq 0 \end{array}$$

7. *a*) Maximice $z = 32y_1 + 24y_2$

$$\begin{array}{rl} \text{sujeta a } & 2y_1 + 3y_2 \geq 5 \\ & 4y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

b)

Variables básicas	z	x_1	x_2	S_1	S_2	b_i	**Renglón núm.**	r_i
	1	−5	−3	0	0	0	(0)	
S_1	0	2	4	1	0	32	(1)	16
S_2	0	③	2	0	1	24	(2)	8*
	1	0	$\frac{1}{3}$	$\boxed{0}$	$\boxed{\frac{5}{3}}$	40	(0)	
S_1	0	0	$\frac{8}{3}$	1	−2	16	(1)	
x_1	0	1	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	8	(2)	

z maximizada para el valor de 40 cuando $x_1 = 8$ y $S_1 = 16$;

c) Los dos valores encerrados con cuadros bajo S_1 y S_2 en el renglón (0) de la tabla primaria óptima indican que en la solución óptima doble $y_1 = 0$ y $y_2 = \frac{5}{3}$. Cuando se sustituyen en la función objetivo doble, el valor mínimo para z es 40.

EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1.

$$\begin{array}{rl} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_3 + S_1 & = 25 \\ -\ x_1 - 3x_2 + S_2 & = 10 \\ -2x_1 - 3x_3 + A_3 & = 20 \\ x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, A_3 \geq 0 & \end{array}$$

2. El máximo se alcanza cuando $x_1 = 4$, $x_2 = 8$ y $z = 272$;

3. ***a***)

Variables básicas	z	x_1	x_2	E_1	A_1	A_2	b_i	**Renglón núm.**
	1	$3M - 5$	−4	$-M$	0	0	$25M$	(0)
A_1	0	1	1	−1	1	0	10	(1)
A_2	0	2	−1	0	0	1	15	(2)

b) A_2 se dejará primero, *c*) x_1 entrará primero;

5. Maximize $z = 25y_1 + 10y_2 + 48y_3 + 12y_4$

$$\begin{array}{rl} \text{sujeta a } & y_1 + 4y_2 + y_3 \leq 8 \\ & y_1 - 5y_2 - y_3 + y_4 \leq 5 \\ & y_1 + 2y_3 = 6 \\ & y_1 \text{ sin restricciones} \\ & y_2 \geq 0 \\ & y_3, y_4 \leq 0 \end{array}$$

CAPÍTULO 12

SECCIÓN 12.2

1. $z = \$3\,350$

	Destino			
Origen	**1**	**2**	**3**	**Oferta**
1	5	10 55	10	55
2	20	30 40	20 40	80
3	10 70	20 5	30	75
Demanda	70	100	40	210

3. *a*) $z = \$2\,715$

	Destino			
Origen	**1**	**2**	**3**	**Oferta**
1	8 110	6 15	10	125
2	4	9 70	8 80	150
3	7	6	5 95	95
Demanda	110	85	175	370

b) $z = \$2\,145$

	Destino			
Origen	**1**	**2**	**3**	**Oferta**
1	8	6 85	10 40	125
2	4 110	9	8 40	150
3	7	6	5 95	95
Demanda	110	85	175	370

5. $z = \$10\,375$

Origen	**Destino**				**Oferta**
	1	**2**	**3**	**Imitación**	
1	20	30	10 (150)	0	150
2	30 (150)	40 (25)	25 (75)	0 (50)	300
3	35	15 (100)	20	0	100
Demanda	150	125	225	50	550

7. *a*) Minimice $z = 20x_{11} + 35x_{12} + \cdots + 50x_{35}$

$$
\begin{aligned}
\text{sujeta a}\quad x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &\le 400\\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &\le 350\\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} &\le 450\\
x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 150\\
x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 300\\
x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 200\\
x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 250\\
x_{15} + x_{25} + x_{35} &= 175\\
x_{ij} &\ge 0 \qquad \text{para toda } i, j
\end{aligned}
$$

c) z minimizada para \$34 350 cuando $x_{11} = 150$, $x_{13} = 125$, $x_{15} = 125$, $x_{22} = 300$, $x_{25} = 50$, $x_{33} = 75$, $x_{34} = 250$; **9.** *a*) 1 500, *b*) 80, *c*) 1 580;

11. *a*) Minimice $z = 30x_{11} + 40x_{12} + 25x_{13} + 45x_{14} + 35x_{15} + 45x_{21} + 55x_{22} + 25x_{24} + 30x_{25} + 40x_{26} + 50x_{27} + 60x_{31} + \cdots + 45x_{58}$

$$
\begin{aligned}
\text{sujeta a}\quad x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &\le 300\\
x_{21} + x_{22} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} &\le 350\\
x_{31} + x_{33} + x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} &\le 325\\
x_{41} + x_{42} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48} &\le 250\\
x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} + x_{57} + x_{58} &\le 400\\
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} &= 150\\
x_{12} + x_{22} + x_{42} + x_{52} &= 100\\
x_{13} + x_{33} + x_{53} &= 250\\
x_{14} + x_{24} + x_{44} + x_{54} &= 175\\
x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} &= 225\\
x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} &= 200\\
x_{27} + x_{37} + x_{47} + x_{57} &= 180\\
x_{38} + x_{48} + x_{58} &= 220\\
x_{ij} &\ge 0 \qquad \text{para toda } i, j
\end{aligned}
$$

c) z minimizada para \$41225 cuando $x_{11} = 150$, $x_{12} = 20$, $x_{13} = 80$, $x_{15} = 50$, $x_{24} = 175$, $x_{25} = 175$, $x_{36} = 200$, $x_{38} = 50$, $x_{42} = 80$, $x_{48} = 170$, $x_{53} = 170$ y $x_{57} = 180$

SECCIÓN 12.3

1. equipo 1→Lejano Oeste, equipo 2→Este, equipo 3→Suroeste, equipo 4→Medio Oeste, costo minimizado a \$27 000;

3. *a*) Maximice $z = 2\,500x_{11} + 1\,000x_{12} + 2\,800x_{13} + 3\,200x_{14} + 3\,500x_{15} + 1\,800x_{21} + \cdots + 2\,700x_{53} + 3\,000x_{54} + 2\,500x_{55}$

$$
\begin{aligned}
\text{sujeta a}\quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 1\\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 1\\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 1\\
& x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 1\\
& x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} = 1\\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} = 1\\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} = 1\\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} = 1\\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} = 1\\
& x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} = 1\\
& \qquad\qquad\qquad\qquad x_{ij} = 0 \text{ o } 1 \qquad \text{para toda} \quad i, j
\end{aligned}
$$

b) ganancia maximizada a \$16 600 cuando se hacen las asignaciones siguientes

Avión	Asignado a	Vuelo chárter
1		4
2		3
3		5
4		1
5		2

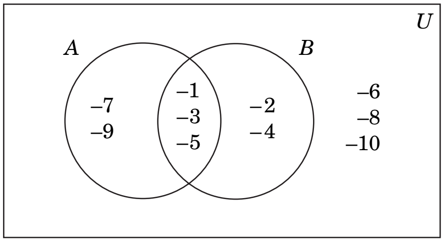
EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. $x_{11} = 800, x_{12} = 400, x_{22} = 1\,500, x_{33} = 2\,000, x_{34} = 400, x_{44} = 1\,000, z = \$215\,000$;
2. $x_{12} = 100, x_{14} = 200, x_{21} = 350, x_{23} = 150, x_{32} = 300, x_{33} = 150, z = 22\,650$
3. persona 1 → trabajo 1, persona 2 → trabajo 3, persona 3 → trabajo 2, persona 4 → trabajo 4, número mínimo de días igual a 48

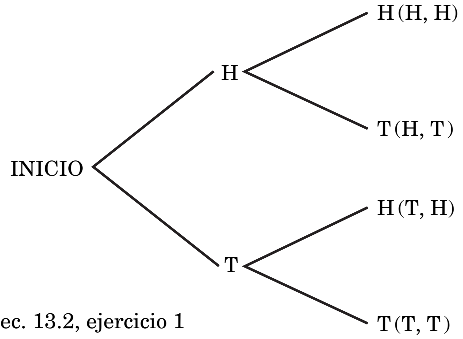
CAPÍTULO 13

SECCIÓN 13.1

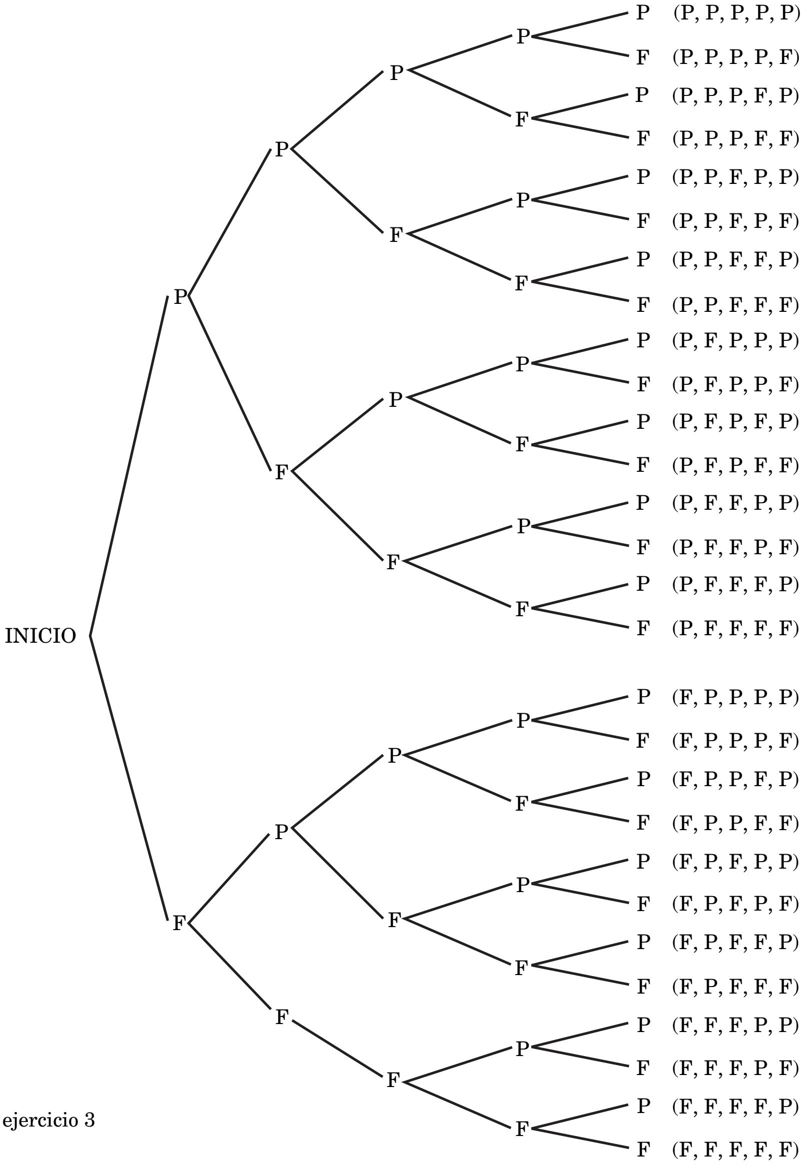
1. $A = \{a \mid a$ es un entero positivo impar menor que $20\}$; **3.** $V = \{v \mid v$ es una vocal$\}$; **5.** $C = \{c \mid c$ es el cubo de un entero negativo mayor que $-5\}$; **7.** $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; **9.** $B = \{-3\}$; **11.** $B' = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$; **13.** $S = \{8, 11\}$; **15.** $A \subset \mathcal{U}, B \subset \mathcal{U}, C \subset \mathcal{U}, A \subset C, B \subset C$; **17.** véase la figura; **19.** $A = B = C = D$, cada conjunto es un subconjunto de todos los otros; **21.** *a*) $\emptyset$, *b*) $\{x \mid x$ es un entero positivo mayor que $10\}$, *c*) $\{x \mid x$ es igual a 2, 4, 6, 8 o un entero positivo mayor que $10\}$, *d*) $\{1, 3, 5, 7\}$, *e*) $\{x \mid x$ es igual a 1, 3, 5, 7 o un entero positivo mayor que $10\}$, *f*) $\{x \mid x$ es un entero positivo mayor que $8\}$;



Sec. 13.1, ejercicio 17



Sec. 13.2, ejercicio 1



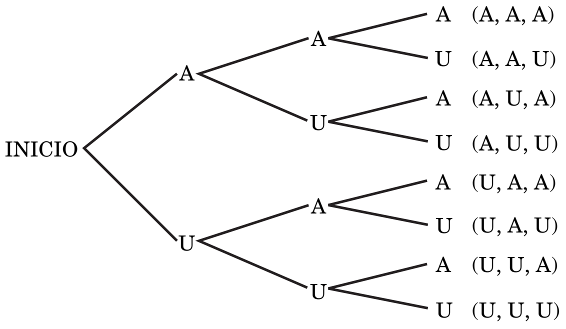
Sec. 13.2, ejercicio 3

SECCIÓN 13.2

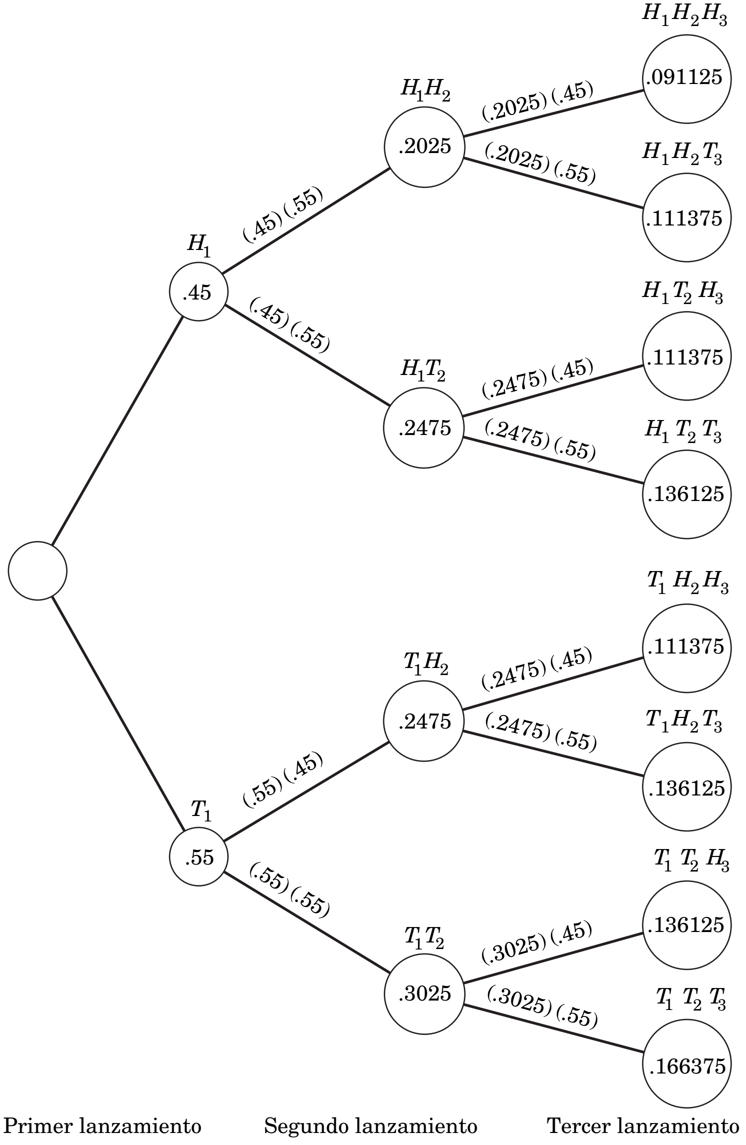
1. véase la figura; **3.** véase la figura; **5.** 676 000; **7.** 2 880; **9.** 5 040; **11.** $1.3077 \times 10^{12} = 1\,307\,700\,000\,000$; **13.** 210; **15.** 6 720; **17.** 840; **19.** 336; **21.** 720; **23.** 20 160; **25.** 1; **27.** 70; **29.** 3 628 800; **31.** 70; **33.** 56; **35.** 495; **37.** 15; **39.** 6.3501356×10^{11}; **41.** 1 058 400

SECCIÓN 13.3

1. *a*) $S = \{AAA, AAU, AUA, AUU, UAA, UAU, UUA, UUU\}$, *b*) véase la figura, *c*) AAU, UAA, AUA, *d*) todos los resultados excepto UUU; **3.** *a*) $\{MC, MH, MN\}$, *b*) $\{MC, FC\}$; **5.** *a*) $510/1\,000 = 0.51$, *b*) $310/1\,000 = 0.31$, *c*) $40/1\,000 = 0.04$, *d*) $275/1\,000 = 0.275$; **7.** *a*) no mutuamente excluyentes, colectivamente exhaustivos, *b*) mutuamente excluyentes, colectivamente exhaustivos,



Sec. 13.3, ejercicio 1*b*



Sec. 13.4, ejercicio 3

c) no mutuamente excluyentes, no colectivamente exhaustivos, *d*) no mutuamente excluyentes, no colectivamente exhaustivos, *e*) mutuamente excluyentes; **9.** *a*) 2 720 900/9 100 000 = 0.299, *b*) 18 200/9 100 000 = 0.002, *c*) 809 900/9 100 000 = 0.089; **11.** *a*) 0.24, *b*) 0.92, *c*) 0.80; **13.** *a*) 8/52, *b*) 12/52, *c*) 16/52, *d*) 32/52; **15.** *a*) 650/3 000 = 0.2167, *b*) 150/3 000 = 0.05, *c*) 0.25, *d*) 2 100/3 000 = 0.70; **17.** *a*) 0.7, *b*) 0.3, *c*) 0.4, *d*) 0.9, *e*) 0.1, *f*) 1.0, *g*) 1.0, *h*) 0.6

SECCIÓN 13.4

1. *a*) 0.7225, *b*) 0.0921, *c*) 0.4437; **3.** véase la figura, *P*(2 cruces) = 0.408375, *P*(2 caras) = 0.334125; **5.** *a*) 4 950/8 000 = 0.61875, *b*) 3 400/8 000 = 0.4250, *c*) 700/8 000 = 0.0875, *d*) 950/8 000 = 0.11875, *e*) 500/3 050 = 0.1639, *f*) 1 500/2 450, *g*) 1 500/ 2 450= 0.6122 **9.** *a*) 156/2 652 = 0.0588, *b*) 28 561/6 497 400 = 0.0044, *c*) 24/132 600 = 0.00018, *d*) 4 669 920/6 497 400 = 0.7187; **11.** *a*) 1 200/4 000= 0.30, *b*) 1 700/4 000 = 0.425, *c*) 760/4 000 = 0.19, *d*) 380/1 700 = 0.2235, *e*) 920/1 200 = 0.7667; **13.** *a*) 0.18, *b*) 0.42; **15.** *a*) 0.15, *b*) 0.333, *c*) 0.60

EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. *a*) {2, 4, 6, 8}, *b*) {2}, *c*) {− 2, 0, 1, 2, 3}; **3.** *a*) 120, *b*) 20; **4.** 24/132 600 = 0.00018; **5.** *a*) 12/26 = 0.4615, *b*) 18/34 = 0.5294

CAPÍTULO 14

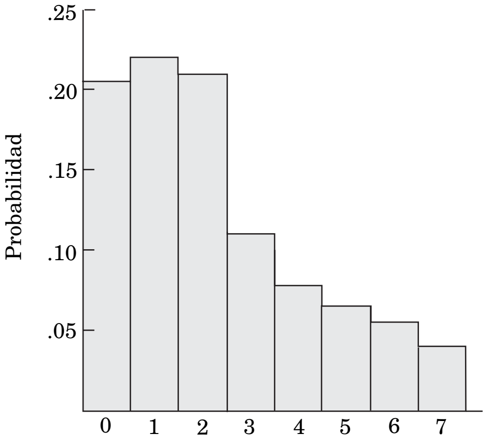
SECCIÓN 14.1

1. *a*) continuo, *b*) discreto, *c*) continuo, *d*) continuo, *e*) discreto, *f*) continuo, *g*) discreto, *h*) continuo;

3. *a*)

X	***P*(*X*)**
0	0.2083
1	0.2222
2	0.2139
3	0.1111
4	0.0778
5	0.0667
6	0.0556
7	0.0444

b) véase la figura,



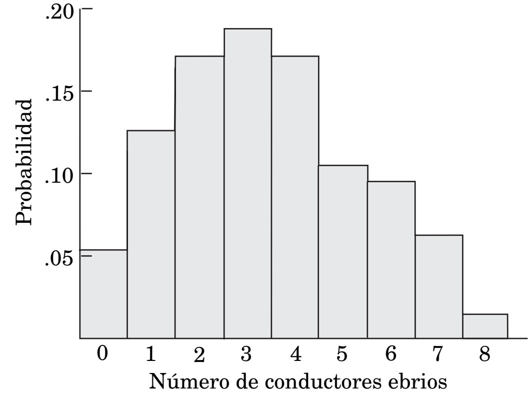
Sec. 14.1, ejercicio 3*b*

c) 0.7555, 0.3556;

5. *a*)

X	***P*(*X*)**
0	0.0533
1	0.1333
2	0.1733
3	0.1867
4	0.1733
5	0.1067
6	0.0933
7	0.0667
8	0.0134

b) véase la figura, *c*) 0.9467, 0.2801



Sec. 14.1, ejercicio 5*b*

7.

Suma de los puntos de dos dados (x)	**$P(x)$**
2	$\frac{1}{36}$ = .0278
3	$\frac{2}{36}$ = .0556
4	$\frac{3}{36}$ = .0833
5	$\frac{4}{36}$ = .1111
6	$\frac{5}{36}$ = .1389
7	$\frac{6}{36}$ = .1666
8	$\frac{5}{36}$ = .1389
9	$\frac{4}{36}$ = .1111
10	$\frac{3}{36}$ = .0833
11	$\frac{2}{36}$ = .0556
12	$\frac{1}{36}$ = .0278
	1.0000

9. *a*)

X^2	$P(X^2)$
1	0.15
4	0.20
9	0.30
16	0.25
25	0.15

b)

$X + 1$	$P(X + 1)$
2	0.15
3	0.20
4	0.30
5	0.25
6	0.15

SECCIÓN 14.2

1. *a*) 110, *b*) 110, *c*) todos los valores se presentan con la misma frecuencia, *d*) 180, *e*) 57.45; **3.** *a*) 29.5, *b*) 29, *c*) todos ocurren con la misma frecuencia, *d*) 42, *e*) 12.796; **5.** *a*) 60, *b*) 60, *c*) 60, *d*) 90, *e*) 23.06; **7.** $\bar{x} = 40$, mediana = 40, moda = 50; **9.** $\bar{x} = 3.53$, mediana = 3.5, moda = 0; **11.** *a*) $\bar{x} = 31$, *b*) $\sigma = 11.18$, **13.** $\bar{x}_1 = 500$, $\bar{x}_2 = 500$, $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 284.60$; **15.** *a*) $\mu = 2.26$, *b*) $\sigma = 2.0008$; **17.** *a*) $u = 3.40$, *b*) $\sigma = 1.968$

SECCIÓN 14.3

1. *b*), *d*), *e*), *f*) no son de Bernoulli; **3.** 0.1157, 0.9992; **5.**

X	$P(X)$
0	0.00032
1	0.00640
2	0.05120
3	0.20480
4	0.40960
5	0.32768

;

7. 0.9872, sí, 0.9977; **9.** 0.2508, 0.3020; **11.** 0.8, 0.8579; **13.** 0.1875, 0.1875; **15.** 0.08192

SECCIÓN 14.4

1. *a*) 0.75, *b*) − 1.00, *c*) 2.00, *d*) − 1.75, *e*) 3.125; **3.** *a*) 1.50, *b*) − 1.25, *c*) − 2.75, *d*) 2.25, *e*) −3.00; **5.** *a*) 0.0082, *b*) 0.8849, *c*) 0.21055, *d*) 0.9867; **7.** *a*) 0.5987, *b*) 0.3446, *c*) 0.2075, *d*) 0.5768; **9.** *a*) 0.8997, *b*) 0.8686, *c*) 0.6546, *d*) 0.0453; **11.** *a*) 0.0122, *b*) 0.8822, *c*) 0.2012, *d*) 0.3345; **13.** 0.0668, 0.1587; **15.** 0.8664, 0.0062; **17.** 0.9938, 0.9332; **19.** *a*) 0.2420, *b*) 0.0668, *c*) 0.3830, *d*) 0.9938

EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. *a*) 230.00, 16 248, *b*) 0.78; **2.** $P(X = 0) = 0.2401$, $P(X = 1) = 0.4116$, $P(X = 2) = 0.2646$, $P(X = 3) = 0.0756$, $P(X = 4) = 0.0081$; **3.** 32, 5.426; **4.** 0.234375; **5.** *a*) 0.3264, *b*) 0.0819, *c*) 0.2743

CAPÍTULO 15

SECCIÓN 15.1

1. *a*) 0, *b*) 0, *c*) 0, *d*) 5, *e*) − 5, *f*) sin límite; **3.** *a*) sin límite, *b*) sin límite, *c*) sin límite, *d*) − 2, *e*) − 2, *f*) − 2; **5.** 18; **7.** 10; **9.** no existe límite; **11.** 54; **13.** − 8; **15.** 16; **17.** − 5; **19.** no existe límite; **21.** 4/3; **23.** − 14; **25.** − 7; **27.** 3

SECCIÓN 15.2

1. 3; **3.** $-25\frac{1}{3}$; **5.** 11/14; **7.** 175; **9.** 6; **11.** 38; **13.** 0; **15.** 42.00; **17.** 30; **19.** 8; **21.** $4c^3 - 5c^2 + 10$; **23.** 0, asíntota horizontal en $y = 0$, asíntota vertical en $x = 0$ **25.** − 3/5, asíntota horizontal en $y = -3/5$, asíntota vertical en $x = -20$; **27.** sin límite, sin asíntotas; **29.** − 2, asíntota horizontal en $y = -2$, asíntota vertical en $x = -250$; **31.** 3, asíntota horizontal en $y = 3$, asíntota vertical en $x = 0$; **33.** sin discontinuidades; **35.** sin discontinuidades; **37.** discontinuidad en $x = 4$; **39.** discontinuidad en $x = -7$ y $x = 3$; **41.** discontinuidad en $x = 0$, $x = 3$ y $x = -2$; **43.** discontinuidad en $x = 5$ y $x = -2$; **45.** discontinuidad en $x = 2$, $x = -2$ y $x = 5$; **47.** discontinuidad en $x = 0$ y $x = 3$

SECCIÓN 15.3

1. 3; **3.** − 1; **5.** 1/9; **7.** 8; **9.** 2; **11.** − 15; **13** 5; **15.** *a*) 96 pies/s, 64 pies/s, 0 pies/s, *b*) 8 s; **17.** \$4.5 millones/año, \$4.6 millones/año, \$4.4 millones/año, \$5.55 millones/año; **19.** 0.9 millones/año, 1.25 millones/año, 1.067 millones/año; **21**. *a*) 17 mi/h, 27 mi/h, *b*) 32 mi/h; **23.** *a*) $\Delta x + 2x + 3$, *b*) 7; **25.** *a*) 0, *b*) 0; **27.** *a*) $10x + 5\,\Delta x + 20$, *b*) 40; **29.** *a*) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\,\Delta x + 5$, *b*) $6\frac{1}{3}$; **31.** *a*) $2mx + m\,\Delta x$, *b*) $4\,m$; **33.** *a*) $-6x^2 - 6x\,\Delta x - 2\,\Delta x^2$, *b*) − 26; **35.** *a*) $-5/(x^2 + x\,\Delta x)$, *b*) − 5/3; **37.** *a*) $-15x^2 - 15x\,\Delta x - 5\,\Delta x^2$, *b*) − 65; **39.** *a*) $6/(x^2 + x\,\Delta x)$, *b*) 2

SECCIÓN 15.4

1. *a*) $dy/dx = 4$, *b*) 4, 4; **3.** *a*) $dy/dx = 16x$, *b*) 16, − 32; **5.** *a*) $dy/dx = 6x - 5$, *b*) 1, −17; **7.** *a*) $dy/dx = 2x - 3$, *b*) − 1, − 7; **9.** *a*) $dy/dx = -12x + 3$, *b*) − 9, 27; **11.** *a*) $dy/dx = 40x$, *b*) 40, − 80; **13.** *a*) $dy/dx = a$, *b*) a, a; **15.** *a*) $dy/dx = 2/x^2$, *b*) 2, $\frac{1}{2}$; **17.** *a*) $dy/dx = -a/x^2$, *b*) $-a$, $-a/4$; **19.** *a*) $dy/dx = 3/x^2$, *b*) 3, 3/4; **21.** *a*) $dy/dx = 3x^2/2$, *b*) 3/2, 6; **23.** *a*) $dy/dx = 3x^2 + 6x$, *b*) 9, 0

SECCIÓN 15.5

1. 0; **3.** 0; **5.** $3x^2 - 4$; **7.** $10x^4$; **9.** $3/5\sqrt[5]{x^2}$; **11.** $\frac{5}{2}\sqrt{x^3}$; **13.** $10x^9$; **15.** $2x^5 - 2$; **17.** $3x^2/2$; **19.** $-10/x^3$; **21.** $40/x^5$; **23.** $1 + 1/x^{3/2}$; **25.** $-2/3\sqrt[3]{x^4}$; **27.** $8x^7 + 30x^4 - 12x^5 - 36x^2$; **29.** $9x^8 - 77x^6 + 18x^5 + 50x^4 - 120x^3$; **31.** $\frac{15}{2}x^4 - 2x^3 + 3x^2/4 + 60x - 10$; **33.** $(1 + x^2)/(1 - x^2)^2$; **35.** $(x^2 - 20x - 2)/(x^2 + 2)^2$; **37.** $(-20x^4 + 6x)/(4x^5 - 3x^2 + 1)^2$; **39.** *a*) 10, *b*) sin valores; **41.** *a*) − 2, *b*) ± 2.449; **43.** *a*) $4a_2 + a_1$, *b*) $-a_1/2a_2$; **45.** *a*) 4/9, *b*) 0; **47.** *a*) 5, *b*) ± 3

SECCIÓN 15.6

1. $-60x^2(1-4x^3)^4$; **3.** $4(3x^2-2)(x^3-2x+5)^3$; **5.** $-15x^2/2\sqrt{1-5x^3}$; **7.** $-x/\sqrt{(x^2-1)^3}$;
9. e^x; **11.** $20xe^{x^2}$; **13.** $15e^x(5e^x)^2=375e^{3x}$; **15.** $4e^{x^2}+8x^2e^{x^2}=4e^{x^2}(1+2x^2)$;
17. $(2x-2)e^{x^2-2x+5}$; **19.** $(xe^x-e^x)/x^2$; **21.** $3e^{3x}$; **23.** $1/x$; **25.** $2x/(x^2-3)$; **27.** $2x\ln x+x$;
29. $(10\ln x-10)/(\ln x)^2$; **31.** $[\ln 3x-1+1/x]/(\ln 3x)^2$; **33.** $(1/x-2x\ln x)/e^{x^2}$;
35. $\frac{1}{2}[(x-5)^5(6x-5)]^{-1/2}[5(x-1)^4(6x-5)+6(x-1)^5]$; **37.** $6\sqrt{x^2-5x+3}+$
$(6x^2-17x+5)/\sqrt{x^2-5x+3}$; **39.** -15; **41.** $4x^3-4x$; **43.** $(15-45x^2)(-x+x^3)^2$;
45. $x/2\sqrt{x^2/2}=\sqrt{2}/2$; **47.** $(10x-10)(x^2-2x-3)^4$; **49.** $(4x-5)e^{2x^2-5x}$;
51. $(60x^2-30x)/(20x^3-15x^2-3)$; **53.** *a*) 12 000 000, *b*) $0, \pm\sqrt{2}$; **55.** *a*) $\pm\frac{2}{5}$, *b*) 0;
57. *a*) -0.1353, *b*) sin valores; **59.** *a*) -0.1353; *b*) 1; **61.** *a*) $-\frac{1}{2}$, *b*) 1; **63.** *a*) $-3/2$, *b*) 0.5

SECCIÓN 15.7

1. *a*) 250 (cientos) pies/s, *b*) 750 (cientos) pies/s, 3 000 (cientos) pies/s; **3.** *a*) -48 pies/s,
b) -96 pies/s, *c*) -128 pies/s; **5.** *a*) 177.38 millones, *b*) $4.375\,e^{0.035t}$,
c) 6.208 millones/año; **7.** *a*) 50 274, *b*) $-1875e^{-0.025t}$, *c*) -1256.85/año

SECCIÓN 15.8

1. *a*) 0, 0, *b*) 0, 0; **3.** *a*) $8x-1, 8$, *b*) 7, 8; **5.** *a*) $15x^2, 30x$, *b*) 15, 30;
7. *a*) $x^3-x^2+10, 3x^2-2x$, *b*) 10, 1; **9.** *a*) $-1/x^2, 2/x^3$, *b*) $-1, 2$;
11. *a*) $15x^4-6x^2, 60x^3-12x$, *b*) 9, 48; **13.** *a*) $-4/x^3, 12/x^4$, *b*) $-4, 12$;
15. *a*) $4(x-5)^3, 12(x-5)^2$, *b*) $-256, 192$; **17.** *a*) $1/2\sqrt{x+1}, -1/4\sqrt{(x+1)^3}$,
b) $0.3535, -0.0884$; **19.** *a*) $2e^{2x}, 4e^{2x}$, *b*) 14.778, 29.556; **21.** *a*) $2xe^{x^2}, 2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}$,
b) 5.4366, 16.3097; **23.** *a*) $1/x, -1/x^2$, *b*) $1, -1$; **25.** *a*) $2x/(x^2-5), (-2x^2-10)/(x^2-5)^2$,
b) $-1/2, -3/4$; **27.** *a*) $(1+x^2)/(1-x^2)^2, (6x+2x^3)/(1-x^2)^3$, *b*) indefinida, indefinida;
29. *a*) $e^x\ln x+e^x/x,\ e^x\ln x+e^x/x+(xe^x-e^x)/x^2$, *b*) 2.718, 2.718

EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. *a*) 5, *b*) 250; **2.** sin discontinuidades; **3.** $-6x-2$;
4. *a*) $-24/5x^{9/5}$, *b*) $42x^5-40x^4+9x^2$, *c*) $(-8x^3-162x^2+8)/(x^3+8)^4$, *d*) $2xe^{4x}+4x^2e^{4x}$,
e) $15x^2-2x)/(5x^3-x^2)$, *f*) $4(e^x\ln x)^3[e^x\ln x+e^x/x]$; **5.** $x=3$;
6. $f'(x)=5x^3-3x^2+12x+10, f''(x)=15x^2-6x+12, f'''(x)=30x-6, f''''(x)=30,$
$f'''''(x)=0$ **7.** $8x^7+240x^5+2400x^3+8006x$

CAPÍTULO 16

SECCIÓN 16.1

1. *a*) decreciente, *b*) sin valores, *c*) todos los valores reales, *d*) sin valores;
3. *a*) decreciente, *b*) $x>1.5$, *c*) $x<1.5$, *d*) $x=1.5$; **5.** *a*) creciente,
b) $x>0$ o $x<-1$ *c*) $-1<x<0$, *d*) $x=0$ o -1; **7.** *a*) creciente, *b*) $x>0$,
c) $x<0$, *d*) $x=0$; **9.** *a*) creciente, *b*) $x>-3$, *c*) sin valores, *d*) $x=-3$;
11. *a*) creciente, *b*) $x<2$, *c*) $x>2$, *d*) $x=2$; **13.** *a*) creciente, *b*) $x>-4$,
c) $x<-4$, *d*) $x=-4$; **15.** *a*) función indefinida en $x=1$, *b*) $x>4$, *c*) sin valores,
d) $x=4$; **17.** *a*) creciente, *b*) todos los valores reales excepto $x=5$, *c*) sin valores,
d) $x=5$; **19.** *a*) creciente, *b*) $x\neq-5$, *c*) sin valores, *d*) $x=-5$;
21. hacia abajo, hacia abajo; **23.** hacia arriba, hacia arriba; **25.** hacia arriba,
hacia arriba; **27.** hacia abajo, hacia arriba; **29.** hacia abajo, hacia arriba;
31. hacia abajo, hacia arriba; **33.** hacia arriba, sin conclusión;
35. hacia arriba, hacia arriba; **37.** función no definida en $x=-2$ o $x=1$;
39. hacia arriba, hacia arriba; **41.** hacia abajo, hacia abajo;
43. *a*) todos los valores de x, *b*) sin valores, *c*) función lineal, sin concavidad,
d) igual que en el inciso *c*; **45.** *a*) $x>-b/2a$, *b*) $x<-b/2a$, *c*) todos los valores de x,
d) sin valores de x; **47.** *a*) $x\neq0$, *b*) ninguno, *c*) $x>0$, *d*) $x<0$; **49.** $x=3$;

51. $x = -3, 5$; **53.** $x = 5$; **55.** sin puntos de inflexión; **57.** $x = -2$; **59.** $x = -3, 2$; **61.** $x = \pm 1.732$; **63.** sin puntos de inflexión; **65.** $x = 5$; **67.** sin puntos de inflexión; **69.** sin puntos de inflexión; **71.** *a*) $a \leq x < c, e < x < g, i < x < k$, *b*) $c < x < e, g < x < i$, *c*) $x = c, e, g, i, k$; **73.** *a*) $e < x < f, i < x < j, a \leq x < b$, *b*) $b < x < c, f < x < g, j < x < k$, *c*) $d < x < e, h < x < i$, *d*) $c < x < d, g < x < h$; **75.** *a*) $a_1 < x < a_2, a_3 < x < a_5, x > a_7$, *b*) $a_2 < x < a_3, a_5 < x < a_7$, *c*) $x = a_2, a_3, a_5, a_7$

SECCIÓN 16.2

1. mínimo relativo en (8,− 92); **3.** punto de inflexión en (0, 5); **5.** máximo relativo en (1, 1.833), mínimo relativo en (4, −2.667); **7.** máximo relativo en (0, 0), mínimo relativo en (− 5, − 468.75) y (5,− 468.75); **9.** punto de inflexión en (0,− 10); **11.** máximo relativo en (6, 21); **13.** máximo relativo en (0, 4); **15.** máximo relativo en (− 2, 12.67), mínimo relativo en (2.5, − 17.708); **17.** mínimo relativo en (3, − 777.6), máximo relativo en (− 3, 777.6); **19.** máximo relativo en (− 8, 42.67), mínimo relativo en (0, 0); **21.** máximo relativo en (0, 0), mínimo relativo (− 2, − 4) y (2,− 4); **23.** punto de inflexión en (0, 0), máximo relativo en (− 2.5, 29.30), mínimo relativo en (3,− 58.05); **25.** mínimo relativo en (1, − 0.8), máximo relativo en (− 1, 0.8); **27.** máximo relativo en (0, 2), mínimo relativo en (− 1, 5/3) y (1, 5/3); **29.** mínimo relativo en (− 10, 0); **31.** punto de inflexión en ($-\frac{1}{2}$, 0); **33.** mínimo relativo en (0,− 4 096), máximo relativo en (− 2, 0) y (2, 0); **35.** sin puntos críticos; **37.** mínimo relativo en (0, 500); **39.** sin puntos críticos; **41.** máximo relativo en (1, 0.3679); **43.** mínimo relativo en (− 21.97, − 21.82); **45.** sin puntos críticos; **47.** punto de inflexión en (1,− 0.307); **49.** mínimo relativo en (0.3679, − 1.4716); **51.** máximo relativo en (0.1, − 1.6931); **53.** mínimo relativo en (0.5, 1.44); **55.** mínimo relativo en (− 1, − 0.5), máximo relativo en (1, 0.5); **57.** mínimo relativo en $(-b/2a, -b^2/4a + c)$

SECCIÓN 16.3

1., 3., 5., 7., 9., 11., 13., 15., 17. y **19.** véanse las figuras (pp. R-41 a R-43)

SECCIÓN 16.4

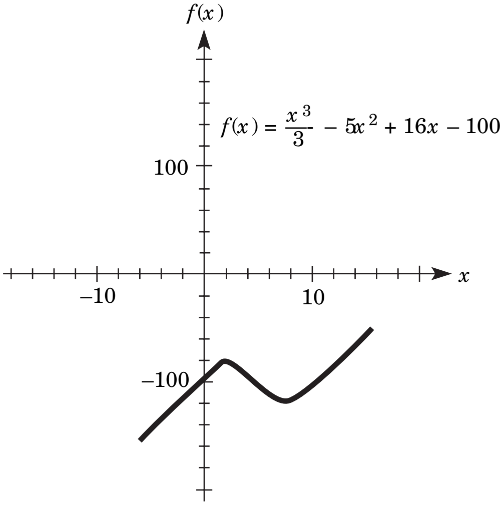
1. máximo absoluto en (8,101), mínimo absoluto en (2,5); **3.** máximo absoluto en (2, −40), mínimo absoluto en (8,− 256); **5.** máximo absoluto en (8, 6 520.6), mínimo absoluto en (3, 20.6); **7.** máximo absoluto en ($4\,298\frac{2}{3}$), mínimo absoluto en (0, 0); **9.** máximo absoluto en (0.75,− 7.75), mínimo absoluto en (10,− 350);

11. máximo absoluto en (10, 2 116), mínimo absoluto en (5, 72.25);
13. máximo absoluto en (0,− 10), mínimo absoluto en (6, − 1 082.8);
15. máximo absoluto en (− 5, $7\,291\frac{2}{3}$), mínimo absoluto en (0, 0);
17. máximo absoluto en (16, 4), mínimo absoluto en (4, 2)

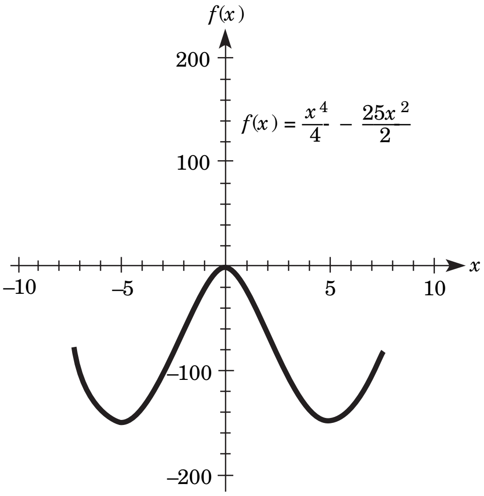
EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. *a*) $x > 10$ o $x < -4$, *b*) $-4 < x < 10$, *c*) $x = -4$ o 10;

2. véase la figura (p. R-44); **3.** *a*) mínimo relativo en (7, −125.66), máximo relativo en (− 3, 41),

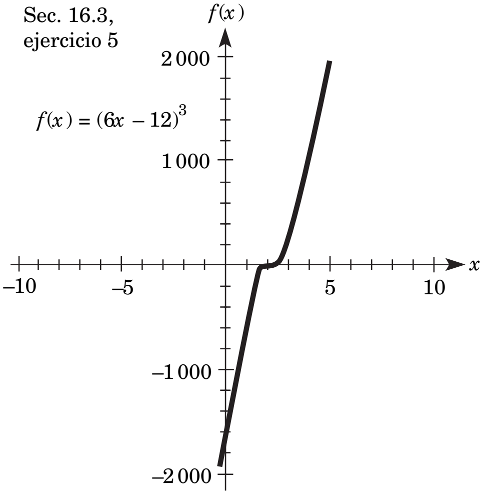


Sec. 16.3, ejercicio 1

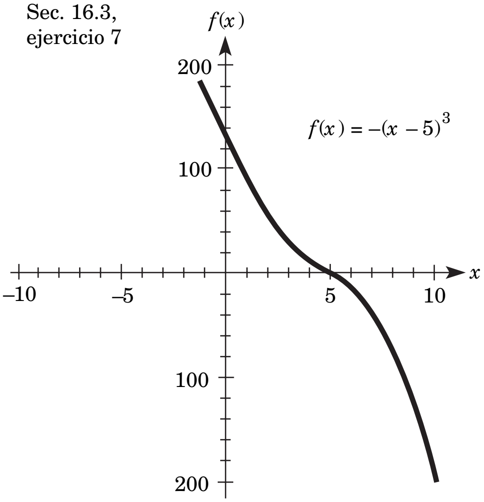


Sec. 16.3, ejercicio 3

Sec. 16.3, ejercicio 5

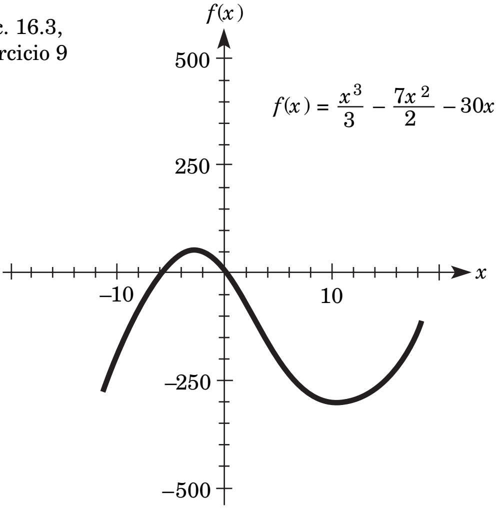


Sec. 16.3, ejercicio 7

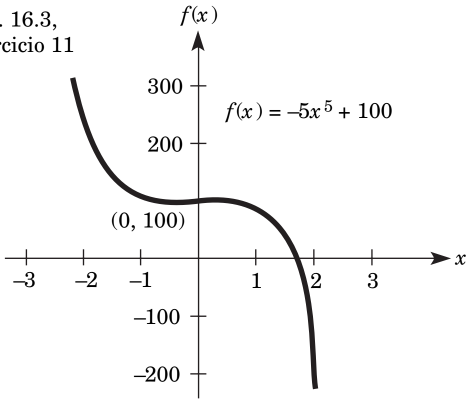


b) máximo relativo en (0, 20.09); **4.** punto de inflexión cuando $x = -2$ y 4;
5. máximo absoluto en (1, −8.833), mínimo absoluto en (3, −17.5);
6. véase la figura (p. R-44)

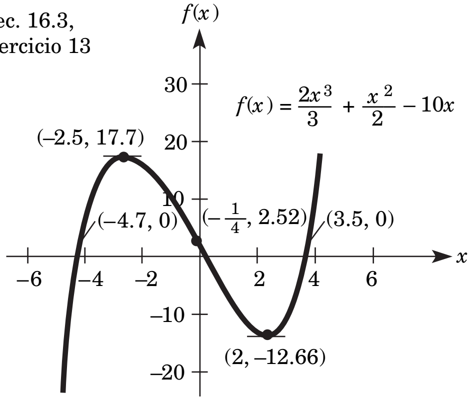
Sec. 16.3,
ejercicio 9



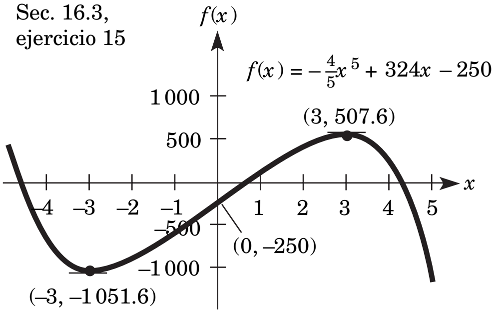
Sec. 16.3,
ejercicio 11



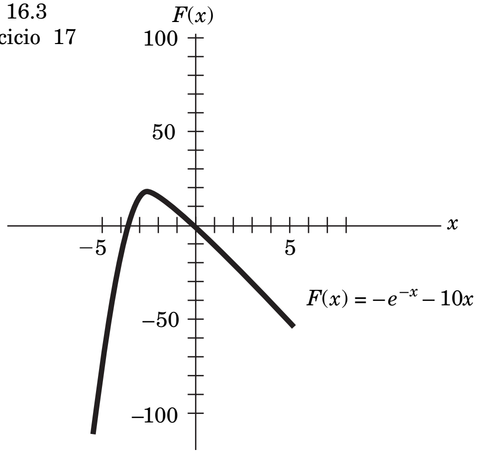
Sec. 16.3,
ejercicio 13



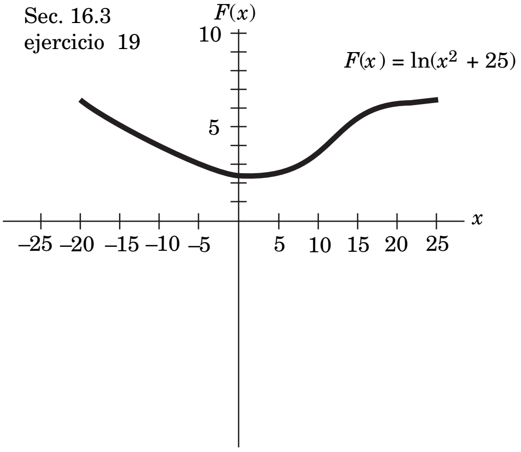
Sec. 16.3,
ejercicio 15

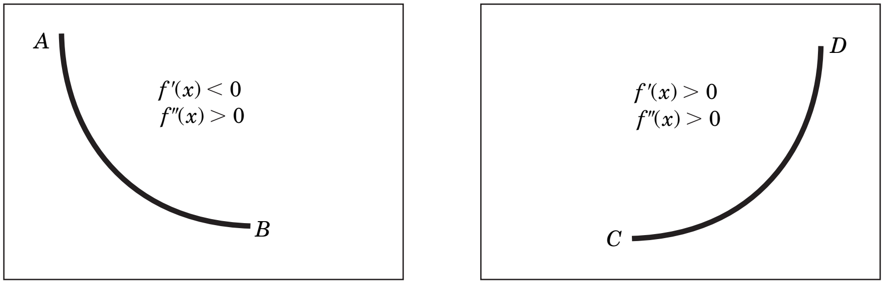


Sec. 16.3
ejercicio 17

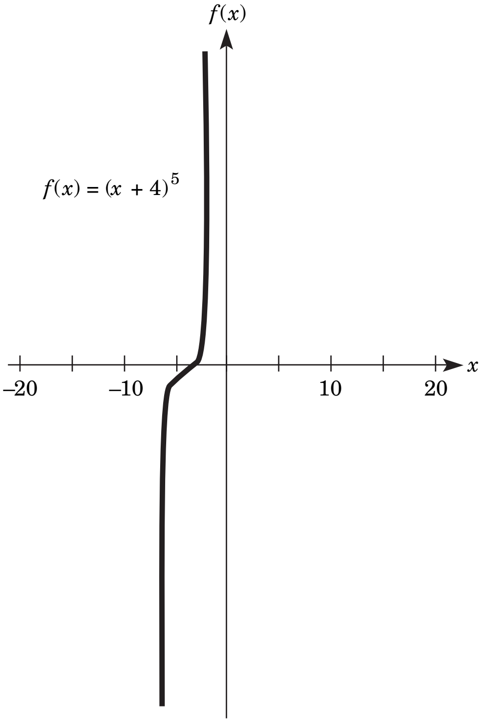


Sec. 16.3
ejercicio 19





Cap. 16, evaluación del capítulo, problema 2



Cap. 16, evaluación del capítulo, problema 6

CAPÍTULO 17

SECCIÓN 17.1

1. *a*) \$87.50, *b*) \$76 562.50; **3.** *a*) 250 000 unidades, *b*) 624 975 000; **5.** *a*) 3 200 centavos = \$32.00, *b*) \$128 millones, *c*) 4 000 000 conjuntos; **7.** *a*) 20 toneladas, *b*) \$754 160, *c*) los costos son \$112.28 mayores; **9.** *a*) 1 200 docenas, *b*) \$2 000, 413.30, *c*) los costos son \$3.40 mayores; **11.** *a*) 1 183.216, *b*) \$8 091.61, *c*) \$9 574 120;
13. *a*) \$27.50, *b*) \$32 812 500; **15.** *a*) 50 000, *b*) \$575, *c*) \$9 650 000;
17. 40 000, pérdida de \$400 000; **19.** *a*) q = 400, *b*) \$79 500;
21. *a*) no se puede determinar utilizando el método marginal, *b*) \$71 955 000;
23. *a*) 2 500 unidades, *b*) \$22 500

SECCIÓN 17.2

1. 38.73 pies por 38.73 pies; **3.** $x = 150, y = 75$, área = 11 250 m^2;
5. $x = 900, y = 600$, área = 540 000 pies cuadrados; **7.** $x = 63.33$; **9.** *a*) 76 376.26 mi,
b) \$0.4416/mi, *c*) \$11 043.56; **11.** *a*) $p = 100 - x$, *b*) $0 \le x \le 100$,
c) $R = 5\,000 + 50x - x^2$, *d*) 25, *e*) 75, *f*) \$5 625, *g*) \$75, *h*) no; **13.** *a*) 96.81 días,
b) \$611 370, *c*) 91.11 por ciento; **15.** 40 oficiales, 352.84 crímenes/día; **17.** *a*) 6,
b) \$4.72; **19.** *a*) $w = f(x) = 28.5 - 1.5x$, *b*) 9.5 h, *c*) \$14.25, *d*) \$135.375,
e) para unidades que requieren 15 o más horas, salarios = \$90, lo que es \$45.375 menos
que el máximo; **21.** *a*) $-60p/(1\,200 - 60p) = -p/(20 - p)$, *b*) $-\frac{1}{3}$ (inelástico),
-1 (elástico unitario), -3 (elástico); **23.** *a*) $-20p^2/(12\,000 - 10p^2) = -2p^2/(1\,200 - p^2)$
b) -0.18 (inelástico), -1 (elástico unitario), -6 (elástico); **25.** \$15

EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. $R = g(p) = 60\,000p - 7.5p^2$;
2. *a*) $P = h(x) = -5x^2 + 450x - 5\,000$, *b*) 45 (cientos) = 4 500 unidades,
c) \$5 125 (cientos) = \$512 500; **3.** *a*) 316.23 por 316.23, *b*) \$25 298.40;
4. *a*)200 unidades, *b*) \$80 200; **5.** *a*) \$20, *b*) \$257 515.61; **6.** *a*) 7 personas, *b*) \$4.29

CAPÍTULO 18

SECCIÓN 18.1

1. $80x + C$; **3.** $x/5 + C$; **5.** $3x^2/2 + C$; **7.** $x^3/6 + C$; **9.** $x^5/5 + C$;
11. $x^3/3 - 2x^2 + C$; **13.** $x^3/3 + 4x^2 + 10x + C$; **15.** $3x^3 + 5x^2 + C$;
17. $x^3 + 9x^2 + 12x + C$; **19.** $2x^4 - 2x^3 + C$; **21.** $3x^4 - 3x^3 + 3x + C$;
23. $x^5 - 3x^3 - 6x + C$; **25.** $6x^5 - x^4/2 + 4x^2 - 5x + C$; **27** $x^4/8 + C$;
29. $-3x^6 + 3x^3 - 5x^2 + C$; **31.** $f(x) = 20x$; **33.** $f(x) = 5x^2 - 10$;
35. $f(x) = x^4 - 1$; **37.** $f(x) = -x^3/3 + 2x^2 + 36$; **39.** $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 52$;
41. $f(x) = 3x^3 + x^2 + 22$; **43.** $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 17$;
45. $f(x) = 2x^4 - x^3 - 16$; **47.** $f(x) = -x^4 - 6x^2 + 815$; **49.** $f(x) = x^6 - x^3 + 10$;
51. $R = f(x) = 40\,000x - 2x^2$; **53.** $P = f(x) = -3x^2 + 450x - 10\,000$

SECCIÓN 18.2

1. $60x + C$; **3.** $x/8 + C$; **5.** $4x^2 + C$; **7.** $-3x^2/2 + C$; **9.** $3x^2/2 + 6x + C$;
11. $x^2/6 - x/4 + C$; **13.** $x^3 - 2x^2 + 2x + C$; **15.** $-6x^3 + x^2/2 - 5x + C$;
17. $x^4 + 2x^3 - 3x + C$; **19.** $x^6/6 - 3x^4 + 3x + C$; **21.** $5x^{6/5}/6 + C = 5x\sqrt[5]{x}/6 + C$;
23. $-1/2x^2 + C$; **25.** $ax^5/5 + bx^3/3 + C$; **27.** $(a/b)(x^{1-n})/(1 - n) + C, n \neq 1$;
29. $x^{1-n}/(1 - n) + C, n \neq 1$;

31. $\frac{3}{2}x^{4/3} + C = 3x\sqrt[3]{x}/2 + C$; **33.** $5x^{8/5}/8 + C = 5x\sqrt[5]{x^3}/8 + C$;
35. $\frac{16}{15}x^{5/4} + C = \frac{16}{15}x\sqrt[4]{x} + C$; **37.** $-1/3x^3 + C$; **39.** $-16/x + C$;
41. $2\sqrt{x} + C$; **43.** $-\frac{75}{4}x^{4/5} + C$; **45.** $ax^5/5 + bx^4/4 + cx^3/3 + dx^2/2 + ex + C$;
47. $ax^4 + bx^3 + cx^2 + C$; **49.** $x^{1-n}/a(1 - n) + C, n \neq 1$

SECCIÓN 18.3

1. $(x + 20)^6/6 + C$; **3.** $(8x + 20)^4/4 + C$; **5.** $[x/3 + 15]^3/3 + C$;
7. no puede realizarse; **9.** $(x^2 + 3)^5/5 + C$; **11.** $(x^2 + 5)^4/12 + C$;
13. $(2x^2 - 4x)^7/28 + C$; **15.** $2\sqrt{x^2 + 8} + C$; **17.** no puede hacerse; **19.** no puede
hacerse; **21.** $(2x^3 + 3)^{3/2}/9 + C$; **23.** $(2x^2 + 8x)/16 + C$; **25.** no puede hacerse;
27. no puede hacerse; **29.** $e^{3x}/3 + C$; **31.** $e^{ax}/a + C$; **33.** $-\frac{1}{2}\ln(x^2 + 5) + C$;
35. $3\ln(6x + 5) + C$; **37.** $(1/a)\ln(ax + b) + C$; **39.** $\ln(ax^2 + bx) + C$

SECCIÓN 18.4

1. $-xe^{-x} - e^{-x} + C$; **3.** $3x(x+1)^{4/3}/4 - 9(x+1)^{7/3}/28 + C$;
5. $x(e^{2x})/2 - e^{2x}/4 + C$; **7.** $(x^2/2 + 4x)\ln x - x^2/4 - 4x + C$;
9. $x(x+2)^5/5 - (x+2)^6/30 + C$; **11.** $2x(x-3)^{1/2} - \frac{4}{3}(x-3)^{3/2} + C$;
13. $-\ln x/x - 1/x + C$; **15.** $-8\ln(x+3) + 7\ln(x+2) + C$;
17. $-2\ln(x-1) - 5/(x-1) + C$; **19.** $-4\ln x + 4.75\ln(x+4) + 4.25\ln(x-4) + C$;
21. $6\ln x - 2\ln(x-1) + C$; **23.** $(x^5/5)\ln(10x) - x^5/25 + \ C$;
25. $[(\ln x/-2) - \frac{1}{4}]/x^2 + C$; **27.** $x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$;
29. $x^5(\ln x/5 - \frac{1}{25}) + C$; **31.** $2e^{2.5x}/5 + C$; **33.** $(e^{5x}/25)(5x-1) + C$;
35. $x/5 - \frac{1}{10}\ln(5 + 3e^{2x}) + C$;

SECCIÓN 18.5

1. primer orden, primer grado; **3.** segundo orden, tercer grado;
5. primer orden, primer grado; **7.** primer orden, tercer grado;
9. segundo orden, tercer grado; **11.** $y = \frac{1}{5}x^5 + x^2 + 6x + C$; **13.** $y = \ln x + C$;
15. $y = \frac{1}{2}\ln(5x^2 + 10) + C$; **17.** $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + C_1x + C_2$;
19. $y = -\frac{1}{20}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - 8x^2 + C_1x + C_2$; **21.** $y = e^x + C_1x + C_2$;
23. $y = e^x + \frac{5}{2}x^2 + C_1x + C_2$; **25.** $y = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + C_1x + C_2$;
27. $y = \frac{1}{4}(x^2 + 15)^4 + C$; **29.** $y = x^2 + C, y = x^2 - 50$;
31. $y = x^3/3 + 3x^2/2 + 8x + C, y = x^3/3 + 3x^2/2 + 8x - \frac{7}{3}$;
33. $y = x^3 + 9x^2 + C_1x + C_2, y = x^3 + 9x^2 - 175x + 336$; **35.** $y = e^{5x} + C_1x + C_2$,
$y = e^{5x} - x - 3$; **37.** $y = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + C_1x + C_2, y = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 16x + 48$;
39. $P = f(t) = 500e^{0.458t}$; **41.** $P = f(t) = 40\,000e^{-0.0446t}$;

EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. $f(x) = x^4 + x^2 - 20x - 350$; **2.** *a*) $-\frac{3}{2}x^{-2/3} + C$,
b) $\frac{1}{24}(x^4 + 10)^6 + C$, *c*) $-e^{-10x}/10 + C$; **3.** $y = x^3/6 + 3x^2 + C_1x + C_2$,
$y = x^3/6 + 3x^2 - 17.5x + 45\frac{2}{3}$; **4.** $R = 220\,000\,x - 9x^2$; **5.** $xe^{10x}/10 - e^{10x}/100 + C$;
6. $10\ln(x-3) + 10\ln(x+2) + C$

CAPÍTULO 19

SECCIÓN 19.1

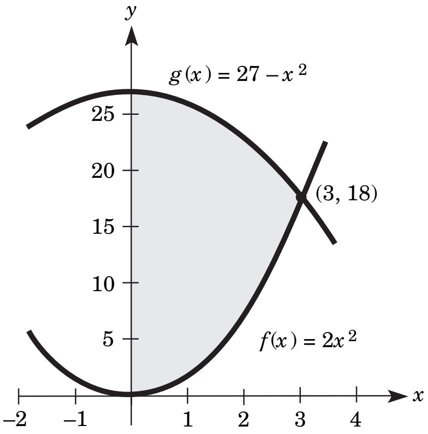
1. 4.5; **3.** 4; **5.** 8; **7.** $10\frac{2}{3}$; **9.** $228\frac{2}{3}$; **11.** 0.4054; **13.** $-8\,102.084$;
15. 0; **17.** 0; **19.** 36; **21.** 60; **23.** $32\frac{2}{3}$; **25.** 27; **27.** -57;
29. 53.598; **31.** 0.3465; **33.** 56; **35.** 22 025.466; **37.** $2\,645\frac{1}{3}$;
39. 8.3178; **41.** 0.8735; **43.** 3.1012; **45.** no se puede evaluar; **47.** $\frac{3}{2}m - b$;
49. 0.4373; **51.** $41\frac{1}{3}$; **53.** -218.667; **55.** 22; **57.** 79.5; **59.** 133.599

SECCIÓN 19.2

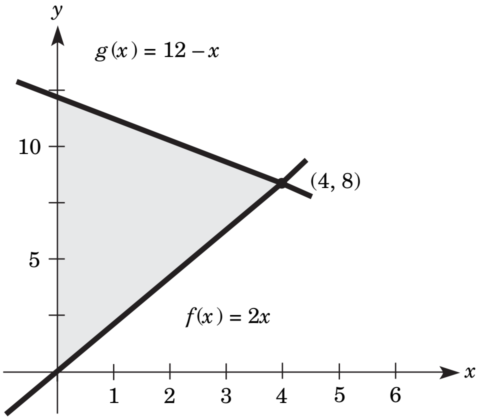
1. 9; **3.** 168; **5.** 180; **7.** 93.33; **9.** $38\frac{1}{3}$; **11.** 17.367; **13.** $7\frac{1}{3}$;
15. $7\,666\frac{2}{3}$; **17.** 4 443 027.9; **19.** 0.69316; **21.** *a*) $\int_0^a g(x)\,dx$, *b*) $-\int_0^a f(x)\,dx$,
c) $\int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c g(x)\,dx$, *d*) $-\int_a^b g(x)\,dx$;
23. *a*) $\int_0^b h(x)\,dx - \int_0^a g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$, *b*) $\int_0^a g(x)\,dx$, *c*) $-\int_0^a f(x)\,dx$,
d) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c h(x)\,dx$, *e*) $-\int_a^c g(x)\,dx$, *f*) $\int_b^d f(x)\,dx - \int_b^c h(x)\,dx - \int_c^d g(x)\,dx$;
25. *a*) véase la figura, *b*) 54; **27.** *a*) véase la figura, *b*) 24;
29. *a*) véase la figura, *b*) $333\frac{1}{3}$; **31.** 8; **33.** $21\frac{1}{3}$; **35.** 85.896

SECCIÓN 19.3

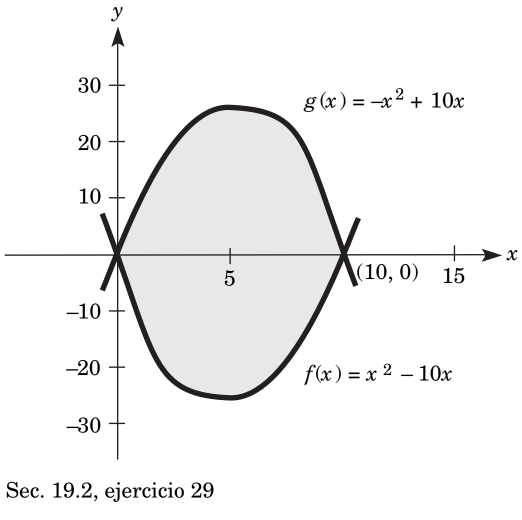
1. *a*) 21, *b*) $21\frac{1}{3}$, *c*) subestimado por $\frac{1}{3}$; **3.** *a*) 15.5, *b*) 16, *c*) subestimado por 0.5; **5.** *a*) 51.428, *b*) 53.598, *c*) subestimado por 2.170; **7.** *a*) 22.375, *b*) $22\frac{2}{3}$, *c*) subestimado por 0.2917; **9.** *a*) 2 900 099.24, *b*) 3 025 680, *c*) 125 580.7 (subestimado); **11.** *a*) 52, *b*) 52, *c*) 0; **13.** *a*) 31, *b*) $30\frac{2}{3}$, *c*) sobrestimado por $\frac{1}{3}$; **15.** *a*) 115.9839, *b*) 107.1963, *c*) sobrestimado por 8.7876; **17.** *a*) 4 022 336, *b*) 3 029 184, *c*) sobrestimado por 993 152; **19.** *a*) 72.189, *b*) 53.598, *c*) sobrestimado por 18.591; **21.** *a*) 26, *b*) 26, *c*) 0; **23.** *a*) $105\frac{1}{3}$, *b*) $105\frac{1}{3}$, *c*) 0; **25.** *a*) $30\frac{1}{12}$, *b*) 30, *c*) sobrestimado por $\frac{1}{12}$; **27.** *a*) 269.3192,



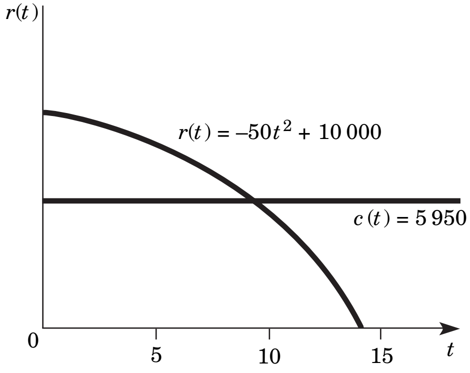
Sec. 19.2, ejercicio 25



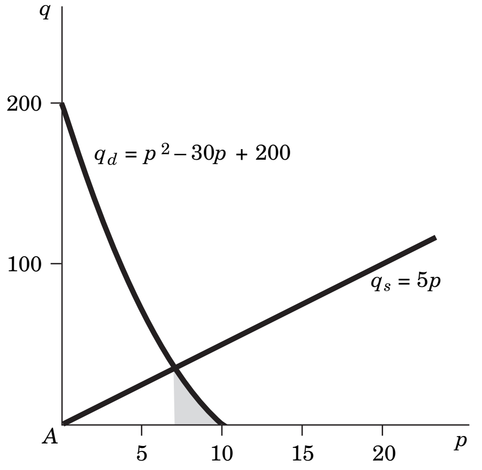
Sec. 19.2, ejercicio 27



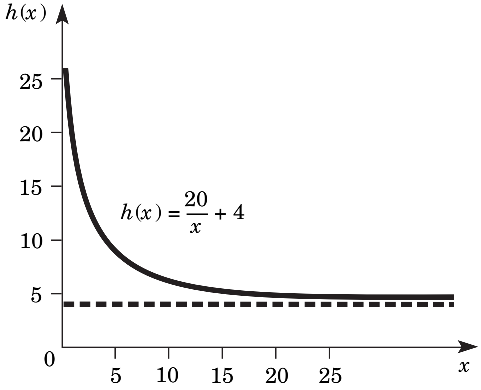
Sec. 19.2, ejercicio 29



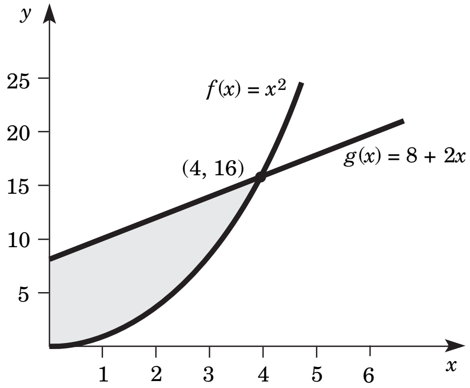
Sec. 19.4, ejercicio 3



Sec. 19.4, ejercicio 7



Sec. 19.4, ejercicio 13



Cap. 19, evaluación del capítulo, problema 2*a*

b) 267.9907, *c*) sobrestimado por 1.3285; **29.** *a*) 1 063 670 388, *b*) 1 060 498 832, *c*) sobrestimado por 3 171 556; **31.** *a*) 20, *b*) 20, 20, 20, *c*) todos son lo mismo; **33.** *a*) $49\frac{1}{3}$, *b*) 49, 50, $49\frac{1}{3}$, *c*) regla de Simpson; **35.** *a*) 16, *b*) 15.5, 17, 16, *c*) regla de Simpson; **37.** *a*) 3 488.31, *b*) 3 452.23, 3 560.68, 3 489.48, *c*) regla de Simpson; **39.** *a*) 1 057 062 656, *b*) 571 474 808.20; 2 177 820 000, 1 488 744 000, *c*) regla de Simpson; **41.** 3.48453, 3.47474, 3.44781; **43.** 2.4008, 2.3090, 2.2536; **45.** 0.1202, 0.1329, 0.1247; **47.** 3.8385, 3.8982, 3.8575

SECCIÓN 19.4

1. *a*) $1 200, *b*) $400; **3.** *a*) véase la figura, *b*) 9 días, *c*) $53 550, *d*) $24 300; **5.** *a*) 195 082, *b*) 9.4 horas; **7.** *a*) véase la figura, *b*) $p =$ $7.192, $q = 35.96$, *c*) $46.80; **9.** 10.986 días; **11.** *a*) 0.642 miles de millones de toneladas/año; *b*) 12.9744 miles de millones de toneladas; **13.** *a*) 6 horas/unidad, *b*) 135.91 horas, *c*) véase la figura, *d*) 4 horas/unidad; **15.** 407.15 unidades cúbicas

SECCIÓN 19.5

1. 0.444, 0.888; **3.** 0.3888

EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. *a*) $\frac{4}{3}$, *b*) 9.3416 **2.** *a*) véase la figura, *b*) $26\frac{2}{3}$ **3.** *a*) \$248/año, *b*) \$432; **4.** 0.800; **5.** *a*) 512, *b*) 504, 528, 512, *c*) regla de Simpson

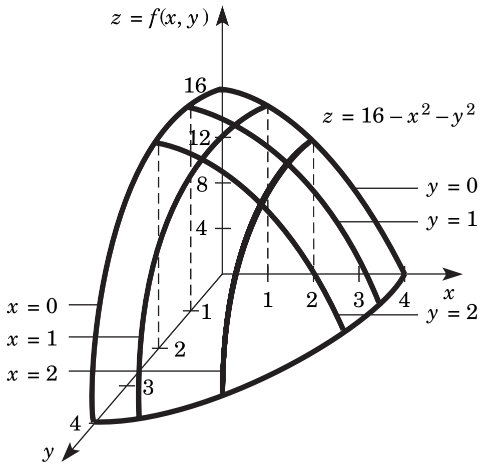
CAPÍTULO 20

SECCIÓN 20.1

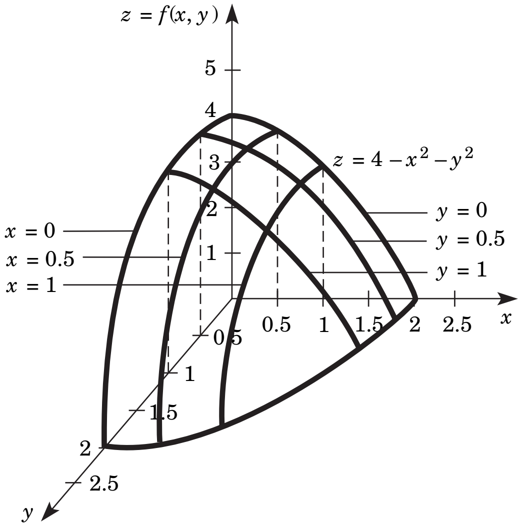
1., **3.**, **5.** véanse las figuras

SECCIÓN 20.2

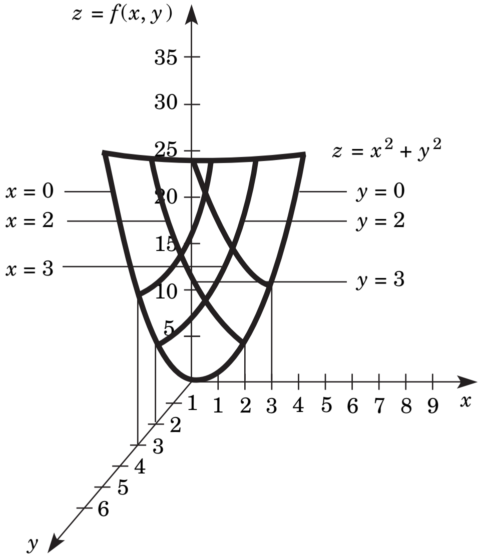
1. $f_x = 6x, f_y = -30y^2$; **3.** $f_x = 20x + 2y, f_y = 2x - 12y$; **5.** $f_x = 3x^2y^5, f_y = 5x^3y^4$;
7. $f_x = 12x - y, f_y = -x + 60y$; **9.** $f_x = 4/x^2y^2, f_y = 8/xy^3$;
11. $f_x = 6x^2 + 8xy^5 - 10y, f_y = 20x^2y^4 - 10x - 120y^5$;
13. $f_x = 4(x - y)^3, f_y = -4(x - y)^3$; **15.** $f_x = x/\sqrt{x^2 + y^2}, f_y = y/\sqrt{x^2 + y^2}$;
17. $f_x = 1/(x + y), f_y = 1/(x + y)$; **19.** $f_x = 15x^2e^{5x^3-2y^2}, f_y = -4ye^{5x^3-2y^2}$;
21. $f_x = 12x^3 - 16xy^3, f_y = -24x^2y^2$; **23.** $f_x = -9x^2 + 8y^2, f_y = 16xy + 3y^2$;
25. $f_x = 4x/3y^3, f_y = -2x^2/y^4$; **27.** $f_x = (-4x + 5y)/x^6, f_y = -1/x^5$;
29. $f_x = (-5x^2 - 10xy)/(x + y)^2, f_y = 5x^2/(x + y)^2$;
31. $f_x = 3(x - y)^2, f_y = -3(x - y)^2$; **33.** $f_x = 2x/3\sqrt[3]{(x^2 + 2y^2)^2}, f_y = 4y/3\sqrt[3]{(x^2 + 2y^2)^2}$;
35. $f_x = 2x/(x^2 - y^2), f_y = -2y/(x^2 - y^2)$; **37.** $f_x = 2xye^{x^2y}, f_y = x^2e^{x^2y}$;
39. $f_x = e^x \ln y, f_y = e^x/y$; **41.** $f_{xx} = 6, f_{xy} = 0, f_{yy} = 30y, f_{yx} = 0$;
43. $f_{xx} = 30x, f_{xy} = -3, f_{yy} = 6, f_{yx} = -3$;
45. $f_{xx} = 6xy^4, f_{xy} = 12x^2y^3, f_{yy} = 12x^3y^2, f_{yx} = 12x^2y^3$;
47. $f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = f_{yx} = e^{x+y}$;
49. $f_{xx} = y^2e^{xy}, f_{xy} = e^{xy} + xye^{xy}, f_{yy} = x^2e^{xy}, f_{yx} = e^{xy} + xye^{xy}$;
51. $f_{xx} = 20(x - y)^3, f_{xy} = -20(x - y)^3, f_{yy} = 20(x - y)^3, f_{yx} = -20(x - y)^3$;



Sec. 20.1, ejercicio 1



Sec. 20.1, ejercicio 3



Sec. 20.1, ejercicio 5

53. $f_{xx} = 12x^2y^2, f_{xy} = 8x^3y, f_{yy} = 2x^4, f_{yx} = 8x^3y$; **55.** $f_{xx} = 0, f_{xy} = -2/y^3, f_{yy} = 6x/y^4, f_{yx} = -2/y^3$; **57.** $f_{xx} = 27/\sqrt{6x - 8y}, f_{xy} = -36/\sqrt{6x - 8y}, f_{yy} = 48/\sqrt{6x - 8y}, f_{yx} = -36/\sqrt{6x - 8y}$; **59.** $f_{xx} = -3/x^2, f_{xy} = 0, f_{yy} = -2/y^2, f_{yx} = 0$; **61.** *a*) 88 000, *b*) + 1 800, *c*) real = + 1 900, *d*) proyección = + 7 900, real = + 8 100;
63. *a*) 116 000, *b*) − 1 500 unidades, *c*) + 1 900 unidades, *d*) radio;
65. *a*) $f_{p_1} = p_1, f_{p_2} = 2p_2, f_{p_3} = 0.8p_3$, *b*) $f_{p_1} = -30, f_{p_2} = 20, f_{p_3} = 16$, *c*) productos competidores

SECCIÓN 20.3

1. punto de silla de montar en (− 10, 10, − 310); **3.** punto de silla de montar en (0, 2, − 12), mínimo relativo en (5, 2, − 32.83); **5.** mínimo relativo en (1, 3.5, − 20.75);
7. mínimo relativo en (1, − 3, − 1), punto de silla de montar en (− 1, − 3, 3);
9. punto de silla de montar en (0, 0, 0), mínimo relativo en (1, 1, − 1); **11.** punto de silla de montar en (1.414, − 0.707, − 10.15); **13.** mínimo relativo en (20, 10, − 300);
15. mínimo relativo en (8, 4, − 104); **17.** punto de silla de montar en (0, 0, 0), máximo relativo en$(\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{432})$; **19.** máximo relativo en (−1, − 4, 20);
21. punto de silla de montar en (1, 2, 27), máximo relativo en (− 1, 2, 31);
23. mínimo relativo en (4, − 2, − 6); **25.** mínimo relativo en (1, − 3, − 1), punto de silla de montar en (− 1, − 3, 3)

SECCIÓN 20.4

1. *a*) \$2 000 (miles) o \$2 millones para RV y \$2 000 (miles) o \$2 millones para radio, *b*) 100 millones; **3.** *a*) $p_1 = 10, p_2 = 10$, *b*) $q_1 = 60$ (miles), $q_2 = 40$ (miles), *c*) \$1 000 000; **5.** $x = -3.75, y = 10$; **7.** $y = -3x + 8$

SECCIÓN 20.5

1. no hay conclusión acerca del punto crítico localizado en $(-0.15, 0.25, 0.05, -0.075)$;
3. mínimo relativo en $(0, 0, 0, 2)$; **5.** máximo relativo en $(0, 0, 0, 25)$;
7. *a*) $p_1 = \$9\,666.67, p_2 = \$7\,500, p_3 = \$9\,833.34$,
b) $q_1 = 2\,000, q_2 = 3\,000, q_3 = 2\,500$, *c*) $66 416 690

SECCIÓN 20.6

1. máximo relativo en $(48, 52, 37600)$, $\lambda = 752$;
3. máximo relativo en $(33, 9, 1\,926)$, $\lambda = +93$; **5.** máximo relativo en $(9, 7, 528)$, $\lambda = 66$;
7. mínimo relativo en $(1.6, -2.24, -1.92, 12.6976)$, $\lambda = 0.96$;
9. $q_1 = 50, q_2 = 150, (\lambda = 350)$

EVALUACIÓN DEL CAPÍTULO

1. *a*) cambio instantáneo en $f(x, y)$ dado un cambio en x, suponiendo que y se mantenga constante, *b*) f_x representa una expresión general para la pendiente de la tangente de la familia de trazas que son paralelas al plano xz; **2.** dada $z = f(x, y)$, una traza es la representación gráfica de $f(x, y)$ cuando una de las variables se mantiene constante;
3. $f_x = 45x^2 + 10xy^3, f_y = -8y + 15x^2y^2$;
4. $f_{xx} = 160x^3 + 16y^3 + 12, f_{yy} = 48x^2y, f_{xy} = f_{yx} = 48xy^2$;
5. *a*) mínimo relativo cuando $x = 1$ y $y = 3.5$, *b*) $f(1, 3.5) = -20.75$;
6. 200 acres de frijol de soya, 200 acres de maíz, $400 000;
7. máximo relativo en $(4, -2.5, 4, 278)$;
8. $L(x_1, x_2, \lambda) = -4x_1^3 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 - \lambda(x_1 - 2x_2 - 20)$

APÉNDICE A

SECCIÓN A.1

1. $>$; **3.** $>$; **5.** $>$; **7.** $>$; **9.** $<$; **11.** $>$; **13.** 5; **15.** 15; **17.** 16;
19. 9

SECCIÓN A.2

1. 5^4; **3.** $(3)^2(-2)^3$; **5.** $(-x^3)$; **7.** $a^2b^3c^2$; **9.** x^4/y^2z^4; **11.** x^4y^4;
13. $2^7 = 128$; **15.** x^8; **17.** x^5y^4; **19.** x^6; **21.** x^{14}; **23.** a^{12}; **25.** $27x^6$;
27. $4m^6$; **29.** $12a^8b^3$; **31.** $4\,096x^{24}$; **33.** $1/a^4$; **35.** 8; **37.** 81;
39. $1/x^5y^5$; **41.** x^2; **43.** $\frac{1}{8}$; **45.** 3; **47.** 1; **49.** x^3/y^3; **51.** x^8/y^4;
53. a^8b^4/c^{12}; **55.** $27x^3y^6/z^9$; **57.** -20; **59.** $1/a^5$; **61.** $13x$;
63. $5y^3 + 2y^2 - 4y$; **65.** $25x^3y^2 - 25xy^3$; **67.** 0; **69.** $21x^4y^2$; **71.** $-8a^{10}$;
73. $-2x^4 + 2x^2y$; **75.** $x^4y - 2x^3y^2 + x^2y^3$; **77.** $a^2 + 2ab + b^2$;
79. $a^2 - 2ab + b^2$; **81.** $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$; **83.** $4xy$; **85.** $-3/y$;
87. $5x - 8$; **89.** $-4a^2 + 3a - 2$; **91.** $2x^5 + 3x^2 - 4x$; **93.** $-12x^2 + 4xy^2 - 6y$

SECCIÓN A.3

1. $2a(x - 4a^2)$; **3.** $2xy(2x^2 - 3y^2 + 4xy)$; **5.** $3a(3a^2 - 5a - 9)$;
7. no puede factorizarse; **9.** $(p + 12)(p - 3)$; **11.** $(r + 1)(r - 22)$;
13. no puede factorizarse; **15.** $(6m - 1)(m - 3)$; **17.** $(2x + 1)(4x - 3)$;
19. $(x^2 + 9)(x + 3)(x - 3)$; **21.** $(9x^2 + 25)(3x + 5)(3x - 5)$;
23. no puede factorizarse; **25.** $(1 + 2x)(1 - 2x + 4x^2)$; **27.** $x^2(x - 2)(x + 1)$;
29. $x(x - 8)(x + 5)$; **31.** $x^3(x - 7)(x + 3)$; **33.** $ab(a^2 + 9)(a + 3)(a - 3)$;
35. $2uv(9 + u^2)(3 + u)(3 - u)$

SECCIÓN A.4

1. $\frac{11}{30}$; **3.** $\frac{1}{8}$; **5.** $(x - 2)/x^2$; **7.** $(x^2 + 7x)/(x^2 - 4)$; **9.** $(10x^2 - 2)/x^2$;
11. $(3a^2 + 3a - 5)/(a^2 + 2a + 1)$; **13.** -3; **15.** $1/3a^2b$; **17.** $\frac{7}{15}$;
19. $2a^3b^2/3c^3$; **21.** $(x - 4)/(x^2 - 5x - 4)$; **23.** $x(x + 1)$;
25. $(x^2 - 3x + 2)/(x^2 + 7x + 10)$

SECCIÓN A.5

1. $a^{17/6}$; **3.** $x^{31/30}$; **5.** $a^{5/4}$; **7.** $-27x^2$; **9.** $a^{4/3}$; **11.** $x^{44/15}$; **13.** $x^{2/15}$;
15. 25; **17.** $-a$; **19.** $-2x^2$; **21.** $12x^3$; **23.** $2a^2b$; **25.** a^3bc^6; **27.** $6a^2$;
29. $5\sqrt{7}$; **31.** $7\sqrt{2}$; **33.** $4\sqrt{x} - x\sqrt{x}$; **35.** 4; **37.** $\frac{8}{3}$; **39.** $25x/7y^2$;
41. $4x^2/3y^3$; **43.** 2; **45.** $\sqrt[3]{x^2}$; **47.** $\sqrt[5]{(ab)^3}$; **49.** $1/\sqrt{x}$; **51.** $\frac{1}{2}$; **53.** $\sqrt[5]{a^3}$;
55. $\sqrt[4]{(100 - x)}$; **57.** $(45x)^{1/2}$; **59.** $x^{3/4}$; **61.** $x^{5/3}$; **63.** x^2; **65.** $(x + y)^{1/2}$;
67. $(3 - x)^{3/4}$

ÍNDICE

(*Continúa de las guardas anteriores*)

x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}	x	e^x	e^{-x}
0.880	2.4109	0.4148	3.700	40.447	0.0247	7.000	1096.6	0.0009
0.890	2.4351	0.4107	3.750	45.521	0.0235	7.050	1152.9	0.0009
0.900	2.4596	0.4066	3.800	44.701	0.0224	7.100	1212.0	0.0008
0.910	2.4843	0.4025	3.850	46.993	0.0213	7.150	1274.1	0.0008
0.920	2.5093	0.3985	3.900	49.402	0.0202	7.200	1339.4	0.0007
0.930	2.5345	0.3946	3.950	51.935	0.0193	7.250	1408.1	0.0007
0.940	2.5600	0.3906	4.000	54.598	0.0183	7.300	1480.3	0.0007
0.950	2.5857	0.3867	4.050	57.397	0.0174	7.350	1556.2	0.0006
0.960	2.6117	0.3829	4.100	60.340	0.0166	7.400	1636.0	0.0006
0.970	2.6379	0.3791	4.150	63.434	0.0158	7.450	1719.9	0.0006
0.980	2.6645	0.3753	4.200	66.686	0.0150	7.500	1808.0	0.0006
0.990	2.6912	0.3716	4.250	70.105	0.0143	7.550	1900.7	0.0005
1.000	2.7183	0.3679	4.300	73.700	0.0136	7.600	1998.8	0.0005
1.050	2.8576	0.3499	4.350	77.478	0.0129	7.650	2100.6	0.0005
1.100	3.0042	0.3329	4.400	81.451	0.0123	7.700	2208.3	0.0005
1.150	3.1582	0.3166	4.450	85.627	0.0117	7.750	2321.6	0.0004
1.200	3.3201	0.3012	4.500	90.017	0.0111	7.800	2440.6	0.0004
1.250	3.4903	0.2865	4.550	94.637	0.0106	7.850	2565.7	0.0004
1.300	3.6693	0.2725	4.600	99.484	0.0101	7.900	2697.3	0.0004
1.350	3.8574	0.2592	4.650	104.58	0.0096	7.950	2835.6	0.0004
1.400	4.0552	0.2466	4.700	109.95	0.0091	8.000	2981.0	0.0003
1.450	4.2631	0.2346	4.750	115.58	0.0087	8.050	3133.8	0.0003
1.500	4.4817	0.2231	4.800	121.51	0.0082	8.100	3294.5	0.0003
1.550	4.7114	0.2122	4.850	127.74	0.0078	8.150	3463.4	0.0003
1.600	4.9530	0.2019	4.900	134.29	0.0074	8.200	3641.0	0.0003
1.650	5.2069	0.1921	4.950	141.17	0.0071	8.250	3827.6	0.0003
1.700	5.4739	0.1827	5.000	148.41	0.0067	8.300	4023.9	0.0002
1.750	5.7545	0.1738	5.050	156.02	0.0064	8.350	4230.2	0.0002
1.800	6.0496	0.1653	5.100	164.02	0.0061	8.400	4447.1	0.0002
1.850	6.3597	0.1572	5.150	172.43	0.0058	8.450	4675.1	0.0002
1.900	6.6858	0.1496	5.200	181.27	0.0055	8.500	4914.8	0.0002
1.950	7.0286	0.1423	5.250	190.57	0.0052	8.550	5166.8	0.0002
2.000	7.3891	0.1353	5.300	200.34	0.0050	8.600	5431.7	0.0002
2.050	7.7678	0.1287	5.350	210.61	0.0047	8.650	5710.1	0.0002
2.100	8.1660	0.1225	5.400	221.41	0.0045	8.700	6002.9	0.0002
2.150	8.5847	0.1165	5.450	232.76	0.0043	8.750	6310.7	0.0002
2.200	9.0250	0.1108	5.500	244.69	0.0041	8.800	6634.2	0.0002
2.250	9.4875	0.1054	5.550	257.24	0.0039	8.850	6974.4	0.0001
2.300	9.9740	0.1003	5.600	270.43	0.0037	8.900	7332.0	0.0001
2.350	10.486	0.0954	5.650	284.29	0.0035	8.950	7707.9	0.0001
2.400	11.023	0.0907	5.700	298.87	0.0033	9.000	8103.1	0.0001
2.450	11.588	0.0863	5.750	314.19	0.0032	9.050	8518.5	0.0001
2.500	12.182	0.0821	5.800	330.30	0.0030	9.100	8955.3	0.0001
2.550	12.807	0.0781	5.850	347.23	0.0029	9.150	9414.4	0.0001
2.600	13.464	0.0743	5.900	365.04	0.0027	9.200	9897.1	0.0001
2.650	14.154	0.0707	5.950	383.75	0.0026	9.250	10405.	0.0001
2.700	14.880	0.0672	6.000	403.43	0.0025	9.300	10938.	0.0001
2.750	15.643	0.0639	6.050	424.11	0.0024	9.350	11499.	0.0001
2.800	16.445	0.0608	6.100	445.86	0.0022	9.400	12088.	0.0001
2.850	17.287	0.0578	6.150	468.72	0.0021	9.450	12708.	0.0001
2.900	18.174	0.0550	6.200	492.75	0.0020	9.500	13360.	0.0001
2.950	19.106	0.0523	6.250	518.01	0.0019	9.550	14045.	0.0001
3.000	20.086	0.0498	6.300	544.57	0.0018	9.600	14765.	0.0001
3.050	21.115	0.0474	6.350	572.49	0.0017	9.650	15522.	0.0001
3.100	22.198	0.0451	6.400	601.85	0.0017	9.700	16318.	0.0001
3.150	23.336	0.0429	6.450	632.70	0.0016	9.750	17154.	0.0001
3.200	24.533	0.0408	6.500	665.14	0.0015	9.800	18034.	0.0001
3.250	25.790	0.0388	6.550	699.24	0.0014	9.850	18958.	0.0001
3.300	27.113	0.0369	6.600	735.10	0.0014	9.900	19930.	0.0001
3.350	28.503	0.0351	6.650	772.78	0.0013	9.950	20952.	0.0000
3.400	29.964	0.0334	6.700	812.41	0.0012	10.000	22026.	0.0000
3.450	31.500	0.0317	6.750	854.06	0.0012			
3.500	33.115	0.0302	6.800	897.85	0.0011			
3.550	34.813	0.0287	6.850	943.88	0.0011			
3.600	36.598	0.0273	6.900	992.27	0.0010			
3.650	38.475	0.0260	6.950	1043.1	0.0010			

APLICACIONES SELECTAS

TABLA 2 LOGARITMOS NATURALES

x	*ln x*	*x*	*ln x*	*x*	*ln x*	*x*	*ln x*
0.050	−2.9957	3.350	1.2089	6.650	1.8946	9.950	2.2976
0.100	−2.3026	3.400	1.2238	6.700	1.9021	10.000	2.3026
0.150	−1.8971	3.450	1.2384	6.750	1.9095	10.500	2.3514
0.200	−1.6094	3.500	1.2528	6.800	1.9169	11.000	2.3979
0.250	−1.3863	3.550	1.2669	6.850	1.9242	11.500	2.4423
0.300	−1.2040	3.600	1.2809	6.900	1.9315	12.000	2.4849
0.350	−1.0498	3.650	1.2947	6.950	1.9387	12.500	2.5257
0.400	−0.9163	3.700	1.3083	7.000	1.9459	13.000	2.5649
0.450	−0.7985	3.750	1.3217	7.050	1.9530	13.500	2.6027
0.500	−0.6932	3.800	1.3350	7.100	1.9601	14.000	2.6391
0.550	−0.5978	3.850	1.3481	7.150	1.9671	14.500	2.6741
0.600	−0.5108	3.900	1.3610	7.200	1.9741	15.000	2.7080
0.650	−0.4308	3.950	1.3737	7.250	1.9810	15.500	2.7408
0.700	−0.3567	4.000	1.3863	7.300	1.9879	16.000	2.7726
0.750	−0.2877	4.050	1.3987	7.350	1.9947	16.500	2.8034
0.800	−0.2231	4.100	1.4110	7.400	2.0015	17.000	2.8332
0.850	−0.1625	4.150	1.4231	7.450	2.0082	17.500	2.8622
0.900	−0.1054	4.200	1.4351	7.500	2.0149	18.000	2.8904
0.950	−0.0513	4.250	1.4469	7.550	2.0215	18.500	2.9178
1.000	−0.0000	4.300	1.4586	7.600	2.0281	19.000	2.9444
1.050	0.0488	4.350	1.4702	7.650	2.0347	19.500	2.9704
1.100	0.0953	4.400	1.4816	7.700	2.0412	20.000	2.9957
1.150	0.1398	4.450	1.4929	7.750	2.0477	20.500	3.0204
1.200	0.1823	4.500	1.5041	7.800	2.0541	21.000	3.0445
1.250	0.2231	4.550	1.5151	7.850	2.0605	21.500	3.0681
1.300	0.2624	4.600	1.5260	7.900	2.0668	22.000	3.0910
1.350	0.3001	4.650	1.5369	7.950	2.0732	22.500	3.1135
1.400	0.3365	4.700	1.5476	8.000	2.0794	23.000	3.1355
1.450	0.3716	4.750	1.5581	8.050	2.0857	23.500	3.1570
1.500	0.4055	4.800	1.5686	8.100	2.0919	24.000	3.1781
1.550	0.4382	4.850	1.5790	8.150	2.0980	24.500	3.1987
1.600	0.4700	4.900	1.5892	8.200	2.1041	25.000	3.2189
1.650	0.5008	4.950	1.5994	8.250	2.1102	25.500	3.2387
1.700	0.5306	5.000	1.6094	8.300	2.1162	26.000	3.2581
1.750	0.5596	5.050	1.6194	8.350	2.1222	26.500	3.2771
1.800	0.5878	5.100	1.6292	8.400	2.1282	27.000	3.2958
1.850	0.6152	5.150	1.6390	8.450	2.1342	27.500	3.3142
1.900	0.6418	5.200	1.6486	8.500	2.1401	28.000	3.3322
1.950	0.6678	5.250	1.6582	8.550	2.1459	28.500	3.3499
2.000	0.6932	5.300	1.6677	8.600	2.1517	29.000	3.3673
2.050	0.7178	5.350	1.6771	8.650	2.1575	29.500	3.3844
2.100	0.7419	5.400	1.6864	8.700	2.1633	30.000	3.4012
2.150	0.7655	5.450	1.6956	8.750	2.1690	25.000	3.2189
2.200	0.7884	5.500	1.7047	8.800	2.1747	30.000	3.4012
2.250	0.8109	5.550	1.7138	8.850	2.1804	35.000	3.5553
2.300	0.8329	5.600	1.7228	8.900	2.1860	40.000	3.6889
2.350	0.8544	5.650	1.7316	8.950	2.1916	45.000	3.8067
2.400	0.8755	5.700	1.7405	9.000	2.1972	50.000	3.9120
2.450	0.8961	5.750	1.7492	9.050	2.2028	55.000	4.0073
2.500	0.9163	5.800	1.7578	9.100	2.2083	60.000	4.0943
2.550	0.9361	5.850	1.7664	9.150	2.2137	65.000	4.1744
2.600	0.9555	5.900	1.7749	9.200	2.2192	70.000	4.2485
2.650	0.9745	5.950	1.7834	9.250	2.2246	75.000	4.3175
2.700	0.9932	6.000	1.7918	9.300	2.2300	80.000	4.3820
2.750	1.0116	6.050	1.8000	9.350	2.2354	85.000	4.4427
2.800	1.0296	6.100	1.8083	9.400	2.2407	90.000	4.4998
2.850	1.0473	6.150	1.8164	9.450	2.2460	95.000	4.5539
2.900	1.0647	6.200	1.8245	9.500	2.2513	100.000	4.6052
2.950	1.0818	6.250	1.8326	9.550	2.2565	200.000	5.2983
3.000	1.0986	6.300	1.8405	9.600	2.2617	300.000	5.7038
3.050	1.1151	6.350	1.8484	9.650	2.2669	400.000	5.9915
3.100	1.1314	6.400	1.8563	9.700	2.2721	500.000	6.2146
3.150	1.1474	6.450	1.8641	9.750	2.2773	600.000	6.3969
3.200	1.1631	6.500	1.8718	9.800	2.2824		
3.250	1.1786	6.550	1.8795	9.850	2.2875		
3.300	1.1939	6.600	1.8871	9.900	2.2925		