BIBLIOTECA JUVENIL ILUSTRADA

Luz María Marván

Andrea y las fracciones

espejo de urania

BIBLIOTECA JUVENIL ILUSTRADA

Luz María Marván

Andrea y las fracciones

Santillana

Libros del Rincón

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA | SEP

Sistema de clasificación Melvil Dewey DGMyME

513.26
M2
2002 Marván, Luz María
Andrea y las fracciones / Luz María Marván; ilus. Mauricio Gómez. – México : SEP : Santillana, 2002.
64 p. : il. – (Libros del Rincón)

ISBN: 970-18-9812-5 SEP (obra completa)
ISBN: 970-18-9815-X SEP

1. Fracciones. 2. Aritmética. I. Gómez, Mauricio, il. II. t. III. Ser.

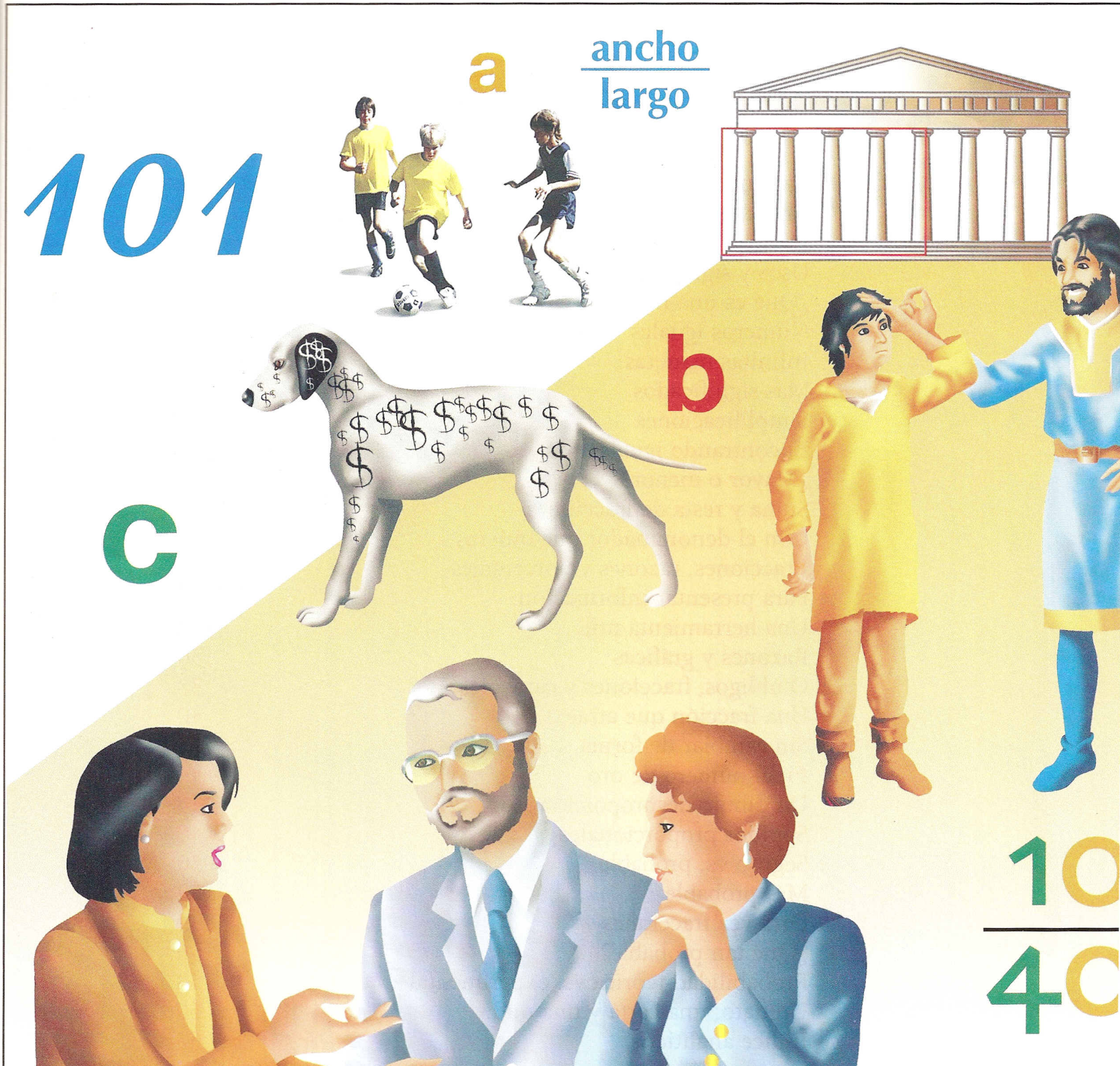
Dirección editorial: Antonio Moreno Paniagua
Producción editorial: Diagrama Casa Editorial, S.C.

Primera edición SEP / Editorial Santillana, 2002

ISBN: 970-29-0029-8 Editorial Santillana (obra completa)
ISBN: 970-29-0296-7 Editorial Santillana
ISBN: 970-18-9812-5 SEP (obra completa)
ISBN: 970-18-9815-X SEP

Impreso en México

Contenido


101
a
ancho
largo
b
c
10
40

Presentación

En este volumen de la Biblioteca Juvenil Ilustrada se presenta de forma clara y divertida el mundo de las fracciones: qué son, para qué sirven, cómo se utilizan en la vida cotidiana, las formas para sumarlas y restarlas y, lo más importante, cómo entenderlas sin temor.

El objetivo de la Biblioteca Juvenil Ilustrada es poner en manos de todos los jóvenes libros que despierten su interés en las materias más variadas, desde matemáticas y química, hasta gramática y literatura, desde las leyes del universo hasta los problemas más cotidianos. Libros que los hagan pensar y entusiasmarse, que los ayuden a estudiar y a resolver sus dudas.

Para llevar a cabo este proyecto hemos reunido a más de 60 autores, todos ellos reconocidos especialistas en sus áreas de estudio e investigación, divulgadores deseosos de contagiar su entusiasmo y llevar de la mano a los estudiantes por un camino lleno de sorpresas.

La Biblioteca Juvenil Ilustrada es una visión fantástica de la ciencia, la literatura y el pensamiento mexicanos, escrita por quienes día a día investigan en laboratorios o imparten clases en escuelas y universidades.

Esperamos que la Biblioteca Juvenil Ilustrada contribuya a que los estudiantes se familiaricen con las distintas áreas del conocimiento y lleguen a decir "si así es la química —o la historia o la literatura—, yo quiero dedicarme a eso en el futuro".

Los editores

ANDREA Y LAS FRACCIONES

Un viernes en la noche, Andrea llegó a su cuarto y decidió leer de nuevo la tarea de matemáticas.

1. Si Juan se come $\frac{101}{404}$ de un pastel y Luis se come $\frac{1}{4}$ del pastel, ¿cuál de los dos comió más pastel?

2. Escribe tres fracciones iguales a $\frac{101}{404}$.

3. Haz la siguiente resta de fracciones: $\frac{101}{404} - \frac{1}{4}$

—Absurdo —pensó Andrea—. ¿Quién va a partir un pastel en 404 partes exactamente iguales para después comerse 101?

—Y dale con los cuatrocientos-cuatroavos. ¿Querrán decir que escriba tres igual de absurdas?

Andrea cerró los ojos y trató de imaginarse cortando un pastel en 404 rebanadas.

—Imposible —reflexionó— cada una sería tan delgada que ni siquiera podría servirla. ¿A quién le importan 101 de esas 404 rebanaditas que ni existen?

$$\xcancel{\frac{101}{404} - \frac{1}{4} = \frac{100}{400}}$$

Ésta por lo menos está fácil: 101 menos 1 son 100 y 404 menos 4 son 400. Así que el resultado es $\frac{100}{400}$.

—¿Ya acabaste? —le preguntó su hermana Abril.

—No. Sólo he hecho una y con las demás no puedo. Mira: la única que hice fue la resta.

—¡Ay, Andrea! —expresó Abril— . En serio no das una. $\frac{101}{404}$ menos $\frac{1}{4}$ no es $\frac{100}{400}$. Así no se hacen las restas de fracciones.

Abril se fue y Andrea intentó leer de nuevo la tarea.

—Mugres fracciones —dijo— y lo peor es que si no entrego la tarea, otra vez repruebo matemáticas.

Sin saber por qué, de repente sintió ganas de llorar.

—¿Y si no hago la tarea? ¿Y si les aviso a mis papás que no quiero estudiar? —se preguntó—. Sin darse cuenta, tomó la hoja de la tarea y empezó a jugar con ella. Le fue haciendo dobleces y la convirtió en un avioncito de papel. Finalmente, la echó por la ventana y se acostó en la cama.

Se quedó dormida y, para su mala suerte, tuvo un sueño con fracciones. Todas iban en el avión que echó por la ventana y la más fea alcanzó a gritarle: "No nos tires. También somos razones". El grito la despertó.

—¡Qué raro! —pensó— juraría que fue real que una fracción gritó.

"Soy una razoooooooón"

Se acordó de la tarea y pensó hacer otro intento. Pero era demasiado tarde: ya la había echado por la ventana. No supo qué hacer y llamó a Abril.

$$\frac{101}{404}$$

—¿Qué pasa, Andrea? —preguntó Abril— ¿Ya acabaste la tarea?

Andrea ni siquiera contestó la pregunta de su hermana.

—Lo que quiero —afirmó Andrea— es preguntarte si a ti alguna vez te han hablado las fracciones. Porque a mí $\frac{101}{404}$ acaba de gritarme.

—Yo creo que te estás volviendo loca. Mejor por hoy deja en paz las fracciones. ¿Por qué no te pones a oír música para distraerte?

A Andrea le gustó la sugerencia y sacó de su mochila un disco que le habían prestado. Iba a ponerlo cuando empezó a oír un ruido raro. Era como un murmullo que salía de la mochila. Pensó que realmente debía estar cansada porque de lo contrario no andaría imaginando que alguien hablaba en la mochila.

—Sí, estás cansada —dijo la voz en la mochila—. Pero de todos modos no soy imaginaria.

$$\frac{101}{404}$$

Andrea se asustó mucho, pero la curiosidad pudo más que el susto y revisó qué había en su mochila. Sentada, muy campante entre un libro y un cuaderno, estaba la fracción $\frac{101}{404}$.

—No te asustes —dijo la fracción—. Lo que pasa es que no has aprendido a oírnos. Ya te dije que también soy una razón.

Andrea no supo qué decir y se quedó callada.

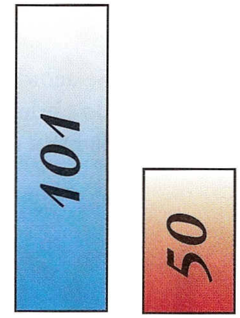
—No importa —comentó ofendida la fracción—. Si no quieres escucharme no me escuches. Pero sólo quiero hacerte una pregunta: ¿101 es mucho o poco?

Andrea iba a decir que mucho, pero recordó que el regalo que le gustaría darle a su papá costaba casi 400 pesos y entonces ya no supo si 101 era mucho.

Y tú, lector, ¿qué opinas? ¿101 es mucho o poco?

¿Mucho o poco?

—Mira, Andrea —dijo la fracción $\frac{101}{404}$—, fíjate en esta noticia del periódico. Dice que hubo una campaña de salud en la que vacunaron a 101 niños en una colonia y a 50 en otra. Si el objetivo era vacunar a la mayor parte de los niños en cada una de las dos colonias, ¿podrías decir en cuál de las dos se cumplió mejor el objetivo?

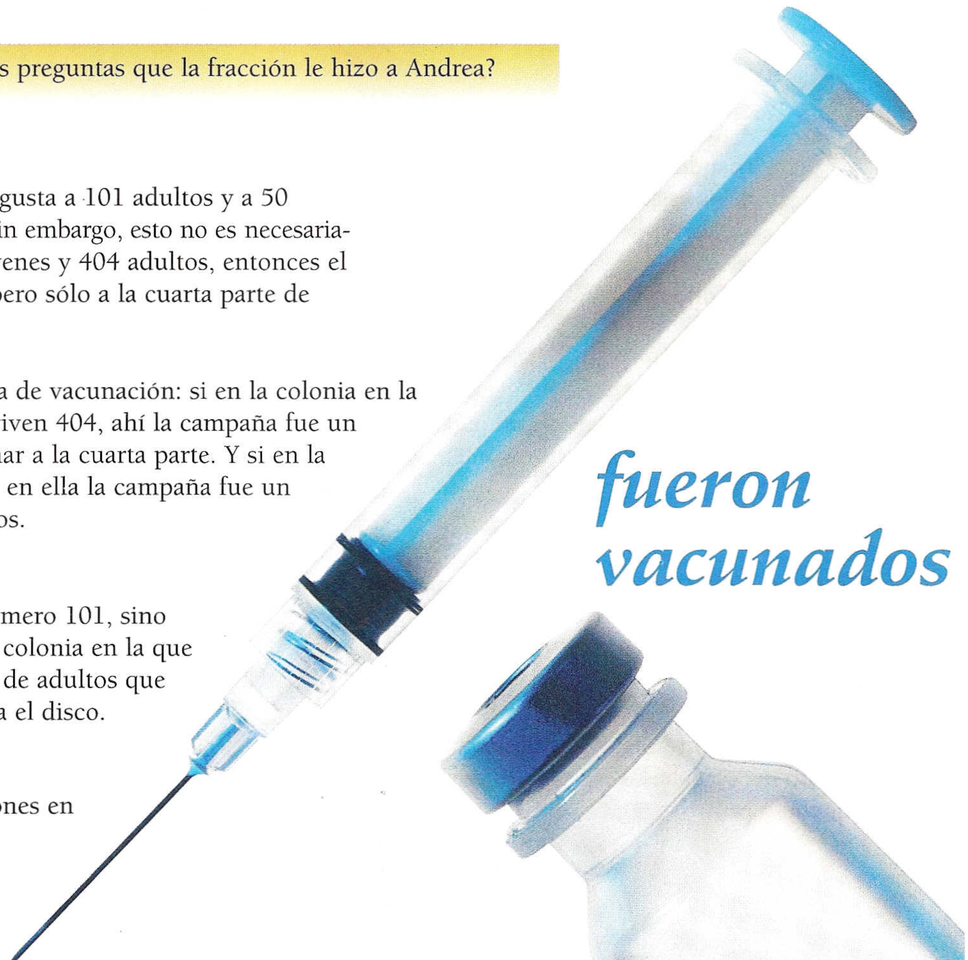


101 niños

Andrea iba a decir que en la que se vacunaron 101 niños, pero antes de que contestara siguió hablando la fracción.

—O si quieres te pregunto de otro modo: cerca de aquí hay un pueblo en el que el disco que tienes en la mano les gusta a 101 adultos y a 50 jóvenes. ¿Podrías decir que en ese pueblo este disco les gusta más a los adultos que a los jóvenes?

¿Qué respuesta darías tú a las preguntas que la fracción le hizo a Andrea?



Podría pensarse que el disco que en un poblado les gusta a 101 adultos y a 50 jóvenes tiene mayor éxito entre la población adulta. Sin embargo, esto no es necesariamente cierto, porque si en él viven solamente 55 jóvenes y 404 adultos, entonces el disco les gusta a casi todos los jóvenes del pueblo, pero sólo a la cuarta parte de los adultos.

Y lo mismo sucede con la campaña de vacunación: si en la colonia en la que 101 niños fueron vacunados viven 404, ahí la campaña fue un fracaso porque sólo se logró vacunar a la cuarta parte. Y si en la que vacunaron a 50 sólo viven 55, en ella la campaña fue un éxito porque vacunaron a casi todos.

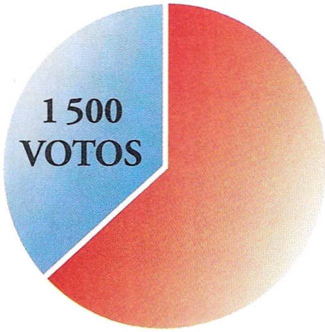
fueron vacunados

En situaciones como éstas lo importante no es el número 101, sino compararlo con el número de niños que viven en la colonia en la que se hizo la campaña de vacunación, o con el número de adultos que hay en el pueblo en el que se analiza qué tanto gusta el disco.

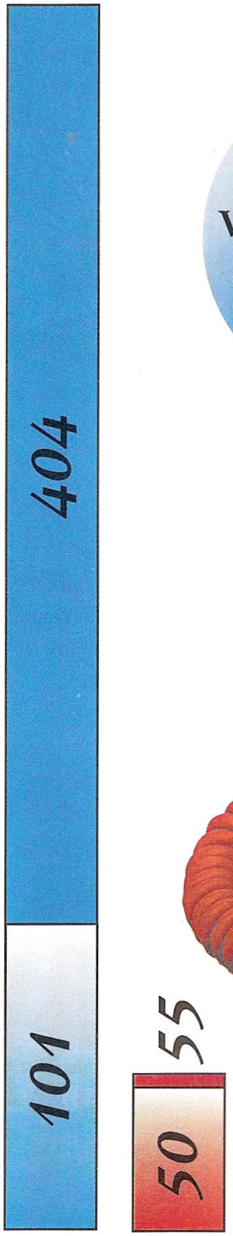
En pocas palabras, existen situaciones en las cuales lo importante no es el "tamaño" de una cantidad, sino la relación que tiene con otra.

Si dices que en una elección para presidente municipal, el candidato Fulano tuvo 1 500 votos, prácticamente no estás informando nada. Porque no es lo mismo tener, por ejemplo, 1 500 votos de un total de 2 000, que 1 500 de 4 500. En este caso lo importante sería comparar la cantidad de votos que obtuvo el candidato con el total de votos, o bien con la que tuvieron otros participantes.

1 500
de un total
de 2 000



1 500
de un total
de 4 500



Lo mismo pasa si alguien dice que su hijo creció cinco centímetros. El dato nada dice acerca de cómo está creciendo, porque tal vez creció cinco centímetros en dos meses y entonces creció mucho, pero quizá creció cinco centímetros en siete años y, por lo tanto, creció muy poco. En dicha situación, lo importante sería relacionar la cantidad de centímetros que creció el hijo con la cantidad de tiempo que tardó en crecerlos.

Y si escuchas que en un país hay 4 millones de teléfonos, no puedes darte idea de si las necesidades de telefonía están bien cubiertas. Pues si se trata de un país con 8 millones de familias, la mitad no tiene teléfono, pero si es un país que tiene 2 millones de familias, cada una tiene en promedio dos teléfonos.

4 000 000 millones
8 000 000 millones

Encuentra otra situación en la que lo importante no sea el tamaño de una cantidad, sino la relación que tiene con otra.

Usos y significados de los racionales

Si leíste el primer libro de matemáticas de esta colección, ya sabes que medir no es otra cosa que comparar tamaños. Cuando los hombres de la antigüedad medían su estatura usando una vara y decían que medían, digamos, dos varas y un quinto, lo que hacían en realidad era comparar su tamaño con el de la vara. Y si medían el largo de un terreno mediante una cuerda y decían que dicho largo era "dos cuerdas" o "cuatro cuerdas y tres octavos", entoces estaban comparando el largo del terreno con el de la cuerda.

En algunas civilizaciones, estas situaciones fueron las que ocasionaron la necesidad de trabajar con cantidades no enteras y dieron origen a la invención de números como $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{35}{8}$ o $\frac{4}{8}$, es decir, a números de la forma:

$$\frac{\text{número entero}}{\text{número entero}}$$

Tal vez ya sabes que a los números que pueden escribirse así los matemáticos los llaman *racionales*. Pero quizá no sepas que tienen distintos usos y significados.

Un número como $\frac{3}{4}$ se usa para referirnos a una "fracción" o parte de algo: si alguien parte un chocolate en cuatro pedazos iguales y se come tres de ellos, al decir "me comí $\frac{3}{4}$ del chocolate" está diciendo qué parte del chocolate se comió. Asimismo, se utiliza para referirse a un peso, a una longitud o a una distancia: "pesa $\frac{3}{4}$ de kilo" o "caminé $\frac{3}{4}$ de kilómetro". Pero es raro que alguien diga "pesa $\frac{101}{404}$ de kilo" o "caminé $\frac{101}{404}$ de kilómetro" y más raro aún sería partir un chocolate en 404 partes exactamente iguales, comerse 101 y después decir "me comí $\frac{101}{404}$ del chocolate".

Sin embargo, si en un poblado hay 404 adultos y a 101 les gusta un disco, para referirnos a la parte de la población adulta a la que le gusta el disco, podemos decir que dicha parte es $\frac{101}{404}$. Al escribir $\frac{101}{404}$ estamos, además, relacionando el número 101 con el número 404; así, podemos decir que los números racionales son también una relación entre dos cantidades.

Por otra parte, cuando un pastel se reparte entre 4 personas, de modo que a cada una le toque la misma cantidad, cada persona recibe $\frac{1}{4}$ de pastel. En ese sentido, el número $\frac{1}{4}$ es la división de 1 entre 4 y es también el número obtenido al hacer dicha división.

$$\frac{101}{404}$$

"Sí, Andrea, sirvo para relacionar 101 con 404"

Igualmente, en el supuesto caso de que algún día necesitaras repartir 3 pasteles iguales entre 4 personas, de modo que a cada una le tocara la misma cantidad; para hacer dicho reparto, podrías partir cada pastel en cuartos, de manera que se obtuvieran doce pedazos iguales y dar a cada invitado tres pedazos. Como cada pedazo es $\frac{1}{4}$ de pastel, a cada persona le tocarían entonces $\frac{3}{4}$ de pastel. En este caso, $\frac{3}{4}$ es la división de 3 entre 4 y el número obtenido de dicha división.

$\frac{3}{4}$ es la división de 3 entre 4 y el número obtenido de dicha división.

En pocas palabras, los números racionales son también una división y el número obtenido al hacerla.

Ahora que sabes los diferentes usos y significados de los números racionales, interpreta de varias maneras diferentes el número $\frac{5}{8}$.

¿QUÉ ES UNA RAZÓN?

En el tema "¿Mucho o poco?" hablamos de algunas situaciones en las que lo importante no es "el tamaño" de una cantidad, sino compararla o relacionarla con otra. Y en el tema "Usos y significados de los racionales" mencionamos que un número racional es, entre otras cosas, una comparación o relación entre dos cantidades.

Cuando un número como $\frac{101}{404}$ se usa para comparar o relacionar los números 101 y 404, decimos que es una razón.

Si buscas en el *Diccionario de la Lengua Española* el significado de la palabra razón, encontrarás que es, entre otras cosas, "el resultado de una comparación entre dos cantidades".

El diccionario también habla de dos tipos de razones: razón por diferencia y razón por cociente. En el caso de la razón por diferencia, la comparación se hace analizando cuántas unidades hay entre un número y otro. Si los números que se comparan son, por ejemplo, 1 y 5, podemos decir que 1 es 4 unidades menor que 5, que 1 es 4 menos que 5 o que 5 es 4 más que 1; por eso decimos que la razón por diferencia de 1 y 5 es 4.

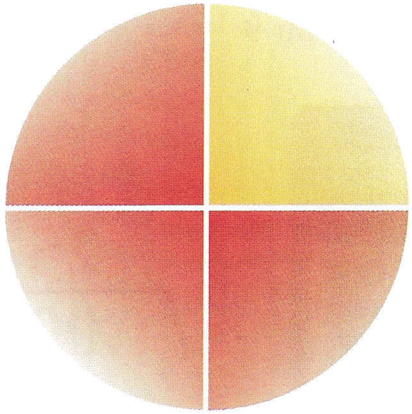
Pero al comparar los números 1 y 5 también podríamos decir, por ejemplo, que 1 es la quinta parte de 5; es decir que 1 es $\frac{1}{5}$ de 5. Cuando la comparación se hace de esta forma, decimos que la razón por cociente de 1 y 5 es $\frac{1}{5}$. Asimismo, al comparar, por ejemplo, los números 3 y 4, podríamos decir que 3 es tres cuartas partes del número 4, esto es, que 3 es $\frac{3}{4}$ de 4 y por eso decimos que la razón por cociente de 3 y 4 es $\frac{3}{4}$.

Cuando en la primaria trabajabas con números como $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{5}$ o $\frac{21}{54}$, es decir, con números de la forma

$$\frac{\text{número entero}}{\text{número entero}}$$

no los llamabas racionales; les decías “fracciones” o “quebrados” y esto es bastante lógico porque en primaria un número como $\frac{3}{4}$ se usa casi siempre en situaciones en las que algo —por ejemplo: una naranja, una hoja de papel o un pastel—, se parte, se fracciona o se quiebra en cuatro partes iguales y se considera a tres de ellas.

$$\frac{3}{4}$$



Como se mencionó en el tema anterior, un número como $\frac{3}{4}$ también es, entre otras cosas, una división y el número que se obtiene al hacerla. Y como al resultado de una división se le llama cociente, también podía haberse decidido, por ejemplo, que a los números que pueden escribirse en la forma

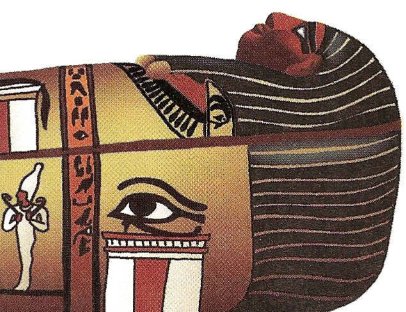
$$\frac{\text{número entero}}{\text{número entero}}$$

se les llamara *números cociente* en lugar de racionales.

Ahora que ya sabes que estos números sirven también para relacionar o comparar cantidades y sabes además que a esta relación o comparación se le llama razón, ¿entiendes por qué se les llama números racionales? ¿Por qué crees que a una razón como $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$ o $\frac{101}{404}$ se le llame razón por cociente?

$$\frac{101}{404}$$

“Soy una razón”

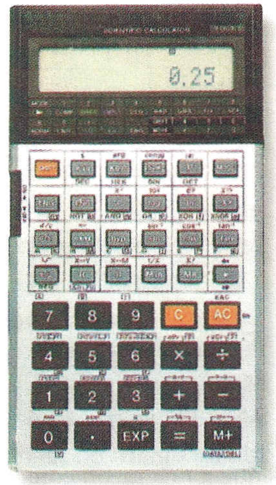


¿Sabías que los antiguos griegos sólo llamaban números a los enteros; a los racionales no los denominaban números, sino razones? Trabajaban mucho con ellos y, por lo general, no los veían como fracciones, es decir, no los veían como el resultado obtenido al “fraccionar” la unidad sino como razones, esto es, como la relación o comparación de dos números; y muchas veces los dos números relacionados eran longitudes de dos segmentos. En cambio los antiguos egipcios, que también los usaban mucho, por lo general los veían más como fracciones que como razones.

NÚMEROS IGUALES

Ahora que ya sabes que los números como $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{12}$ y $\frac{9}{36}$ tienen varios usos y significados, puedes entender que $\frac{9}{36}$ pueda leerse, por ejemplo, como "9 treintaiseisavos", "9 de un total de 36", "la relación que hay entre los números 9 y 36", "9 entre 36" o "el número que se obtiene al dividir 9 entre 36".

Supón que lo lees de esta última manera. Ahora utiliza tu calculadora para dividir 9 entre 36. Después interpreta como división cada uno de los otros tres números ($\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$ y $\frac{3}{12}$) y también usa tu calculadora para obtener las representaciones decimales de estas divisiones:



$$\begin{array}{r} .25 \\ 4\,\overline{)\,1.00} \\ 20 \\ 0 \end{array}$$

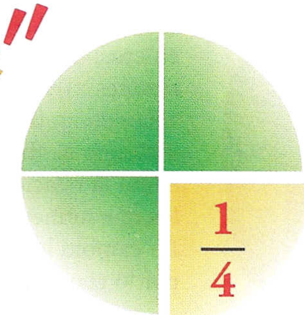
$$\frac{9}{36}$$

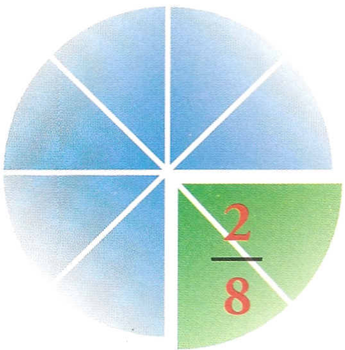
"Ya viste 36, soy tu cuarta parte"

$$\begin{array}{r} .25 \\ 8\,\overline{)\,2.00} \\ 40 \\ 0 \end{array} = \begin{array}{r} .25 \\ 12\,\overline{)\,3.00} \\ 0\ 60 \\ 00 \end{array}$$

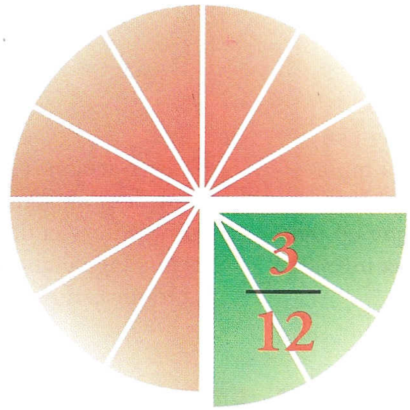
Verás que la expresión decimal de estas divisiones es la misma: 0.25. Esto se debe a que los números $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{9}{36}$ y 0.25 son en realidad el mismo, pero escrito de diferente manera. Lo mismo sucede con cualquiera de las divisiones que están en esta página, cuyo resultado es 0.25; pues todas ellas son la división $\frac{1}{4}$, pero escrita de diferentes formas.

Ahora interpreta $\frac{1}{4}$ como fracción: léelo diciendo "un cuarto" y piensa, por ejemplo, que lo estás usando para referirte a la cuarta parte de un círculo, es decir, a la parte que se obtiene al fraccionarlo en 4 partes iguales y considerar una de ellas. En este caso, $\frac{1}{4}$ de círculo sería cada una de las partes que se observan en la figura.

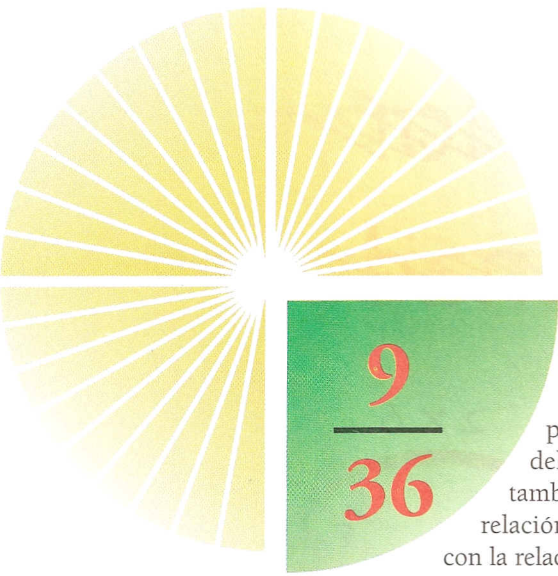




Si interpretas del mismo modo $\frac{2}{8}$, esto es, si lo lees como "2 octavos" y lo usas para referirte a la porción del círculo que se obtiene al dividirlo en 8 partes iguales y considerar 2 de ellas, $\frac{2}{8}$ de círculo sería la fracción que se separó del círculo en la figura de la izquierda.



Igualmente, si interpretas $\frac{3}{12}$ como fracción, leyéndolo como "3 doceavos", $\frac{3}{12}$ de círculo sería la fracción que se separó del círculo en la figura de la izquierda, y si lees $\frac{9}{36}$ como "9 treintaiseisavos", $\frac{9}{36}$ sería la fracción que se separó del círculo en la figura de abajo.



Como puedes ver, las cuatro fracciones de círculo: $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{12}$ y $\frac{9}{36}$, son iguales. Esto se debe, nuevamente, a que los números $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{12}$ y $\frac{9}{36}$ son en realidad el mismo pero escrito de diferente forma. Lo mismo acontece con todas las fracciones escritas en esta página: todas son la fracción $\frac{1}{4}$, escrita de diferentes formas.

¿Qué pasa si interpretas $\frac{1}{4}$ como la relación que hay entre los números 1 y 4? Al comparar estos dos números podrías decir, por ejemplo, que el primero es la cuarta parte del segundo. Esta relación es la misma que hay entre los números 2 y 8, pues con ellos también sucede que el primero es la cuarta parte del segundo. Asimismo, coincide con la relación entre los números 3 y 12: el primero es la cuarta parte del segundo. Sucede lo mismo con la relación entre los números 9 y 36.

Así, cuando $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{12}$ y $\frac{9}{36}$ se interpretan como razones, esto es, cuando se usan para comparar o relacionar los números 1 y 4, 2 y 8, 3 y 12 o 9 y 36, vemos que en los cuatro casos la relación es la misma: el primero de los dos números es la cuarta parte del otro. Esto es, las razones $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{12}$ y $\frac{9}{36}$ son la misma, pero escritas de diferente modo. Algo idéntico ocurre con todas las razones escritas en estas páginas: todas ellas son la misma razón que $\frac{1}{4}$ porque en todas ellas el número de arriba es la cuarta parte (un cuarto) del de abajo.

$$\frac{9}{36}$$

¿Sabías que la palabra equivalente significa "igual valor"? Por eso, cuando dos razones son la misma, dos divisiones tienen el mismo resultado, o dos fracciones son iguales, decimos que son equivalentes.

¿Cuántas fracciones equivalentes a $\frac{1}{4}$ crees que haya? ¿$\frac{101}{404}$ es una de ellas?

Infinitas maneras

Andrea le preguntó a $\frac{101}{404}$ cuántas fracciones iguales a ella había, y la fracción le contestó que una infinidad.

—¿Infinidad quiere decir muchísimas?

—No —dijo la fracción—. Mucho más que muchísimas. Infinidad quiere decir que la cantidad no tiene fin. Si alguien quisiera hacer una lista de todas las fracciones iguales a mí, no terminaría jamás. Y lo mismo sucede con cualquier otra fracción: la cantidad de fracciones iguales a ella es tan grande que no tiene fin. Por ello, cualquier fracción puede escribirse de una infinidad de maneras diferentes.

En las fracciones, al número de arriba se le llama *numerador* y al de abajo *denominador*. Y si tienes una fracción y multiplicas el numerador y el denominador por el mismo número, obtienes un racional igual al original siempre y cuando el número por el que multiplicas no sea el cero.

$$\frac{101 \longrightarrow \text{numerador}}{404 \longrightarrow \text{denominador}}$$

Por ejemplo, si multiplicas el numerador y el denominador de $\frac{2}{5}$ por 6, obtienes

$$\frac{2 \times 6}{5 \times 6}$$

es decir,

$$\frac{12}{30}$$

y este número es el mismo que $\frac{2}{5}$

$$\overset{2 \times 6}{\frown}$$
$$\frac{2}{5} = \frac{12}{30}$$
$$\underset{5 \times 6}{\smile}$$

—¿Y cómo puedo estar segura —preguntó Andrea— de que realmente $\frac{2}{5}$ y $\frac{12}{30}$ son el mismo número?

—Hay varias posibles estrategias. Una de ellas es interpretarlos como división y ver que en los dos casos su expresión decimal es la misma.

Andrea sacó su calculadora, dividió 2 entre 5, y vio que la expresión decimal de $\frac{2}{5}$ es 0.4. Después, dividió 12 entre 30 y vio que $\frac{12}{30}$ también es 0.4.

—Quién iba a imaginarse —pensó— que $\frac{2}{5}$, $\frac{12}{30}$ y 0.4 son el mismo número, pero escrito de diferente forma.

Lo mismo pasa, por ejemplo, si multiplicas el numerador y el denominador de $\frac{12}{30}$ por 1.5. Obtienes:

$$\frac{12 \times 1.5}{30 \times 1.5}$$

es decir,

$$\frac{18}{45}$$

$$\overset{12 \times 1.5}{}$$

$$\frac{12}{30} = \frac{18}{45}$$

$$\underset{30 \times 1.5}{}$$

y $\frac{18}{45}$ es el mismo número que $\frac{12}{30}$, y también el mismo que $\frac{2}{5}$. Si piensas en cada uno como división y la haces con calculadora, verás que en los tres casos la expresión decimal de la división es 0.4.

Andrea quiso saber si el truco funcionaba al multiplicar el numerador y el denominador de $\frac{2}{5}$ por 3.7 e hizo las multiplicaciones con su calculadora:

$$\overset{2 \times 3.7}{}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{7.4}{18.5}$$

$$\underset{5 \times 3.7}{}$$

$2 \times 3.7 = 7.4$

$5 \times 3.7 = 18.5$

Se le hizo raro que $\frac{2}{5}$ y $\frac{7.4}{18.5}$ fueran el mismo número y para comprobarlo interpretó a $\frac{7.4}{18.5}$ como división, dividió 7.4 entre 18.5 y vio que, nuevamente, la expresión decimal era 0.4.

—Sí, es cierto —aseguró entonces— que $\frac{2}{5}$ es $\frac{7.4}{18.5}$, porque los dos son 0.4. Pero $\frac{7.4}{18.5}$ no es un número racional, porque su numerador y su denominador no son números enteros.

—Estás equivocada Andrea —dijo $\frac{101}{404}$—. Aunque 7.4 y 18.5 no son números enteros, $\frac{7.4}{18.5}$ sí es un racional. Los números racionales no son sólo los que están escritos en la forma

$$\frac{\textit{número entero}}{\textit{número entero}}$$

también los que pueden escribirse así y $\frac{7.4}{18.5}$, que es 0.4 (cuatro décimos), puede escribirse como $\frac{4}{10}$ o también, por ejemplo, como $\frac{2}{5}$, $\frac{12}{30}$ o $\frac{18}{45}$ y de una infinidad de maneras más.

Como sabes, hay una infinidad de maneras diferentes de escribir $\frac{2}{5}$. En algunas de ellas, el numerador y el denominador son números enteros. Pero en otras, uno de los dos o los dos no son enteros.

¿Cuántas maneras distintas crees que haya de escribir $\frac{2}{5}$ de modo que ni el numerador ni el denominador sean enteros? ¿Cuántas crees que haya en las que el numerador sí sea entero, pero el denominador no lo sea?

MÁS SIGNIFICADOS

Supón que en una escuela en la que hay 36 maestros, uno de cada cuatro está agripado. Si un maestro de cada 4 está agripado, ¿cuántos de cada 8 están agripados?, ¿cuántos de cada 12? y ¿cuántos de los 36 maestros?

Te habrás dado cuenta de que la parte agripada es $\frac{9}{36}$ o, escrito de otra forma, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$ o $\frac{3}{12}$. Por otra parte, quizá te percataste de que los agripados son 9 de un total de 36 o, dicho de otro modo, 1 de cada 4, 2 de cada 8 y 3 de cada 12.

"1 de cada 4" es lo mismo que "2 de cada 8"

Esto sugiere una nueva manera de interpretar los números racionales: $\frac{1}{4}$ no solamente es 1 cuarto, 1 entre 4, 1 de 4 y la relación que hay entre 1 y 4, sino también 1 de cada 4.

Y lo mismo sucede con $\frac{2}{8}$. Este número no sólo es 2 octavos, 2 de 8, 2 entre 8 y la relación que existe entre 2 y 8; también es 2 de cada 8. Igualmente, $\frac{3}{12}$ es, entre otras cosas, 3 de cada 12 y $\frac{9}{36}$ es 9 de cada 36.

"2 de cada 8" es lo mismo que "3 de cada 12"

A pocas personas les cuesta trabajo darse cuenta de que "1 de cada 4" es lo mismo que "2 de cada 8". Sin embargo, a muchas se les dificulta percatarse de que "2 de cada 8" es lo mismo que "3 de cada 12". Por otra parte, tampoco es fácil darse cuenta, a simple vista, de que "2 de cada 8" es lo mismo que "9 de cada 36".

"2 de cada 8" es lo mismo que "9 de cada 36"

Pero si escribes estas frases como números racionales, esto es, si las escribes como $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{12}$ y $\frac{9}{36}$ y tomas en cuenta que estos cuatro números son el mismo, es más fácil darte cuenta de que las cuatro frases dicen en realidad lo mismo: son equivalentes.

$\frac{101}{404}$ "Sí, Andrea, también soy 101 de cada 404"

Supón que en una reunión de la ONU, una delegada informa que en su país 4 de cada 5 niños van a la escuela. Otra dice que en el suyo van a la escuela 8 de cada 10 niños, y una tercera notifica que en el suyo los que van a la escuela son 12 de cada 15. Es decir, en un país van a la escuela $\frac{4}{5}$ de los niños, en otro $\frac{8}{10}$ y en el tercero $\frac{12}{15}$.

Observando la ilustración, ¿puedes darte cuenta de que las frases 4 de cada 5, 8 de cada 10 y 12 de cada 15 dicen en realidad lo mismo?

Si la escuela tiene un total de 100 alumnos y 80 son niñas, ¿la proporción de niñas es la misma que las anteriores? Dicho de otra forma: ¿$\frac{4}{5}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{12}{15}$ y $\frac{80}{100}$ son el mismo número pero escrito de diferente modo?

Si no puedes darte cuenta a simple vista, interprétalos como divisiones, usa tu calculadora para hacerlas, y ve si todos son o no el mismo número.

Lee las siguientes frases:

a) Cuando Andrea juega de portera, logra parar 15 de cada 50 penales.

b) Cuando Andrea juega de portera, logra parar 9 de cada 30 penales.

c) Cuando Andrea juega de portera, logra parar 12 de cada 40 penales.

d) Cuando Andrea juega de portera, logra parar 3 de cada 10 penales.

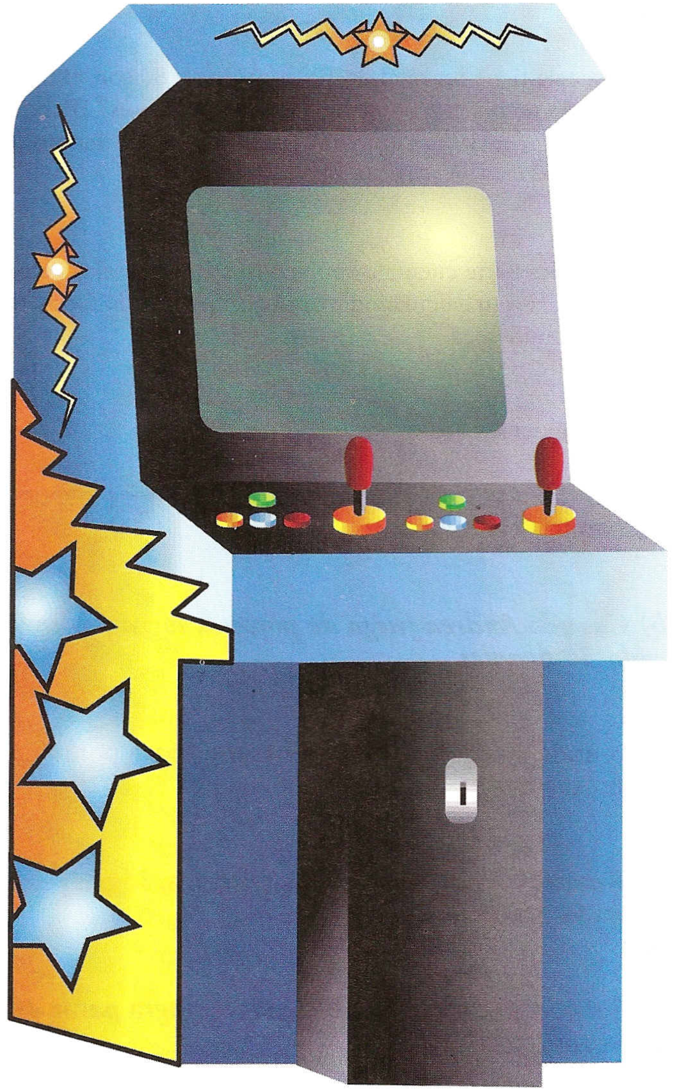
e) Cuando Andrea juega de portera, logra parar 45 de cada 150 penales.

f) Cuando Andrea juega de portera, logra parar 8 de cada 15 penales.

Todas dicen lo mismo excepto una. ¿Cuál es la única que no dice lo mismo que las demás?

SIMPLIFICACIONES

Como se mencionó en el tema "Infinitas maneras", si tienes cualquier racional y multiplicas el numerador y el denominador por el mismo número, obtienes un racional igual al original, siempre y cuando el número por el que los multiplicas no sea cero. Lo mismo sucede si divides el numerador y el denominador entre el mismo número si éste no es cero, pues no se puede dividir entre cero, obtienes un racional igual al original.



Esto último permite escribir algunos racionales en forma más simple. Por ejemplo, si divides entre 101 el numerador y el denominador de $\frac{101}{404}$, obtienes:

$$\frac{\text{101 entre 101}}{\text{404 entre 101}} = \frac{1}{4} \qquad 101 \div 101, \quad 404 \div 101$$

y $\frac{1}{4}$ es el mismo número que $\frac{101}{404}$, pero escrito en forma más sencilla.

Supón ahora que en una ciudad hay 384 locales de videojuegos, de los cuales sólo en 96 son divertidos. Entonces, los locales con juegos divertidos son $\frac{96}{384}$ o, dicho de otro modo, 96 de 384.

Al dividir entre 2 el numerador y el denominador de $\frac{96}{384}$, obtenemos que:

$$\frac{96}{384} \text{ es } \frac{48}{192}$$

Y si volvemos a dividir entre 2 el numerador y el denominador varias veces, obtenemos una serie de racionales iguales al original:

$$\frac{48}{192} = \frac{24}{96} = \frac{12}{48} = \frac{6}{24} = \frac{3}{12}$$

Finalmente, podríamos dividir entre 3 el numerador y el denominador del último número para obtener que:

$$\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Es decir, $\frac{96}{384}$ y $\frac{1}{4}$ son el mismo número, pero escrito de distinto modo y al escribir $\frac{96}{384}$ como $\frac{1}{4}$, nos damos cuenta de que los locales que tienen juegos divertidos son la cuarta parte del total o, dicho de otro modo, los que tienen juegos divertidos son uno de cada cuatro.

Encuentra una fracción igual a $\frac{1}{4}$, pero en la que el denominador sea 100. Ahora determina cuántos locales de cada 100 tienen juegos divertidos.

Existen algunas divisiones que pueden resolverse fácilmente. Por ejemplo, muchos estudiantes saben que 330 entre 10 es 33 sin necesidad de efectuar la división con calculadora o papel y lápiz.

Y también pueden calcular mentalmente cuánto es, digamos, 333 entre 111. Algunos otros también pueden "sacar mitad" muy fácilmente y saben, por ejemplo, que 728 entre 2 es 364 haciendo un cálculo mental. Pero no es fácil que alguien sepa, sin hacer la correspondiente división, cuánto es, digamos, 30 720 entre 7 680.

$$7\,680\,\overline{)30\,720} = 3\,\overline{)12}$$

Supón que debes hacer esta última división, pero no tienes calculadora. Si eres de las personas a las que no les cuesta trabajo hacer mentalmente divisiones entre 10 o entre 2, la división 30 720 entre 7 680 podría facilitarse si tomas en cuenta que puedes escribirla como $\frac{30\,720}{7\,680}$ y, una vez escrita así, intentas simplificarla tanto como puedas.

Por ejemplo, si divides entre 10 el numerador y el denominador, obtienes:

$$\frac{3\,072}{768}$$

que es la misma división que la original pero escrita de distinto modo. Después podrías, por ejemplo, dividir mentalmente entre 2 el numerador y el denominador y escribir:

$$\frac{3\,072}{768} = \frac{1\,536}{384}$$

Si continúas dividiendo entre 2 el numerador y el denominador, obtienes:

$$\frac{1\,536}{384} = \frac{768}{192} = \frac{384}{96} = \frac{192}{48} = \frac{96}{24} = \frac{48}{12} = \frac{24}{6} = \frac{12}{3}$$

Esto es, $\frac{12}{3}$ da el mismo resultado que la original. Y como12 entre 3 es 4, entonces 30 720 entre 7 680 también es 4.

De ahora en adelante, cuando debas hacer una división y no tengas a la mano una calculadora, antes de hacerla escríbela como fracción y ve si puedes simplificarla un poco.

Encontrando iguales

Como ya se ha mencionado, una posible manera de saber si dos números racionales son el mismo es interpretar cada uno como división, hacer las dos divisiones con la calculadora y ver si en los dos casos se obtiene el mismo resultado.

$$101 \div 404 \longleftarrow \frac{101}{404} = \frac{8}{32} \longrightarrow 8 \div 32$$

Otro procedimiento consiste en operar con los números racionales como razones; es decir, tomar en cuenta que $\frac{101}{404}$ es la relación que existe entre el numerador 101 y el denominador 404 y que $\frac{8}{32}$ es la relación que hay entre 8 y 32. Como en los dos casos el numerador es la cuarta parte del denominador, podemos concluir que $\frac{101}{404}$ y $\frac{8}{32}$ sí son el mismo número.

101 es la cuarta parte de 404 $\longleftarrow \frac{101}{404} = \frac{8}{32} \longrightarrow$ *8 es la cuarta parte de 32*

$$12.625 = 101 \div 8$$
$$12.625 = 404 \div 32$$

Una opción distinta sería examinar lo siguiente: cuando dos racionales son iguales, siempre sucede que al dividir el numerador de uno de ellos (por ejemplo, el del primero) entre el numerador del otro, se obtiene el mismo resultado que al hacer dicha división con los denominadores. Así, para saber si $\frac{101}{404}$ y $\frac{8}{32}$ son iguales podríamos usar la calculadora para dividir 101 entre 8 y 404 entre 32; de esta manera, podríamos ver si en los dos casos se obtiene el mismo resultado.

Otra manera de saber si dos racionales son iguales es considerar que si al multiplicar el numerador del primero por el denominador del segundo se obtiene el mismo resultado que al multiplicar el denominador del primero por el numerador del segundo, entonces los dos números son iguales. Así, otra posibilidad para saber si $\frac{101}{404}$ y $\frac{8}{32}$ son o no el mismo número es multiplicar 101 por 32 y 404 por 8 y ver si en los dos casos se obtiene el mismo resultado.

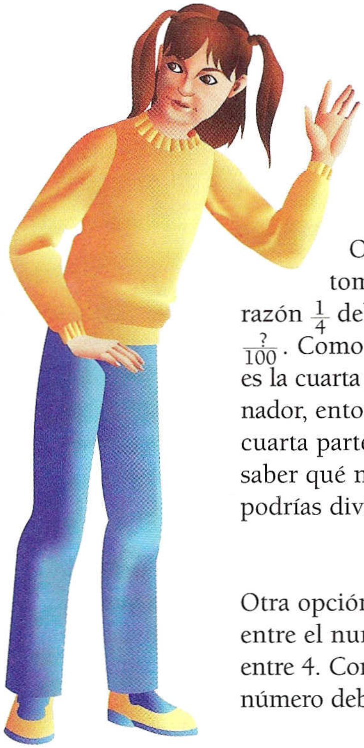
$$\frac{101}{404} = \frac{8}{32}$$

$404 \times 8 = 3\,232$ $\qquad$ $101 \times 32 = 3\,232$

$$\frac{1}{4} = \frac{?}{100}$$

Ahora supón que lo que se quiere no es saber si un número es o no igual a $\frac{101}{404}$, sino escribir $\frac{101}{404}$ de modo que tenga, por ejemplo, denominador 100. Una posibilidad sería empezar por escribir $\frac{101}{404}$ en forma más simple, por ejemplo, $\frac{1}{4}$, y luego tratar de escribir $\frac{1}{4}$ de modo que el denominador sea 100.

Para que $\frac{?}{100}$ sea $\frac{1}{4}$, es necesario que la expresión decimal de la división $\frac{1}{4}$, que es 0.25, sea el mismo que el de la división $\frac{?}{100}$. Es decir, ? entre 100 tiene que ser 0.25. Entonces, para saber qué número debe ser ?, podrías multiplicar 0.25 por 100.



$$1 \div 4 = 0.25 \longleftarrow \frac{1}{4} = \frac{?}{100} \longrightarrow ? \div 100 = 0.25$$

Otra posibilidad sería tomar en cuenta que la razón $\frac{1}{4}$ debe ser la misma que $\frac{?}{100}$. Como en $\frac{1}{4}$ el numerador es la cuarta parte del denominador, entonces ? debe ser la cuarta parte de 100. Así, para saber qué número debe ser ?, podrías dividir 100 entre 4.

1 es la cuarta parte de 4 $\longleftarrow \frac{1}{4} = \frac{?}{100} \longrightarrow$ **? es la cuarta parte de 100**

Otra opción sería pensar que para que $\frac{?}{100}$ sea $\frac{1}{4}$ es necesario que al dividir el numerador de $\frac{?}{100}$ entre el numerador de $\frac{1}{4}$, es decir, al dividir ? entre 1, se obtenga el mismo número que al dividir 100 entre 4. Como 100 entre 4 es 25, entonces ? entre 1 también debe ser 25. De esta manera, para saber qué número debe ser ?, podrías multiplicar 1 por 25.

$$\frac{1}{4} = \frac{?}{100}$$

$\longrightarrow ? \div 1 = 25$

$\longrightarrow 100 \div 4 = 25$

Y una estrategia distinta sería tomar en cuenta que para que $\frac{?}{100}$ sea $\frac{1}{4}$ es necesario que al multiplicar 1 por 100 se obtenga el mismo número que al multiplicar 4 por ?. Así, para saber qué número es ?, podrías multiplicar 1 por 100 y dividir al resultado entre 4.

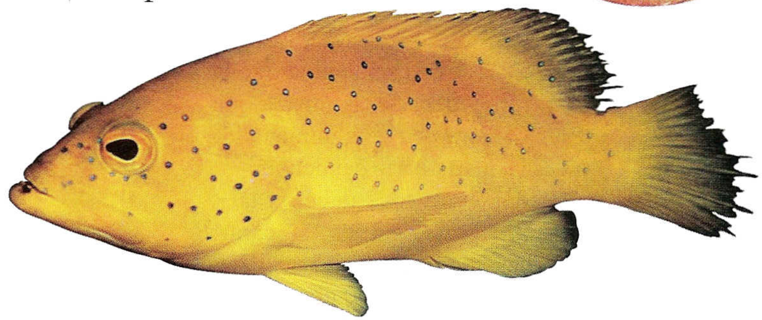
$$\frac{1}{4} = \frac{?}{100}$$

$4 \times ? = 100$ $\qquad$ $1 \times 100 = 100$

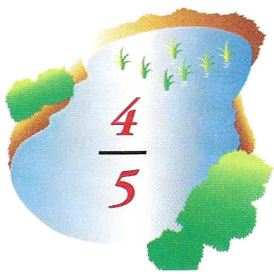
Pero éstos no son los únicos posibles procedimientos para determinar qué número debe ser ? para lograr que $\frac{?}{100}$ sea $\frac{1}{4}$. ¿Se te ocurre algún otro?

¿Mayor o menor?

Supón que un estudio ecológico indica que en un lago 4 de cada 5 peces están contaminados. Esto es, $\frac{4}{5}$ de los peces están contaminados o, dicho de otro modo, en el lago están contaminadas cuatro quintas partes del total de peces. Por otra parte, en un criadero cercano en el que hay 200 peces, 120 están contaminados. Entonces, en el criadero la parte contaminada es $\frac{120}{200}$.

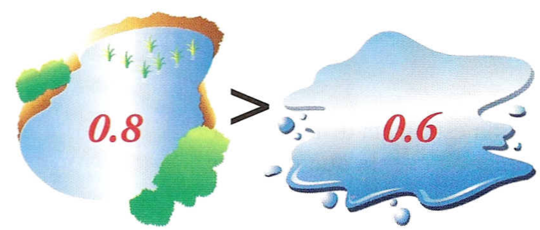


Como los números 4 y 5 son pequeños y 120 y 200 son más grandes, hay quienes creen que $\frac{4}{5}$ es una fracción menor que $\frac{120}{200}$ y que entonces en el lago la parte contaminada es menor que en el criadero.



Sin embargo, esto es falso: $\frac{4}{5}$ no es una fracción menor que $\frac{120}{200}$. Para darte cuenta de ello, recuerda que $\frac{4}{5}$ es, entre otras cosas, la división 4 entre 5 y el número que se obtiene al hacerla. Si usas tu calculadora verás que el resultado de esta división es en representación decimal 0.8 (ocho décimos). Así, $\frac{4}{5}$ y 0.8 son el mismo número pero escrito de diferente forma. Por otra parte, si interpretas $\frac{120}{200}$ como división y realizas dicha operación con tu calculadora, verás que $\frac{120}{200}$ es 0.6 (seis décimos). Puesto que ocho décimos es un número mayor que seis décimos, entonces $\frac{4}{5}$ es una fracción mayor que $\frac{120}{200}$.

$$\frac{4}{5} > \frac{120}{200}$$



contaminados en el lago

contaminados en el criadero

Por otro lado, si escribes $\frac{120}{200}$ en forma más simple, tomando en cuenta que cuando en un número racional el numerador y el denominador se dividen entre el mismo número, se obtiene un racional igual al original, entonces podrías dividir 120 y 200 entre 10 para obtener:

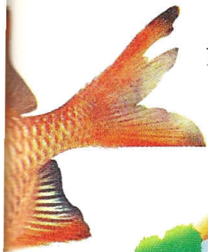
$$\frac{120}{200} = \frac{12}{20}$$

y después dividir 12 y 20 entre 2 para saber que

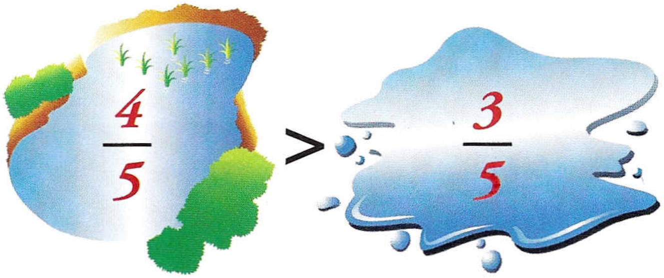
$$\frac{12}{20} = \frac{6}{10}$$

Finalmente, si vuelves a dividir entre 2 el numerador y el denominador, obtienes:

$$\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$



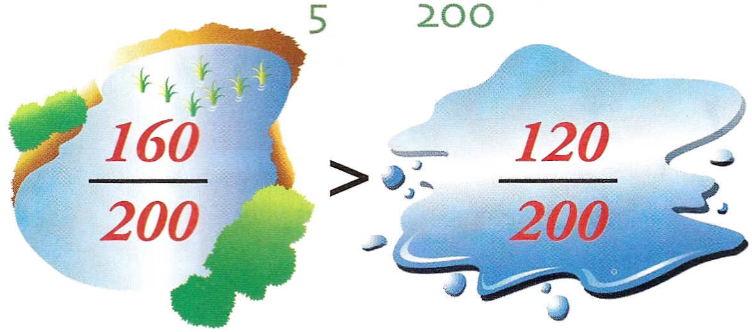
Es decir, $\frac{120}{200}$ es la misma fracción que $\frac{3}{5}$. De esta manera, sabemos que la parte contaminada en el criadero es $\frac{3}{5}$, fracción menor que $\frac{4}{5}$.



contaminados en el lago *contaminados en el criadero*

Pero escribir las fracciones $\frac{120}{200}$ y $\frac{4}{5}$ de modo cada una sea una cantidad de décimos o de quintos no es la única estrategia posible para saber cuál es menor. Se podría, por ejemplo, multiplicar el numerador y el denominador por el mismo número de manera que se obtenga una fracción igual a la original. Entonces, podrías multiplicar por 40 el numerador y el denominador de $\frac{4}{5}$ para obtener

$$\frac{4}{5} = \frac{160}{200}$$



contaminados en el lago *contaminados en el criadero*

Así, la parte contaminada del lago queda escrita con denominador 200 y podemos compararla con la parte contaminada en el criadero, que también tiene denominador 200.

Pero existen muchas más opciones. Para comparar $\frac{4}{5}$ y $\frac{120}{200}$ también podríamos, por ejemplo, multiplicar por 200 el numerador y el denominador de $\frac{4}{5}$ para obtener $\frac{800}{1\,000}$ y multiplicar por 5 el numerador y el denominador de $\frac{120}{200}$ para obtener $\frac{600}{1\,000}$. Con ello, las dos fracciones quedarían escritas como una cantidad de milésimos y, como 600 milésimos es una cantidad menor que 800 milésimos, sabrías que $\frac{120}{200}$ es menor que $\frac{4}{5}$.

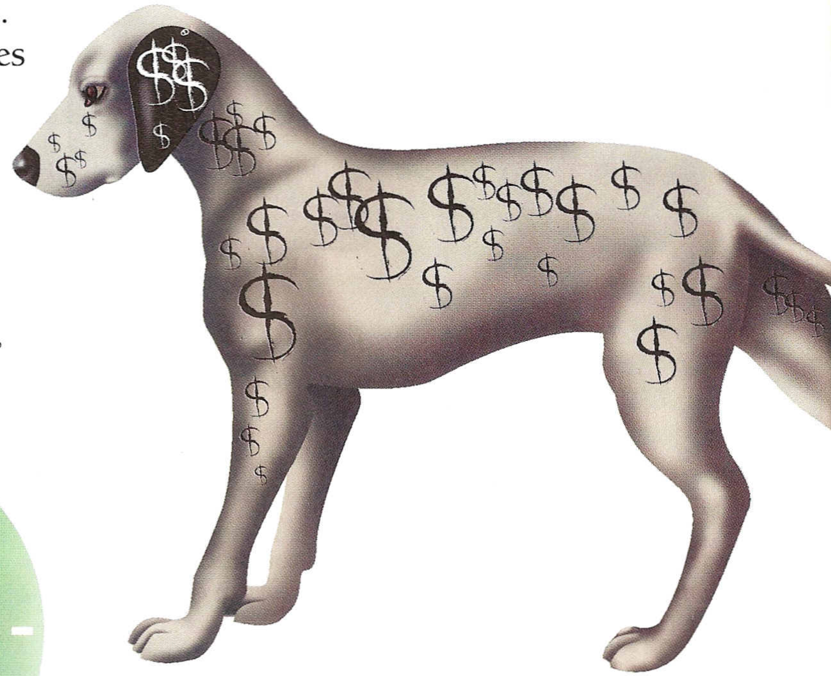
$$\frac{4}{5} \text{ es } \frac{800}{1\,000} \qquad \begin{matrix} 4 \times 200 \\ 5 \times 200 \end{matrix}$$

$$\frac{120}{200} \text{ es } \frac{600}{1\,000} \qquad \begin{matrix} 120 \times 5 \\ 200 \times 5 \end{matrix}$$

En este último caso, lo que se hizo para escribir cada una de los dos fracciones de modo que las dos tuvieran igual denominador, fue multiplicar el numerador y el denominador de la primera por el denominador de la segunda y multiplicar el numerador y el denominador de la segunda por el denominador de la primera. Utiliza este procedimiento para escribir los números $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{7}$, de manera que los dos tengan denominador 35, y di cuál es el más pequeño de los dos.

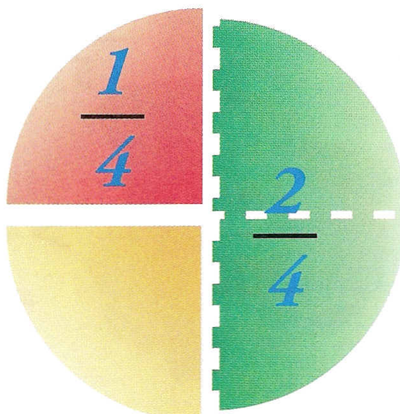
SUMA Y RESTA DE FRACCIONES

Si sumas 1 peso con 2 pesos, obtienes 3 pesos. Y si sumas 1 perro más 2 perros, el resultado es 3 perros. Pero si sumas 1 peso más 2 perros, el resultado no es 3 pesos, ni 3 perros, ni 3 "perro–pesos".

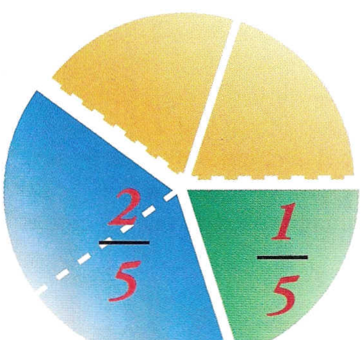


Algo similar sucede cuando intentas sumar fracciones. Si sumas, por ejemplo, 1 cuarto más 2 cuartos, el resultado es 3 cuartos.

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4}$$



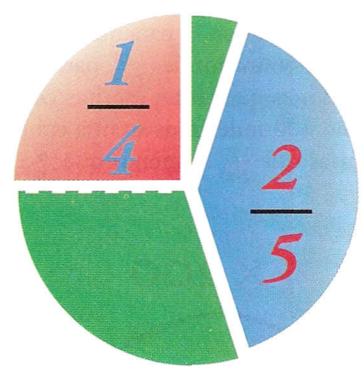
Y si sumas, digamos, 1 quinto más 2 quintos, el resultado es 3 quintos.



$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

Pero al sumar 1 cuarto más 2 quintos, el resultado no es 3 cuartos, ni 3 quintos, ni 3 "cuarto–quintos". Tampoco es $\frac{3}{9}$.

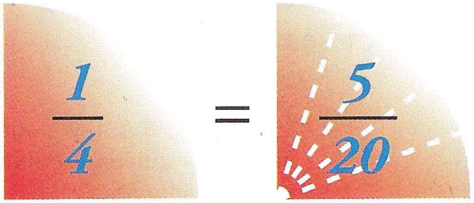
$$\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=?$$



Una posibilidad para sumar estas dos fracciones es escribirlas de modo que tengan igual denominador. Para ello puedes tomar en cuenta que, como se mencionó en la página anterior, una opción es multiplicar el numerador y el denominador de la primera por el denominador de la segunda y multiplicar el numerador y el denominador de la segunda por el denominador de la primera.

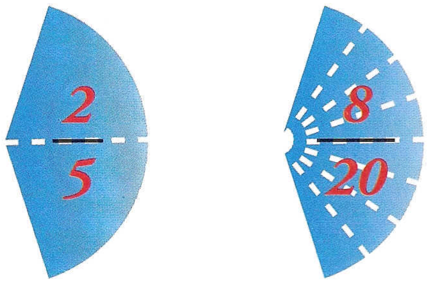
Es decir, puedes primero multiplicar por 5 el numerador y el denominador de $\frac{1}{4}$, para obtener:

$$\frac{1}{4}=\frac{5}{20}$$



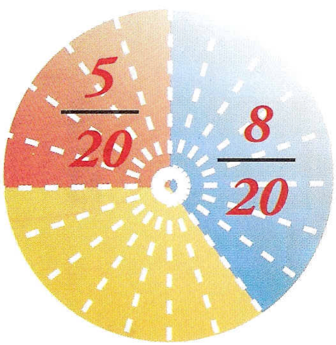
y después multiplicar por 4 el numerador y el denominador de $\frac{2}{5}$ para obtener:

$$\frac{2}{5}=\frac{8}{20}$$



Entonces, como $\frac{1}{4}$ es 5 veinteavos y $\frac{2}{5}$ es 8 veinteavos, la suma de $\frac{1}{4}$ más $\frac{2}{5}$ es 13 veinteavos:

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{5}=\frac{5}{20}+\frac{8}{20}=\frac{13}{20}$$



De ahora en adelante, cuando tengas que sumar fracciones, recuerda que la suma no se hace sumando los numeradores y denominadores. Para hacerla, antes debes escribir las fracciones de modo que tengan el mismo denominador. Y lo mismo sucede con las restas. Una resta de fracciones sólo puede hacerse cuando las fracciones tienen igual denominador; por eso, cuando no lo tienen, primero hay que escribirlas de modo que los denominadores sean iguales.

Hay quienes para sumar o restar fracciones prefieren escribirlas en forma decimal. Por ejemplo: para sumar $\frac{1}{4}+\frac{4}{8}$, usan la calculadora para dividir 1 entre 4 y saber que la expresión decimal de $\frac{1}{4}$ es 0.25, y dividen 4 entre 8 para saber que la expresión decimal de $\frac{4}{8}$ es 0.5. Y una vez realizado este procedimiento, suman 0.25 + 0.5.

$$\frac{1}{4}+\frac{4}{8}=0.25+0.5=0.75$$

En este caso, el resultado obtenido (75 centésimos o, escrito de otro modo, $\frac{75}{100}$, $\frac{15}{20}$ o $\frac{3}{4}$) es correcto.

Pero observa lo que sucede, por ejemplo, al sumar con este método $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}$. Si utilizas la calculadora para dividir 1 entre 3 y 2 entre 3, observarás que $\frac{1}{3}$ es 0.3333333 y que $\frac{2}{3}$ es 0.6666666.

Y como 0.3333333 más 0.6666666 es 0.9999999, podrías creer que el resultado de $\frac{1}{3}$ más $\frac{2}{3}$ es 0.9999999. Pero esto es falso: 1 tercio más 2 tercios son 3 tercios, y 3 tercios es 1. Es decir,

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{3}{3}=1$$

Esto se debe a que hay fracciones cuya escritura decimal es infinita.

Un tercio (o el resultado de dividir 1 entre 3) no es exactamente 0.333333, sino un número parecido a 0.3333333 con una cantidad infinita de símbolos 3 después del punto decimal. Lo mismo sucede con muchas otras fracciones: su escritura decimal no es la que se observa en la pantalla de la calculadora, sino un número que tiene infinidad de decimales. Por eso existen muchas sumas y restas de fracciones en las que no obtienes el resultado correcto si las haces con calculadora.

CON EL DENOMINADOR QUE QUIERAS

En el tema "Encontrando iguales" mencionamos varias opciones para encontrar el numerador de $\frac{1}{4}$ si se desea que el denominador sea 100.

$$\frac{1}{4} = \frac{?}{100}$$

Tres de ellas eran:

- Dividir 1 entre 4 y multiplicar el resultado por 100.

$$\frac{1}{4} = \frac{?}{100}$$

$$1 \div 4 = 0.25 \qquad ? \div 100 = 0.25$$

$$(1 \div 4) \times 100 = ?$$

- Dividir 100 entre 4 y multiplicar el resultado por 1.

$$\frac{1}{4} = \frac{?}{100}$$

$$? \div 1 = 25$$

$$100 \div 4 = 25$$

$$(100 \div 4) \times 1 = ?$$

- Multiplicar 1 por 100 y dividir el resultado entre 4.

$$\frac{1}{4} = \frac{?}{100}$$

$$4 \times ? = 100 \qquad 1 \times 100 = 100$$

$$(100 \times 1) \div 4 = ?$$

En general, si A, B y C son números y B y C no son cero y quieres escribir $\frac{A}{B}$ de modo que el denominador sea C:

$$\frac{A}{B} = \frac{?}{C}$$

algunas posibilidades para obtener el nuevo numerador son:

- Dividir A entre B y multiplicar el resultado por C.

$$\frac{A}{B} = \frac{?}{C}$$

$$A \div B = ? \div C$$

$$(A \div B) \times C = ?$$

- Dividir C entre B y multiplicar el resultado por A.

$$\frac{A}{B} = \frac{?}{C}$$

$$? \div A = C \div B$$

$$C \div B$$

$$(C \div B) \times A = ?$$

- Multiplicar A por C y dividir el resultado entre B.

$$\frac{A}{B} = \frac{?}{C}$$

$$B \times ? = A \times C \qquad A \times C = B \times ?$$

$$(A \times C) \div B = ?$$

Por otro lado si quieres, por ejemplo, escribir $\frac{3}{4}$ de modo que el denominador sea 5:

$$\frac{3}{4} = \frac{?}{5}$$

el nuevo numerador no va a ser un número entero.

Mediante cualquiera de los tres procedimientos mencionados, encontrarás:

$$\frac{3}{4} = \frac{3.75}{5}$$

Para comprobar que $\frac{3}{4}$ y $\frac{3.75}{5}$ son iguales, puedes, por ejemplo, obtener las expresiones decimales de estas divisiones. Verás que la de $\frac{3}{4}$ es 0.75 y lo mismo sucede con $\frac{3.75}{5}$.

Pero si quieres, por ejemplo, escribir $\frac{1}{3}$ de modo que tenga denominador 7,

$$\frac{1}{3} = \frac{?}{7}$$

el nuevo numerador es un número que tiene una cantidad infinita de cifras decimales. Si haces las correspondientes operaciones con calculadora, verás que el nuevo numerador tiene que ser 2.3333333, pero esto es falso. En realidad, el nuevo numerador es un número que al escribirse en forma decimal tiene una cantidad infinita de símbolos 3 después del punto.

El nuevo numerador (que es el número que se obtiene al dividir 7 entre 3 o, dicho de otro modo, que es $\frac{7}{3}$) no puede escribirse en forma exacta mediante escritura decimal. El resultado que muestra la calculadora es un número muy parecido a él, pero que no es exactamente el nuevo numerador. En este caso, no podrías decir que $\frac{1}{3}$ es $\frac{2.3333333}{7}$. Tendrías que decir que $\frac{1}{3}$ es aproximadamente $\frac{2.3333333}{7}$.

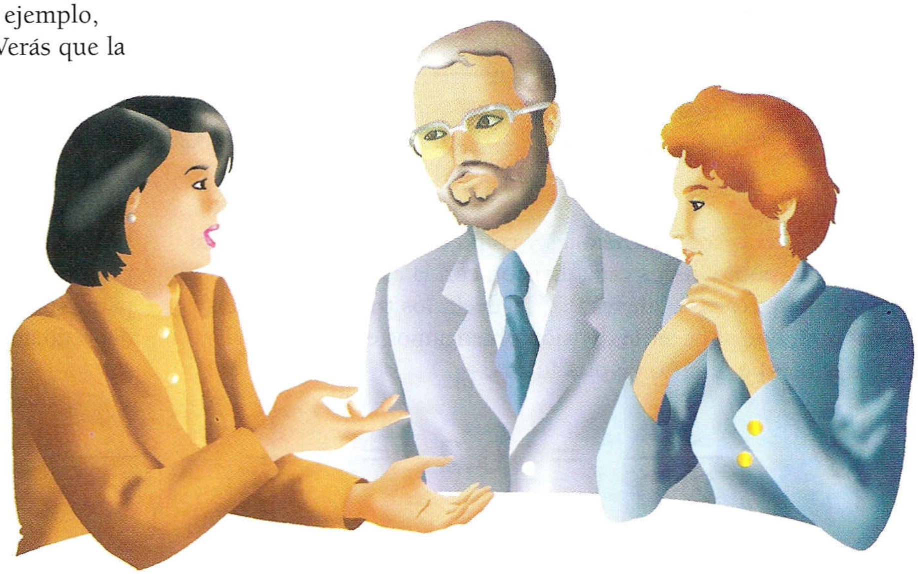
Ahora bien, si usas la opción 2 o la 3 para escribir $\frac{2}{7}$ de modo que el denominador sea 21:

$$\frac{2}{7} = \frac{?}{21}$$

encontrarás que el nuevo numerador debe ser 6. Esto es correcto, pues efectivamente, $\frac{2}{7}$ es $\frac{6}{21}$.

Sin embargo, si escoges la opción 1 y usas tu calculadora para hacer las operaciones indicadas, te darás cuenta de que el nuevo numerador no es 6, sino 5.9999982, que es un número muy parecido a 6. ¿A qué se debe, en este caso, que la calculadora no dé el verdadero numerador, sino un número muy parecido a él?

Supón que en una junta de directores de escuela, uno dice que en su escuela hay 250 alumnos, de los cuales 50 no saben sumar fracciones. Otro afirma que de los 400 alumnos que hay en su escuela, 80 tampoco saben. Por último, un tercero informa que tiene 440 alumnos y 88 no saben sumar fracciones.



Así, en una de las escuelas la parte que no sabe sumar fracciones es $\frac{50}{250}$, en otra dicha parte es $\frac{80}{400}$ y en la última es $\frac{88}{440}$.

—Momento —dice otro director—. Si presentamos la información de esta manera, no va a ser fácil darnos cuenta de cuál es la escuela cuyos alumnos están peor en lo que se refiere a suma de fracciones. Mejor que cada quien diga cuántos alumnos de cada 100 no saben sumar fracciones en su escuela.

Escribe $\frac{50}{250}$, $\frac{80}{400}$ y $\frac{88}{440}$ como fracciones de denominador 100 y di cuántos alumnos de cada 100 no saben sumar fracciones en cada una de las escuelas.

Fracciones, razones y porcentajes

Los números de la página anterior ($\frac{50}{250}$, $\frac{80}{400}$ y $\frac{88}{440}$) son el mismo pero escrito de diferente modo. Si los interpretas, por ejemplo, como razones, es decir, como la relación que hay entre numerador y denominador, sucede que en los tres casos el numerador es la quinta parte del denominador o, dicho de otro modo, el numerador es $\frac{1}{5}$ del denominador; así, todos ellos son la razón $\frac{1}{5}$, pero relacionando distintos pares de números.

$$\frac{50}{250} = \frac{1}{5} \qquad \frac{80}{400} = \frac{1}{5} \qquad \frac{88}{440} = \frac{1}{5}$$

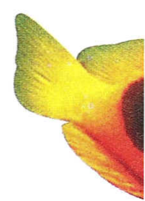
Si los interpretas como divisiones y como el resultado obtenido al hacer la división, y haces cada división con la calculadora, verás que en los tres casos obtienes 0.2. Es decir, los tres son distintas maneras de que al hacer la división obtengamos el número 0.2 (dos décimos) o, escrito de otra forma, $\frac{2}{10}$.

$$\frac{50}{250} = 0.2 = \frac{2}{10}$$

$$\frac{80}{400} = 0.2 = \frac{2}{10}$$

$$\frac{88}{440} = 0.2 = \frac{2}{10}$$

Por otra parte, si usas cualquiera de los procedimientos descritos en el tema anterior para escribir cada uno como un racional de denominador 100, verás que cada uno es $\frac{20}{100}$.

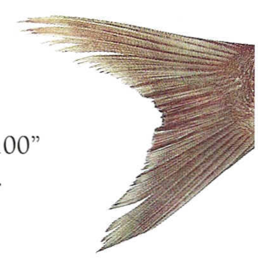


$$\frac{50}{250} = \frac{20}{100}$$

$$\frac{80}{400} = \frac{20}{100}$$

$$\frac{88}{440} = \frac{20}{100}$$

Es decir, $\frac{50}{250}$, $\frac{80}{400}$, $\frac{88}{440}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{2}{10}$ son el número $\frac{20}{100}$ pero relacionando diferentes números.



Y como sabes, $\frac{20}{100}$ no sólo puede leerse como "20 centésimos", "20 de un total de 100", "20 entre 100" o "la relación que hay entre los números 20 y 100". También puede leerse como "20 de cada 100". Así, en cada una las escuelas de las que se habló en la página anterior, 20 alumnos de cada 100 no saben sumar fracciones.

Si $\frac{20}{100}$ es el mismo número que $\frac{1}{5}$, pero escrito de diferente forma, ¿cuántos alumnos de cada 15 no saben sumar fracciones? Escribe $\frac{1}{5}$ de modo que tenga denominador 15 y di cuántos alumnos de cada 15 no saben sumar fracciones.

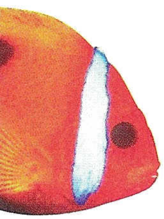
$$\frac{20}{100} = \frac{1}{5} = \frac{?}{15}$$

Posiblemente sabes que la expresión 20% (20 por ciento) significa "20 de cada 100". Así pues, 20% y $\frac{20}{100}$ son dos maneras diferentes de expresar lo mismo. Lo anterior también ocurre con todos los porcentajes, puesto que son fracciones o razones de denominador 100.

$$\frac{101}{404}$$

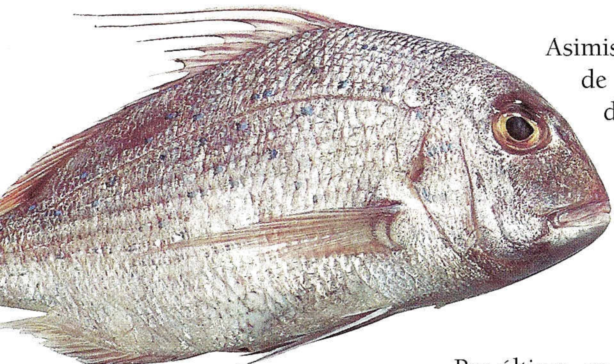
"Sí, Andrea, también somos porcentajes"

En el tema "Simplificaciones" se habló de una ciudad en la que 96 locales de un total de 384 tienen buenos videojuegos. Escribimos $\frac{96}{384}$ como $\frac{1}{4}$ y luego te pedimos escribir esta última fracción de modo que tuviera denominador 100. Como



$$\frac{96}{384} = \frac{1}{4} = \frac{25}{100}$$

25 de cada 100 locales tienen buenos videojuegos o, dicho de otro modo, 25% de los locales tienen buenos videojuegos.

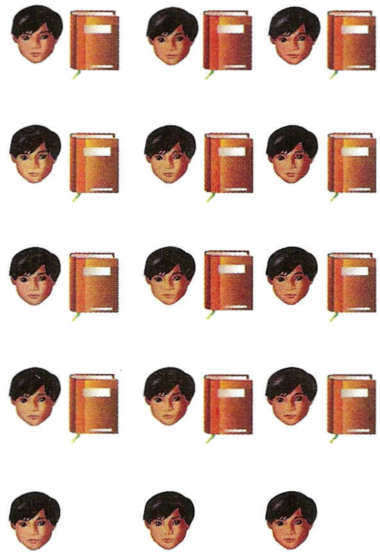


Asimismo, en el tema "¿Mayor o menor?" se mencionó un lago en el que $\frac{4}{5}$ de los peces están contaminados. Si usas cualquiera de los métodos descritos en el tema anterior para escribir $\frac{4}{5}$ de modo que tenga denominador 100, verás que $\frac{4}{5}$ es $\frac{80}{100}$; así, sabrás que 80 de cada 100 peces están contaminados, es decir, 80% de los peces. También se habló de un criadero en el que $\frac{120}{200}$ de los peces están contaminados. Si escribes $\frac{120}{200}$ de modo que tenga denominador 100, verás que en el criadero 60% de los peces están contaminados.

Por último, en el tema "Más significados" se habló de un país en el que 12 de cada 15 niños, es decir, $\frac{12}{15}$ van a la escuela. Si escribes $\frac{12}{15}$ de modo que tenga denominador 100, verás que 80% de los niños van a la escuela.

Para presentar información

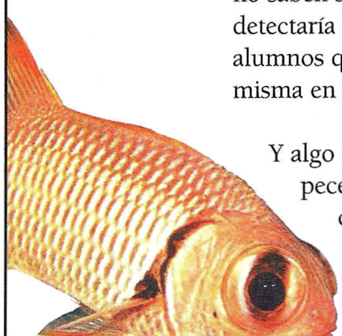
Si tal y como se supuso en el tema "Más significados" una delegada informara que en su país 12 de cada 15 niños van a la escuela y otra dijera que en el suyo van 8 de cada 10, no sería tan fácil detectar en forma inmediata que en los dos países la situación es idéntica.



Aun cuando se pidiera a las delegadas usar fracciones para presentar su información, esto es, aun cuando se dijera que en un país la parte de niños que va a la escuela es $\frac{12}{15}$ y en el otro $\frac{8}{10}$, tampoco se detectaría inmediatamente que la parte de niños que va a la escuela es la misma en los dos países

12 de cada 15 niños = *8 de cada 10 niños*

Lo mismo pasaría si, tal y como se supuso en el tema "Con el denominador que quieras", un director de escuela que tiene 250 alumnos dice que 50 de ellos no saben sumar fracciones y otro que tiene 440 declara que en su escuela son 88 los que tienen dicho problema. Aunque esta información se presentara diciendo que en una escuela $\frac{50}{250}$ no saben sumar fracciones y en la otra $\frac{88}{440}$, no se detectaría inmediatamente que la parte de los alumnos que no sabe sumar fracciones es la misma en ambas escuelas.



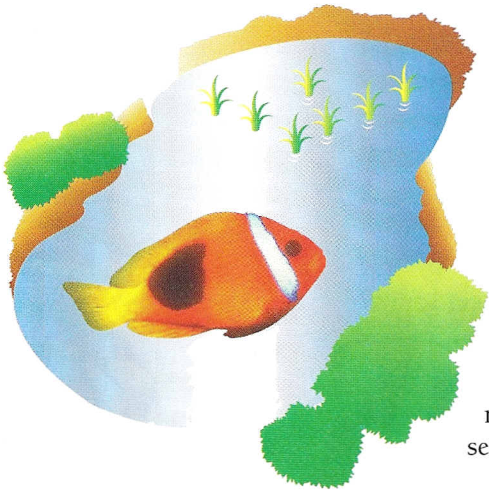
Y algo parecido pasa, por ejemplo, con los peces contaminados en el lago y en el criadero de los que se habló en el tema "¿Mayor o menor?". Si la información con la que se cuenta es que en el lago 4 de cada 5 peces están contaminados y en el criadero 120 de cada 200, no todos detectan a simple vista que el problema de la contaminación es más fuerte en el lago, aun cuando esta información se presente diciendo que en el lago la parte contaminada es $\frac{4}{5}$ y en el criadero es $\frac{120}{200}$.

Por tal motivo, en situaciones como éstas los datos no sólo se presentan en forma de fracciones, sino además de modo que las fracciones tengan el denominador igual.

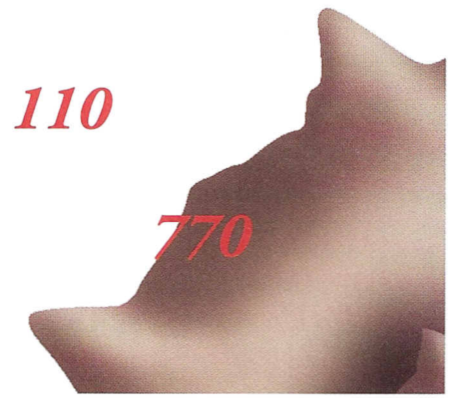
Si la delegada del país en el que la parte de niños que va a la escuela es $\frac{12}{15}$ escribe esta parte de modo que tenga denominador 30, y la delegada del país en el que la parte de niños que va a la escuela es $\frac{8}{10}$ hace lo mismo, las dos presentarían su información diciendo que $\frac{24}{30}$ o 24 de cada 30 de los niños van a la escuela, e inmediatamente se detectaría que en los dos países el dato presentado es el mismo.

Si en la reunión de directores se decide, por ejemplo, escribir los números $\frac{50}{250}$ y $\frac{88}{440}$ de modo que los dos tengan denominador 15, el director de la primera escuela informaría que en su escuela $\frac{3}{15}$ o 3 de cada 15 niños no saben sumar fracciones. Lo mismo informaría el director de la segunda escuela.

$$\frac{3}{15} = 3 \text{ de cada } 15$$



Y para comparar la parte de peces contaminados en el lago con la del criadero, es decir, para comparar $\frac{4}{5}$ y $\frac{120}{200}$ podríamos, por ejemplo, escribir estos dos números de modo que tuvieran denominador 20 y así sería más fácil compararlos.



Sin embargo, en estas situaciones es poco usual presentar la información como fracciones de denominador 30, 15 o 20. Lo más usual es presentarla como fracción de denominador 100, es decir, como porcentaje. De ahora en adelante, cuando tengas que presentar información referida a la relación entre dos cantidades, puedes usar alguno de los métodos descritos en el tema "Con el denominador que quieras".

Por ejemplo, si haces una encuesta preguntando a 880 personas si ven televisión y 770 contestan que sí y 110 que no, puedes escribir $\frac{770}{880}$ y $\frac{110}{880}$ de modo que tengan denominador 100, y completar tu información diciendo qué porcentaje de los encuestados dijo que veía televisión y qué porcentaje dijo que no.

UNA HERRAMIENTA ÚTIL

—Pues qué caos —dijo Andrea—. Si cada fracción puede escribirse de una infinidad de maneras diferentes y además cada una ellas es al mismo tiempo una fracción, una división, una razón y, a veces, hasta un porcentaje, entonces las fracciones son una locura.

—Tal vez —contestó $\frac{101}{404}$ —, pero esto las convierte en un poderosísimo lenguaje inventado por el hombre para conocer, entender y analizar muchas cosas.

Si aprendes a escribir una fracción o una razón de modo que tenga el denominador que tú quieras, puedes presentar información de manera distinta a como la tienes originalmente, además de entenderla y manejarla.

Supón que en tu escuela el equipo de futbol de tu salón juega casi todos los días contra el equipo de 1° B; hasta ahora han jugado 150 partidos de los cuales 120 los ganó el equipo de tu salón y 30 los ganó el otro. Entonces el equipo de tu salón ha ganado

$$\frac{120}{150} \text{ de los partidos.}$$

Si usas la opción tres descrita en el tema "Con el denominador que quieras" para escribir $\frac{120}{150}$ de modo que tenga denominador 100, verás que $\frac{120}{150}$ es $\frac{80}{100}$, es decir, verás que el equipo de tu salón ha ganado 80% de los partidos.

Por otra parte, si escribes $\frac{120}{150}$ de modo que tenga denominador 5, verás que este número es $\frac{4}{5}$, es decir, verás que el equipo de tu salón ha ganado 4 quintos de los partidos o, interpretado de otro modo, 4 de cada 5 partidos.

$$\frac{120}{150} = \frac{80}{100} = 80\%$$

$$\frac{120}{150} = \frac{4}{5} = \frac{\text{4 de cada}}{\text{5 partidos}}$$

Pero aprender a escribir una fracción o una razón de modo que tenga el denominador que quieras o que necesites, no sólo sirve para escribir la información en forma diferente. En el caso de las razones esto también permite, por ejemplo, facilitar algunos cálculos.

Supón que llegas a un mercado y en uno de los puestos venden 3 kg de plátano a 14 pesos. Escoges los plátanos que quieres, los pesan y son 3 kg y 600 gramos, es decir, 3.600 kg. Una posibilidad para calcular cuánto deberás pagar es tomar en cuenta que la relación que hay entre la cantidad por pagar y el peso de los plátanos debe ser la misma independientemente de cuántos kilos vayas a comprar. Cuando compras 3 kg, esta razón es

$$\frac{\text{cantidad por pagar}}{\text{peso de los plátanos}} = \frac{14}{3}$$

y cuando compras 3.600 kg es $$\frac{\text{cantidad por pagar}}{3.600}$$

Así, para saber cuánto hay que pagar por 3.600 kg, basta escribir la razón $\frac{14}{3}$ de modo que el denominador sea 3.600.

$$\frac{14}{3} = \frac{\text{cantidad por pagar}}{3.600}$$

Si utilizaras la opción tres descrita en el tema "Con el denominador que quieras", podrías ver:

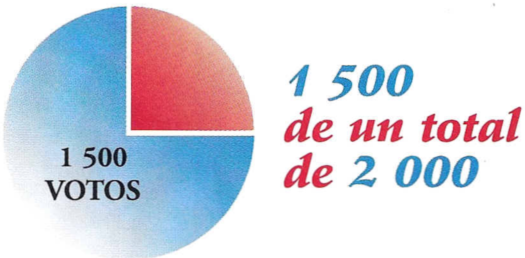
$$\frac{14}{3} = \frac{16.80}{3.600}$$

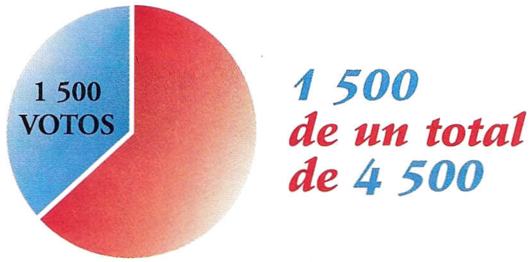
y así sabrías que si compras 3.600 kg, tendrás que pagar $ 16.80.

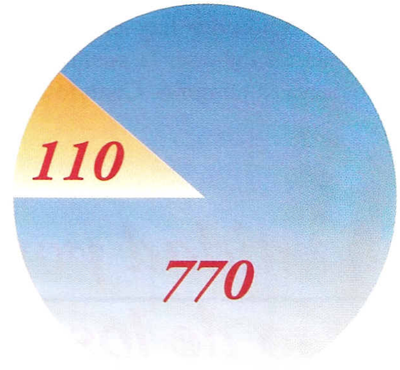
Si interpretas $\frac{14}{3}$ como división, es decir, si divides 14 (que es lo que pagas cuando compras 3 kg) entre 3 (que es la cantidad de kilos que te dan cuando pagas 14 pesos), verás que el resultado de esta división, aproximado a centésimos, es 4.67. Por lo tanto, cada kilo cuesta casi $ 4.67. Lo mismo sucede cuando interpretas $\frac{16.80}{3.600}$ como división: el resultado aproximado también es 4.67. En este caso también cada kilo cuesta casi $ 4.67.

RAZONES Y GRÁFICAS

En algunas páginas de este libro hemos presentado información acompañada de gráficas circulares. Por ejemplo:







Cuando un círculo se divide en dos o más sectores como en la figura 1, al ángulo entre los dos radios que delimitan un sector se le llama ángulo central. En dicha figura, el ángulo de 90° es el ángulo central del sector rojo y el ángulo de 180° es el ángulo central del sector azul. Cuando el "sector" en cuestión es el círculo completo, el ángulo central es el señalado en la figura 2, que es de 360°.

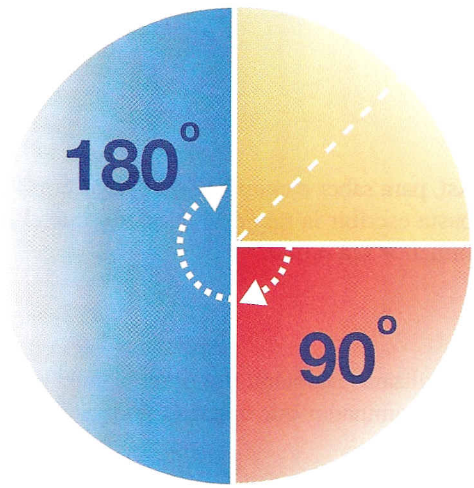


Fig. 1

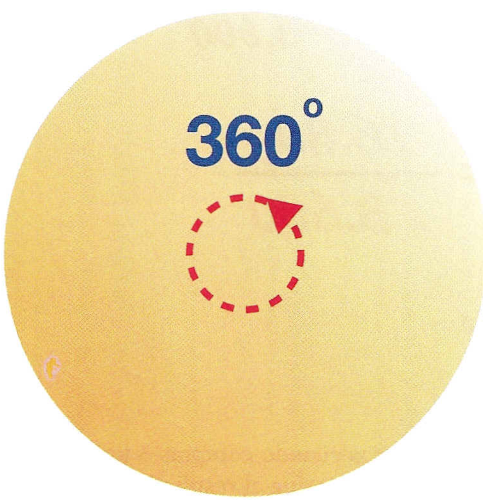


Fig. 2

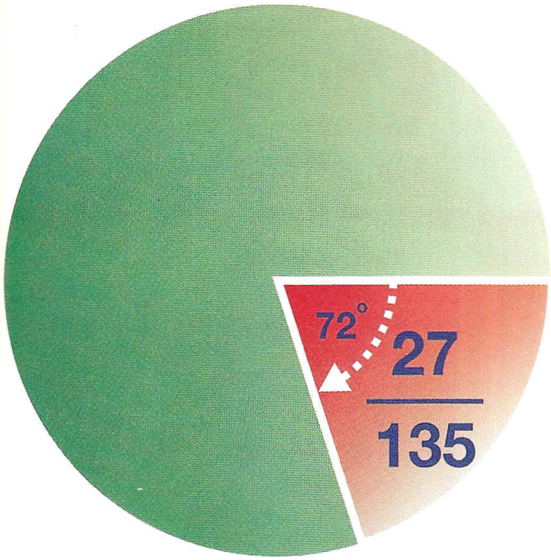
Actualmente, muchas gráficas circulares se hacen con computadora, pues la mayoría de los programas de manejo y presentación de datos contemplan la posibilidad de presentarlos acompañados de este tipo de gráficas. Sin embargo, no es difícil hacerlas sin computadora.

Si quieres, por ejemplo, hacer una gráfica en la que un sector rojo represente 27 personas de un total de 135, es decir, $\frac{27}{135}$, hay que tomar en cuenta que la razón

$$\frac{\text{medida en grados del ángulo central del sector rojo}}{360}$$

debe ser la misma que

$$\frac{27}{135}$$

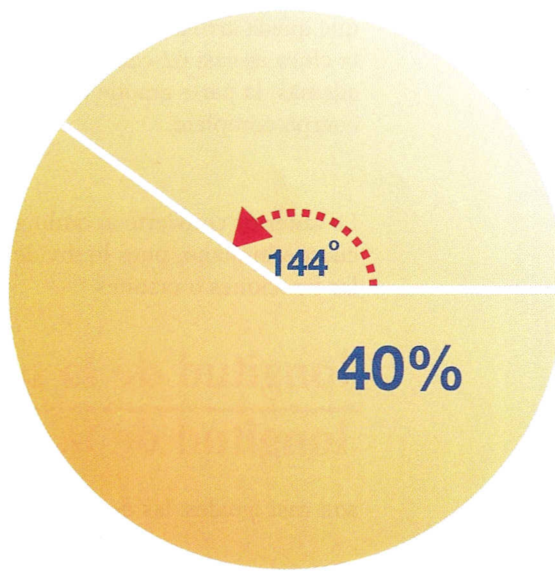


Así, para saber de qué tamaño debe ser el ángulo central de dicho sector, basta con escribir $\frac{27}{135}$ de modo que el denominador sea 360 y, para ello, podrías usar alguno de los métodos descritos en el tema "Con el denominador que quieras". Como $\frac{27}{135}$ es $\frac{72}{360}$, sabemos que el ángulo central del sector correspondiente a $\frac{27}{135}$ debe medir 72 grados, y podemos trazarlo con ayuda de un transportador.

Asimismo, si quieres hacer otra gráfica en la cual un sector azul represente, por ejemplo, 40%, basta con tomar en cuenta que la razón

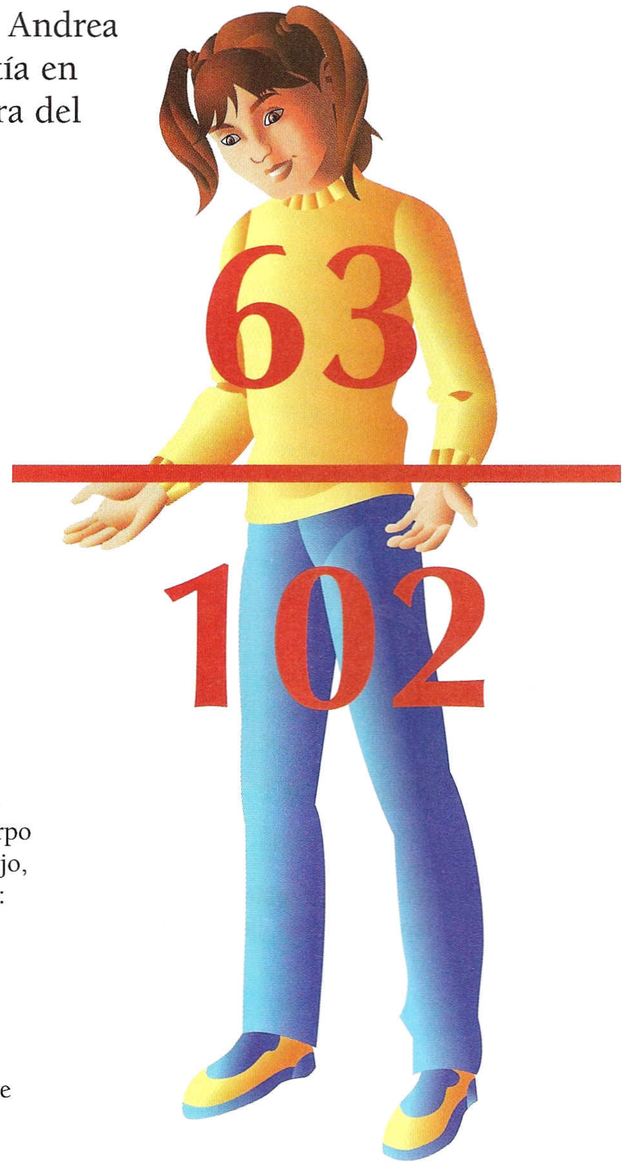
$$\frac{\text{medida en grados del ángulo central del sector azul}}{360}$$

debe ser la misma que la razón $\frac{40}{100}$. Entonces, para saber de qué tamaño debe ser dicho sector, lo único que tendrías que hacer es escribir $\frac{40}{100}$ de modo que el denominador sea 360. Como $\frac{40}{100}$ es $\frac{144}{360}$, el ángulo central del sector que representa 40% debe medir 144 grados.



Ombligos, fracciones y caracoles

Después de escuchar tantas cosas acerca de las fracciones, Andrea se quedó dormida. Lamentablemente, soñó que se convertía en fracción. Primero le apareció una raya horizontal a la altura del ombligo y, poco a poco, se transformó en $\frac{63}{102}$.



—Esto era lo único que me faltaba —dijo—. Ser fracción y además una fracción tan fea. ¿Por qué precisamente $\frac{63}{102}$?

—Porque una raya horizontal a la altura de tu ombligo —contestó $\frac{101}{404}$— te divide en dos partes. Una chica, la de arriba del ombligo, que en tu caso mide 63 cm, y una grande, la de abajo del ombligo, que mide 102 cm. Entonces, en tu cuerpo la parte chica es $\frac{63}{102}$ de la parte grande, esto es, 63 cientodosavos de la parte grande.

—¡Qué horror! —exclamó Andrea—. Eso de los cientodosavos suena horrible. Preferiría ser una cantidad de cuartos, de décimos o de centésimos.

—Pues muy fácil. Escríbete, por ejemplo, con denominador 100. Verás que $\frac{63}{102}$ es aproximadamente $\frac{61.7}{100}$, es decir, casi 62 centésimos. Esto significa que en tu cuerpo la parte chica es casi 62 centésimos de la parte grande.

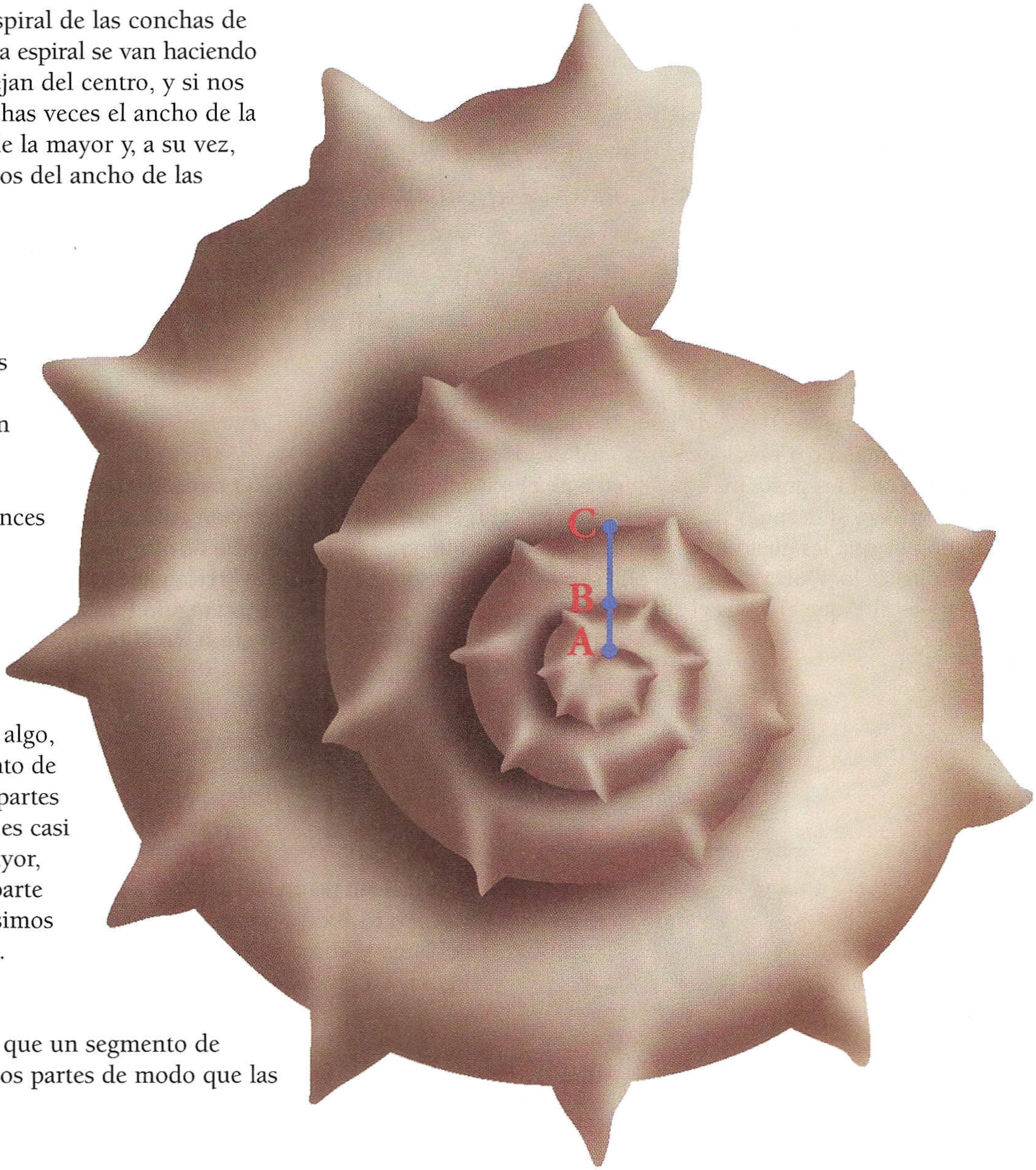
Lo anterior no sólo pasa en el cuerpo de Andrea. En la mayoría de los seres humanos, si llamamos parte chica a la parte del cuerpo que queda arriba del ombligo, y parte grande a la que queda abajo, la chica es casi 62 centésimos de la grande. Pero eso no es todo: además, la parte grande es, a su vez, casi 62 centésimos del cuerpo completo.

Lo anterior convierte al ombligo en un punto muy especial del cuerpo humano, pues lo divide en dos partes, pero de modo que las fracciones o razones

$$\frac{\text{longitud de la parte menor}}{\text{longitud de la parte mayor}} \quad \text{y} \quad \frac{\text{longitud de la parte mayor}}{\text{longitud del cuerpo completo}}$$

son casi iguales: las dos son un número cercano a 62 centésimos.

Algo parecido pasa, por ejemplo, en la espiral de las conchas de algunos caracoles. En ellas, las franjas de la espiral se van haciendo cada vez más anchas a medida que se alejan del centro, y si nos fijamos en dos franjas consecutivas, muchas veces el ancho de la menor es casi 62 centésimos del ancho de la mayor y, a su vez, el ancho de la mayor es casi 62 centésimos del ancho de las dos franjas juntas.



Por ejemplo, si en la figura de la derecha nos fijamos en el segmento de recta que empieza en el punto A y termina en el punto C (segmento AC), entonces AB es casi 62 centésimos de BC y BC es a su vez casi 62 centésimos de AC.

De hecho, siempre que algo, por ejemplo, un segmento de recta, se divide en dos partes de modo que la menor es casi 62 centésimos de la mayor, sucede además que la parte mayor es casi 62 centésimos del segmento completo.

Por otra parte, siempre que un segmento de recta está dividido en dos partes de modo que las fracciones o razones

$$\frac{\textit{longitud de la parte menor}}{\textit{longitud de la parte mayor}} \quad y \quad \frac{\textit{longitud de la parte mayor}}{\textit{longitud del objeto completo}}$$

son casi iguales, las dos son un número cercano a 62 centésimos.

UNA FRACCIÓN QUE ATRAE

Muchas personas consideran visualmente atractivas las figuras u objetos en los que dos partes están relacionadas de modo que una es más o menos 62 centésimos de la otra. Esto quizá se debe a que algunas maravillas naturales, entre otras el cuerpo humano, están divididas en dos partes, de modo que la menor es más o menos 62 centésimos de la mayor, y la mayor es más o menos 62 centésimos del objeto completo.

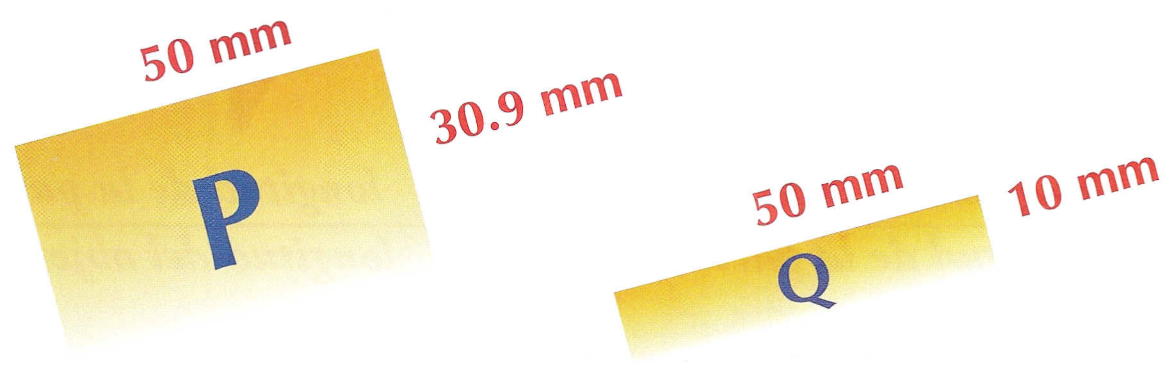
Observa los rectángulos P y Q de la figura de abajo. Si haces una encuesta preguntando a varias personas cuál de los dos les parece más bonito o cuál les gusta más, posiblemente el rectángulo P sea ganador. Pero si después preguntas a quienes eligieron este rectángulo por qué les gustó más, lo más probable es que no logren explicártelo. Quizá el motivo por el que a muchas personas les gusta más el P que el Q, es el siguiente:

$$\frac{62}{100}$$

El Q mide 10 mm de ancho y 50 de largo. Entonces, en él la relación entre el ancho y el largo, esto es, la razón $\frac{\text{ancho}}{\text{largo}}$, es $\frac{10}{50}$ o, escrito de otro modo, $\frac{20}{100}$, 0.20 o 20 centésimos. En pocas palabras, en el rectángulo Q el ancho es 20 centésimos del largo. En cambio, el rectángulo P mide 30.9 mm de ancho y 50 mm de largo y, por lo tanto, en él la relación o razón

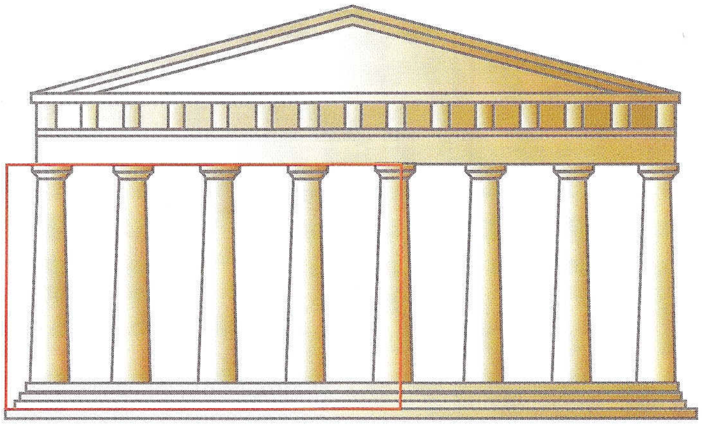
$$\frac{\text{ancho}}{\text{largo}}$$

es $\frac{30.9}{50}$. Esta razón, escrita con denominador 100, es $\frac{61.8}{100}$ o, escrita de otro modo, 0.618 o 61.8 centésimos. Esto es, en el rectángulo P el ancho es casi 62 centésimos del largo y, como ya se dijo, muchas personas se sienten atraídas por objetos o figuras en los cuales está presente esta razón o relación.



Muchos artistas a lo largo de la historia han trabajado con rectángulos similares al P, es decir, con rectángulos en los que la razón $\frac{\text{ancho}}{\text{largo}}$ es casi 62 centésimos o, interpretado de otra forma, con rectángulos en los que el número obtenido al dividir ancho entre largo es parecido a 0.62.

0.62



La siguiente imagen es un boceto a escala del frente del Partenón. Si pudieras medir con precisión el ancho y el largo del rectángulo cuyos lados son las líneas rojas, verías que dicho rectángulo tiene aproximadamente 27.2 mm de ancho y 44 mm de largo. Entonces, en él la razón $\frac{\text{ancho}}{\text{largo}}$ es $\frac{27.2}{44}$. Si haces la correspondiente división con tu calculadora, verás que $\frac{27.2}{44}$ es aproximadamente 0.618, número bastante parecido a 0.62, es decir, a 62 centésimos.

La preferencia por este tipo de rectángulos es tan marcada que algunos comerciantes y empresarios empacan sus productos en cajas en las que la cara delantera es un rectángulo como los mencionados, tal vez con el fin de que luzcan más atractivos. Otros lo que hacen para atraer consumidores es simbolizar su producto o el servicio que ofrecen con un rectángulo de este tipo.

$$\frac{\text{ancho}}{\text{largo}} = \frac{54}{86}$$

Por ejemplo, en México y en la mayoría de los países, las tarjetas de crédito o débito que se utilizan en los cajeros automáticos son rectangulares y miden 54 mm de ancho y 86 de largo. Es decir, en ellas la razón $\frac{\text{ancho}}{\text{largo}}$ es $\frac{54}{86}$. Si usas tu calculadora para obtener la expresión decimal de 54 entre 86, verás que $\frac{54}{86}$ es aproximadamente 0.6278069, número bastante parecido a 0.62, es decir, a 62 centésimos.

La próxima vez que te sientas impulsado a comprar algo empacado en una caja en la que el frente sea un rectángulo similar a estos, piensa si realmente necesitas o deseas lo que contiene o si te estás dejando llevar por este sutil truco publicitario.

SIN CAMBIAR DE FORMA

Andrea encontró en su cuarto una hoja de papel en la que estaba dibujado un rectángulo pequeño como el de la figura 1. Por curiosidad, midió el ancho y el largo, hizo la división ancho entre largo y vio que el resultado era casi 62 centésimos.

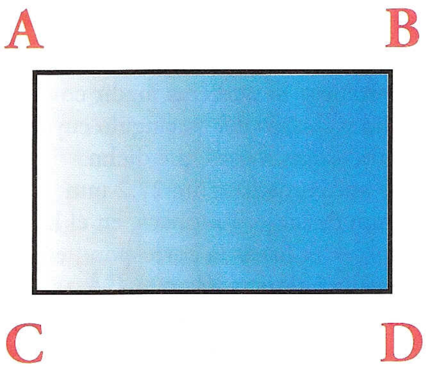


Fig. 1

$\frac{\text{ancho}}{\text{largo}} = 0.618034$

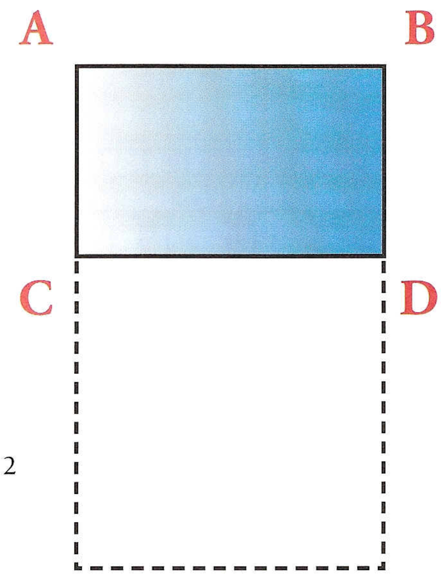


Fig. 2

—¡Qué barbaridad! —dijo—. Es la fracción que atrae. Tengo que deshacerme de él, porque con tantas cosas raras que me han pasado últimamente, me arriesgo a que el rectángulo me atraiga y empiece a jalarme hasta lograr que quede atrapada en él.

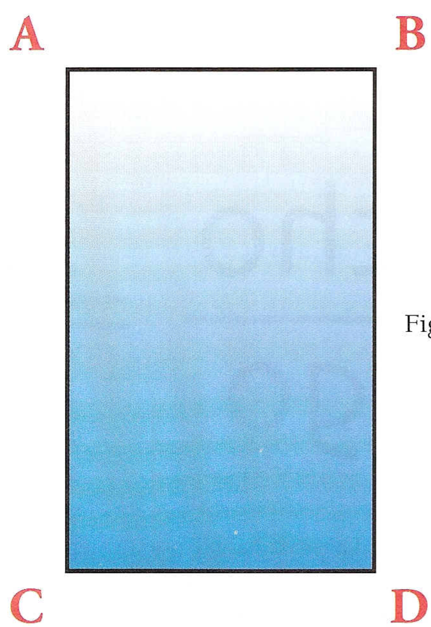


Fig. 3

Pensó en romperlo, pero no sabía si aun estando roto podía atraer. Después de unos minutos, tuvo una idea mejor: agrandar el ancho para que la razón $\frac{\text{ancho}}{\text{largo}}$ ya no fuera casi 62 centésimos. Tomó un lápiz, le agregó al rectángulo una parte cuadrada como la de la figura 2 y la pintó de azul, obtuvo así un rectángulo como el de la figura 3. Sintiéndose más tranquila, midió el ancho y el largo de este nuevo rectángulo. Hizo la división ancho entre largo y observó que el resultado de la división era exactamente el mismo que la primera vez.

—Pues claro, Andrea —dijo $\frac{101}{404}$—. ¿No ves que el nuevo rectángulo es igualito al original, sólo que de mayor tamaño y en distinta posición?

—No puede ser —contestó ella—. Pero no hay problema: voy a agregarle otra parte para que quede diferente.

Para cambiar el rectángulo que había hecho, Andrea agregó otra vez una parte cuadrada, ahora como la de la figura 4 y, al colorearla, el nuevo rectángulo quedó como el de la figura 5. Pensó que ahora sí había logrado cambiar la razón $\frac{\text{ancho}}{\text{largo}}$; pero al calcularla, vio que era la misma que en los otros dos rectángulos.

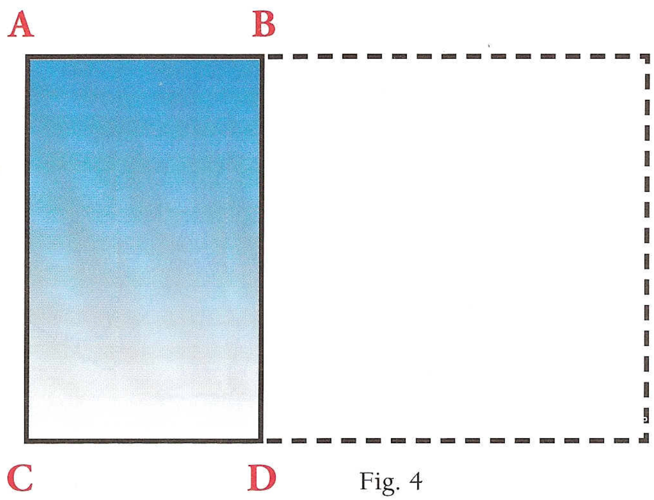


Fig. 4

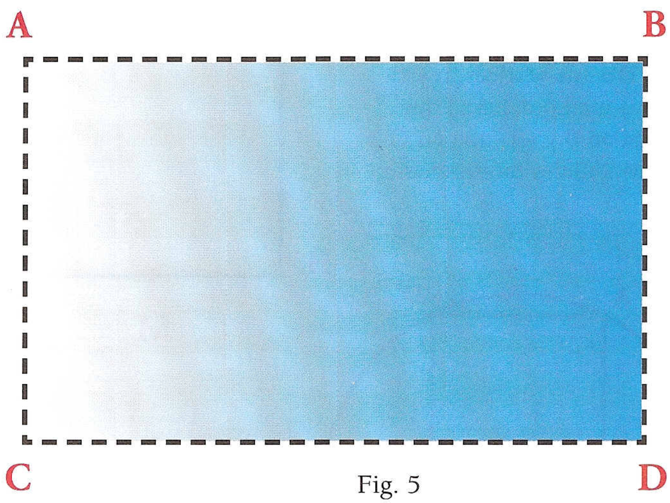


Fig. 5

—Olvídalo, Andrea —dijo $\frac{101}{404}$—. Tu nuevo rectángulo tiene la misma razón $\frac{\text{ancho}}{\text{largo}}$ que el original. Y aunque vuelvas a agregarle otro cuadrado para obtener otro nuevo rectángulo, en él la razón $\frac{\text{ancho}}{\text{largo}}$ volverá a ser casi 62 centésimos.

A todos los rectángulos en los que la razón $\frac{\text{ancho}}{\text{largo}}$ es casi 62 centésimos les pasa algo curioso que no les pasa a los demás rectángulos: al agregarles un cuadrado para agrandar el ancho, siempre se obtiene un rectángulo que es una ampliación casi a escala del original y en el que, nuevamente, la razón $\frac{\text{ancho}}{\text{largo}}$ es casi 62 centésimos del largo.

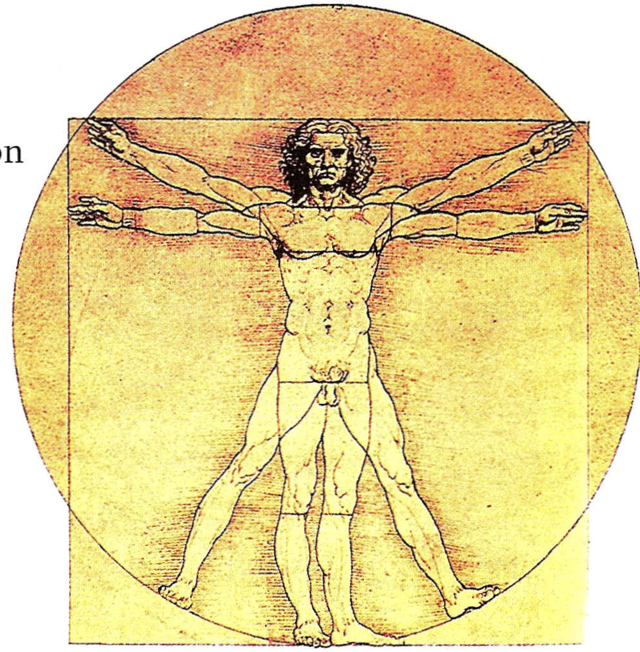
Igualmente, si tienes cualquier rectángulo en el que la razón $\frac{\text{ancho}}{\text{largo}}$ sea casi 62 centésimos, y lo divides en dos partes de modo que una de ellas sea un cuadrado y la otra un rectángulo, este último rectángulo siempre es una reducción casi a escala del original, en el cual, nuevamente, la razón $\frac{\text{ancho}}{\text{largo}}$ es casi 62 centésimos.

Cuando en un rectángulo de éstos la ampliación o la partición mencionada produce que el nuevo rectángulo sea no una ampliación o reducción casi a escala del original, sino exactamente una ampliación o reducción a escala de él, se dice que el rectángulo es de oro o que es dorado. En los rectángulos de oro, la ampliación o la partición mencionadas producen un nuevo rectángulo en el que la razón $\frac{\text{ancho}}{\text{largo}}$ es exactamente la misma que en el original: en ambos casos, dicha razón es un número parecido a 62 centésimos, cuyas primeras cifras decimales son 0.618034.

El rectángulo del frente del Partenón señalado en la página anterior es casi de oro. Y lo mismo sucede, por ejemplo, con el encendedor del dibujo. Cuando está cerrado, el frente es un rectángulo en el que la razón $\frac{\text{ancho}}{\text{largo}}$ es un número parecido a 62 centésimos. Y al abrirlo, el frente queda dividido en dos partes: un cuadrado y un rectángulo (la tapa), y esta última es una reducción a escala del frente completo; es un nuevo rectángulo en el que la razón $\frac{\text{ancho}}{\text{largo}}$ es, una vez más, un número parecido a 62 centésimos.

Fi, el número de oro

En el tema "Ombligos, fracciones y caracoles" trabajamos con segmentos de recta divididos en dos partes, una chica y otra grande, de modo que las razones



$$\frac{\text{longitud de la parte chica}}{\text{longitud de la parte grande}} \quad \text{y} \quad \frac{\text{longitud de la parte grande}}{\text{longitud del segmento completo}}$$

son casi iguales. Cuando estas dos razones no son casi iguales sino exactamente iguales, ambas son un número parecido a 62 centésimos, cuyas primeras cifras decimales son 0.618034. Por otra parte, cuando esto sucede, las razones

$$\frac{\text{longitud de la parte grande}}{\text{longitud de la parte chica}} \quad \text{y}$$

$$\frac{\text{longitud del segmento completo}}{\text{longitud de la parte grande}}$$

también son exactamente iguales entre sí: las dos son el número llamado número de oro, que no puede escribirse con exactitud en forma decimal porque tiene una cantidad infinita y no periódica de cifras decimales. Las primeras son 1.61803, y son las que se obtienen al dividir entre 2 el resultado de la suma de los números 1 y raíz cuadrada de 5.

Este número es también la razón

$$\frac{\text{largo}}{\text{ancho}}$$

de los rectángulos dorados con los que trabajamos en la página anterior; es decir, de los rectángulos en los cuales sucede que al dividirlos en dos partes, una cuadrada y una rectangular, esta última es exactamente una reducción a escala del rectángulo original.

Al número de oro también se le llama *razón de oro* o *razón áurea*. Asimismo, muchos matemáticos lo llaman Fi, en honor a Fidias, el escultor y arquitecto griego diseñador del Partenón.

Si algún día quieres trazar un rectángulo de oro, puedes seguir este procedimiento:

- Traza un cuadrado. Llama A, B, C y D a sus vértices, marca el punto medio del lado que empieza en B y termina en C, y llama M a dicho punto medio.

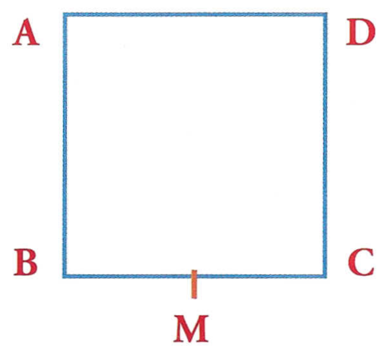


Fig. 1

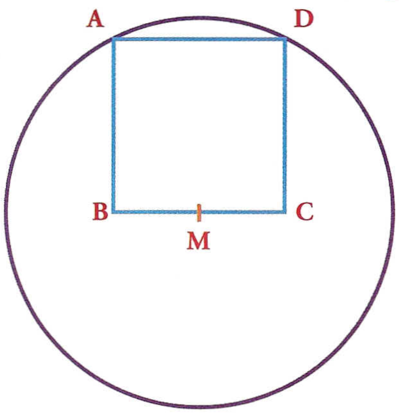
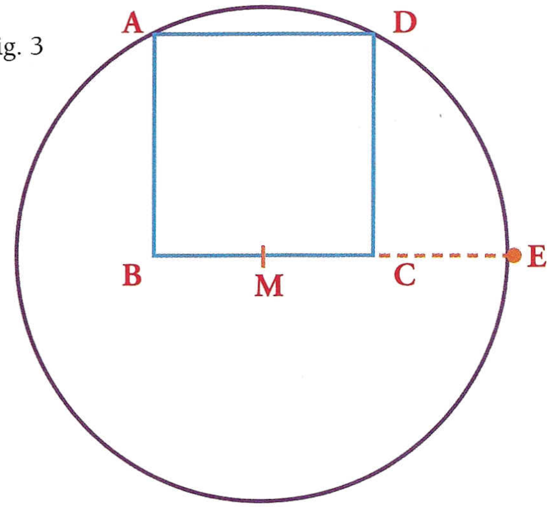


Fig. 2

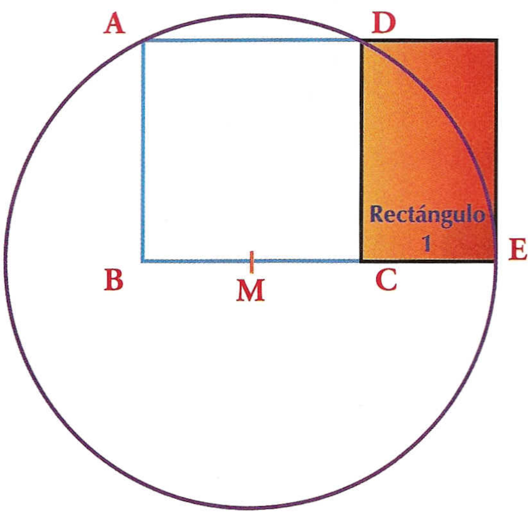
- Apoya tu compás en el punto M y traza una circunferencia que pase por los vértices A y D del cuadrado.

• Prolonga al lado BC de tu cuadrado como se observa en la figura 3 y llama E al punto en donde la prolongación toca la circunferencia que trazaste.

Fig. 3



• Traza un rectángulo en el cual dos de los vértices sean los vértices C y D de tu cuadrado y un tercer vértice sea el punto E que señalaste en el inciso anterior; llama a este rectángulo 1. Dicho rectángulo es de oro. Lo mismo sucede con el rectángulo formado por tu cuadrado y el rectángulo 1: en los dos rectángulos, la razón $\frac{\text{largo}}{\text{ancho}}$ es el número de oro.



El número de oro no sólo está presente en los rectángulos dorados, sino también en muchas otras figuras y trazos. Por ejemplo, si trazas un pentágono regular y te fijas en uno de sus lados y en cualquiera de sus diagonales, por ejemplo, en el lado *l* y la diagonal *d* señaladas en la figura 4, la razón

$$\frac{\text{longitud de d}}{\text{longitud de l}}$$

es el número de oro.

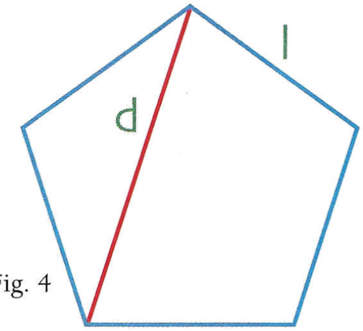


Fig. 4

Algo similar sucede en el boceto hecho por el artista y científico italiano Leonardo da Vinci, con el que se ilustró un libro de Luca Pacioli llamado *La divina proporción*, editado en 1509 y en el que el autor llama "proporción divina" al número de oro. En él aparece un cuadrado cuyo lado mide lo mismo que la estatura del hombre dibujado cuando está de pie con las piernas juntas, y una circunferencia cuyo centro es el ombligo del hombre y que pasa por las plantas de los pies cuando las piernas están abiertas. Si llamas *d* al radio de este círculo y *l* al lado del cuadrado, entonces la razón

$$\frac{\text{longitud de l}}{\text{longitud de d}}$$

es el número de oro. De hecho, en este famoso boceto de Da Vinci hay más parejas de segmentos relacionados de modo que la razón entre ellos es el número de oro. ¿Puedes encontrar alguna más?

UN DIBUJO DESPROPORCIONADO

Para descansar de las fracciones y razones, Andrea hizo el siguiente dibujo en su cuaderno:

—¡Pero qué barbaridad, Andrea! —dijo $\frac{101}{404}$ en cuanto vio el dibujo—. A Cristóbal le pusiste una cabeza desproporcionada.

—¿Desproporcionada quiere decir que está muy grande?

—No exactamente. Porque si te fijas, la cabeza de Jacinto está igual de grande. Si las mides, verás que las dos son del mismo tamaño.

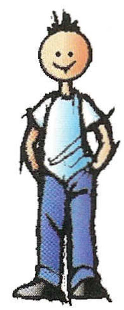
—¿Y entonces por qué Cristóbal se ve más cabezón?

—Porque, como ya te dije, le pusiste una cabeza desproporcionada. Aunque es del mismo tamaño que la de Jacinto, la hiciste muy grande comparada con el cuerpo.

Jacinto

En la tabla de abajo se indica, para cada uno de los muñecos dibujados por Andrea, cuál es la altura del muñeco, cuánto mide el diámetro de la cabeza, y cuál es, en cada caso, la relación entre el diámetro de la cabeza y la altura del muñeco o, dicho de otro modo, la razón

$$\frac{\textit{diámetro de la cabeza}}{\textit{altura del muñeco}}$$



Pedro

Juan

Si escribes cada una de estas razones de modo que todas tengan igual denominador, por ejemplo, si las escribes de modo que el denominador sea 5, verás que en los primeros tres muñecos esta razón es $\frac{1}{5}$. En pocas palabras, en ellos el diámetro de la cabeza es la quinta parte de la altura del muñeco. En cambio, en el caso de Cristóbal, la razón de la que hablamos es $\frac{3}{5}$; es decir, en este último caso el diámetro de la cabeza es tres quintas partes de la altura del muñeco.

	Diámetro de la cabeza expresado en milímetros	*Altura del muñeco expresada en milímetros*	$\frac{\textit{Diámetro de la cabeza}}{\textit{Altura del muñeco}}$
Pedro	5	25	$\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$
Juan	6	30	$\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$
Jacinto	15	75	$\frac{15}{75} = \frac{1}{5}$
Cristóbal	15	25	$\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$

Dicho de otra forma, la razón

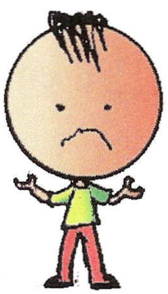
$$\frac{\textit{diámetro de la cabeza}}{\textit{altura del muñeco}}$$

es exactamente la misma en los tres primeros muñecos pero, en el caso de Cristóbal, dicha razón es distinta a las anteriores. Por eso decimos que la cabeza de Cristóbal está desproporcionada.

Cuando dos razones son iguales se dice que están en la misma *proporción* y cuando dos razones son distintas se dice que hay *desproporción*. Los términos proporción y desproporción no sólo se utilizan al hablar de dibujos, sino también en muchas otras situaciones.

Supón, por ejemplo, que una editorial decide donar libros a alumnos que tengan varios dieces y los asigna como se indica en la tabla de abajo.

	Alumno 1	*Alumno 2*	*Alumno 3*	*Alumno 4*	*Alumno 5*
Cantidad de libros	*6*	*3*	*5*	*2*	*6*
Cantidad de dieces	*24*	*12*	*20*	*8*	*8*



Cristóbal

Al verla, uno de los alumnos dice que el reparto no es justo porque en su caso no fue igualmente proporcional. ¿Puedes detectar, a simple vista, cuál fue el alumno que recibió una cantidad desproporcionada (con respecto a las otras) de libros?

Si no lo logras, escribe cuál es, en cada caso, la relación entre la cantidad de libros y la de dieces, esto es, la razón

$$\frac{\text{cantidad de libros}}{\text{cantidad de dieces}}$$

Después, escribe estas razones de modo que todas tengan igual denominador. Por ejemplo, que en todas ellas el denominador sea 4. Verás que en los cuatro primeros casos, la razón mencionada es $\frac{1}{4}$ y esto significa que, en los primeros cuatro casos, a cada alumno le tocó 1 libro por cada 4 dieces. En cambio, en el último caso, esta razón es $\frac{3}{4}$, por lo que al último alumno le tocaron 3 libros por cada 4 dieces. Como esta última razón no coincide con las anteriores, decimos que a este alumno se le dio una cantidad de libros desproporcionada, o que el reparto no se hizo en forma proporcional.

SONIDOS PROPORCIONALES

En la figura 1 hay tres segmentos de recta azules. El A mide 3 cm, el B 4.5 cm y el C es de 6 cm. Y en la figura 2 hay tres segmentos rojos: el A, que mide 5 cm, el B que es de 7.5 cm y el C, de 10 cm.

A 3 cm

B 4.5 cm

C 6 cm

Fig. 1

A 5 cm

B 7.5 cm

C 10 cm

Fig. 2

Entonces, la razón

$$\frac{\textit{longitud del segmento A azul}}{\textit{longitud del segmento A rojo}} \quad \textit{es} \quad \frac{3}{5}$$

la razón

$$\frac{\textit{longitud del segmento B azul}}{\textit{longitud del segmento B rojo}} \quad \textit{es} \quad \frac{4.5}{7.5}$$

y la razón

$$\frac{\textit{longitud del segmento C azul}}{\textit{longitud del segmento C rojo}} \quad \textit{es} \quad \frac{6}{10}$$

Si usas uno de los métodos descritos en el tema "Con el denominador que quieras" para escribirlas de modo que todas tengan el mismo denominador, por ejemplo, de modo que todas tengan denominador 10, verás que las tres son el número $\frac{6}{10}$ o, escrito de otra forma, 0.6.

Como estas tres razones son iguales, decimos que los segmentos rojos son proporcionales a los azules.

A 2 cm

B 5 cm

C 6 cm

Ahora, observa los segmentos verdes. Al compararlos con los azules, obtenemos que la razón

$$\frac{\text{longitud del segmento A azul}}{\text{longitud del segmento A verde}} \quad \text{es} \quad \frac{3}{2}$$

Y tambien que la razón

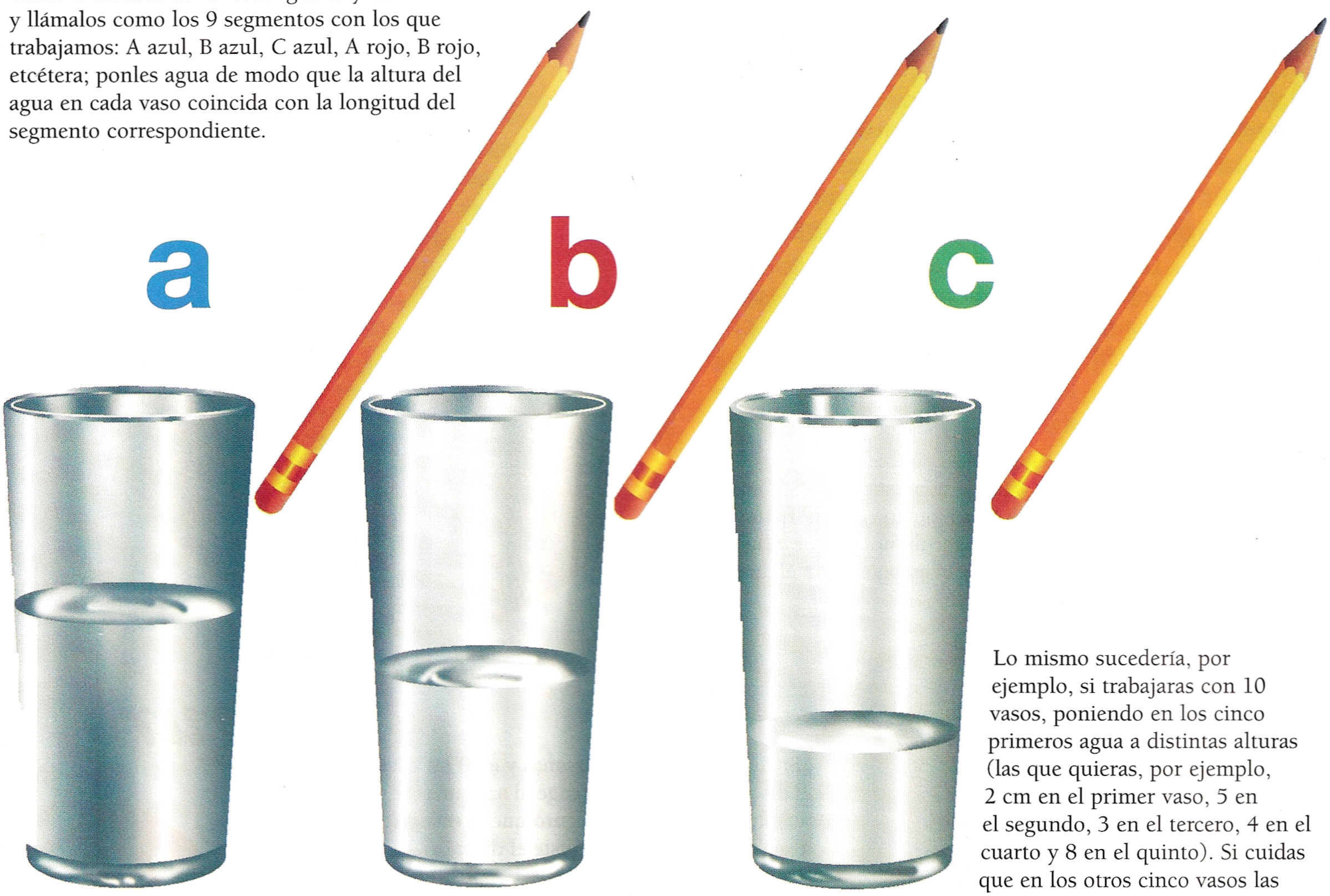
$$\frac{\text{longitud del segmento B azul}}{\text{longitud del segmento B verde}} \quad \text{es} \quad \frac{4.5}{5}$$

y que la razón

$$\frac{\text{longitud del segmento C azul}}{\text{longitud del segmento C verde}} \quad \text{es} \quad \frac{6}{6}$$

En este caso las tres razones $\frac{3}{2}$, $\frac{4.5}{5}$ y $\frac{6}{6}$ no son el mismo número y por ello decimos que los segmentos verdes no son proporcionales a los azules.

Si quieres oír sonidos proporcionales y no proporcionales, te sugerimos el siguiente experimento: consigue 9 vasos de vidrio o envases de refresco iguales y del mismo tamaño y llámalos como los 9 segmentos con los que trabajamos: A azul, B azul, C azul, A rojo, B rojo, etcétera; ponles agua de modo que la altura del agua en cada vaso coincida con la longitud del segmento correspondiente.



Lo mismo sucedería, por ejemplo, si trabajaras con 10 vasos, poniendo en los cinco primeros agua a distintas alturas (las que quieras, por ejemplo, 2 cm en el primer vaso, 5 en el segundo, 3 en el tercero, 4 en el cuarto y 8 en el quinto). Si cuidas que en los otros cinco vasos las cinco alturas del agua sean proporcionales a las cinco primeras (por ejemplo, 4 cm en el primero, 10 en el segundo, 6 en el tercero, 8 en el cuarto y 16 en el quinto), la melodía obtenida al golpear uno por uno los primeros cinco vasos será la misma que al golpear uno por uno los otros. En cambio, si en los otros cinco vasos las cinco alturas del agua no son proporcionales a las cinco primeras, oirás una melodía distinta.

Con un lápiz, golpea una vez cada vaso de los llamados azules, primero el A, luego el B y por último el C. Repite esto varias veces hasta memorizar la melodía producida por estos tres golpes. Después, repite los tres golpes pero ahora en los vasos A, B y C de los llamados rojos, en los cuales la altura del agua es proporcional a la altura del agua en los primeros vasos. Escucharás la misma melodía. Finalmente, repite los tres mismos golpes en los vasos A, B y C verdes, en los cuales la altura del agua no es proporcional a la altura del agua en los primeros vasos, y escucharás una melodía distinta a la de los dos casos anteriores.

SEGURO VS. PROBABLE

En el tema "Mucho o poco" se habló de un lugar en donde sólo hay 55 jóvenes y a 50 les gusta el mismo disco que a Andrea. Ella fue ahí a visitar a una prima suya y le pidió que invitara a un amigo a oír el disco.

—¿Y a quién invito? —preguntó la prima.
—A quien sea. Lo que importa es que le guste el disco.
—Pero no sé —dijo la prima— a quién le gusta y a quién no.
—Entonces invita a quien sea, y esperemos que le guste.
—De todos modos, no sé a quién invitar.

—A ver: ¿a quiénes conoces?
—A todos. Y tengo una lista con sus nombres.
—Pues si no sabes a quién convendría invitar, vamos a escoger al azar un nombre de la lista. Seguro le atinamos y el escogido será alguien a quien le guste el disco.

seguro

v

Si en la lista hay 55 personas y a 50 les gusta el disco y a 5 no, y se escoge al azar una persona de la lista, ¿es seguro que el escogido va a ser alguien a quien le guste el disco?

Supón que en otra lista hay 55 personas y a las 55 les gusta el disco. En este caso, si se escoge una persona de esa lista, con toda seguridad será alguien a quien le gusta el disco; es imposible que el escogido sea una persona a quien no le guste.

Sin embargo, en la lista de Andrea y su prima la situación es diferente. Porque en ella sí hay personas a quienes no les gusta el disco. Y entonces, al escoger una al azar puede pasar que el escogido sea alguna de las personas a quienes sí les gusta, pero también puede suceder lo contrario. En situaciones como ésta, en las que algo puede pasar pero también puede no pasar, no podemos afirmar que seguro pasará: decimos que es probable que pase.

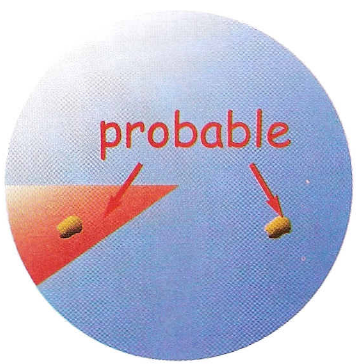
Lo mismo sucede si lo que se desea es escoger una persona a quien no le guste el disco. Al escoger al azar, podría pasar que al escogido no le guste el disco, pero no es seguro que esto pase. Por lo tanto, también decimos que es probable que el escogido sea una de las personas a quienes no le gusta el disco.

¿Qué es más probable: que el escogido sea una de las 50 personas a quienes sí les gusta el disco o que sea alguna de las 5 personas a quienes no les gusta?

Ahora imagina una situación distinta: supón que avientas una migaja adentro de una cubeta que tiene el fondo rojo. Si todo el fondo es rojo, es seguro que la parte del fondo en la que caerá la migaja será roja. Es imposible que caiga, por ejemplo, en una parte azul, porque no existe tal parte.

Pero si pintas de azul una parte del fondo, entonces la migaja puede caer en la parte roja o en la azul. Puesto que puede o no caer en la parte roja, decimos que es probable que caiga en la parte roja. Lo mismo sucede con la parte azul.

Si la parte azul es más grande que la roja, ¿qué es más probable: que caiga en la parte azul o en la roja?



En el tema "¿Mucho o poco?" también se dijo que en el lugar donde Andrea estaba de visita había 404 adultos, de los cuales a 101 les gustaba ese disco. Si se hace una lista con los nombres de estos 404 adultos y se escoge uno al azar, es probable que el escogido sea uno de los adultos a quienes les gusta el disco, pero también es probable que sea uno de aquellos a quienes no les gusta ¿Cuál de las dos cosas es más probable?

S

probable

MÁS PROBABLE

Como se mencionó en el tema anterior, si pintas el fondo de la cubeta de modo que una parte sea roja y la otra azul y arrojas una migaja en él, la migaja puede o no caer en la parte roja, y por eso no decimos que es seguro que caiga en la parte roja, sino que es probable que caiga en ella.

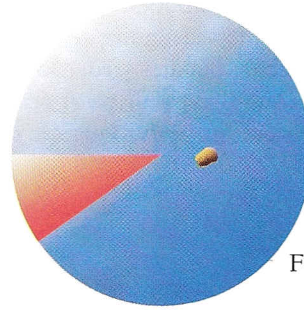


Fig. 1

es más probable que caiga en la parte azul

Si el fondo es como la figura 1, con la parte azul más grande que la roja, es más fácil que la migaja caiga en la parte azul porque ésta es más grande, y entonces decimos que es más probable que caiga en la parte azul. Sin embargo, si el fondo es, por ejemplo, como la figura 2, en la que la parte roja es más grande que la azul, es más probable que caiga en la parte roja.

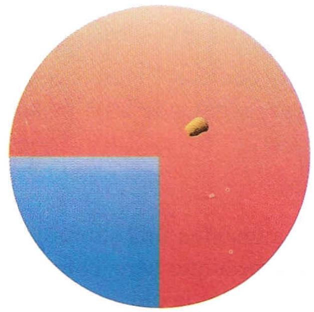


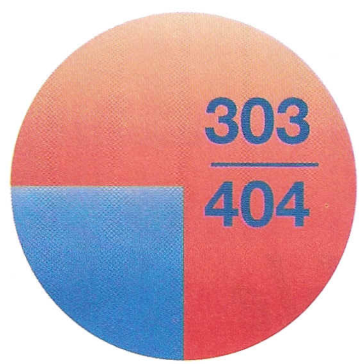
Fig. 2

es más probable que caiga en la parte roja

Lo mismo sucede, por ejemplo, cuando en la lista de Andrea y su prima se escoge al azar a una persona. Si en la lista hay 55 personas de las cuales a 50 les gusta el disco y a 5 no, es decir, si a $\frac{50}{55}$ sí les gusta y a $\frac{5}{55}$ no les gusta, es más probable que el escogido al azar sea alguna de las personas a las que sí les gusta, ya que la parte de las personas de la lista a las que sí les gusta el disco es más grande que la parte a la que no le gusta.

$\frac{50}{55}$ *sí les gusta el disco*

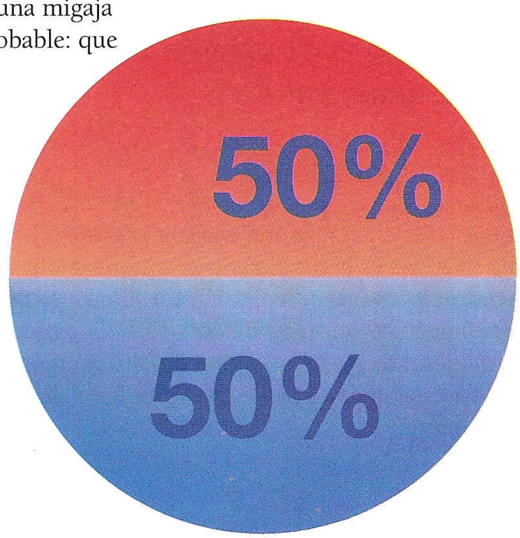
$\frac{5}{55}$ *no les gusta el disco*



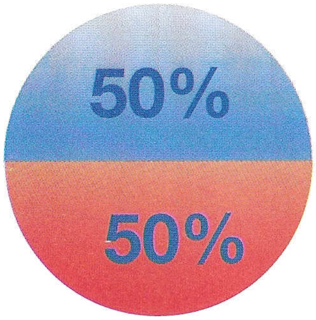
no les gusta el disco

En cambio, en la lista en la que hay 404 personas de las cuales a 101 les gusta el disco y a 303 no; esto es, a $\frac{101}{404}$ les gusta y a $\frac{303}{404}$ no, es más probable que al escoger una al azar ésta sea alguna de las personas a las que no les gusta el disco, porque la parte de las personas de esta lista a quienes no les gusta es más grande que la otra.

Ahora supón que el fondo de una cubeta se pinta de modo que una parte sea azul y la otra roja, y que la parte roja y la azul son exactamente del mismo tamaño. Al arrojar una migaja al fondo de la cubeta, ¿qué es más probable: que caiga en la parte roja o en la azul?



sí les gusta el disco



no les gusta el disco

Y si en una lista de personas la parte a la que le gusta un disco es igual a la parte a la que no le gusta y se escoge al azar una persona de esa lista,

¿qué es más probable: que el escogido sea alguna de las personas a quienes sí les gusta o alguna de las personas a quienes no?

Si a $\frac{1}{2}$ de la lista sí le gusta y a $\frac{1}{2}$ no, es igual de probable que el escogido sea alguien a quien sí le gusta que alguien a quien no.

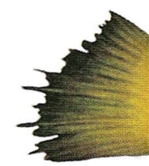
Finalmente, te pedimos que intentes contestar esta pregunta: si compras 30 boletos para la rifa de una televisión, ¿qué es más probable: que ganes la televisión o que no la ganes?

Otra vez fracciones

En muchas páginas de este libro hemos trabajado con situaciones en las cuales lo importante no es el tamaño de una cantidad, sino la relación que dicha cantidad tiene con otra.

Por ejemplo, en el tema "¿Mayor o menor?" se habló de un estanque en el que hay 120 peces contaminados. Si no relacionas esta cantidad con la de peces que hay en el estanque, diciendo que están contaminados 120 peces de un total de 200 o que la parte contaminada es $\frac{120}{200}$ del total de peces o, escrita de otro modo, $\frac{12}{20}$, $\frac{6}{10}$ o $\frac{3}{5}$, no podría saberse qué tan grave es el problema de la contaminación en el estanque.

$$\frac{120}{200} = \frac{3}{5}$$



Algo parecido sucede con la rifa de la televisión mencionada en la página anterior: si sólo se sabe que compraste 30 boletos, y esta cantidad no se relaciona con la cantidad total de boletos que hay para esa rifa, no es posible estimar qué tan probable es que la ganes.

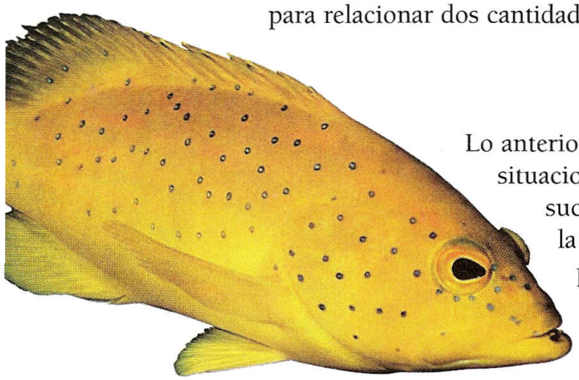
Porque si se trata, digamos, de una rifa en la que sólo hay 30 boletos y tú los tienes todos, entonces seguro serás el ganador. Pero si se trata de una rifa para la que hay, por ejemplo, 31 boletos, entonces es muy probable que la ganes porque sería muy mala suerte que el boleto ganador fuera precisamente el único que no es tuyo, pero no es seguro que la ganes porque sí podría ocurrir que el boleto ganador fuera el que no es tuyo.

En cambio, si se trata de una rifa en la que hay 1 000 boletos y tú tienes sólo 30, no es tan fácil que la ganes porque sólo tienes $\frac{30}{1\,000}$ del total de los boletos. En pocas palabras, si no sabes qué parte del total de boletos de la rifa tienes, no es posible estimar qué tan probable es que la ganes.

tuyos: 30 de un total de 30 igual a $\frac{30}{30}$

—Entonces —dijo Andrea—, ¿para saber qué tan probable es ganar la rifa, puedo usar fracciones?

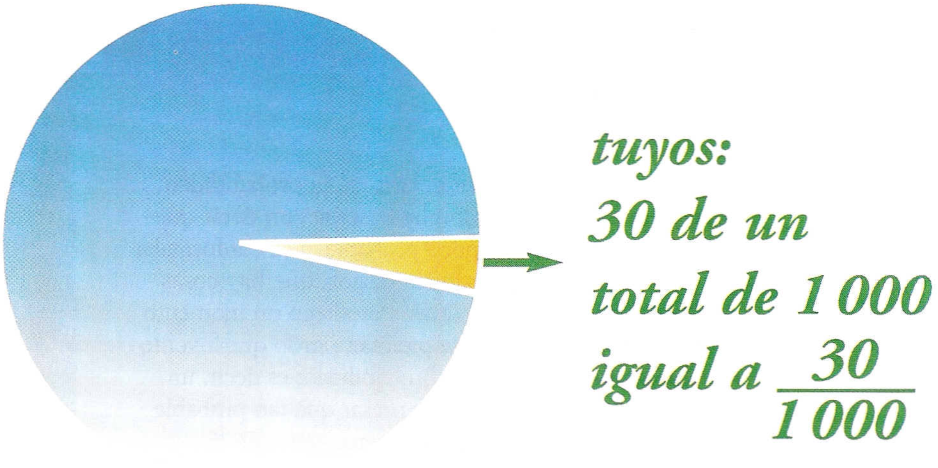
—Pues sí —contestó $\frac{101}{404}$—. Porque no es lo mismo tener $\frac{30}{30}$ del total de los boletos, que tener $\frac{30}{31}$ o $\frac{30}{1\,000}$. Cuanto más grande sea la parte de boletos que tú tienes, es más fácil ganar la rifa. Lo importante no es cuántos boletos compres, sino la relación que existe entre la cantidad de boletos que tú compres y la cantidad total de boletos en la rifa. Y como ya sabes, las fracciones son, entre otras cosas, números que sirven para relacionar dos cantidades.



Lo anterior no solamente se aplica en el caso de las rifas, sino en muchas otras situaciones. Si retomamos, por ejemplo, el caso de los 120 peces contaminados, sucede que si éstos están en un estanque en el cual en total hay 200 peces, la parte contaminada es $\frac{120}{200}$ o escrita de otra forma, $\frac{12}{20}$, $\frac{6}{10}$ o $\frac{3}{5}$; esto es, 3 peces de cada 5 están contaminados y entonces, al escoger al azar un pez del estanque, no es difícil que sea uno contaminado.

En cambio, si en el estanque hubiera en total 2 000 peces de los cuales 120 estuvieran contaminados, la parte contaminada sería $\frac{120}{2\,000}$ o, escrito de otra forma, $\frac{12}{200}$, $\frac{6}{100}$ o $\frac{3}{50}$. En pocas palabras, sólo 3 peces de cada 50 estarían contaminados; por lo tanto, al escoger un pez al azar, sería menos probable que fuera uno contaminado.

$$\frac{120}{2\,000} = \frac{3}{50}$$



¿QUÉ TAN PROBABLE?

El hombre inventó los números para poder contar. Por ejemplo, para poder decir cuántas personas había en algún lugar o cuántos sacos de papa había cosechado. De hecho, a mucha gente le gusta poder cuantificar, esto es, poder decir cuánto hay, cuánto tiempo ha pasado, cuánto ha llovido o cuánto mide algo.

Al principio, el hombre tal vez se contentaba con decir cosas como que hay mucha o poca gente, que llovió escasa o abundantemente o que ha pasado mucho tiempo o poco. Lo mismo ocurrió, por ejemplo, en el caso de las medidas: tal vez al principio al hombre le bastaba con decir únicamente que alguien era muy alto o muy bajo, o que un terreno era grande o chico.

Pero después sintió la necesidad de ser un poco más preciso. Entonces ya no se conformó con medidas como grande, chico, poco o mucho, y por eso inventó mecanismos para poder decir exactamente cuánto.

Y algo parecido sucedió en el caso de la probabilidad. Quizá al principio al hombre le bastaba con decir que algo era muy probable o poco probable, y se conformaba con poder distinguir, a grandes rasgos, que hay cosas mucho más probables que otras. Pero llegó un momento en que sintió la necesidad de precisar, por lo que inventó una manera de cuantificar la probabilidad; es decir, un mecanismo que le permitiera expresar qué tan probable es que algo pase mediante un número.

Como se mencionó en el tema anterior, para saber qué tan probable es que algo pase, una posibilidad es usar fracciones. Porque para saber, por ejemplo, si al comprar boletos para una rifa, ganarla es muy probable o poco probable, lo importante no es cuántos boletos compraste, sino la relación con el total de boletos.

Este tipo de consideraciones fueron, quizá, las que propiciaron que al hombre se le ocurriera cómo cuantificar la probabilidad: cuando decidió cuantificarla se acordó de que, en casos como los mencionados, la probabilidad de que algo sucediera iba a ser una fracción.

Por ejemplo, se decidió que si compras 30 boletos para una rifa en la que hay 1 000 boletos, es decir, si compras $\frac{30}{1\,000}$ (30 milésimos) del total de los boletos, entonces la probabilidad de que la ganes es 30 milésimos.

Igualmente, si pintas el fondo de una cubeta de modo que $\frac{1}{4}$ sea azul y el resto sea rojo, y arrojas una migaja dentro de la cubeta sin voltear a ver el fondo, la probabilidad de que caiga en la parte azul es $\frac{1}{4}$, y $\frac{3}{4}$ en la parte roja.

Y si en una lista hay 404 personas de las cuales a 101 les gusta un disco, esto es, si a $\frac{101}{404}$ del total de personas de la lista les gusta el disco, entonces $\frac{101}{404}$ es la probabilidad de que al escoger al azar una persona de la lista, la escogida sea una de las 101 personas a las que les gusta el disco.

—¡Caray! —exclamó Andrea— Ahora resulta que $\frac{101}{404}$ es una probabilidad.

—Pues sí —contestó $\frac{101}{404}$ —. Así como lo oyes: también soy, entre otras cosas, una probabilidad.

PROBABILIDAD TEÓRICA VS. EXPERIMENTAL

—Mira nada más —le dijo Andrea a $\frac{101}{404}$—. Quién iba a decir que ustedes no sólo son fracciones, razones y divisiones sino también probabilidades.

—Sí, Andrea. Pero no todas las fracciones son una probabilidad. Para ser una probabilidad, una fracción no puede ser un número mayor que uno ni menor que cero. La probabilidad de que algo pase siempre es cero, uno o un número entre cero y uno.

Por ejemplo, si en una rifa hay 100 boletos y ninguno es tuyo, esto es, si tienes cero boletos de un total de 100, entonces la probabilidad de que ganes la rifa es $\frac{0}{100}$, es decir: 0. Y si todos los boletos son tuyos, esto es, si tienes 100 boletos de un total de 100, la probabilidad de que ganes la rifa es $\frac{100}{100}$, es decir: 1. En cambio, si tienes, por ejemplo, 23 boletos, la probabilidad de que ganes la rifa es $\frac{23}{100}$, y esta última fracción es un número mayor que 0 y menor que 1.

Dicho de otro modo, cuando es imposible que algo pase, decimos que la probabilidad de que eso pase es cero; cuando es seguro que va a ocurrir, decimos que la probabilidad de que eso pase es 1, y cuando algo puede o no pasar, la probabilidad de que eso suceda siempre es un número entre 0 y 1.

En muchos casos, hay dos maneras distintas de calcular la probabilidad de que algo pase. A una de ellas se le llama teórica o clásica, y a la otra experimental o empírica.

Por ejemplo, para saber cuál es la probabilidad de que al escoger al azar una carta de una baraja de póquer, la carta escogida sea un rey, podrías tomar en cuenta que las barajas de póquer son de 52 cartas, de las cuáles sólo 4 son reyes. Es decir, $\frac{4}{52}$ del total de las cartas son reyes y entonces, la probabilidad mencionada es $\frac{4}{52}$ o, escrita de otra forma, $\frac{1}{13}$.

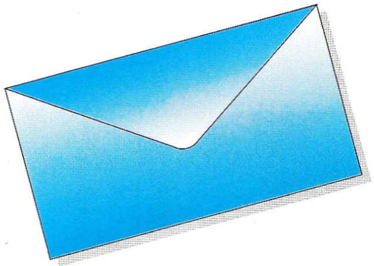
$$\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

La probabilidad calculada de esta forma es la llamada teórica y, en este caso, lo que se está haciendo es tomar en cuenta que si hay 52 cartas, al escoger una hay 52 posibles resultados: as de espadas, as de corazón, as de diamante, as de trébol, 2 de espadas, 2 de corazón, 2 de diamante, 2 de trébol, 3 de espadas, 3 de corazón y así sucesivamente hasta llegar a las cuatro últimas posibilidades: rey de espadas, rey de corazón, rey de diamante y rey de trébol. Y de los 52 posibles resultados, sólo 4 son el resultado deseado: rey. En pocas palabras, sólo en 4 casos de los 52 posibles se obtiene un resultado favorable. Entonces la probabilidad de que la carta escogida al azar sea un rey es la fracción:

$$\frac{4}{52} = \frac{\text{cantidad de casos favorables}}{\text{cantidad de posibles resultados}}$$

Una manera distinta de calcular la probabilidad de que la carta escogida sea rey sería hacer muchas veces el experimento de sacar una carta al azar de la baraja completa y fijarnos en qué parte de los experimentos sucedió que la carta escogida fue rey. Por ejemplo, si haces 100 veces el experimento y en 8 sale rey, es decir, si sale rey en $\frac{8}{100}$ del total de experimentos, entonces decimos que la probabilidad de que la carta escogida sea rey es $\frac{8}{100}$. Pero en este caso, a la probabilidad obtenida se le llama experimental.

Cuando el experimento se hace pocas veces, la probabilidad experimental obtenida es un número que por lo general no se parece a la probabilidad teórica. Pero si se hace muchas veces, la probabilidad experimental es un número cercano a la probabilidad teórica, y más cercano a ella a medida que se aumenta la cantidad de experimentos realizados para obtener la probabilidad experimental.



Un dato, una carta y una duda

Andrea sí existe y su nombre completo es Andrea Bravo León y Vélez. Sin embargo, muchos de los comentarios y preguntas que Andrea hace en este libro no fueron hechos por ella; están tomados de entrevistas que se hicieron durante el ciclo escolar 2000–2001 a estudiantes mexicanos que cursaban primero de secundaria.

Dichas entrevistas forman parte de una investigación educativa basada en la experimentación en un aula en la que se trabajó con un grupo de 26 maestros de secundaria que asistían a un curso de didáctica de las matemáticas llamado *Números para relacionar*. En dicho curso, los profesores permitieron que quienes impartían el curso observaran periódicamente su desempeño en el trabajo frente a sus respectivos alumnos.

Los alumnos de estos 26 maestros trabajaron durante 16 semanas con secuencias de actividades diseñadas para propiciar la comprensión y el buen manejo de los distintos usos y significados de las fracciones, y una de las últimas secuencias incluía una actividad llamada *Comunica*, en la cual se solicitaba que cada alumno escribiera una carta a una amiga o amigo imaginario, hablándole de las fracciones. Una de estas cartas decía, entre otras cosas, lo siguiente:

Andrea

Querida Gabriela:

Te escribo a ti, que no eres una amiga imaginaria sino mi hermana menor, para que no vaya a pasarte lo que a mí, que quería dejar la escuela porque siempre reprobaba los exámenes de matemáticas y que salí de la primaria sin saber sumar fracciones.

Yo siempre sumaba los números de arriba y después los de abajo y por eso siempre mis tareas estaban mal, pero ahora ya entendí que la suma no se puede hacer así.

Además aprendí para qué sirven las fracciones y también a escribir las fracciones con el denominador que a mí me guste. Y como saqué diez en el examen de escribir una fracción con diferentes denominadores, ya todo lo demás se me hizo fácil. Hasta los problemas de porcentajes que era lo que el año pasado más trabajo me costaba, porque cuando quieres escribir un porcentaje, lo único que hay que hacer es escribir a la fracción, pero con denominador 100.

Lo que más me gustó es que las fracciones sean razones, pero no creas que razones se refiere a tener razón cuando uno piensa o dice una cosa, porque en matemáticas razón quiere decir relación.

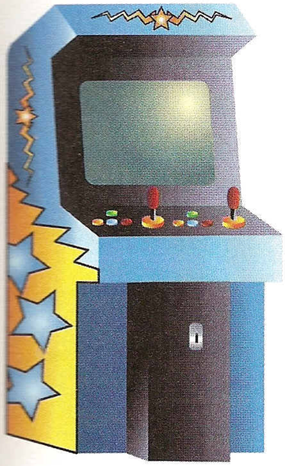
Y ahora te doy una mala noticia: los números que nos enseñaron en primaria, que son 1, 2, 3, 4 y así hasta mil, diez mil, cien mil o más, casi no sirven, porque lo importante no es el número, sino la relación que tiene con otro. Eso a lo mejor no puedes entenderlo hasta que te haga un rectángulo de oro o casi de oro y entonces veas que la forma de las cosas tiene que ver con la relación que hay entre el largo y el ancho. Esto es muy bonito porque yo no sabía que las fracciones sirven hasta para hacer dibujos. También sirven para saber si al tirar dos dados es más fácil que la suma de los dos sea 7 o que sea 3.

Las fracciones no son fáciles y al principio uno se hace bolas porque cada fracción puede escribirse de muchísimas maneras diferentes y son tantas que la lista de todas no tiene fin. Además, cada fracción dice varias cosas diferentes. Pero un día vas a aprender a oír todo lo que dicen las fracciones. Una vez que aprendas, te va a pasar que cada vez que veas una fracción vas a querer leerla de maneras diferentes. Es muy divertido ver cómo cada una de las cosas que te dice es cierta.

A mí las actividades con fracciones me están gustando mucho y ya casi no tengo ninguna duda. Bueno, más bien sí tengo una, pero esa no puedo preguntarla en clase: si las fracciones son tan útiles y dicen tantas cosas, ¿por qué a veces nos hacen creer que sólo sirven para resolver problemas muy absurdos en los que alguien dizque come

$\frac{101}{404}$ **de pastel?**

Índice analítico



9 789701 898154

HACIA UN PAÍS DE LECTORES

Andrea y las fracciones es una aproximación clara y divertida al mundo de las fracciones: qué son, para qué sirven, cómo se utilizan en la vida cotidiana, las formas para sumarlas y restarlas y, lo más importante, cómo entenderlas sin temor gracias a la intervención de Andrea, quien sueña con fracciones, razones y porcentajes.

Luz María Marván se dedica a la docencia en preparatoria y licenciatura desde 1974, es licenciada en Matemáticas por la UNAM y tiene la maestría en Matemática Educativa por el IPN. Es autora de numerosos libros de texto y artículos de divulgación e investigación en su área.

programa nacional de lectura

Santillana

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA | SEP

COMISIÓN NACIONAL DE LIBROS DE TEXTO GRATUITOS